



บทที่ 2

วรรณคดี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ เสนอรายงานการค้นคว้าเกี่ยวกับวรรณคดีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามลำดับชั้นดังนี้

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

1. ความหมายและความสำคัญของความคลาดเคลื่อนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
2. ความคลาดเคลื่อนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
3. ลักษณะของโจทย์ปัญหา
4. ปัจจัยที่ส่งผลต่อการแก้โจทย์ปัญหา
5. การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้สมการ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยในประเทศ
2. งานวิจัยในต่างประเทศ

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

1. ความหมายและความสำคัญของความคลาดเคลื่อนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

1.1 ความหมาย

ความคลาดเคลื่อน (error) คือ ความผิดพลาด ความเชื่อที่ผิด ความคิดเห็นที่ผิด กระทำผิดหรือทำไม่ถูก ข้อผิดพลาด (Webster and Jean L. Mckechnic, 1971: 932)

การแก้ปัญหา คือ กระบวนการที่ประยุกต์ความรู้เดิมกับสถานการณ์ใหม่ที่ยังไม่คุ้นเคย ซึ่งเกี่ยวข้องกับการตั้งคำถาม วิเคราะห์สถานการณ์ การแสดงผล และการแปลผล (ยุพิน พิพิธกุล, 2530: 133) และไลล์ บรูซ และโรเจอร์ (Lyle, Bruce, and Roger, 1971: 9) ให้ความเห็นว่า "การแก้ปัญหาคือเป็นกิจกรรมที่เป็นทั้งการแสดงความรู้ ความคิด จากประสบการณ์และส่วนประกอบของสถานการณ์ที่เป็นปัญหาในปัจจุบัน โดยนำมาจัดเรียงลำดับใหม่ เพื่อผลของความสำเร็จในความมุ่งหมายเฉพาะอย่าง"

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ โจทย์ภาษา (Word problem) หรือ โจทย์เชิงเรื่องราว (Story problem) หรือโจทย์เชิงสนทนา (Verbal problem) นั่นคือปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่บรรยายสภาพการณ์ด้วยถ้อยคำ หรือข้อความและตัวเลข โดยต้องการคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข ผู้แก้ปัญหามักต้องค้นหาว่าจะใช้วิธีการใดแก้โจทย์ปัญหา (Adam Ellis and Beeson, 1977: 173)

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำเป็นต้องอาศัยทักษะและความสามารถต่าง ๆ มาประกอบกัน เช่น ทักษะการอ่าน การวิเคราะห์ปัญหา การคำนวณ การมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ จึงอาจทำให้การแก้โจทย์ปัญหาผิดพลาดขึ้นได้ ผลที่ตามมาคือจะได้คำตอบของปัญหาที่ไม่ถูกต้อง

## 1.2 ความสำคัญ

ไชย (Chai, 1987: 189-198) กล่าวถึง การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนว่าเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพ และการศึกษาความคลาดเคลื่อนจะทำให้จัดหาข้อมูลซึ่งเกี่ยวข้องกับความคิดของเด็กเกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ข้อมูลเหล่านี้มีความหมายมากในการสอน ซึ่งจะต้องมีการแนะแนวทางในการช่วยให้นักเรียนหลีกเลี่ยงปัญหาและสามารถอธิบายได้ว่า เพราะสาเหตุใดนักเรียนจึงไม่มีพัฒนาการด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักวิจัยยืนยันว่า เมื่อความคลาดเคลื่อนของนักเรียนได้แสดงออกมาให้เห็นว่าการเรียนรู้กำลังจะเริ่มขึ้นและสามารถทำให้มั่นคงขึ้นในภายหลัง

## 2. ความคลาดเคลื่อนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นิวแมน (Newman, 1980 Quoted in Dickson, Brown and Gibson, 1984: 335-336) ได้ศึกษาว่าระหว่างที่นักเรียนแก้โจทย์ปัญหา เกิดความคลาดเคลื่อนอะไรบ้าง โดยใช้โจทย์ปัญหาขั้นเดียว (One-step) ซึ่งพอสรุปความคลาดเคลื่อนว่ามาจากแหล่งใดดังต่อไปนี้

1. ความสามารถในการอ่าน (Reading Ability) นักเรียนอ่านคำถามได้ไหมคือสามารถ

1.1 จำคำได้ไหม

1.2 จำสัญลักษณ์ได้ไหม

2. ความเข้าใจ (Comprehension) นักเรียนสามารถเข้าใจคำถามหรือไม่ คือสามารถ

2.1 มีความเข้าใจโดยทั่วไป

2.2 มีความเข้าใจในสัญลักษณ์และคำศัพท์เฉพาะ

3. การแปลง (Transformation) นักเรียนสามารถเลือกกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการแก้ปัญหาหรือไม่ นั่นคือ เป็นการแปลงโจทย์ปัญหาให้อยู่ในรูปประโยคคณิตศาสตร์

4. ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Process Skills) นักเรียนสามารถดำเนินการคำนวณตามวิธีแก้ปัญหาที่คิดได้หรือไม่

5. การลงหน่วยในคำตอบ (Encoding) นักเรียนสามารถเขียนคำตอบในรูปแบบที่ขอมกันหรือไม่

6. แรงจูงใจ (Motivation) ของนักเรียน นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องถ้ามีความพยายาม ซึ่งขึ้นอยู่กับแรงจูงใจเป็นสำคัญ

7. การขาดความระมัดระวัง (Carelessness) นักเรียนบางคนรู้ว่า จะแก้ไขข้อผิดพลาดอย่างไร แต่ขาดความระมัดระวังในการคำนวณ จึงเกิดความคลาดเคลื่อน

8. รูปแบบของคำถาม (Question form) ซึ่งอาจสร้างความสับสนให้แก่ นักเรียน

แคร์รี่ หลุยส์ และ เบอ์นาร์ด (Carry, Lewis and Bernard, 1980: อ้างจาก ปราโมทย์ มากชู, 2528: 144-147) ได้สรุปข้อผิดพลาดในการแก้สมการเชิงเส้นและสมการกำลังสองไว้ 3 ข้อ คือ

1. ข้อผิดพลาดในการดำเนินการ
2. ข้อผิดพลาดในการประยุกต์
3. ข้อผิดพลาดในการทำให้เป็นผลสำเร็จ

คาเซย์ (Casay) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน และเทคนิคการสอนเพื่อการแก้ไขความคลาดเคลื่อนนั้น" แล้วสรุปสาเหตุของความคลาดเคลื่อนทางการเรียนโดยขยายทฤษฎี นิวแมน (Newman, 1983 Quoted in Truran, 1987: 92-96) ไว้ 9 ด้านคือ

1. รูปแบบของคำถาม
2. การอ่านคำถาม
3. ความเข้าใจคำถาม
4. กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้
5. ทักษะการเลือกใช้ความรู้
6. ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้
7. การเสนอคำตอบ
8. ความผิดพลาดซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้ เนื่องจากการขาดความระมัดระวัง
9. ความผิดพลาดซึ่งครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมนักเรียน

โมวโซวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ (Movshovitz Hadar et. al, 1987: 3-14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การวิเคราะห์รูปแบบข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนมัธยมศึกษา" และสรุปข้อบกพร่องไว้ 6 ด้านคือ

1. การใช้ข้อมูลผิด
2. ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา
3. การอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์
4. การบิดเบือนทฤษฎี และนิยาม
5. ขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา
6. ความคลาดเคลื่อนในเทคนิคการทำ

แบลนด์ และคณะ (Blando et. al, 1989: 301-308) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การวิเคราะห์ และการหา รูปแบบความคลาดเคลื่อนทางเลขคณิต" แล้วสรุปลักษณะความคลาดเคลื่อนไว้ 4 ด้านคือ

