# การวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นรูปเหลี่ยมไร้คานโดยวิธีบาวดารีอินทิกรัล

นาย ยุทธนา เหล่าแก้ว

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
ภาควิชาวิศวกรรมโยธา
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. 2531

ISBN 974-569-188-7

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

014164
i17429890

# STRUCTURAL ANALYSIS OF RECTILINEAR FLAT PLATES OF ARBITRARY PLAN FORMS BY BOUNDARY INTEGRAL METHOD

Mr. Yuthana Laokeaw

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering

Department of Civil Engineering

Graduate School

Chulalongkorn University

1988

ISBN 974-569-188-7

| | |
|---|---|
| Thesis Title | Structural Analysis of Rectilinear Flat Plates of Arbitrary Plan Forms by Boundary Integral Method |
| By | Mr. Yuthana Laokeaw |
| Department | Civil Engineering |
| Thesis Advisor | Associate Professor Sutham Suriyamongkol, D.Eng. |

---

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

Thavorn Vajrabhaya

..... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya, Ph.D.)

Thesis Committee

..... Chairman

(Professor Ekasit Limsuwan, Ph.D.)

..... Thesis Advisor

(Associate Professor Sutham Suriyamongkol, D.Eng.)

..... Member

(Professor Thaksin Thepchatri, Ph.D.)

..... Member

(Associate Professor Karoon Chandrangsu, Ph.D.)

ACKNOWLEDGEMENTS

The author wishes to express his deep appreciation to his advisor, Associate Professor Dr.Sutham Suriyamongkol, for his helpful supervision and invaluable assistance throughout this study. Sincere thanks are also due to his Thesis Committee, Professor Dr.Ekasit Limsuwan, Professor Dr.Thaksin Thepchatri and Associate Professor Dr. Karoon Chandrangsu.

Finally, the author is grateful to his parents for their encouragement and support during his study.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

YUTHANA LAOKEAW : STRUCTURAL ANALYSIS OF RECTILINEAR FLAT PLATES OF ARBITRARY PLAN FORMS BY BOUNDARY INTEGRAL METHOD. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF.SUTHAM SURIYAMONGKOL,D.Eng. 120 PP.

The boundary integral method for the solution of rectilinear thin isotropic elastic plates of arbitrary plan forms subjected to transverse forces is presented. The direct formulation which makes use of Betti's reciprocal theorem based on energy consideration is employed to solve the problems with interior supports in the plate domain. Included herein are the axial and rotational stiffness of interior supports. The proposed formulation leads to a system of boundary integral equations involving displacement, normal slope, normal bending moment and supplemented shear on the boundary. The handling of interior supports is that the usual boundary equations have to be supplemented by three additional conditions for each supports. Thereafter, a numerical scheme of computation is used to solve the resulting integral equations approximately by simple discretization of the boundary functions. Treatment of singularities is also discussed in detail. Some numerical results are given in illustrative curves. They are found to be in fairly good agreement with those of other current investigators and with the finite element solution. A computer program is developed for the method proposed to give results with practical accuracy in this study.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา

ปีการศึกษา 2530 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บุทธนา เหล่าแก้ว : การวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นรูปเหลี่ยมไร้คานโดยวิธีบาวดารีอินทิ-กรัล (STRUCTURAL ANALYSIS OF RECTILINEAR FLAT PLATES OF ARBITRARY PLAN FORMS BY BOUNDARY INTEGRAL METHOD) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.สุธรรม สุริยะมงคล, 120 หน้า.

งานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีบาวดารีอินทิกรัลสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นรูปเหลี่ยมไร้คาน ภายใต้แรงกระทำในแบบใดๆ โดยมีที่รองรับเป็นจุดภายในแผ่นพื้น จุดรองรับภายในนี้สามารถกำหนดให้มีได้ทั้งสติฟเนสแนวแกนและสติฟเนสการดัด การวิเคราะห์หาคำตอบได้ใช้วิธีโดยตรงในการสร้างสมการอินทิ-กรัลซึ่งใช้ทฤษฎีของเบตตี โดยอาจจะหาคำตอบอย่างประมาณได้ด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษานี้ได้แสดงไว้ในรูปของกราฟซึ่งพบว่าค่าที่ได้เหล่านี้สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลของผู้วิจัยอื่นๆ และสอดคล้องกับผลที่ได้จากวิธีการไฟไนท์เอเลเมนต์ เพื่อประโยชน์ในการใช้งาน ได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้วิธีการนี้และจะให้คำตอบซึ่งมีความละเอียดเพียงพอในทางปฏิบัติได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา

ปีการศึกษา 2530 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....