1. ความคลาดเคลื่อนในการมีลำดับความสำคัญมากกว่าหรือการผิดลำดับขั้นตอนคือ

- 1.1 บวกก่อนคูณ เช่น  $4+2 \times 3 \longrightarrow 6 \times 3$
- 1.2 บวกก่อนหาร เช่น  $10/2+3 \longrightarrow 10/5$
- 1.3 ลบก่อนคูณ เช่น  $9-2 \times 3 \longrightarrow 7 \times 3$
- 1.4 ลบก่อนหาร เช่น  $8-6/2 \longrightarrow 2/2$
- 1.5 บวกก่อนลบ เช่น  $6.-4+3 \longrightarrow 6-7$
- 1.6 ละเลยความสำคัญของวงเล็บ เช่น  $8-(2+4) \longrightarrow 6+4$

2. ความคลาดเคลื่อนในการทำผิดความหมาย คือ

- 2.1 หารแทนการบวก เช่น  $5+2 \longrightarrow 2$  เศษ 1
- 2.2 ลบแทนการบวก เช่น  $5+1 \longrightarrow 4$
- 2.3 คูณแทนการบวก เช่น  $2+3 \longrightarrow 6$
- 2.4 บวกแทนการคูณ เช่น  $6 \times 2 \longrightarrow 8$
- 2.5 หารแทนการคูณ เช่น  $6 \times 2 \longrightarrow 3$

- 2.6 ลบแทนการคูณ เช่น  $3 \times 2 \longrightarrow 1$   
 2.7 คูณแทนการลบ เช่น  $6-1 \longrightarrow 6$   
 2.8 บวกแทนการลบ เช่น  $3-1 \longrightarrow 4$   
 2.9 ทหารแทนการลบ เช่น  $8-2 \longrightarrow 4$   
 2.10 คูณแทนการหาร เช่น  $10/5 \longrightarrow 50$   
 2.11 ลบแทนการหาร เช่น  $10/2 \longrightarrow 8$   
 2.12 บวกแทนการหาร เช่น  $6/3 \longrightarrow 9$

3. ความคลาดเคลื่อนอื่น ๆ คือ การปฏิเสธที่จะแก้ปัญหา เช่น  
 $8-(2+4) \longrightarrow -2$

4. ความคลาดเคลื่อนที่ไม่มีรูปแบบแน่นอนเนื่องจากขาดความระมัดระวังในการคำนวณ คือ

- 4.1 ขาดการระมัดระวังในการบวก เช่น  $6+4 \longrightarrow 9$   
 4.2 ขาดความระมัดระวังในการลบ เช่น  $15-13 \longrightarrow 4$   
 4.3 ขาดความระมัดระวังในการคูณ เช่น  $4 \times 12 \longrightarrow 45$   
 4.5 ความระมัดระวังที่ไม่สามารถระบุสาเหตุได้ เช่น  $12 \times 5 \longrightarrow 26$

### 3. ลักษณะของโจทย์ปัญหา

แอสลอค และคณะ (Ashlock et. al. 1983:239) แบ่งรูปแบบของ

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. โจทย์ปัญหาในหนังสือ หรือโจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยการแปลงให้เป็นประโยคคณิตศาสตร์ (Standard textbook or translation problems) เป็นโจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยหลักการ หรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ที่ตายตัว ไม่ค่อยยุ่งยากมากนัก
2. โจทย์ปัญหาที่แก้ด้วยกระบวนการ (Process problems) เป็นโจทย์ปัญหาที่ต้องแก้ด้วยกลวิธีต่าง ๆ ซึ่งยุ่งยากมากกว่าประเภทที่ 1 โจทย์ประเภทนี้จัดเป็นต้องแก้ด้วยกระบวนการ 3 ชั้น คือ

2.1 ความเข้าใจปัญหา

2.2 การพัฒนาและการหาทลวิธีในการแก้ปัญหา

2.3 การประเมินการแก้ปัญหา

บาร์คูดี (Baroody 1987: 260-261) แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ออกเป็น 2 แบบคือ

1. โจทย์ปัญหาปกติ (Routine problems) คือโจทย์ปัญหาในหนังสือเรียนทั่ว ๆ ไป ซึ่งมุ่งเน้นการฝึกทักษะใดทักษะหนึ่ง มีข้อมูลที่จำเป็นและมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว

2. โจทย์ปัญหาที่ไม่ปกติ (Nonroutine problems) คือโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะสอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงของชีวิตมากกว่าโจทย์ปัญหาปกติ คือ มีข้อมูลมากทั้งที่จำเป็นและไม่จำเป็น หรือข้อมูลไม่เพียงพอ อาจมีคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ เห็นการคิดวิเคราะห์อย่างเป็นเหตุเป็นผล

นอกจากนี้ โจทย์ปัญหาอาจมีลักษณะเป็นโจทย์ปัญหาโดยตรง (Direct problems) และโจทย์ปัญหาโดยอ้อม (Indirect problems) หรืออาจเป็นโจทย์ขั้นตอนเดียว (One-step problems) และโจทย์หลายขั้นตอน (Multi-step) ซึ่งโจทย์ปัญหาโดยตรงและโจทย์ขั้นตอนเดียว แก้ง่ายกว่าโจทย์ปัญหาโดยอ้อม และโจทย์หลายขั้นตอน

4. ปัจจัยที่ส่งผลต่อการแก้โจทย์ปัญหา

ปัจจัยหรือตัวแปรที่ส่งผลต่อการแก้โจทย์ปัญหาพอสรุปได้ 3 ประการ

(Fleischner, Nuzum and Marzola, 1987: 214-215) คือ

1. บุคคล

2. ลักษณะของโจทย์ปัญหา

3. กลวิธีการสอน

## 1. บุคคล

บลูม และโบรเดอร์ (Bloom and Broder, 1950 Quoted in Hudgind, 1977: 248) กล่าวว่า คุณลักษณะที่จำแนกผู้ที่แก้ปัญหาได้ดีและผู้ที่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้มี 4 ลักษณะคือ

1. ความเข้าใจในธรรมชาติของปัญหา นักเรียนที่แก้ปัญหาไม่ได้มักจะ ไม่เข้าใจว่าปัญหาให้อะไรมาบ้าง และมักจะยึดมั่นกับเหตุผลในการแก้ปัญหาของตน ซึ่งตรงข้ามกับผู้แก้ปัญหาได้ดี จะเป็นผู้ที่เข้าใจว่าปัญหาต้องการอะไรและได้ให้อะไรมาบ้าง และมักจะไม่ยึดมั่นกับตนเอง

2. ความเข้าใจในความคิดต่าง ๆ ที่ใช้แก้ปัญหา ผู้แก้ปัญหาได้ดีจะมีความคิดที่ลึกซึ้งมากกว่าผู้ที่แก้ปัญหาไม่ได้

3. วิธีการที่ใช้แก้ปัญหา ผู้แก้ปัญหาได้ดีจะมีวิธีแก้ปัญหาที่มีลักษณะดังนี้

3.1 มีการขยายความคิดในการแก้ปัญหา คือ จะใช้เวลาและพลังงานอย่างสูงเพื่อแก้ปัญหาให้สำเร็จ

3.2 มีการวิเคราะห์ปัญหาอย่างมีระบบ คือ จะแบ่งปัญหาเป็นส่วน ๆ และจะใช้ความรู้แก้ปัญหาทีละส่วนจนสำเร็จ

3.3 มีกระบวนการให้เหตุผลที่สมบูรณ์ คือ จะเข้าใจปัญหาได้อย่างแจ่มชัดและมักจะใช้เหตุผลในการแก้ปัญหา

4. ทักษะคิดในการแก้ปัญหา ผู้แก้ปัญหาได้ดีมักจะมีทัศนคติในเชิงบวกต่อการแก้ปัญหา

แบงส์ (Banks, 1959: 368-369) ได้ศึกษาพฤติกรรมในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนที่ประสบผลสำเร็จ และไม่ประสบผลสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาซึ่งมีคุณลักษณะดังนี้



1. พฤติกรรมของนักเรียนที่แก้ปัญหาได้

- 1.1 มีการประเมินการแก้ปัญหาโดยตรวจเช็คคำตอบ
- 1.2 รู้จักแยกแยะ หรือแบ่งปัญหาออกเป็นส่วน ๆ
- 1.3 ใช้คำหลักเพื่อโยงความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ ของปัญหา
- 1.4 ตีความเป็นระยะ ๆ ได้ถูกต้อง
- 1.5 บ่งบอกข้อความที่เกี่ยวข้องกับปัญหาได้อย่างถูกต้องและสมบูรณ์
- 1.6 ใช้ความคิดอย่างวิจาร์ณญาณก่อนที่จะเริ่มการคำนวณ
- 1.7 เมื่อรับรู้ปัญหาทั้งหมดแล้ว อ่านปัญหาอีกครั้ง และบันทึกรายละเอียด
- 1.8 ค้นหาว่าส่วนใดของปัญหาที่ให้มา และส่วนใดที่ต้องการหา
- 1.9 วางแผนการแก้ปัญหาและวางเค้าโครงของกระบวนการที่จะใช้แก้
- 1.10 พิจารณาความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา
- 1.11 ใช้การวาดรูปเท่าที่จะทำได้
- 1.12 พิจารณาว่าข้อมูลใดไม่จำเป็นต้องใช้
- 1.13 ต้องทำความเข้าใจกับปัญหาอย่างถ่องแท้ก่อนที่จะคำนวณ

ปัญหา

2. พฤติกรรมของนักเรียนที่แก้ปัญหาไม่ได้

- 2.1 ใช้วิธีการคูณมากกว่าการหาร
- 2.2 ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง
- 2.3 ใช้คำหลักเพื่อบ่งบอกกระบวนการในการแก้ปัญหา
- 2.4 ขาดการคิดแบบวิจาร์ณญาณว่าต้องการอะไรก่อนคำนวณ
- 2.5 ใช้คำเดียวในการตัดสินใจแก้ปัญหา
- 2.6 ตีความเป็นระยะ ๆ ได้ไม่ถูกต้อง
- 2.7 บ่งบอกข้อความแต่ละส่วนของปัญหาได้ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
- 2.8 ใช้วิธีการไม่ถูกต้อง เป็นกระบวนการพื้นฐานในการแก้ปัญหา
- 2.9 ใช้วิธีการคำนวณที่ไม่สอดคล้องกับลักษณะของข้อมูล
- 2.10 ใช้วิธีลองผิดในการแก้ปัญหา

- 2.11 ยึดตัวเองเป็นหลัก
- 2.12 ในการเลือกวิธีแก้ปัญหาจะใช้วิธีการจัดวิธีการอื่น ๆ ออกไป
- 2.13 ชอบใช้วิธีการบวกหรือการลบกับเลขเศษส่วน
- 2.14 ไม่สามารถเขียนขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้

ชุยดอม และเวเวอร์ (Suydom and Weaver, 1970 Quoted in Cruikshank, Fitzgerald and Jensen, 1980: 232) พบว่า ผู้ที่ประสบผลสำเร็จสูงสุดในการแก้ปัญหานั้นจะมีคุณสมบัติใน 8 องค์ประกอบคือ

1. ความสามารถที่จะบ่งบอกความเหมือน
2. ความสามารถที่จะบ่งบอกความต่าง
3. ความสามารถที่จะเข้าใจการเปรียบเทียบ
4. ความสามารถที่จะมองเห็น ติความข้อเท็จจริงและความสัมพันธ์
5. ความเข้าใจในคำศัพท์ และมโนคติทางคณิตศาสตร์
6. ทักษะในการคำนวณ
7. ความสามารถที่จะเลือกกรรมวิธีและข้อมูล
8. ความเข้าใจในการอ่าน

โดยที่องค์ประกอบที่ 1-4 เป็นกระบวนการสำคัญในการแก้ปัญหาซึ่งจะต้องใช้ความรู้คิด (Cognition) ในระดับสูง ส่วนองค์ประกอบที่ 5-8 นั้นเป็นกระบวนการที่ใช้ทักษะการรู้คิดในระดับที่ต่ำกว่า คือ ความเข้าใจ และการประยุกต์ใช้ และมักจะเกี่ยวข้องกับกิจกรรมการแก้ปัญหาที่อาศัยความจำ

บอส (Bos, 1986: 10) กล่าวว่ามีการวิจัยที่พบว่า นักเรียนที่มีปัญหาในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะมีพัฒนาการทางสติปัญญาและเหตุผลล่าช้า มีความด้อยในความสามารถในการอ่าน และมีปัญหาหรือความยากลำบากในการคำนวณ

## 2. ลักษณะของโจทย์ปัญหา

ลักษณะของโจทย์ปัญหาก็มีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหานั้นมีลักษณะดังนี้ (Hodgins, 1977: 241-242; Fleischner, Nuzum and Marzola, 1987: 214)

1. ภาษาที่ใช้ เป็นภาษาที่เข้าใจง่ายหรือยาก มีคำศัพท์เฉพาะทาง คณิตศาสตร์มากน้อยเพียงใด
2. ขนาดของตัวหนังสือและตัวเลข เหมาะสมกับวัยของผู้เรียนหรือไม่
3. ความยาวของโจทย์ปัญหา
4. รูปแบบและโครงสร้างของโจทย์ เป็นโจทย์โดยตรงหรือโดยอ้อม (โจทย์โดยตรงจะแก้ได้ง่ายกว่าโจทย์โดยอ้อม) เป็นโจทย์ที่ใช้ขั้นตอนในการแก้ปัญหาขั้นตอนเดียวหรือหลายขั้นตอน (โจทย์ขั้นตอนเดียวแก้ได้ง่ายกว่าโจทย์หลายขั้นตอน)
5. ใช้ทักษะการคำนวณคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน (Basic operation) หลายวิธีหรือไม่
6. เป็นโจทย์ที่นักเรียนเคยมาทำหรือไม่

อนึ่งการสอนการแก้โจทย์ปัญหาที่ยึดถือปฏิบัติกันมา มักจะสอนหลังจากที่มีการสอนทักษะพื้นฐาน คือ การบวก การลบ การคูณ การหาร ซึ่งจะมีแบบฝึกหัดโจทย์ปัญหาอยู่ท้ายต่อจากแบบฝึกหัดพื้นฐาน โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อ (1) ใ้รอบรู้ในเรื่องทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ (2) ฝึกทักษะการคำนวณ และ (3) มุ่งเน้นการนำไปใช้กับสภาพความเป็นจริง โจทย์ปัญหาจึงมักจะถูกใช้เพื่อฝึกทักษะขั้นพื้นฐานมากกว่าที่จะมุ่งพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ดังนั้น แบบฝึกหัดโจทย์ปัญหาจึงมีลักษณะโจทย์ปัญหาที่มีข้อมูลที่เฉพาะเจาะจงซึ่งจำเป็นต่อการแก้ปัญหาโดยมักจะใช้ทักษะการคำนวณหนึ่ง ๆ โดยเฉพาะ เพื่อมุ่งฝึกความชำนาญในทักษะนั้น ๆ และเป็นโจทย์ปัญหาที่มีคำตอบถูกเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น ซึ่งไม่สอดคล้องกับการแก้ปัญหาในชีวิตความเป็นจริง ปัญหาในชีวิตจริงมักจะมีข้อมูลมากมายทั้งข้อมูลที่จำเป็น และไม่จำเป็นในการแก้ปัญหา และอาจมีทางแก้หลายทางหรือหลายคำตอบ หรืออาจไม่มีคำตอบก็ได้ (Baroody, 1987: 257-259) อีกทั้งแบบฝึกหัดโจทย์ปัญหาลักษณะดังกล่าวมักจะเป็นตัวทำลายแรงขับ (Drive) และมักไม่สัมพันธ์กับความสนใจของนักเรียน นักเรียนมักจะทำแบบฝึกหัดด้วยความกลัวมากกว่าความกระตือรือร้น ทั้งนี้เพราะนักเรียนบางคนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ถูกต้องรวดเร็วตามเป้าหมายที่มุ่งฝึกทักษะการคำนวณขั้นพื้นฐานเป็นสำคัญ (Baroody, 1987: 260)