TABLE OF CONTENTS


| Figure | Title | Page |
|---|---|---|
| Title Page in Thai | | i |
| Title Page in English | | ii |
| Thesis Approval | | iii |
| Abstract in English | | iv |
| Abstract in Thai | | v |
| Acknowledgements | | vi |
| Table of Contents | | vii |
| List of Figures | | ix |
| List of Symbols | | xi |
| CHAPTER | | |
| I | INTRODUCTION | 1 |
| | Background | 1 |
| | Scope of Study | 3 |
| II | FUNDAMENTAL CONSIDERATION | 4 |
| | Theory of Thin, Isotropic Elastic Plates | 4 |
| | Betti's Reciprocal Theorem | 7 |
| | Method of Analysis | 8 |
| III | NUMERICAL SCHEME | 17 |
| | Boundary Discretization | 17 |
| | Evaluation of the Domain Integrals | 22 |
| | Treatment of Singularities | 23 |
| | Domain Solution | 28 |
| IV | NUMERICAL RESULTS AND CONCLUSIONS | 30 |
| REFERENCES | | 34 |
| APPENDIX | | 58 |

| Figure | Title | Page |
|---|---|---|
| APPENDIX A | Transformation of Co-ordinates ..... | 59 |
| APPENDIX B | Influence Functions ..... | 61 |
| APPENDIX C | List of the Computer Program ..... | 69 |
| APPENDIX D | Use of the Computer Program ..... | 111 |
| VITA ..... | | 120 |


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# LIST OF FIGURES


| Figure | Title | Page |
|---|---|---|
| 1 | Element of plate | 36 |
| 2 | Sign convention of stress resultants | 36 |
| 3 | Normal co-ordinates | 37 |
| 4 | Representation of corner force | 37 |
| 5 | Force and displacement systems in Betti's theorem | 38 |
| 6 | Subdivision of the boundary | 39 |
| 7 | Force system of the free-body circular sector element | 40 |
| 8 | Square plate with four rigid supports, Example 1 | 41 |
| 9 | Deflection along the horizontal line of symmetry and the diagonal | 42 |
| 10 | Normal bending moment and twisting moment along the horizontal line (y = 0.25) | 43 |
| 11 | Normal bending moment along the diagonal | 44 |
| 12 | Flat plate, Example 2 | 45 |
| 13 | Deflection along the horizontal line of symmetry and the diagonal | 46 |
| 14 | Normal bending moment and twisting moment along the horizontal line (y = 0.5) | 47 |
| 15 | Normal bending moment and twisting moment along the horizontal line (y = 4.5) | 48 |
| 16 | Normal bending moment along the diagonal | 49 |
| 17 | Rectilinear Plate, Example 3 | 50 |
| 18 | Deflection along the vertical line x = 2.0 and x = 5.0 | 51 |
| 19 | Normal bending moment along the vertical line x = 2.5 and x = 4.5 | 52 |

| Figure | Title | Page |
|---|---|---|
| 20 | Square plate with four rigid supports, Example 4 | 53 |
| 21 | Deflection along the horizontal line and the diagonal | 54 |
| 22 | Normal bending moment along the horizontal line (y = 3.75) | 55 |
| 23 | Normal bending moment along the diagonal | 56 |
| 24 | Normal bending moment and twisting moment along the horizontal line (y = 2.25) | 57 |


ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# LIST OF SYMBOLS

| | |
|---|---|
| A | cross-sectional area |
| D | flexural rigidity of plate |
| E | modulus of elasticity |
| f | influence function |
| h | plate thickness |
| I | moment of inertia , domain integrals |
| i,j,k,l | running indices |
| K | number of sides of plate |
| $K_a$ | axial stiffness of interior support |
| $K_r$ | rotational stiffness of interior support |
| L | number of supports inside the plate domain |
| M | number of loading strips |
| $M_n$ | normal bending moment per unit length of sections perpendicular to n-axis |
| $M_{nt}$ | twisting moment per unit length of sections perpendicular to n-axis |
| $M_x$ | normal bending moment per unit length of sections perpendicular to x-axis |
| $M_{xy}$ | twisting moment per unit length of sections perpendicular to x-axis |
| N | number of divided intervals |
| (n,t) | normal co-ordinates |
| P | magnitude of singular load |
| p | line load intensity |
| $Q_n$ | shear force per unit length of sections of plate perpendicular to n-axis |

| | |
|---|---|
| $Q_x$ | shear force per unit length of sections of plate perpendicular to x-axis |
| q | intensity of distributed load |
| R | corner force |
| r | distance between two points in plate |
| $V_n$ | supplemented shear per unit length of sections of plate perpendicular to n-axis |
| $V_x$ | supplemented shear per unit length of sections of plate perpendicular to x-axis |
| w | deflection function |
| (x,y) | Cartesian co-ordinates |
| $(r,\theta)$ | Polar co-ordinates |
| $\alpha$ | angle |
| $\beta$ | angle |
| $\Gamma$ | boundary of plate |
| $\gamma$ | interval on plate boundary |
| $\Delta$ | radius of semi-circular element of plate |
| $\delta$ | Dirac delta function |
| $\epsilon$ | radius of circular sector element of plate |
| $\theta$ | angle |
| $\nu$ | Poisson's ratio |
| $(\xi,\eta)$ | co-ordinates |
| $\phi$ | included angle at plate boundary or corner |
| $\Omega$ | domain of plate |