### 3. กลวิธีการสอน

นุซุม (Nuzum, 1987: 53-54) กล่าวว่านักวิจัยเป็นจำนวนไม่น้อยได้พยายามศึกษาถึงปัจจัยสำคัญที่ทำให้นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ โดยมุ่งศึกษา ลักษณะของคำศัพท์ใช้ในโจทย์ปัญหา ความเข้าใจในคำหลัก องค์ประกอบของโจทย์ปัญหา ตลอดจนกลวิธีการสอน แต่ความพยายามที่จะปรับปรุงให้นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ โดยมุ่งสอนทักษะใดทักษะหนึ่ง อาทิเช่น การสอนให้นักเรียนหาคำหลัก การปรับปรุงความเข้าใจในการอ่าน หรือการปรับปรุงสมรรถภาพในการคำนวณ เหล่านี้เป็นต้น มักจะไม่ประสบความสำเร็จ จึงมีข้อสังเกตว่า กลวิธีการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนนั้น ควรพัฒนาหน่วยการสอนที่เน้นกระบวนการทั้งหมด มากกว่าองค์ประกอบใดขององค์ประกอบหนึ่งของสมรรถภาพในการแก้โจทย์ปัญหา

นอกจากนี้ อัดัม เอลลิส และ บีสัน (Adams, Ellis and Beeson, 1977: 175) กล่าวว่าในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยปัจจัยหรือความสามารถ 3 ด้าน ได้แก่

1. สติปัญญา การแก้ปัญหานั้นจำเป็นต้องใช้การคิดในระดับสูง ดังนั้น สติปัญญาจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่งประการหนึ่งในการแก้โจทย์ปัญหา เป็นที่ยอมรับกันว่าองค์ประกอบของสติปัญญามีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา ก็คือ องค์ประกอบทางปริมาณ (Quantitative factors) ดังนั้น นักเรียนบางคนอาจมีความสามารถในองค์ประกอบทางด้านภาษา (Verbal factors) แต่อาจด้อยในความสามารถที่ไม่ใช่ภาษา หรือทางด้านปริมาณ

2. การอ่าน ความสามารถในการอ่านนับเป็นคุณสมบัติที่สำคัญของการแก้ปัญหามีนักเรียนเป็นจำนวนไม่น้อยที่มีความสามารถในการอ่าน แต่ไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ ทั้งนี้เพราะแบบแผนของการอ่านมีลักษณะหลากหลาย ประกอบกับการแก้โจทย์ปัญหานั้นจำเป็นต้องอาศัยการอ่านแบบวิเคราะห์ (Analytical Reading) อันจะนำไปสู่การตัดสินใจว่า ควรกระทำอะไรและอย่างไร

3. ทักษะพื้นฐาน หลังจากทิวเคราะห์ปัญหาและตัดสินใจว่าควรจะทำอะไรบ้าง และอย่างไรในการทำอย่างนั้น เป็นขั้นตอนของการคำนวณ ซึ่งนักเรียนต้องมีทักษะพื้นฐานของการคำนวณในเรื่อง การบวก การลบ การคูณ การหาร ซึ่งนับว่าเป็นความสามารถที่ค่อนข้างง่ายของการแก้ปัญหา

นอกจากนี้แล้ว ความรู้ที่ผู้แก้โจทย์ปัญหาพึงมีพื้นประกอบด้วยความรู้ 3 ด้าน ได้แก่ (Fleischner, Nuzum and Marzola, 1987: 216; Nuzum, 1987:54)

1. ความรู้ที่ได้จากปัญหา คือผู้แก้ปัญหาก็จะต้องหาว่าส่วนใดของโจทย์ เป็นสิ่งที่ต้องการหา หรือคือปัญหาที่แท้จริง ส่วนใดคือข้อมูลที่โจทย์ให้มา และต้องเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง สิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่โจทย์ให้มา

2. ความรู้เฉพาะ เกี่ยวกับงานที่ต้องทำในโจทย์ปัญหา อันได้แก่ การคำนวณ การมีมโนคติเกี่ยวกับทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวก การลบ การคูณ การหาร และสามารถจำแนกปัญหาของมโนคติต่าง ๆ ได้ การบ่งชี้ว่าปัญหา มีลักษณะ เป็นปัญหาขั้นตอนเดียวหรือหลายขั้นตอน หรือมีข้อมูลเกินความจำเป็นหรือไม่ เป็นต้น

3. ความรู้เกี่ยวกับกรรมวิธีทั่วไป อันได้แก่การบ่งชี้ข้อความที่เป็น ปัญหา การวางแผนการตั้งและทดสอบสมมติฐานและการประเมินผล

##### 5. การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้สมการ

การเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์จะไม่เปลี่ยนแปลงมากนักในแต่ละระดับชั้นเรียน หากแต่จะมีความสลับซับซ้อนมากขึ้นในระดับชั้นที่สูงขึ้น ในระดับประถมศึกษาตอนปลายและมัธยมศึกษา นักเรียนจะได้เรียนพีชคณิต ซึ่งเป็นเรื่องของสมการ โจทย์ปัญหาก็จะมีความซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นเทคนิคการแก้โจทย์ปัญหาจึงต้องอาศัยสมการเป็นหลัก

### 5.1 ความหมายของสมการ

มุลเลอร์ (Mueller, 1972: 120) ได้ให้ความหมายของสมการไว้ว่า "สมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงการเท่ากันของนิพจน์สองนิพจน์ (Expression)"

รีส สปาร์ค และรีส (Rees, Sparks and Res, 1978: 80) ได้กล่าวว่า "สมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงถึงการเท่ากันของนิพจน์สองนิพจน์ แต่ละนิพจน์ เรียกว่า สมาชิกของสมการ (Member of the equation)"

โกรซา (Groza, 1983: 82) ได้ให้ความหมายของสมการไว้ว่า "สมการ หมายถึง ประโยคคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของ  $A=B$  และสมการไม่จำเป็นต้องเป็นประโยคคณิตศาสตร์ที่เป็นจริงเสมอไป" เช่น

|       |     |       |                             |
|-------|-----|-------|-----------------------------|
| $2+4$ | $=$ | $6$   | เป็นจริง                    |
| $7-3$ | $=$ | $8$   | เป็นเท็จ                    |
| $x+5$ | $=$ | $5+x$ | เป็นจริงทุกค่าของ $x$       |
| $x+5$ | $=$ | $x+1$ | เป็นเท็จทุกค่าของ $x$       |
| $x+5$ | $=$ | $9$   | เป็นจริงสำหรับบางค่าของ $x$ |

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า สมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของนิพจน์สองนิพจน์ โดยมีสัญลักษณ์ "=" บอกความสัมพันธ์ของนิพจน์ เช่น

$$3+4 = 7, \quad x-3 = 5$$

### 5.2 ขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการ

เฮลตัน (Helton, 1958: 203) ได้ให้ข้อเสนอเกี่ยวกับขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการไว้ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้เข้าใจ เพื่อหาว่าโจทย์ต้องการอะไร ต้องการให้หาตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวหรือมากกว่านั้น

2. กำหนดสัญลักษณ์เป็นตัวแทนของตัวแปรไม่ทราบค่า
3. หาความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับโจทย์
4. เขียนสมการ
5. แก้สมการ
6. ให้ความหมายของคำตอบ เช่น บอกหน่วย
7. ตรวจสอบคำตอบ

มิลเลอร์ และฮีเรน (Miller and Heeran, 1978: 245)

กล่าวว่า ในการแก้โจทย์ปัญหานั้นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ คือ การแปลงประโยคภาษาให้เป็นประโยคทางพีชคณิต ก่อนที่จะหาคำตอบของปัญหานั้น และได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการดังนี้

1. สมมติตัวแปรแทนตัวที่ต้องการทราบ หรือ ตัวที่ไม่ทราบค่า
2. แปลงโจทย์ปัญหาให้อยู่ในรูปสมการ
3. แก้สมการหาคำตอบ
4. ตรวจสอบคำตอบว่าเป็นไปตามเงื่อนไขของโจทย์หรือไม่

เมื่อพิจารณาการแก้ปัญหาโจทย์สมการของนักเรียนโดยทั่ว ๆ ไป จะพบว่า ขั้นที่ 2 คือ การสร้างสมการ เป็นขั้นที่พยายามจะแปลงโจทย์ปัญหาจากประโยคภาษาให้เป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ โจทย์ปัญหาจะให้ข้อเท็จจริงบางสิ่งบางอย่างที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากัน ซึ่งจะนำไปสร้างสมการ นับว่าเป็นขั้นที่สำคัญมาก

ดอลเซียนี และคนอื่น ๆ (Dolciani and others, 1967: 317) ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการไว้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจโจทย์
2. โจทย์บอกอะไร สมมติสัญลักษณ์แทนตัวไม่ทราบค่าได้อย่างไร และอธิบายสัญลักษณ์นั้นได้อย่างไร
3. สามารถเขียนออกมาเป็นภาพ เพื่อช่วยให้เข้าใจชัดเจนขึ้นได้หรือไม่

4. ข้อเท็จจริงที่โจทก์ให้มามีความสัมพันธ์กับสิ่งที่ต้องการหาอย่างไร  
จะเขียนอย่างไร

5. แก่สมการ
6. ตรวจสอบคำตอบ

มูลเลอร์ (Mueller, 1972: 32-33) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้  
โจทก์สมการไว้ดังนี้

1. พิจารณาว่าโจทก์ให้หาอะไร ตัวไม่ทราบค่าคืออะไร แล้วสมมติ  
ตัวแปรแทนตัวไม่ทราบค่านั้น
2. หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวที่ทราบค่ากับตัวไม่ทราบค่าจากข้อมูล  
ที่โจทก์ให้มา

3. เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์จากข้อมูลในขั้นที่ 2
4. แก่สมการเพื่อหาค่าของตัวจากขั้นที่ 3
5. ตรวจสอบคำตอบ โดยใช้คำตอบจากขั้นที่ 4

โมเชอร์ (Mosher, 1974: 54) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทก์  
สมการไว้ดังนี้

1. อ่านโจทก์ให้ละเอียดรอบคอบ ถ้าเป็นไปได้ควรวาดรูปประกอบ
2. ทำความเข้าใจว่าโจทก์ให้หาอะไร
3. สมมติตัวแปรแทนตัวที่โจทก์ต้องการให้หา
4. เขียนปริมาณอื่น ๆ ในรูปของตัวแปรจากขั้นที่ 3
5. หาความสัมพันธ์ที่เท่ากันของปริมาณ 2 ปริมาณ
6. นำปริมาณ 2 ปริมาณนั้นมาเขียนให้อยู่ในรูปของสมการ
7. แก่สมการ
8. ตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทก์

กำหนดหรือไม่



แมสซิง และแซนเดอร์ (Massing and Sanders, 1977: 149)

ได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการไว้ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้รอบคอบว่าโจทย์ให้หาอะไร
2. สมมติสิ่งที่โจทย์ให้หาว่าต้องการอะไร
3. เขียนสมการโดยใช้ข้อมูลที่โจทย์ให้มา
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบ

จากที่กล่าวมาข้างต้น จึงพอจะสรุปได้ว่า ขั้นตอนของการแก้โจทย์สมการประกอบด้วยขั้นตอน ต่อไปนี้

1. ตีความและทำความเข้าใจโจทย์
2. ใช้ตัวแปรแทนตัวไม่ทราบค่า
3. เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ตามที่โจทย์กำหนด
4. แก้สมการหาคำตอบ
5. สรุปคำตอบตามที่โจทย์ต้องการ

### 5.3 คุณสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ

คุณสมบัติพื้นฐานที่ใช้ในการแก้สมการเป็นดังนี้ (สถาบันส่งเสริม  
การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2532: 236)

1. คุณสมบัติสมมาตร ซึ่งกล่าวว่า

ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนใด ๆ ถ้า  $a=b$  แล้ว  $b=a$

2. คุณสมบัติถ่ายทอด ซึ่งกล่าวว่า

ให้  $a, b$  และ  $c$  แทนจำนวนใด ๆ ถ้า  $a=b$  และ  $b=c$

แล้ว  $a=c$

3. คุณสมบัติการบวก ซึ่งกล่าวว่า "ถ้ามีจำนวนสองจำนวนเท่ากัน นำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาบวกแต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น ผลลัพธ์จะเท่ากัน" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

ให้  $a, b$  และ  $c$  แทนจำนวนใด ๆ ถ้า  $a=b$  แล้ว  $a+b = b+c$

4. คุณสมบัติการคูณ ซึ่งกล่าวว่า "ถ้ามีจำนวนสองจำนวนเท่ากัน นำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งคูณกับแต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น ผลลัพธ์จะเท่ากัน" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

ให้  $a, b$  และ  $c$  แทนจำนวนใด ๆ ถ้า  $a=b$  แล้ว  $ac = bc$

#### งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

##### งานวิจัยในประเทศ

อุไรวรรณ ทศบุตร (2523: 108-109) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยความบกพร่องในการเรียนเรื่อง เศษส่วนสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในจังหวัดนครสวรรค์" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 990 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบย่อย 6 ฉบับคือ พื้นฐานความเข้าใจเกี่ยวกับ เศษส่วน การลบเศษส่วน การคูณเศษส่วนและโจทย์ปัญหาเศษส่วน เป็นแบบเติมคำสั้น ๆ ผลการวิจัยพบว่า สาเหตุของความบกพร่องที่สำคัญคือไม่เข้าใจความหมายของเศษส่วน ไม่เข้าใจกระบวนการบวก ลบ คูณ ทหารเศษส่วน และบกพร่องในการทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วรรณดี ชูหุฒิชยานนท์ (2524: 121-125) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยความบกพร่องในการเรียนเรื่อง โพลิโนเมียล สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเขตท้องที่การศึกษา 4 กรุงเทพมหานคร" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 750 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบย่อย 6 ฉบับ คือ การบวกโพลิโนเมียล การลบโพลิโนเมียล การคูณโพลิโนเมียล การหารโพลิโนเมียล สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ผลการวิจัยพบว่า สาเหตุข้อบกพร่องที่สำคัญคือ ไม่เข้าใจทักษะการคำนวณเลขยกกำลัง สับสนเครื่องหมายและไม่เข้าใจคุณสมบัติการแจกแจง

จินดา ลิมถาวรศิริพงศ์ (2525: 68-69) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การสร้างลำดับชั้นเนื้อหาวิชาจากการวินิจฉัยการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเต็ม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเขตกรุงเทพมหานคร จำนวน 396 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวินิจฉัยการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนเต็ม ผลการวิจัยปรากฏว่าได้ลำดับชั้นเนื้อหาวิชา 5 ตอน ประกอบด้วยลำดับชั้นทั้งหมด 34 ลำดับชั้น และค้นพบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องมากที่สุดเนื่องมาจากไม่เข้าใจแนวคิดเรื่องคุณสมบัติของศูนย์เกี่ยวกับการหาร รองลงมาได้แก่ไม่เข้าใจแนวคิดเรื่องการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ และไม่เข้าใจแนวคิดเรื่องการลบจำนวนเต็มลบ

รวีวรรณ บรรพตศิริ (2527: 60) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค 311 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521" กลุ่มตัวอย่างประชากร คือ ครูผู้สอน หรือ เคชสอนคณิตศาสตร์ ค 311 จำนวน 259 คน ในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา กรุงเทพมหานคร เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบถามเกี่ยวกับเนื้อหาที่เป็นปัญหา ผลการวิจัยพบว่า เนื้อหาที่เป็นปัญหาเรียงลำดับจากมากไปหาน้อยดังนี้ โจทย์สมการเชิงเส้นสองตัวแปร โจทย์ผลสมการ โจทย์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และคุณสมบัติรากที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ทัศนียา เขมะชิต (2527: 94) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การสำรวจเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค 312 ค 322 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตการศึกษา 6" กลุ่มตัวอย่างประชากรคือ ครูผู้สอน หรือ เคชสอนวิชาคณิตศาสตร์ ค 312 หรือ ค 322 จำนวน 323 คน ในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา ในเขตการศึกษา 6 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบถาม ผลการวิจัยพบว่า เนื้อหาที่เป็นปัญหาเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ โจทย์สมการควอดราติก โจทย์สมการที่มีสมการเป็นเศษส่วนของโพลิโนเมียล การแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียล

สมศักดิ์ ฉันทานูรักษ์ (2529: 61-62) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนเกษตรกรรม เขตการศึกษา 6" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนแผนการเรียนเกษตรกรรมในเขตการศึกษา 6 จำนวน 353 คน เป็นนักเรียนในโรงเรียน สังกัดกรมอาชีวศึกษา จำนวน 166 คน และนักเรียนในโรงเรียน

สังกัดกรมสามัญศึกษา จำนวน 187 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวินิจฉัย การเรียนคณิตศาสตร์ 2 ฉบับ คือ เรื่อง การบวก ลบ คูณ ทหารจำนวนจริง และเรื่อง โพลีโนเมียลและคุณสมบัติเบื้องต้น เกี่ยวกับสมการ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มี ข้อบกพร่องในด้านการหาผลบวกของเศษส่วนที่ส่วนไม่เท่ากัน และไม่อยู่ในรูปจำนวนคละ มีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจากนักเรียนสับสนกระบวนการในการหา ค.ร.น. ของส่วน รองลงมา ได้แก่ด้านการหาผลหารของเศษส่วน มีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจากนักเรียนสับสนกระบวนการ โดยการเปลี่ยนการหารเป็นการคูณและไม่กลับเศษส่วน และนักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องในด้านการหาผลต่างของโพลีโนเมียล มีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจากนักเรียนสับสนเครื่องหมายในการ คำนวณ รองลงมาได้แก่ ด้านการหาผลหารของโพลีโนเมียลหารด้วยโพลีโนเมียลที่หารลงตัว มีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจากนักเรียนสับสนกระบวนการโดยนำ เลขชี้กำลังมาหารกันด้วย

กรมวิชาการ (2532 : 58) ได้รายงานผลการวิจัยเกี่ยวกับการวินิจฉัยข้อบกพร่อง ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 41 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ ข้อสอบวินิจฉัยคุณานจำนวน 2 ฉบับ ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องใน 3 ลักษณะ เรียงตามลำดับจากมากไปหาน้อย คือ ด้านการคิด คำนวณการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความคิดรวบยอด นอกจากนี้ยังพบว่าในด้านความคิดรวบยอด นักเรียนบกพร่องในเรื่อง เลขศูนย์มากที่สุด รองลงมาเรื่อง การนับ เลขหนึ่ง และหลักเลข สำหรับด้านการคิดคำนวณ นักเรียนบกพร่องส่วนมากในเรื่องความสะเพร่า รองลงมาเรื่อง ลบเลขสองหลักไม่มียืม และสับสนในวิธีการเป็นต้น สำหรับด้านการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนทุกคนบกพร่องในการแปลงภาษาคณิตศาสตร์ เป็นภาษาคณิตศาสตร์

ทัศนากพร คลังแก้ว (2532 : 75-76) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การวิเคราะห์ข้อบกพร่อง ในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 70 คน เครื่องมือที่ใช้ใน การวิจัยเป็นแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยเรื่อง ภาคตัดกรวย และตรีโกณมิติ การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยได้ใช้เกณฑ์ซึ่งปรับปรุงมาจาก เกณฑ์การพิจารณาข้อบกพร่องของไมร์โซวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ ผลการวิจัยพบว่า ความถี่ ของข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์ เรียงลำดับจากมากไปหาน้อยคือ บกพร่องใน

เทคนิคการทำไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา การใช้ข้อมูลผิดบิดเบือน ทฤษฎี กฎ สูตร นิยามและข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา

ดารณี คำแหง (2533: 167-170) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 320 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบถามชนิดเลือกตอบ และชนิดความเรียง การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ใช้ลักษณะข้อบกพร่อง ซึ่งปรับปรุงมาจากลักษณะข้อบกพร่องของ แบลนไค และคณะ คาเซย์ และไมวโซวิทซ์-ฮาดาร์และคณะ ผลการวิจัยพบว่า จากแบบสอบถามชนิดเลือกตอบ นักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องเรื่องการทำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบางประการของกลุ่ม และคุณสมบัติการเท่ากันไปใช้พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ หรือวิจารณ์การพิสูจน์ได้ มีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจาก นักเรียนประยุกต์ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้กับทฤษฎีไม่ถูกต้อง และนักเรียนมีลักษณะข้อบกพร่องในด้านต่าง ๆ เรียงตามลำดับคำร้อยละโดยเฉลี่ยจากมากไปน้อย คือ ด้านการใช้ข้อมูล ด้านการคิดคำนวณหรือการพิสูจน์ ด้านคุณสมบัติ นิยาม กฎ สูตรหรือทฤษฎี การตีความด้านภาษา และด้านการใช้กราฟ ตารางหรือแผนภูมิ และจากแบบสอบถามชนิดความเรียง นักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องเรื่องการนำความรู้เรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้หาค่าตัวแปร พร้อมทั้งหาอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณได้ มีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจากนักเรียนจำนิยามอินเวอร์สการบวก และอินเวอร์สการคูณผิด และนักเรียนมีลักษณะข้อบกพร่องในด้านต่าง ๆ เรียงตามลำดับคำร้อยละโดยเฉลี่ยจากมากไปหาน้อย คือ การตีความด้านภาษา ด้านการคิดคำนวณหรือการพิสูจน์ ด้านการใช้คุณสมบัติ นิยาม กฎ สูตร หรือทฤษฎี ด้านการใช้กราฟ ตารางหรือแผนภูมิ และด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา

เบญจวรรณ อินชัยวงศ์ (2533: 35) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ข้อสมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในจังหวัดพิษณุโลก" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ จำนวน 241 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือแบบทดสอบแสดงวิธีทำเพื่อหาความผิดพลาดในการแก้โจทย์ข้อสมการ ผลการวิจัยพบว่า ระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนมีความสัมพันธ์กับประเภทความผิดพลาดในการแก้โจทย์ข้อสมการ และการแก้โจทย์ข้อสมการที่เกิดความผิดพลาดประเภทต่าง ๆ มีความสัมพันธ์กับเพศของนักเรียน

ประดิษฐ์ วิชัย (2533: 45) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "ความผิดพลาดในการแก้ปัญหา  
 โจทย์คณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในจังหวัดกำแพงเพชร"  
 กลุ่มตัวอย่างประชากรคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในจังหวัดกำแพงเพชรจำนวน 364  
 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวัดความผิดพลาดในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์  
 เรื่อง เศษส่วนใน 3 ด้านคือ ความผิดพลาดด้านกระบวนการ ความผิดพลาดด้านคิดคำนวณ  
 และความผิดพลาดด้านการประยุกต์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกระทำผิดพลาดตามที่คาดหวัง  
 ไว้จำนวนมาก คือ ความผิดพลาดด้านการคำนวณ ความผิดพลาดด้านกระบวนการและความ  
 ผิดพลาดด้านการประยุกต์ ตามลำดับ

#### งานวิจัยต่างประเทศ

บรูคเนอร์ และบอนด์ (Bruckner and Bond, 1955: 276-277) ได้ศึกษาข้อ  
 บกพร่องในการเรียนเรื่อง เศษส่วนและสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยเป็นหน่วยย่อย ๆ คือ การบวก  
 การลบ การคูณ และการหาร โดยศึกษาจากนักเรียนเกรด 5-6 จำนวน 600 คน  
 พร้อมทั้งได้รวบรวมข้อบกพร่องของเด็กไว้หลายประการ คือ

1. การบวก มีความไม่เข้าใจในกระบวนการ เช่น บวกเศษกับเศษ บวกส่วน  
 กับส่วน มีปัญหาเรื่องการทำให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ มีปัญหาในการทำเศษส่วนให้เป็นจำนวน  
 คละ มีปัญหาในการคิดคำนวณและบวกเฉพาะบางส่วนของจำนวน
2. การลบ มีความไม่เข้าใจในกระบวนการ มีปัญหาในการทำเป็นเศษส่วน  
 อย่างต่ำ มีความผิดพลาดในการคิดคำนวณและลบเฉพาะบางส่วนของจำนวน
3. การคูณ มีความผิดพลาดในการคิดคำนวณไม่เข้าใจกระบวนการมีปัญหาในการ  
 ทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ ฯลฯ
4. การหาร ใช้วิธีการผิด เช่นการเปลี่ยนเป็นวิธีคูณ โดยไม่กลับเศษส่วนของ  
 ตัวหารผิดพลาดในการคิดคำนวณ และมีปัญหาในการทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

อีลลิส (Ellis, 1972: 2234-A) ได้ทำการศึกษาจุดบกพร่องในการเรียนของชั้นประถมศึกษาในเนื้อหาการคำนวณเลขจำนวนเต็มที่เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นบ่อย ๆ โดยทำการศึกษา กับกลุ่มนักเรียนเกรด 6 จำนวน 690 คน นำผลการทดสอบมาแยกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ตอบถูกทั้งหมด กลุ่มที่ทำถูกวิธีแต่คำตอบผิด และกลุ่มซึ่งผิดทั้งวิธีทำและคำตอบ กลุ่มซึ่งทำถูกวิธีแต่คำตอบผิดได้รับการทดสอบย่อยด้วยแบบทดสอบวินิจฉัย เพื่อหาจุดบกพร่อง ผลจากการศึกษาพบว่า มีข้อบกพร่องในการบวก 17 เปอร์เซ็นต์ การคูณเลขหลักเดียว 14 เปอร์เซ็นต์ การคูณด้วยตัวเลขสองหลัก 16 เปอร์เซ็นต์

บอสแลนด์ (Bosland, 1978: 4636-A) ได้ศึกษาจุดบกพร่องเพื่อทำการสอนซ่อมเสริม ในจุดที่บกพร่องในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องการบวกสำหรับนักเรียนเกรด 3 และเกรด 4 โดยใช้แบบทดสอบวินิจฉัย ค้นหาจุดบกพร่องผลการศึกษาพบว่า นักเรียนซึ่งมีข้อบกพร่องในการเรียนคณิตศาสตร์เป็นเพราะขาดทักษะพื้นฐานเกี่ยวกับระบบจำนวน

เดวิส (Davis, 1979: 8-12) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อผิดพลาดของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างของสาเหตุข้อบกพร่อง พร้อมทั้งวิธีการแก้ไขผลการวิจัยพบข้อผิดพลาดในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ เลขคณิต พีชคณิต เรขาคณิต และแคลคูลัส 7 อย่าง คือ ข้อผิดพลาดที่เกี่ยวข้องกับการสับสนกฎเกณฑ์ ลำดับโครงสร้าง การตีความ ด้านภาษา การสรุปประโยคที่แสดงเกี่ยวกับกิริยา การให้เหตุผล การใช้กฎที่ผิดลำดับขั้นตอน

แครรี่ หลุยส์ และเบอร์นาร์ด (Carry, Lewis and Bernard, 1980: 82-84) ได้ศึกษารูปแบบของวิธีการแก้สมการของนักศึกษาในระดับวิทยาลัย โดย protocol technique จากการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดปรากฏผลดังนี้

1. นักเรียนผู้ซึ่งผิดพลาดอันหนึ่งมักจะผิดพลาดอันอื่น ๆ ด้วย
2. ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับนักเรียนไม่ได้ชี้ถึงความผิดพลาดในการคิดเท่านั้นแต่จะบอกถึงความบกพร่องในความรู้ของเขาด้วย
3. ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเป็นรูปแบบที่แน่นอน

บุท และคณะ (Booth et. al, 1984: 278) ได้ทำการวิจัย "การวิเคราะห์และข้อผิดพลาดทางการเรียนที่ชคณิตของนักเรียน ในโรงเรียนมัธยมศึกษา" โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการสอนและข้อผิดพลาดในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในประเทศอังกฤษที่มีอายุระหว่าง 13-15 ปี จำนวน 3,550 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบที่มีชื่อว่า CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science) ผลการวิจัยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีความผิดพลาดในด้านต่าง ๆ เช่น การให้ความเหมาะสมของตัวอักษร ความสัมพันธ์ของตัวอักษร เครื่องหมายกฎ และสัญลักษณ์ วิธีการที่นักเรียนใช้ในการคำนวณ วิธีการใช้สัญลักษณ์ ฯลฯ

สมชัย ชินะตระกูล (2528: 3-6) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "ความสัมพันธ์ระหว่างการแก้ปัญหาโจทย์ธรรมดากับการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน" กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 8 ในเมือง โคลัมเบีย รัฐมิสซูรี จำนวน 32 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 3 ชนิด คือ แบบทดสอบการแก้ปัญหาโจทย์ธรรมดา ชุดอุปกรณ์เกี่ยวกับการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันซึ่งสัมพันธ์กับโจทย์ ปัญหาธรรมดา ข้อต่อข้อและใช้การสังเกตและสัมภาษณ์แทนการทดสอบ และแบบสอบถามวิธีการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ธรรมดา มีความสัมพันธ์อย่างสูงกับความสามารถในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน และในการแก้ปัญหาโจทย์ธรรมดานักเรียนมักมีข้อผิดพลาดเกี่ยวกับสิ่งกั๊บ เช่น การลบราคาขายด้วยเปอร์เซ็นต์ การคิดชั่วโมงและนาทีเป็นทศนิยม มีการใช้วิธีการกระทำที่ผิด การนับผิด การคิดคำนวณผิด การตั้งสมการผิดหรือการใช้สูตรผิด ส่วนในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน นักเรียนมีข้อผิดพลาดเกี่ยวกับสิ่งกั๊บน้อยกว่าในการแก้ปัญหาโจทย์ธรรมดาและความผิดพลาดที่มีบ่อย ได้แก่ ความผิดพลาดในการอ่านตารางเวลา หรือตารางระยะทางระหว่างเมืองในแผนที่ นอกจากนี้ก็มีความผิดพลาดเกี่ยวกับการฟัง และการคิดคำนวณ

ปราโมทย์ มากชู (1985: 144) ได้ทำการศึกษาถึงความผิดพลาดในการแก้สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 160 คน จาก 8 โรงเรียนในจังหวัดภาคเหนือของประเทศไทย โดยการใช้แบบทดสอบที่สร้างขึ้นเพื่อวัดความผิดพลาดที่คาดหวัง (Expected Error) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและการทำให้เป็นผล



สำเร็จมากกว่าการประยุกต์ และนักเรียนที่เก่งคณิตศาสตร์มีข้อผิดพลาดน้อยกว่านักเรียนมีอ่อนคณิตศาสตร์

ไชย (Chai, 1987: 189-198) ได้ทำการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาในสิงคโปร์ เรื่องเกี่ยวกับพีชคณิตและสมการโดยทำการศึกษากับกลุ่มนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา (อายุ 12 ปี) จำนวน 100 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบถามวิจัยข้อบกพร่องรูปแบบของเชลเซีย และทดสอบนักเรียนโดยการสัมภาษณ์ นำผลการสอบทั้งสองอย่างของนักเรียนแต่ละคนมาพิจารณาหาจุดบกพร่องในวิธีการ 6 อย่าง คือ การประเมินตัวอักษร ตัวอักษรที่ไม่มีประโยชน์ ตัวอักษรที่ใช้แทนสิ่งของ ตัวอักษรที่ไม่ทราบความหมาย ตัวอักษรที่ใช้ตัวเลขและตัวแปร ผลที่พบคือ นักเรียนที่ใช้กลวิธีของเขาเองจะล้มเหลวถ้าพบปัญหาที่ยาก นอกจากนั้นข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นกับนักเรียนส่วนใหญ่ก็เนื่องมาจากการตีความหมายที่ผิดจากการอ่านใจทथ่ ความคิดที่ผิดในการตีความหมายของตัวอักษรและจากการสัมภาษณ์ทำให้พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์หรือให้ความหมายที่ผิดในการใช้วงเล็บ

อง และลิม (Ong and Lim, 1987: 199-205) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "ความเข้าใจและข้อผิดพลาดในวิชาเลขคณิต" โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อสำรวจผลการสอนเกี่ยวกับ ความเข้าใจในวิชาพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในสิงคโปร์ ตัวอย่างประชากรคือ นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาที่มีอายุระหว่าง 15-16 ปี 3 กลุ่มเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (Secondary Four Students) จำนวน 356 คน นักเรียนระดับเตรียมอุดมศึกษาปีที่ 1 (Pre-University I Students) จำนวน 356 คน และนักเรียนระดับวิทยาลัย (Junior Colleges) จำนวน 267 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบพีชคณิตที่ผู้วิจัยคิดแปลงมาจากของ Evans (1983) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนไม่แก้ปัญหาพีชคณิตง่าย ๆ ได้ และสาเหตุข้อผิดพลาดส่วนใหญ่เนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจการใช้ตัวอักษรแทนตัวแปรหรือค่าคงที่ นักเรียนไม่สามารถแก้สมการ ซึ่งมีตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวแปร หรือสมการที่ยากกว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ และนักเรียนใช้การแทนค่าจำนวนในสมการโดยไม่พิจารณากรณีที่เป็นไปไม่ได้ เช่น การใช้ศูนย์แทนค่าใดค่าหนึ่งในสมการ

ไมร์โซวิทซ์-ฮาดาร์ และคณะ (Movshovitz-Hadar et. al, 1987: 3-14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง "การวิเคราะห์รูปแบบข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา" ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ ลักษณะข้อบกพร่อง จำนวน 5 ด้าน และแบบสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องตามลักษณะข้อบกพร่อง เรียงตามลำดับความถี่จากมากไปหาน้อยในด้านต่าง ๆ ต่อไปนี้ คือ การบิดเบือน ทฤษฎี กฎ สูตร และนิยาม การใช้เทคนิคในการทำผิด การใช้ข้อมูลผิด ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา การอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ และ ไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา

ทรูแรน (Truran, 1987: 92-96) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความผิดพลาดและเทคนิคการแก้ไขในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยทำการศึกษามัธยมศึกษาที่มีอายุระหว่าง 7-15 ปี ที่มีอุปสรรคในการเรียนคณิตศาสตร์ เครื่องมือที่ทำการวิจัยเป็นแบบทดสอบและการสัมภาษณ์ซึ่งมีการบันทึกเสียงไว้ แล้วนำมาสรุปผลการสาเหตุที่ผิดของนักเรียนแต่ละคน ตามระดับความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ซึ่งพิจารณาโดยใช้รูปแบบความผิดพลาด 9 ด้านของคาเชย์ คือ รูปแบบของคำถามการอ่านคำถาม ความเข้าใจในคำถาม กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้ ทักษะการเลือกใช้ความรู้ ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ การเสนอคำตอบ ความผิดพลาดซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้เนื่องจากการขาดความระมัดระวังและความผิดพลาดซึ่งครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน ผลการศึกษาพบข้อผิดพลาดตามรูปแบบนี้ แล้วนำเสนอวิธีแก้ไข คือ ให้ใช้ประโยชน์จากสิ่งที่เป็นนามธรรมมาช่วยทั้งในส่วนบุคคลและในชั้นเรียน ให้นักเรียนใช้สมุดจดคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่พบใหม่พร้อมทั้งความหมาย ใช้ทักษะการอ่านในการแก้โจทย์ปัญหาตามลำดับขั้นต่อไป วิเคราะห์ประโยคอ่านซ้ำ ข้อความที่ไม่เข้าใจ ค้นหาคำถามซึ่งต้องการคำตอบ ค้นหาว่าตนเองกำลังศึกษาโจทย์ถึงขั้นใด อ่านประโยคดัง ๆ ถ้ายังไม่เข้าใจ ปรับระดับ และรูปแบบการอ่านให้ตรงกับเนื้อหาจนเข้าใจ ในเนื้อหาของคำถาม แล้วแปลความหมายของสิ่งที่อ่านไปสู่การคำนวณ นอกจากนี้ครูควรช่วยเหลือให้นักเรียนแก้ปัญหาที่เรียน โดยการอธิบายในชั้นเรียนก่อนที่จะให้นักเรียนฝึกทำ

บาราสี (Barasi, 1989:27-31) ได้ทำการศึกษาเรื่อง "กลุ่มของการใช้โครงสร้างข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์" โดยมีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาวิธีการสอนคณิตศาสตร์ที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจข้อผิดพลาดของตนเอง และสามารถที่จะนำมาแก้ไขข้อผิดพลาดเพื่อที่จะได้เข้าใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนหญิงเกรด 11 โดยใช้วิธีการทดลองสอบบทเรียนคณิตศาสตร์ 10 บท ผลการวิจัยพบกลุ่มของข้อผิดพลาดที่เป็นไปได้ทางการเรียน 8 ข้อ ซึ่งจะวิเคราะห์ได้จากพฤติกรรมของนักเรียน

แบลนโด และคณะ (Blando et. al, 1989: 301-308) ได้ทำการศึกษาเรื่อง "การวิเคราะห์และรูปแบบความคลาดเคลื่อนทางเลขคณิต" วัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อศึกษารูปแบบความผิดพลาดของนักเรียนในการใช้เครื่องหมายทางเลขคณิตที่เกี่ยวข้องกับจำนวนกลุ่มตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 7 จำนวน 39 คน ของโรงเรียนขนาดกลางในรัฐซานฟรานซิสโก โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มนักเรียนที่มีทักษะในการเรียนเลขคณิตอยู่ในเกณฑ์ดีกับกลุ่มนักเรียนที่มีทักษะในการเรียนเลขคณิตในเกณฑ์ต่ำ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบเลขคณิตที่เกี่ยวข้องกับความผิดพลาดในการทำเลขคณิตของนักเรียนจำนวน 3 ฉบับ โดยศึกษาความคลาดเคลื่อนของนักเรียนในด้านการลำดับที่มากกว่า การทำผิดความหมาย และรูปแบบของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น เนื่องจากการขาดความระมัดระวัง ผลการวิจัยพบว่าข้อผิดพลาดในการคำนวณของนักเรียนมีหลายรูปแบบ เช่น ผิดพลาดในการบวกก่อนคูณเป็นจำนวน 67 เปอร์เซ็นต์ การคูณแทนการบวก 10 เปอร์เซ็นต์ ขาดความระมัดระวังในการคูณ 3 เปอร์เซ็นต์ ฯลฯ

จากงานวิจัยในประเทศและต่างประเทศที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่านักเรียนส่วนมากมีความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับการคิดคำนวณ ขาดทักษะพื้นฐานเกี่ยวกับระบบจำนวน การตีความหมายที่ผิดจากการอ่านโจทย์ การตีความด้านภาษาไม่เข้าใจการใช้ตัวแปรแทนตัวไม่ทราบค่าไม่เห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร บกพร่องในการแปลงภาษาโจทย์เป็นภาษาคณิตศาสตร์ และบกพร่องในการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา