รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

บัณฑิต โรจน์อารยานนท์. วิศวกรรมไมโครเวฟ. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2536.

ภาษาอังกฤษ

Alam, M.S., Hirayama, K., Hayashi, Y., and Koshiba, M. Analysis of Shielded Microstrip Lines with Arbitrary Metallization Cross Section Using a Vector Finite Element Method. IEEE Trans. Microwave and Techniques 42 (November 1994): 2112-2117.

Anderson B.C., and Cendez, Z.J. Solution of Ferrite Loaded Waveguide using Vector Finite Elements. IEEE Trans. Magnetics 31 (May 1995): 1578-1581.

Angkaew, T., Matsuhara, M. and Kumagai, N. Finite-Element Analysis of Waveguide Modes: A Novel Approach That Eliminates Spurious Modes. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 35 (February 1987): 117-123.

Balanis, C.A. Advanced engineering electromagnetics. United States of America: John Wiley & Sons, 1989.

Bardi, I., and Biro, O. An Efficient Finite-Element Formulation Without Spurious Modes for Anisotropic Waveguides. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 39 (July 1991): 1133-1139.

Bossavit, A. Whitney Forms: A Class of Finite Elements for Three-Dimensional Computations in Electromagnetism. IEE Proceedings Pt. A 135 (November 1988): 493-500.

Chew, W.C. Waves and fields in inhomogenous media. United States of America: IEEE PRESS, 1995.

_______., and Nasir, M.A. A Variational Analysis of Anisotropic Inhomogenous Dielectric Waveguides. IEEE Trans. Microwave and Techniqes 37 (April 1989): 661-668.

Collin, R.E. Field theory of guided wave. 2nd ed. United States of America: IEEE PRESS, 1991.

_______. Foundations for microwave engineering. 2nd ed. Singapore: McGraw-Hill, 1996.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Fernandez, F.A., and Lu, Y. A Variational Finite Element Formulation for Dielectric Waveguides in Terms of Transverse Magnetic Fields. IEEE Trans. Magnetics 27 (September 1991): 3864-3867.

Hano, M. Finite-Element Analysis of Dielectric-Loaded Waveguides. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 10 (October 1984): 1275-1279.

Harrington, R.F. Field computation by moment method. United States of America: IEEE PRESS, 1993.

Hayata, K., Eguchi, M., and Koshiba, M. Finite Element Formulation for Guided-Wave Problems Using Transverse Electric Field Component. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 37 (January 1989): 256-258.

_______., Koshiba, M., Eguchi, M., and Suzuki, M. Vectorial Finite-Element Method Without Any Spurious Solutions for Dielectric Waveguiding Problems Using Transverse Magnetic-Field Component. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 34 (November 1986): 1120-1124.

Hughes, T.J.R. The finite element method linear static and dynamic finite element analysis. United States of America: Prentice-Hall, 1987.

Itoh, T., ed. Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures. Singapore: John Wiley & Sons, 1989.

Jin, J. Finite element method in electromagnetics. Singapore: Jonh Wiley & Sons, 1993.

Kardestuncer, H., ed. Finite element handbook. Singapore: McGraw-Hill, 1988.

Kong, J.A. Electromagnetic wave theory. Singapore: John Wiley & Sons, 1986.

Koshiba, M. Optical waveguide analysis. United States of America: McGraw-Hill, 1990.

_______., Hayata, K., and Suzuki, M. Approximate Scalar Finite-Element Analysis of Anisotropic Optical Waveguides with Off-Diagonal Elements in a Permittivity Tensor. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 32 (June 1984): 587-593.

_______., Hayata, K., and Suzuki, M. Finite-Element Formulation in Terms of the Electric-Field Vector for Electromagnetic Waveguide Problems. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 33 (October 1985): 900-905.

_______., Hayata, K., and Suzuki, M. Improved Finite-Element Formulation in Terms of the Magnrtic Field Vector for Dielectric Waveguides. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 33 (March 1985): 227-232.

Koshiba, M., and Inoue, K. Simple and Efficient Finite-Element Analysis of Microwave and Optical Waveguides. IEEE Trans. Microwave and Techniques 40 (Febuary 1992): 371-377.

________., Maruyama, S., and Hirayama, K. A Vector Finite Element Method With the High-Order Mixed-Interpolation-Type Triangular Elements for Optical Waveguiding Problems. IEEE Trans. Lightwave Technology 12 (March 1994): 495-502.

Lee, J. Finite Element Analysis of Lossy Dielectric Waveguides. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 42 (June 1994): 1025-1031.

________., Sun, D., and Cendez, Z. Full-Wave Analysis of Dielectric Waveguides Using Tangantial Vector Finite Elements. IEEE Trans. Microwave and Techniques 39 (August 1991): 1262-1271.

Lu, Y., and Fernandez, F.A. An Efficient Finite Element Solution of Inhomogenous Anisotropic and Lossy Dielectric Waveguides. IEEE Trans. Microwave and Techniques 41 (June/July 1993): 1215-1223.

Marcuse, D. Theory of dielectric optical waveguides. United States of America: ACADEMIC PRESS, 1974.

Rahman, B.M.A. and Davies, J.B. Penalty Function Improvement of Waveguide Solution by Finite Elements. IEEE Trans. Microwave and Techniques 32 (August 1984): 922-928.

Silvester, P.P., and Ferrari, R.I. Finite element for electrical engineer. 2nd ed. Malta: Cambridge University Press, 1991.

________., and Pelosi, G., ed. Finite element for wave electromagnetics method and techniques. United States of America: IEEE Press, 1994.

Sun, D., Manges, J., Yuan, X., and Cendes, Z. Spurious Modes in Finite-Element Methods. IEEE Trans. Antennas and Propagation 37 (October 1995): 12-24.

Svedin, J.A.M. A Numerically Efficient Finite-Element Formulation for the General Waveguide Problem Without Spurious Modes. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 37 (November 1989): 1708-1715.

Tan, J., and Pan, G. A New Edge Element Analysis of Dispersive Waveguiding Structures. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 43 (November 1995): 2600-2607.

Valor, L., and Zapata, J. Efficiency Finite Element Analysis of Waveguides with Lossy Inhomogenous Anisotropic Materials Characterized by Arbitrary Permittivity and Permeability Tensors. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 43 (October 1995): 2452-2459.

Webb, J.P. Edge Element and What They can do for You. IEEE Trans. Magnetics 29 (March 1993): 1460-1465.

Whitney, H. Geometric integration theory. Princeton,NJ: Princeton University, 1957.

Wong, S.H.,.and Cendes, Z.J. Combined Finite Element-Modal Solution of Three-Dimensional Eddy Current Problems. IEEE Trans. Magnetics 24 (November 1988): 2685-2687.

Zhang, W.X. Engineering electromagnetism: functional methods. West Sussex: Ellis Horwood Limited, 1991.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

นิพจน์แปรผันของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ

นิพจน์แปรผันสำหรับวิเคราะห์ท่อนำคลื่นในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบคือ

$$\bar{F}(H,k_0) = \{H\}^T([S] + p^2[L])\{H\} - \{H\}^T k_0^2 [M]\{H\} \tag{ก.1}$$

เมื่อ

$$\{H\} = \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ \{H_z\} \end{bmatrix} \tag{ก.2}$$

p คือสัมประสิทธิ์พีนอลตี

เมตริกซ์ $[S]$ ในสมการ (ก.1) สามารถหาได้จากสมการ

$$[S] = \sum_e \iint_e [T]^* [\varepsilon_r]^{-1} [T]^T \, dxdy \tag{ก.3}$$

เมื่อ

$$[T] = \begin{bmatrix} \{0\} & -j\beta\{N\} & -\partial\{N\}/\partial y \\ j\beta\{N\} & \{0\} & \partial\{N\}/\partial x \\ j\partial\{N\}/\partial y & -j\partial\{N\}/\partial x & \{0\} \end{bmatrix} \tag{ก.4}$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[\varepsilon_r]^{-1}$ คือ

$$\begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{bmatrix} = [\varepsilon_r]^{-1} \tag{ก.5}$$

และกำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ คือ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{bmatrix} [S_{xx}] & [S_{xy}] & [S_{xz}] \\ [S_{yx}] & [S_{yy}] & [S_{yz}] \\ [S_{zx}] & [S_{zy}] & [S_{zz}] \end{bmatrix} = [S] \qquad (ก.6)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[S_{xx}]$, $[S_{xy}]$,...., $[S_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3
แทนสมการ (ก.4) และ (ก.5) ในสมการ (ก.3) เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ ในสมการ (ก.6) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S_{xx}] = \sum_e \iint_e (\beta^2 \rho_{yy} \{N\}\{N\}^T - j\beta\rho_{yz} \{N\}\{N\}_y^T + j\beta\rho_{zy} \{N\}_y \{N\}^T$$
$$+ \rho_{zz} \{N\}_y \{N\}_y^T) dxdy \qquad (ก.7)$$

$$[S_{xy}] = \sum_e \iint_e (-\beta^2 \rho_{yx} \{N\}\{N\}^T + j\beta\rho_{yz} \{N\}\{N\}_x^T - j\beta\rho_{zx} \{N\}_y \{N\}^T$$
$$- \rho_{zz} \{N\}_y \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ก.8)$$

$$[S_{xz}] = \sum_e \iint_e (-\beta\rho_{yx} \{N\}\{N\}_y^T + \beta\rho_{yy} \{N\}\{N\}_x^T - j\rho_{zx} \{N\}_y \{N\}_y^T$$
$$+ j\rho_{zy} \{N\}_y \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ก.9)$$

$$[S_{yx}] = \sum_e \iint_e (-\beta^2 \rho_{xy} \{N\}\{N\}^T + j\beta\rho_{xz} \{N\}\{N\}_y^T - j\beta\rho_{zy} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$- \rho_{zz} \{N\}_x \{N\}_y^T) dxdy \qquad (ก.10)$$

$$[S_{yy}] = \sum_e \iint_e (\beta^2 \rho_{xx} \{N\}\{N\}^T - j\beta\rho_{xz} \{N\}\{N\}_x^T + j\beta\rho_{zx} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$+ \rho_{zz} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ก.11)$$

$$[S_{yz}] = \sum_e \iint_e (\beta\rho_{xx} \{N\}\{N\}_y^T - \beta\rho_{xy} \{N\}\{N\}_x^T + j\rho_{zx} \{N\}_x \{N\}_y^T$$
$$- j\rho_{zy} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ก.12)$$

$$[S_{zx}] = \sum_e \iint_e (-\beta\rho_{xy} \{N\}_y \{N\}^T + j\rho_{xz} \{N\}_y \{N\}_y^T + \beta\rho_{yy} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$- j\rho_{yz} \{N\}_x \{N\}_y^T) dxdy \qquad (ก.13)$$

$$[S_{zy}] = \sum_e \iint_e (\beta\rho_{xx} \{N\}_y \{N\}^T - j\rho_{xz} \{N\}_y \{N\}_x^T - \beta\rho_{yx} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$+ j\rho_{yz} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ก.14)$$

$$[S_{zz}] = \sum_e \iint_e (\rho_{xx} \{N\}_y \{N\}_y^T - \rho_{xy} \{N\}_y \{N\}_x^T - \rho_{yx} \{N\}_x \{N\}_y^T$$
$$+ \rho_{yy} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ก.15)$$

เมตริกซ์ $[L]$ ในสมการ (ก.1) สามารถหาได้จากสมการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[L]=\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{C\}\{C\}^T dxdy \tag{ก.16}$$

เมื่อ

$$\{C\}=\begin{bmatrix}\partial\{N\}/\partial x\\ \partial\{N\}/\partial y\\ \beta\{N\}\end{bmatrix} \tag{ก.17}$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[L]$ คือ

$$\begin{bmatrix}[L_{xx}] & [L_{xy}] & [L_{xy}]\\ [L_{yx}] & [L_{yy}] & [L_{yz}]\\ [L_{zx}] & [L_{zy}] & [L_{zz}]\end{bmatrix}=[L] \tag{ก.18}$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[L_{xx}]$, $[L_{xy}]$,...., $[L_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3

แทนสมการ (ก.17) ในสมการ (ก.16) เมตริกซ์ย่อยของ $[L]$ ในสมการ (ก.18) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[L_{xx}]=\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}_x\{N\}_x^T dxdy \tag{ก.19}$$

$$[L_{xy}]=\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}_x\{N\}_y^T dxdy \tag{ก.20}$$

$$[L_{xz}]=\beta\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}_x\{N\}^T dxdy \tag{ก.21}$$

$$[L_{yx}]=\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}_y\{N\}_x^T dxdy \tag{ก.22}$$

$$[L_{yy}]=\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}_y\{N\}_y^T dxdy \tag{ก.23}$$

$$[L_{yz}]=\beta\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}_y\{N\}^T dxdy \tag{ก.24}$$

$$[L_{zx}]=\beta\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}\{N\}_x^T dxdy \tag{ก.25}$$

$$[L_{zy}]=\beta\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}\{N\}_y^T dxdy \tag{ก.26}$$

$$[L_{zz}]=\beta^2\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}\{N\}^T dxdy \tag{ก.27}$$

เมตริกซ์ $[M]$ ในสมการ (ก.1) สามารถหาได้จากสมการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[M]=\sum_{e}\iint_{e}\mu_r[N]^{*}[N]^{T}\,dxdy \qquad (ก.28)$$

เมื่อ
$$[N]=\begin{bmatrix}\{N\} & \{0\} & \{0\}\\ \{0\} & \{N\} & \{0\}\\ \{0\} & \{0\} & j\{N\}\end{bmatrix} \qquad (ก.29)$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[M]$ คือ

$$\begin{bmatrix}[M_{xx}] & [M_{xy}] & [M_{xz}]\\ [M_{yx}] & [M_{yy}] & [M_{yz}]\\ [M_{zx}] & [M_{zy}] & [M_{zz}]\end{bmatrix}=[M] \qquad (ก.30)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[M_{xx}]$, $[M_{xy}]$,..., $[M_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 แทนสมการ (ก.29) ในสมการ (ก.28) เมตริกซ์ย่อยของ $[M]$ ในสมการ (ก.30) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[M_{xx}]=[M_{yy}]=[M_{zz}]=\sum_{e}\iint_{e}\mu_r\{N\}\{N\}^{T}\,dxdy \qquad (ก.31)$$

$$[M_{xy}]=[M_{yx}]=[0] \qquad (ก.32)$$

$$[M_{xz}]=[M_{zx}]=[0] \qquad (ก.33)$$

$$[M_{yz}]=[M_{zy}]=[0] \qquad (ก.34)$$

เมื่อ $\{N\}_x \equiv \partial\{N\}/\partial x$, $\{N\}_y \equiv \partial\{N\}/\partial y$, T คือ ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน ผลอินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละอีลีเมนต์ แสดงไว้ในภาคผนวก ฉ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นิพจน์แปรผันของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ

นิพจน์แปรผันสำหรับวิเคราะห์ท่อนำคลื่นที่ใช้ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ คือ

$$\tilde{F}(E,k_0)=\{E\}^T([S]+p^2[L])\{E\}-\{E\}^T k_0^2[M]\{E\} \qquad (ข.1)$$

เมื่อ

$$\{E\}=\begin{bmatrix}\{E_x\}\\ \{E_y\}\\ \{E_z\}\end{bmatrix} \qquad (ข.2)$$

p คือสัมประสิทธิ์พีนอลตี

เมตริกซ์ $[S]$ ในสมการ (ข.1) สามารถหาได้จากสมการ

$$[S]=\sum_e \iint_e [T]^*[\mu_r]^{-1}[T]^T\,dxdy \qquad (ข.3)$$

เมื่อ

$$[T]=\begin{bmatrix}\{0\} & -j\beta\{N\} & -\partial\{N\}/\partial y\\ j\beta\{N\} & \{0\} & \partial\{N\}/\partial x\\ j\partial\{N\}/\partial y & -j\partial\{N\}/\partial x & \{0\}\end{bmatrix} \qquad (ข.4)$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[\mu_r]^{-1}$ คือ

$$\begin{bmatrix}\upsilon_{xx} & \upsilon_{xy} & \upsilon_{xz}\\ \upsilon_{yx} & \upsilon_{yy} & \upsilon_{yz}\\ \upsilon_{zx} & \upsilon_{zy} & \upsilon_{zz}\end{bmatrix}=[\mu_r]^{-1} \qquad (ข.5)$$

และกำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ คือ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{bmatrix} [S_{xx}] & [S_{xy}] & [S_{xz}] \\ [S_{yx}] & [S_{yy}] & [S_{yz}] \\ [S_{zx}] & [S_{zy}] & [S_{zz}] \end{bmatrix} = [S] \qquad (ข.6)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[S_{xx}]$, $[S_{xy}]$,..., $[S_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3

แทนสมการ (ข.4) และ (ข.5) ในสมการ (ข.3) เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ ในสมการ (ข.6) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S_{xx}] = \sum_e \iint_e (\beta^2 \upsilon_{yy} \{N\}\{N\}^T - j\beta\upsilon_{yz} \{N\}\{N\}_y^T + j\beta\upsilon_{zy} \{N\}_y \{N\}^T$$
$$+ \upsilon_{zz} \{N\}_y \{N\}_y^T) dxdy \qquad (ข.7)$$

$$[S_{xy}] = \sum_e \iint_e (-\beta^2 \upsilon_{yx} \{N\}\{N\}^T + j\beta\upsilon_{yz} \{N\}\{N\}_x^T - j\beta\upsilon_{zx} \{N\}_y \{N\}^T$$
$$- \upsilon_{zz} \{N\}_y \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ข.8)$$

$$[S_{xz}] = \sum_e \iint_e (-\beta\upsilon_{yx} \{N\}\{N\}_y^T + \beta\upsilon_{yy} \{N\}\{N\}_x^T - j\upsilon_{zx} \{N\}_y \{N\}_y^T$$
$$+ j\upsilon_{zy} \{N\}_y \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ข.9)$$

$$[S_{yx}] = \sum_e \iint_e (-\beta^2 \upsilon_{xy} \{N\}\{N\}^T + j\beta\upsilon_{xz} \{N\}\{N\}_y^T - j\beta\upsilon_{zy} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$- \upsilon_{zz} \{N\}_x \{N\}_y^T) dxdy \qquad (ข.10)$$

$$[S_{yy}] = \sum_e \iint_e (\beta^2 \upsilon_{xx} \{N\}\{N\}^T - j\beta\upsilon_{xz} \{N\}\{N\}_x^T + j\beta\upsilon_{zx} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$+ \upsilon_{zz} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ข.11)$$

$$[S_{yz}] = \sum_e \iint_e (\beta\upsilon_{xx} \{N\}\{N\}_y^T - \beta\upsilon_{xy} \{N\}\{N\}_x^T + j\upsilon_{zx} \{N\}_x \{N\}_y^T$$
$$- j\upsilon_{zy} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ข.12)$$

$$[S_{zx}] = \sum_e \iint_e (-\beta\upsilon_{xy} \{N\}_y \{N\}^T + j\upsilon_{xz} \{N\}_y \{N\}_y^T + \beta\upsilon_{yy} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$- j\upsilon_{yz} \{N\}_x \{N\}_y^T) dxdy \qquad (ข.13)$$

$$[S_{zy}] = \sum_e \iint_e (\beta\upsilon_{xx} \{N\}_y \{N\}^T - j\upsilon_{xz} \{N\}_y \{N\}_x^T - \beta\upsilon_{yx} \{N\}_x \{N\}^T$$
$$+ j\upsilon_{yz} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ข.14)$$

$$[S_{zz}] = \sum_e \iint_e (\upsilon_{xx} \{N\}_y \{N\}_y^T - \upsilon_{xy} \{N\}_y \{N\}_x^T - \upsilon_{yx} \{N\}_x \{N\}_y^T$$
$$+ \upsilon_{yy} \{N\}_x \{N\}_x^T) dxdy \qquad (ข.15)$$

เมตริกซ์ $[L]$ ในสมการ (ข.1) สามารถหาได้จากสมการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[L]=\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{C\}\{C\}^T dxdy \qquad (ข.16)$$

เมื่อ
$$\{C\}=\begin{bmatrix} \partial\{N\}/\partial x \\ \partial\{N\}/\partial y \\ \beta\{N\} \end{bmatrix} \qquad (ข.17)$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[L]$ คือ

$$\begin{bmatrix} [L_{xx}] & [L_{xy}] & [L_{xz}] \\ [L_{yx}] & [L_{yy}] & [L_{yz}] \\ [L_{zx}] & [L_{zy}] & [L_{zz}] \end{bmatrix}=[L] \qquad (ข.18)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[L_{xx}]$, $[L_{xy}]$,...., $[L_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3
แทนสมการ (ข.17) ในสมการ (ข.16) เมตริกซ์ย่อยของ $[L]$ ในสมการ (ข.18) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[L_{xx}]=\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}_x \{N\}_x^T dxdy \qquad (ข.19)$$

$$[L_{xy}]=\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}_x \{N\}_y^T dxdy \qquad (ข.20)$$

$$[L_{xz}]=\beta\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}_x \{N\}^T dxdy \qquad (ข.21)$$

$$[L_{yx}]=\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}_y \{N\}_x^T dxdy \qquad (ข.22)$$

$$[L_{yy}]=\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}_y \{N\}_y^T dxdy \qquad (ข.23)$$

$$[L_{yz}]=\beta\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}_y \{N\}^T dxdy \qquad (ข.24)$$

$$[L_{zx}]=\beta\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}\{N\}_x^T dxdy \qquad (ข.25)$$

$$[L_{zy}]=\beta\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}\{N\}_y^T dxdy \qquad (ข.26)$$

$$[L_{zz}]=\beta^2\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}\{N\}^T dxdy \qquad (ข.27)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมตริกซ์ $[M]$ ในสมการ (ข.1) สามารถหาได้จากสมการ

$$[M]=\sum_{e}\iint_{e}\varepsilon_r[N]^{*}[N]^{T}\,dxdy \qquad (ข.28)$$

เมื่อ
$$[N]=\begin{bmatrix}\{N\} & \{0\} & \{0\}\\ \{0\} & \{N\} & \{0\}\\ \{0\} & \{0\} & j\{N\}\end{bmatrix} \qquad (ข.29)$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[L]$ คือ

$$\begin{bmatrix}[M_{xx}] & [M_{xy}] & [M_{xz}]\\ [M_{yx}] & [M_{yy}] & [M_{yz}]\\ [M_{zx}] & [M_{zy}] & [M_{zz}]\end{bmatrix}=[M] \qquad (ข.30)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[M_{xx}]$, $[M_{xy}]$,..., $[M_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 แทนสมการ (ข.29) ในสมการ (ข.28) เมตริกซ์ย่อยของ $[M]$ ในสมการ (ข.30) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[M_{xx}]=[M_{yy}]=[M_{zz}]=\sum_{e}\iint_{e}\varepsilon_r\{N\}\{N\}^{T}\,dxdy \qquad (ข.31)$$

$$[M_{xy}]=[M_{yx}]=[0] \qquad (ข.32)$$

$$[M_{xz}]=[M_{zx}]=[0] \qquad (ข.33)$$

$$[M_{yz}]=[M_{zy}]=[0] \qquad (ข.34)$$

เมื่อ $\{N\}_x \equiv \partial\{N\}/\partial x$, $\{N\}_y \equiv \partial\{N\}/\partial y$, T คือ ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน

นิพจน์แปรผันสำหรับวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟ ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ คือ

$$\bar{F}(E,\beta)=\{E\}^{T}(\beta^{2}[C^{2}]+\beta[C^{1}]+[C^{0}])\{E\} \qquad (ข.35)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[C^{2}]$ คือ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{bmatrix} [C^2_{xx}] & [C^2_{xy}] & [C^2_{xz}] \\ [C^2_{yx}] & [C^2_{yy}] & [C^2_{yz}] \\ [C^2_{zx}] & [C^2_{zy}] & [C^2_{zz}] \end{bmatrix} = [C^2] \tag{ข.36}$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[C^2_{xx}]$, $[C^2_{xy}]$,..., $[C^2_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 เมตริกซ์ย่อยของ $[C^2]$ ในสมการ (ข.36) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[C^2_{xx}] = \sum_e \upsilon_{yy} \{N\}\{N\}^T dxdy \tag{ข.37}$$

$$[C^2_{xy}] = -\sum_e \upsilon_{yx} \{N\}\{N\}^T dxdy \tag{ข.38}$$

$$[C^2_{yx}] = -\sum_e \iint_e \upsilon_{xy} \{N\}\{N\}^T dxdy \tag{ข.39}$$

$$[C^2_{yy}] = \sum_e \iint_e \upsilon_{xx} \{N\}\{N\}^T dxdy \tag{ข.40}$$

$$[C^2_{zz}] = p^2 \sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}\{N\}^T dxdy \tag{ข.41}$$

$$[C^2_{xz}] = [C^2_{zx}] = [0] \tag{ข.42}$$

$$[C^2_{yz}] = [C^2_{zy}] = [0] \tag{ข.43}$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[C^1]$ คือ

$$\begin{bmatrix} [C^1_{xx}] & [C^1_{xy}] & [C^1_{xz}] \\ [C^1_{yx}] & [C^1_{yy}] & [C^1_{yz}] \\ [C^1_{zx}] & [C^1_{zy}] & [C^1_{zz}] \end{bmatrix} = [C^1] \tag{ข.44}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[C^1_{xx}]$, $[C^1_{xy}]$,..., $[C^1_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 เมตริกซ์ย่อยของ $[C^1]$ ในสมการ (ข.44) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[C^1_{xz}] = \sum_e \iint_e j(-\upsilon_{yz} \{N\}\{N\}^T_y + \upsilon_{zy} \{N\}_y \{N\}^T) dxdy \tag{ข.45}$$

$$[C^1_{xy}] = \sum_e \iint_e j(\upsilon_{yz} \{N\}\{N\}^T_x - \upsilon_{zx} \{N\}_y \{N\}^T) dxdy \tag{ข.46}$$

$$[C^1_{zz}] = \sum_e \iint_e (-\upsilon_{yx} \{N\}\{N\}^T_y + \upsilon_{yy} \{N\}\{N\}^T_x + p^2 \varepsilon_r \{N\}_x \{N\}^T) dxdy$$

(ข.47)

$$[C^1_{yx}]=\sum_e \iint_e j(\upsilon_{xz}\{N\}\{N\}^T_y-\upsilon_{zy}\{N\}_x\{N\}^T)dxdy \qquad \text{(ข.48)}$$

$$[C^1_{yy}]=\sum_e \iint_e j(-\upsilon_{xz}\{N\}\{N\}^T_x+\upsilon_{zx}\{N\}_x\{N\}^T)dxdy \qquad \text{(ข.49)}$$

$$[C^1_{yz}]=\sum_e \iint_e (\upsilon_{zx}\{N\}\{N\}^T_y-\upsilon_{xy}\{N\}\{N\}^T_x+p^2\varepsilon_r\{N\}_y\{N\}^T)dxdy \qquad \text{(ข.50)}$$

$$[C^1_{zx}]=\sum_e \iint_e (-\upsilon_{xy}\{N\}_y\{N\}^T+\upsilon_{yy}\{N\}_x\{N\}^T+p^2\varepsilon_r\{N\}\{N\}^T_x)dxdy \qquad \text{(ข.51)}$$

$$[C^1_{zy}]=\sum_e \iint_e (\upsilon_{xx}\{N\}_y\{N\}^T-\upsilon_{yx}\{N\}_x\{N\}^T+p^2\varepsilon_r\{N\}\{N\}^T_y)dxdy \qquad \text{(ข.52)}$$

$$[C^1_{zz}]=[0] \qquad \text{(ข.53)}$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[C^0]$ คือ

$$\begin{bmatrix} [C^0_{xx}] & [C^0_{xy}] & [C^0_{xz}] \\ [C^0_{yx}] & [C^0_{yy}] & [C^0_{yz}] \\ [C^0_{zx}] & [C^0_{zy}] & [C^0_{zz}] \end{bmatrix}=[C^0] \qquad \text{(ข.54)}$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[C^0_{xx}]$, $[C^{01}_{xy}]$,..., $[C^0_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 เมตริกซ์ย่อยของ $[C^0]$ ในสมการ (ข.54) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[C^0_{xx}]=\sum_e \iint_e (\upsilon_{zz}\{N\}_y\{N\}^T_y+p^2\varepsilon_r\{N\}_x\{N\}^T_x-k_0^2\varepsilon_r\{N\}\{N\}^T)dxdy \qquad \text{(ข.55)}$$

$$[C^0_{xy}]=\sum_e \iint_e (-\upsilon_{zz}\{N\}_y\{N\}^T_x+p^2\varepsilon_r\{N\}_x\{N\}^T_y)dxdy \qquad \text{(ข.56)}$$

$$[C^0_{xz}]=\sum_e \iint_e j(-\upsilon_{zx}\{N\}_y\{N^T_y+\upsilon_{zy}\{N\}_y\{N\}^T_x)dxdy \qquad \text{(ข.57)}$$

$$[C^0_{yx}]=\sum_e \iint_e (-\upsilon_{zz}\{N\}_x\{N\}^T_y+p^2\varepsilon_r\{N\}_y\{N\}^T_x)dxdy \qquad \text{(ข.58)}$$

$$[C^0_{yy}]=\sum_e \iint_e (\upsilon_{zz}\{N\}_x\{N\}^T_x+p^2\varepsilon_r\{N\}_y\{N\}^T_y-k_0^2\varepsilon_r\{N\}\{N\}^T)dxdy \qquad \text{(ข.59)}$$

$$[C^0_{yz}]=\sum_e \iint_e j(\upsilon_{zx}\{N\}_x\{N\}^T_y-\upsilon_{zy}\{N\}_x\{N\}^T_x)dxdy \qquad \text{(ข.60)}$$

$$[C_{zx}^{0}] = \sum_{e} \iint_{e} j(\upsilon_{xz}\{N\}_{y}\{N\}_{y}^{T} - \upsilon_{yz}\{N\}_{x}\{N\}_{y}^{T})dxdy \tag{ข.61}$$

$$[C_{zy}^{0}] = \sum_{e} \iint_{e} j(-\upsilon_{xz}\{N\}_{y}\{N\}_{x}^{T} + \upsilon_{yz}\{N\}_{x}\{N\}_{x}^{T})dxdy \tag{ข.62}$$

$$[C_{zz}^{0}] = \sum_{e} \iint_{e} (\upsilon_{xx}\{N\}_{y}\{N\}_{y} - \upsilon_{xy}\{N\}_{y}\{N\}_{x}^{T} - \upsilon_{yx}\{N\}_{x}\{N\}_{y}^{T}$$

$$+\upsilon_{yy}\{N\}_{x}\{N\}_{x}^{T} - k_{0}^{2}\varepsilon_{r}\{N\}\{N\}^{T})dxdy \tag{ข.63}$$

ผลอินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละอีลีเมนต์ แสดงไว้ในภาคผนวก ฉ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

รูปของสมการในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ

นิพจน์แปรผันของสมการคลื่นในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ คือ

$$\tilde{F}(H,k_0) = \{H\}^T([S]-(k_0/\beta)^2[\tilde{M}])\{H\} \tag{ค.1}$$

เมื่อ

$$\{H\} = \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ \{H_z\} \end{bmatrix} \tag{ค.2}$$

เมตริกซ์ $[S]$ ในสมการ (ค.1) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S] = \sum_e \iint_e [T]^* [\varepsilon_r]^{-1} [T]^T \, dxdy \tag{ค.3}$$

เมื่อ

$$[T] = \begin{bmatrix} \{0\} & -j\beta\{N\} & -\partial\{N\}/\partial y \\ j\beta\{N\} & \{0\} & \partial\{N\}/\partial x \\ j\partial\{N\}/\partial y & -j\partial\{N\}/\partial x & \{0\} \end{bmatrix} \tag{ค.4}$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[\varepsilon_r]^{-1}$ คือ

$$\begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{bmatrix} = [\varepsilon_r]^{-1} \tag{ค.5}$$

และกำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ คือ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\begin{bmatrix} [S_{xx}] & [S_{xy}] & [S_{xz}] \\ [S_{yx}] & [S_{yy}] & [S_{yz}] \\ [S_{zx}] & [S_{zy}] & [S_{zz}] \end{bmatrix} = [S] \tag{ค.6}$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[S_{xx}]$, $[S_{xy}]$,..., $[S_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 แทนสมการ (ค.4) และ (ค.5) ในสมการ (ค.3) เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ ในสมการ (ค.6) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S_{xx}] = \sum_e \iint_e (\beta^2 \rho_{yy}\{N\}\{N\}^T - j\beta\rho_{yz}\{N\}\{N\}_y^T + j\beta\rho_{zy}\{N\}_y\{N\}^T + \rho_{zz}\{N\}_y\{N\}_y^T)dxdy \tag{ค.7}$$

$$[S_{xy}] = \sum_e \iint_e (-\beta^2 \rho_{yx}\{N\}\{N\}^T + j\beta\rho_{yz}\{N\}\{N\}_x^T - j\beta\rho_{zx}\{N\}_y\{N\}^T - \rho_{zz}\{N\}_y\{N\}_x^T)dxdy \tag{ค.8}$$

$$[S_{xz}] = \sum_e \iint_e (-\beta\rho_{yx}\{N\}\{N\}_y^T + \beta\rho_{yy}\{N\}\{N\}_x^T - j\rho_{zx}\{N\}_y\{N\}_y^T + j\rho_{zy}\{N\}_y\{N\}_x^T)dxdy \tag{ค.9}$$

$$[S_{yx}] = \sum_e \iint_e (-\beta^2 \rho_{xy}\{N\}\{N\}^T + j\beta\rho_{xz}\{N\}\{N\}_y^T - j\beta\rho_{zy}\{N\}_x\{N\}^T - \rho_{zz}\{N\}_x\{N\}_y^T)dxdy \tag{ค.10}$$

$$[S_{yy}] = \sum_e \iint_e (\beta^2 \rho_{xx}\{N\}\{N\}^T - j\beta\rho_{xz}\{N\}\{N\}_x^T + j\beta\rho_{zx}\{N\}_x\{N\}^T + \rho_{zz}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \tag{ค.11}$$

$$[S_{yz}] = \sum_e \iint_e (\beta\rho_{xx}\{N\}\{N\}_y^T - \beta\rho_{xy}\{N\}\{N\}_x^T + j\rho_{zx}\{N\}_x\{N\}_y^T - j\rho_{zy}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \tag{ค.12}$$

$$[S_{zx}] = \sum_e \iint_e (-\beta\rho_{xy}\{N\}_y\{N\}^T + j\rho_{xz}\{N\}_y\{N\}_y^T + \beta\rho_{yy}\{N\}_x\{N\}^T - j\rho_{yz}\{N\}_x\{N\}_y^T)dxdy \tag{ค.13}$$

$$[S_{zy}] = \sum_e \iint_e (\beta\rho_{xx}\{N\}_y\{N\}^T - j\rho_{xz}\{N\}_y\{N\}_x^T - \beta\rho_{yx}\{N\}_x\{N\}^T + j\rho_{yz}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \tag{ค.14}$$

$$[S_{zz}] = \sum_e \iint_e (\rho_{xx}\{N\}_y\{N\}_y^T - \rho_{xy}\{N\}_y\{N\}_x^T - \rho_{yx}\{N\}_x\{N\}_y^T + \rho_{yy}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \tag{ค.15}$$

เมตริกซ์ $[\tilde{M}]$ ในสมการ (ค.1) สามารถหาได้จากสมการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[\tilde{M}] = \sum_e \iint_e \mu_r [N]^* [N]^T d\bar{x} d\bar{y} \qquad (ค.16)$$

เมื่อ

$$[N] = \begin{bmatrix} \{N\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{N\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & j\{N\} \end{bmatrix} \qquad (ค.17)$$

$$\bar{x} = \beta x \qquad (ค.18)$$

$$\bar{y} = \beta y \qquad (ค.19)$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[\tilde{M}]$ คือ

$$\begin{bmatrix} [\tilde{M}_{xx}] & [\tilde{M}_{xy}] & [\tilde{M}_{xz}] \\ [\tilde{M}_{yx}] & [\tilde{M}_{yy}] & [\tilde{M}_{yz}] \\ [\tilde{M}_{zx}] & [\tilde{M}_{zy}] & [\tilde{M}_{zz}] \end{bmatrix} = [\tilde{M}] \qquad (ค.20)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[\tilde{M}_{xx}]$, $[\tilde{M}_{xy}]$,...., $[\tilde{M}_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 แทนสมการ (ค.17) ในสมการ (ค.16) เมตริกซ์ย่อยของ $[\tilde{M}]$ ในสมการ (ค.20) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[\tilde{M}_{xx}] = [\tilde{M}_{yy}] = [\tilde{M}_{zz}] = \sum_e \iint_e \mu_r \{N\}\{N\}^T d\bar{x} d\bar{y} \qquad (ค.21)$$

$$[\tilde{M}_{xy}] = [\tilde{M}_{yx}] = [0] \qquad (ค.22)$$

$$[\tilde{M}_{xz}] = [\tilde{M}_{zx}] = [0] \qquad (ค.23)$$

$$[\tilde{M}_{yz}] = [\tilde{M}_{zy}] = [0] \qquad (ค.24)$$

โดยที่ $\{N\}_x \equiv \partial\{N\}/\partial x$, $\{N\}_y \equiv \partial\{N\}/\partial y$, T คือ ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน

เมตริกซ์ไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็กคือ

$$[D_z]\{H_z\} = [D_t]\{H_t\} \qquad (ค.25)$$

เมื่อ

$$[D_z] = \sum_e \iint_e \mu \{N\}\{N\}^T d\bar{x} d\bar{y} \qquad (ค.26)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[D_t] = -\sum_e \iint_e [\mu\{N\}\partial\{N\}^T/\partial\bar{x} \quad \mu\{N\}\partial\{N\}^T/\partial\bar{y}]d\bar{x}d\bar{y} \qquad (ค.27)$$

$$\{H_t\} = \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \end{bmatrix} \qquad (ค.28)$$

ผลอินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละอีลีเมนต์ แสดงไว้ในภาคผนวก ฉ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ง

รูปสมการในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ

นิพจน์แปรผันของสมการคลื่นในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ คือ

$$\tilde{F}(E,k_0)=\{E\}^T([S]-(k/\beta)^2[\tilde{M}])\{E\} \tag{ง.1}$$

เมื่อ

$$\{E\}=\begin{bmatrix}\{E_x\}\\ \{E_y\}\\ \{E_z\}\end{bmatrix} \tag{ง.2}$$

เมตริกซ์ $[S]$ ในสมการ (ง.1) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S]=\sum_e \iint_e [T]^*[\mu_r]^{-1}[T]^T\,dxdy \tag{ง.3}$$

เมื่อ

$$[T]=\begin{bmatrix}\{0\} & -j\beta\{N\} & -\partial\{N\}/\partial y\\ j\beta\{N\} & \{0\} & \partial\{N\}/\partial x\\ j\partial\{N\}/\partial y & -j\partial\{N\}/\partial x & \{0\}\end{bmatrix} \tag{ง.4}$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[\mu_r]^{-1}$ คือ

$$\begin{bmatrix}\upsilon_{xx} & \upsilon_{xy} & \upsilon_{xz}\\ \upsilon_{yx} & \upsilon_{yy} & \upsilon_{yz}\\ \upsilon_{zx} & \upsilon_{zy} & \upsilon_{zz}\end{bmatrix}=[\mu_r]^{-1} \tag{ง.5}$$

และกำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ คือ

$$\begin{bmatrix}[S_{xx}] & [S_{xy}] & [S_{xz}]\\ [S_{yx}] & [S_{yy}] & [S_{yz}]\\ [S_{zx}] & [S_{zy}] & [S_{zz}]\end{bmatrix}=[S] \tag{ง.6}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[S_{xx}]$, $[S_{xy}]$,..., $[S_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 แทนสมการ (ง.4) และ (ง.5) ในสมการ (ง.3) เมตริกซ์ย่อยของ $[S]$ ในสมการ (ง.6) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S_{xx}]=\sum_e \iint_e (\beta^2 \upsilon_{yy}\{N\}\{N\}^T - j\beta\upsilon_{yz}\{N\}\{N\}_y^T + j\beta\upsilon_{zy}\{N\}_y\{N\}^T + \upsilon_{zz}\{N\}_y\{N\}_y^T)dxdy \qquad (ง.7)$$

$$[S_{xy}]=\sum_e \iint_e (-\beta^2 \upsilon_{yx}\{N\}\{N\}^T + j\beta\upsilon_{yz}\{N\}\{N\}_x^T - j\beta\upsilon_{zx}\{N\}_y\{N\}^T - \upsilon_{zz}\{N\}_y\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.8)$$

$$[S_{xz}]=\sum_e \iint_e (-\beta\upsilon_{yx}\{N\}\{N\}_y^T + \beta\upsilon_{yy}\{N\}\{N\}_x^T - j\upsilon_{zx}\{N\}_y\{N\}_y^T + j\upsilon_{zy}\{N\}_y\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.9)$$

$$[S_{yx}]=\sum_e \iint_e (-\beta^2 \upsilon_{xy}\{N\}\{N\}^T + j\beta\upsilon_{xz}\{N\}\{N\}_y^T - j\beta\upsilon_{zy}\{N\}_x\{N\}^T - \upsilon_{zz}\{N\}_x\{N\}_y^T)dxdy \qquad (ง.10)$$

$$[S_{yy}]=\sum_e \iint_e (\beta^2 \upsilon_{xx}\{N\}\{N\}^T - j\beta\upsilon_{xz}\{N\}\{N\}_x^T + j\beta\upsilon_{zx}\{N\}_x\{N\}^T + \upsilon_{zz}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.11)$$

$$[S_{yz}]=\sum_e \iint_e (\beta\upsilon_{xx}\{N\}\{N\}_y^T - \beta\upsilon_{xy}\{N\}\{N\}_x^T + j\upsilon_{zx}\{N\}_x\{N\}_y^T - j\upsilon_{zy}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.12)$$

$$[S_{zx}]=\sum_e \iint_e (-\beta\upsilon_{xy}\{N\}_y\{N\}^T + j\upsilon_{xz}\{N\}_y\{N\}_y^T + \beta\upsilon_{yy}\{N\}_x\{N\}^T - j\upsilon_{yz}\{N\}_x\{N\}_y^T)dxdy \qquad (ง.13)$$

$$[S_{zy}]=\sum_e \iint_e (\beta\upsilon_{xx}\{N\}_y\{N\}^T - j\upsilon_{xz}\{N\}_y\{N\}_x^T - \beta\upsilon_{yx}\{N\}_x\{N\}^T + j\upsilon_{yz}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.14)$$

$$[S_{zz}]=\sum_e \iint_e (\upsilon_{xx}\{N\}_y\{N\}_y^T - \upsilon_{xy}\{N\}_y\{N\}_x^T - \upsilon_{yx}\{N\}_x\{N\}_y^T + \upsilon_{yy}\{N\}_x\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.15)$$

เมตริกซ์ $[\tilde{M}]$ ในสมการ (ง.1) สามารถหาได้จากสมการ

$$[\tilde{M}]=\sum_e \iint_e \varepsilon_r [N]^*[N]^T d\bar{x}d\bar{y} \qquad (ง.16)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อ
$$[N]=\begin{bmatrix} \{N\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{N\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & j\{N\} \end{bmatrix} \qquad (ง.17)$$

$$\bar{x}=\beta x \qquad (ง.18)$$

$$\bar{y}=\beta y \qquad (ง.19)$$

กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์ $[\tilde{M}]$ คือ

$$\begin{bmatrix} [\tilde{M}_{xx}] & [\tilde{M}_{xy}] & [\tilde{M}_{xz}] \\ [\tilde{M}_{yx}] & [\tilde{M}_{yy}] & [\tilde{M}_{yz}] \\ [\tilde{M}_{zx}] & [\tilde{M}_{zy}] & [\tilde{M}_{zz}] \end{bmatrix}=[\tilde{M}] \qquad (ง.20)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[\tilde{M}_{xx}]$, $[\tilde{M}_{xy}]$,...., $[\tilde{M}_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 3×3 แทนสมการ (ง.17) ในสมการ (ง.16) เมตริกซ์ย่อยของ $[\tilde{M}]$ ในสมการ (ง.20) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[\tilde{M}_{xx}]=[\tilde{M}_{yy}]=[\tilde{M}_{zz}]=\sum_e \iint_e \varepsilon_r \{N\}\{N\}^T d\bar{x}d\bar{y} \qquad (ง.21)$$

$$[\tilde{M}_{xy}]=[\tilde{M}_{yx}]=[0] \qquad (ง.22)$$

$$[\tilde{M}_{xz}]=[\tilde{M}_{zx}]=[0] \qquad (ง.23)$$

$$[\tilde{M}_{yz}]=[\tilde{M}_{zy}]=[0] \qquad (ง.24)$$

โดยที่ $\{N\}_x \equiv \partial\{N\}/\partial x$, $\{N\}_y \equiv \partial\{N\}/\partial y$, T คือ ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน

เมตริกซ์ไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าคือ

$$[D_z]\{E_z\}=[D_t]\{E_t\} \qquad (ง.25)$$

เมื่อ
$$[D_z]=\sum_e \iint_e \varepsilon\{N\}\{N\}^T d\bar{x}d\bar{y} \qquad (ง.26)$$

$$[D_t]=-\sum_e \iint_e [\varepsilon\{N\}\partial\{N\}^T/\partial\bar{x} \quad \varepsilon\{N\}\partial\{N\}^T/\partial\bar{y}]d\bar{x}d\bar{y} \qquad (ง.27)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\{E_t\}=\begin{bmatrix}\{E_x\}\\ \{E_y\}\end{bmatrix} \qquad (ง.28)$$

นิพจน์แปรผันสำหรับวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ คือ

$$\tilde{F}(E_t,\beta)=\{E_t\}^T(\beta^4[G^4]+\beta^3[G^3]+\beta^2[G^2]+\beta[G^1]+[G^0])\{E_t\} \qquad (ง.29)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[G^4]$ ในสมการ (ง.29) มีค่าเป็น

$$\begin{bmatrix}[G^4_{xx}] & [G^4_{xy}]\\ [G^4_{yx}] & [G^4_{yy}]\end{bmatrix}=[G^4] \qquad (ง.30)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[G^4_{xx}]$, $[G^4_{xy}]$, $[G^4_{yx}]$, $[G^4_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 2×2 เมตริกซ์ย่อยของ $[G^4]$ ในสมการ (ง.30) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[G^4_{xx}]=\sum_e \upsilon_{yy}\{N\}\{N\}^T dxdy \qquad (ง.31)$$

$$[G^4_{xy}]=-\sum_e \upsilon_{yx}\{N\}\{N\}^T dxdy \qquad (ง.32)$$

$$[G^4_{yx}]=-\sum_e \iint_e \upsilon_{xy}\{N\}\{N\}^T dxdy \qquad (ง.33)$$

$$[G^4_{yy}]=\sum_e \iint_e \upsilon_{xx}\{N\}\{N\}^T dxdy \qquad (ง.34)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[G^3]$ ในสมการ (ง.29) มีค่าเป็น

$$\begin{bmatrix}[G^3_{xx}] & [G^3_{xy}]\\ [G^3_{yx}] & [G^3_{yy}]\end{bmatrix}=[G^3] \qquad (ง.35)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[G^3_{xx}]$, $[G^3_{xy}]$, $[G^3_{yx}]$, $[G^3_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 2×2 เมตริกซ์ย่อยของ $[G^3]$ ในสมการ (ง.35) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[G_{xx}^3] = \sum_e \iint_e j(-\upsilon_{yz}\{N\}\{N\}_y^T + \upsilon_{zy}\{N\}_y\{N\}^T)dxdy \qquad (ง.36)$$

$$[G_{xy}^3] = \sum_e \iint_e j(\upsilon_{yz}\{N\}\{N\}_x^T - \upsilon_{zx}\{N\}_y\{N\}^T)dxdy \qquad (ง.37)$$

$$[G_{yx}^3] = \sum_e \iint_e j(\upsilon_{xz}\{N\}\{N\}_y^T - \upsilon_{zy}\{N\}_x\{N\}^T)dxdy \qquad (ง.38)$$

$$[G_{yy}^3] = \sum_e \iint_e j(-\upsilon_{xz}\{N\}\{N\}_x^T + \upsilon_{zx}\{N\}_x\{N\}^T)dxdy \qquad (ง.39)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[G^2]$ ในสมการ (ง.29) มีค่าเป็น

$$\begin{bmatrix} [G_{xx}^2] & [G_{xy}^2] \\ [G_{yx}^2] & [G_{yy}^2] \end{bmatrix} = [G^2] \qquad (ง.40)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[G_{xx}^2]$, $[G_{xy}^2]$, $[G_{yx}^2]$, $[G_{zz}^2]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 2×2 เมตริกซ์ย่อยของ $[G^2]$ ในสมการ (ง.40) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[G_{xx}^2] = [C_{xx}^0] + [C_{xz}^1][D_z]^{-1}[D_x]^T + [D_x][D_z]'[C_{zx}^1] \qquad (ง.41)$$

$$[G_{xy}^2] = [C_{xy}^0] + [C_{xz}^1][D_z]^{-1}[D_y]^T + [D_x][D_z]'[C_{zy}^1] \qquad (ง.42)$$

$$[G_{yx}^2] = [C_{yx}^0] + [C_{yz}^1][D_z]^{-1}[D_x]^T + [D_y][D_z]'[C_{zx}^1] \qquad (ง.43)$$

$$[G_{yy}^2] = [C_{yy}^0] + [C_{yz}^1][D_z]^{-1}[D_y]^T + [D_y][D_z]'[C_{zy}^1] \qquad (ง.44)$$

เมื่อ

$$[C_{xx}^0] = \sum_e \iint_e (\upsilon_{zz}\{N\}_y\{N\}_y^T - k_0^2\varepsilon_r\{N\}\{N\}^T)dxdy \qquad (ง.45)$$

$$[C_{xy}^0] = \sum_e \iint_e (-\upsilon_{zz}\{N\}_y\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.46)$$

$$[C_{yx}^0] = \sum_e \iint_e (-\upsilon_{zz}\{N\}_x\{N\}_y^T)dxdy \qquad (ง.47)$$

$$[C_{yy}^0] = \sum_e \iint_e (\upsilon_{zz}\{N\}_x\{N\}_x^T - k_0^2\varepsilon_r\{N\}\{N\}^T)dxdy \qquad (ง.48)$$

$$[C_{xz}^1] = \sum_e \iint_e (-\upsilon_{yx}\{N\}\{N\}_y^T + \upsilon_{yy}\{N\}\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.49)$$

$$[C_{yz}^1] = \sum_e \iint_e (\upsilon_{xx}\{N\}\{N\}_y^T - \upsilon_{xy}\{N\}\{N\}_x^T)dxdy \qquad (ง.50)$$

$$[C_{zx}^1] = \sum_e \iint_e (-\upsilon_{xy}\{N\}_y\{N\}^T + \upsilon_{yy}\{N\}_x\{N\}^T)dxdy \qquad (ง.51)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[C_{zy}^{1}]=\sum_{e}\iint_{e}(\upsilon_{xx}\{N\}_{y}\{N\}^{T}-\upsilon_{yx}\{N\}_{x}\{N\}^{T})dxdy \qquad (ง.52)$$

$$[D_{x}]=-\sum_{e}\iint_{e}\varepsilon\{N\}\partial\{N\}^{T}/\partial x\,dxdy \qquad (ง.53)$$

$$[D_{y}]=-\sum_{e}\iint_{e}\varepsilon\{N\}\partial\{N\}^{T}/\partial y\,dxdy \qquad (ง.54)$$

$$[D_{z}]=\sum_{e}\iint_{e}\varepsilon\{N\}\{N\}^{T}dxdy \qquad (ง.55)$$

$$[D_{z}]^{'}=([D_{6}]^{-1})^{T} \qquad (ง.56)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[G^{1}]$ ในสมการ (ง.29) มีค่าเป็น

$$\begin{bmatrix}[G_{xx}^{1}] & [G_{xy}^{1}]\\ [G_{yx}^{1}] & [G_{yy}^{1}]\end{bmatrix}=[G^{1}] \qquad (ง.57)$$

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[G_{xx}^{1}]$, $[G_{xy}^{1}]$, $[G_{yx}^{1}]$, $[G_{zz}^{1}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 2×2 เมตริกซ์ย่อยของ $[G^{1}]$ ในสมการ (ง.57) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[G_{xx}^{1}]=[C_{xz}^{0}][D_{z}]^{-1}[D_{x}]^{T}+[D_{x}][D_{z}]^{'}[C_{zx}^{0}] \qquad (ง.58)$$

$$[G_{xy}^{1}]=[C_{xz}^{0}][D_{z}]^{-1}[D_{y}]^{T}+[D_{x}][D_{z}]^{'}[C_{zy}^{0}] \qquad (ง.59)$$

$$[G_{yx}^{1}]=[C_{yz}^{0}][D_{z}]^{-1}[D_{x}]^{T}+[D_{y}][D_{z}]^{'}[C_{zx}^{0}] \qquad (ง.60)$$

$$[G_{yy}^{1}]=[C_{yz}^{0}][D_{z}]^{-1}[D_{y}]^{T}+[D_{y}][D_{z}]^{'}[C_{zy}^{0}] \qquad (ง.61)$$

เมื่อ

$$[C_{xz}^{0}]=\sum_{e}\iint_{e}j(-\upsilon_{zx}\{N\}_{y}\{N_{y}^{T}+\upsilon_{zy}\{N\}_{y}\{N\}_{x}^{T})dxdy \qquad (ง.62)$$

$$[C_{yz}^{0}]=\sum_{e}\iint_{e}j(\upsilon_{zx}\{N\}_{x}\{N\}_{y}^{T}-\upsilon_{zy}\{N\}_{x}\{N\}_{x}^{T})dxdy \qquad (ง.63)$$

$$[C_{zx}^{0}]=\sum_{e}\iint_{e}j(\upsilon_{xz}\{N\}_{y}\{N\}_{y}^{T}-\upsilon_{yz}\{N\}_{x}\{N\}_{y}^{T})dxdy \qquad (ง.64)$$

$$[C_{zy}^{0}]=\sum_{e}\iint_{e}j(-\upsilon_{xz}\{N\}_{y}\{N\}_{x}^{T}+\upsilon_{yz}\{N\}_{x}\{N\}_{x}^{T})dxdy \qquad (ง.65)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของ $[G^{0}]$ ในสมการ (ง.29) มีค่าเป็น

$$\begin{bmatrix}[G_{xx}^{0}] & [G_{xy}^{0}]\\ [G_{yx}^{0}] & [G_{yy}^{0}]\end{bmatrix}=[G^{0}] \qquad (ง.66)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่เมตริกซ์ย่อย $[G^0_{xx}]$, $[G^0_{xy}]$, $[G^0_{yx}]$, $[G^0_{zz}]$ ในแต่ละอีลีเมนต์ มีอันดับเป็น 2×2 เมตริกซ์ย่อยของ $[G^0]$ ในสมการ (ง.66) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[G^0_{xx}]=[D_x][D_z]'[C^0_{zz}][D_z]^{-1}[D_x]^T \tag{ง.67}$$

$$[G^0_{xy}]=[D_x][D_z]'[C^0_{zz}][D_z]^{-1}[D_y]^T \tag{ง.68}$$

$$[G^0_{yx}]=[D_y][D_z]'[C^0_{zz}][D_z]^{-1}[D_x]^T \tag{ง.69}$$

$$[G^0_{yy}]=[D_y][D_z]'[C^0_{zz}][D_z]^{-1}[D_y]^T \tag{ง.70}$$

เมื่อ

$$[C^0_{zz}]=\sum_e \iint_e (\upsilon_{xx}\{N\}_y\{N\}_y-\upsilon_{xy}\{N\}_y\{N\}_x^T-\upsilon_{yx}\{N\}_x\{N\}_y^T$$
$$+\upsilon_{yy}\{N\}_x\{N\}_x^T-k_0^2\varepsilon_r\{N\}\{N\}^T)dxdy \tag{ง.71}$$

ผลอินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละอีลีเมนต์ แสดงไว้ในภาคผนวก ฉ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก จ

รูปของสมการในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน

สำหรับท่อนำคลื่นแบบแอนไอโซทรอปิกไฟฟ้าที่มีความซาบซึมได้สัมพัทธ์มีค่าเท่ากับ μ_r และสภาพยอมสัมพัทธ์อยู่ในรูปเทนเซอร์ดังสมการ

$$[\bar{\varepsilon}_r]=\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{r,xx} & \bar{\varepsilon}_{r,xy} & 0 \\ \bar{\varepsilon}_{r,yx} & \bar{\varepsilon}_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{r,zz} \end{bmatrix} \qquad (จ.1)$$

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} [S_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \{e_t\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix}-\gamma^2\begin{bmatrix} [M_{tt}] & [M_{tz}] \\ [M_{zt}] & [M_{zz}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \{e_t\} \\ \{e_z\} \end{bmatrix}=\{0\} \qquad (จ.2)$$

คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าตามขวาง $\mathbf{e}_t$ และฟังก์ชันให้น้ำหนัก $\mathbf{w}_t$ ในแต่ละอีลีเมนต์อยู่ในรูปสมการ

$$\mathbf{e}_t=\{\mathbf{N}\}^T\{e_t\}_e=(\{U\}^T\mathbf{a}_x+\{V\}^T\mathbf{a}_y)\{e_t\}_e \qquad (จ.3)$$

$$\mathbf{w}_t=\{\mathbf{N}\}^T \qquad (จ.4)$$

โดยที่ $\mathbf{a}_x$ และ $\mathbf{a}_y$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ x และ y ตามลำดับ, T คือตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน, $\{e_t\}=[e_{t,1} \quad e_{t,2} \quad e_{t,3}]^T$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่มีอันดับเป็น 3×1 และองค์ประกอบของเมตริกซ์นี้คือสนามในแนวขวางที่แต่ละด้านของอีลีเมนต์ ดังแสดงในรูป จ.1 $\{\mathbf{N}\}$ คือฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ ซึ่งมีค่าดังสมการ

$$\{\mathbf{N}\}=[\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3]^T \qquad (จ.5)$$

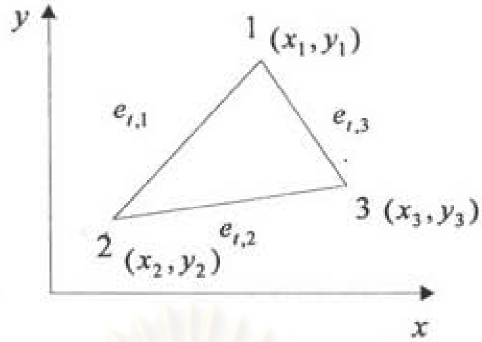
โดยที่

$$\mathbf{N}_1=L_1\nabla L_2-L_2\nabla L_1 \qquad (จ.6a)$$

$$\mathbf{N}_2=L_2\nabla L_3-L_3\nabla L_2 \qquad (จ.6b)$$

$$\mathbf{N}_3=L_3\nabla L_1-L_1\nabla L_3 \qquad (จ.6c)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูป จ.1 อีลีเมนต์สามเหลี่ยม พิกัดโนด
และสนามไฟฟ้าตามขวางที่แต่ละด้านของอีลีเมนต์

เมื่อ ∇ คือตัวดำเนินการเดล, (L_1, L_2, L_3) คือฟังก์ชันเชิงเส้นที่สามารถหาได้จากสมการ

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{จ.7}$$

เมื่อ

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \tag{จ.8}$$

$$b_k = y_l - y_m \tag{จ.9}$$

$$c_k = x_m - x_l \tag{จ.10}$$

โดยที่ (k, l, m) เรียงลำดับในลักษณะมอดุโล 3, (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) คือพิกัดของมุม 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ตามลำดับ ดังแสดงในรูป จ.1, A_e คือพื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งสามารถหาได้จากสมการ

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{จ.11}$$

โดยที่ | | คือตัวกำหนด

คำตอบทดลองของสนามไฟฟ้าในแนวแกน z และฟังก์ชันให้น้ำหนัก w_z ในแต่ละอีลีเมนต์ คือ

$$e_z = \{N\}^T \{e_z\}_e \tag{จ.12}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$w_z = \{N\} \qquad (\text{จ.13})$$

เมื่อ $\{e_z\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้งที่มีอันดับเป็น 3×1 และองค์ประกอบของเมตริกซ์นี้คือ สนามไฟฟ้าในแนวแกน z ที่โนด 1,2 และ 3 ของอีลีเมนต์ ดังแสดงในรูป จ.1, $\{N\}$ คือฟังก์ชันรูปร่างซึ่งมีค่าดังสมการ

$$\{N\} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T \qquad (\text{จ.14})$$

เมื่อคำตอบทดลองของสนามไฟฟ้ามีค่าดังสมการ (จ.3) และ (จ.12) ตามลำดับ และฟังก์ชันให้น้ำหนักมีค่าดังสมการ (จ.4) และ (จ.13) เมตริกซ์ย่อยในสมการ (จ.2) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[S_{tt}] = \sum_e \iint_e [\frac{1}{\mu_r}(\{V\}_x\{V\}_x^T - \{V\}_x\{U\}_y^T - \{U\}_y\{V\}_x^T + \{U\}_y\{U\}_y^T)$$
$$-k_0^2(\varepsilon_{xx}\{U\}\{U\}^T + \varepsilon_{xy}\{U\}\{V\}^T + \varepsilon_{yx}\{V\}\{U\}^T + \varepsilon_{yy}\{V\}\{V\}^T)]dxdy \qquad (\text{จ.15})$$

$$[M_{tt}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r}(\{V\}\{V\}^T + \{U\}\{U\}^T)dxdy \qquad (\text{จ.16})$$

$$[M_{tz}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r}(\{V\}\{N\}_y^T - \{V\}\{N\}_x^T - \{U\}\{N\}_y^T + \{U\}\{N\}_x^T)dxdy \qquad (\text{จ.17})$$

$$[M_{zt}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r}(\{N\}_y\{V\}^T - \{N\}_y\{U\}^T - \{N\}_x\{V\}^T + \{N\}_x\{U\}^T)dxdy \qquad (\text{จ.18})$$

$$[M_{zz}] = \sum_e \iint_e \frac{1}{\mu_r}[\{N\}_y\{N\}_y^T - \{N\}_y\{N\}_x^T - \{N\}_x\{N\}_y^T + \{N\}_x\{N\}_x^T$$
$$-k_0^2\bar{\varepsilon}_{r,zz}\{N\}\{N\}^T]dxdy \qquad (\text{จ.19})$$

สำหรับท่อนำคลื่นแบบไอโซทรอปิกที่ความซาบซึมได้สัมพัทธ์มีค่าเท่ากับ μ_r และสภาพยอมสัมพัทธ์มีค่าเท่ากับ $\bar{\varepsilon}_r$ คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากสมการ (จ.2) โดยให้ $\bar{\varepsilon}_{r,xx} = \bar{\varepsilon}_{r,yy} = \bar{\varepsilon}_{r,zz} = \bar{\varepsilon}_r$ และ $\bar{\varepsilon}_{r,xy} = \bar{\varepsilon}_{r,yx} = 0$

สำหรับท่อนำคลื่นแบบดิสเพอร์ซีฟแอนไอโซทรอปิกแม่เหล็กที่สภาพยอมสัมพัทธ์มีค่าเท่ากับ ε_r และความซาบซึมได้สัมพัทธ์อยู่ในรูปเทนเซอร์ดังสมการ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[\mu_r]=\begin{bmatrix}\mu_{r,xx} & 0 & \mu_{r,xz}\\ 0 & \mu_{r,yy} & 0\\ \mu_{r,zx} & 0 & \mu_{r,zz}\end{bmatrix} \qquad (จ.20)$$

ซึ่งองค์ประกอบของเมตริกซ์ $[\mu_r]^{-1}$ มีค่าเป็น

$$\begin{bmatrix}\upsilon_{xx} & 0 & \upsilon_{xz}\\ 0 & \upsilon_{yy} & 0\\ \upsilon_{zx} & 0 & \upsilon_{zz}\end{bmatrix}=[\mu_r]^{-1} \qquad (จ.21)$$

คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$-\gamma^2\begin{bmatrix}[C_{tt}^2] & [C_{tz}^2]\\ [C_{zt}^2] & [C_{zz}^2]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{e_t\}\\ \{e_z\}\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}[C_{tt}^1] & [C_{tz}^1]\\ [C_{zt}^1] & [0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{e_t\}\\ \{e_z\}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[C_{tt}^0] & [0]\\ [0] & [0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{e_t\}\\ \{e_z\}\end{bmatrix}=\{0\} \qquad (จ.22)$$

เมื่อคำตอบทดลองของสนามไฟฟ้ามีค่าดังสมการ (จ.3) และ (จ.12) ตามลำดับ และฟังก์ชันให้น้ำหนักมีค่าดังสมการ (จ.4) และ (จ.13) เมตริกซ์ย่อยในสมการ (จ.22) สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$[C_{tt}^2]=\sum_e\iint_e(\upsilon_{xx}\{V\}\{V\}^T-\upsilon_{xy}\{V\}\{U\}^T-\upsilon_{yx}\{U\}\{V\}^T+\upsilon_{yy}\{U\}\{U\}^T)dxdy \qquad (จ.23)$$

$$[C_{tz}^2]=\sum_e\iint_e(\upsilon_{xx}\{V\}\{N\}_y^T-\upsilon_{xy}\{V\}\{N\}_x^T-\upsilon_{yx}\{U\}\{N\}_y^T+\upsilon_{yy}\{U\}\{N\}_x^T)dxdy \qquad (จ.24)$$

$$[C_{zt}^2]=\sum_e\iint_e(\upsilon_{xx}\{N\}_y\{V\}^T-\upsilon_{xy}\{N\}_y\{U\}^T-\upsilon_{yx}\{N\}_x\{V\}^T+\upsilon_{yy}\{N\}_x\{U\}^T)dxdy \qquad (จ.25)$$

$$[C_{zz}^2]=\sum_e\iint_e[(\upsilon_{xx}\{N\}_y\{N\}_y^T-\upsilon_{xy}\{N\}_y\{N\}_x^T-\upsilon_{yx}\{N\}_x\{N\}_y^T+\upsilon_{yy}\{N\}_x\{N\}_x^T) -k_0^2\bar{\varepsilon}_r\{N\}\{N\}^T]dxdy \qquad (จ.26)$$

$$[C_{tt}^1]=\sum_e\iint_e[-\upsilon_{xz}(\{V\}\{V\}_x^T-\{V\}\{U\}_y^T)+\upsilon_{zx}(\{V\}_x\{V\}^T-\{U\}_y\{V\}^T)]dxdy \qquad (จ.27)$$

$$[C_{tz}^1]=\sum_e\iint_e\upsilon_{zx}(\{V\}_x\{N\}_y^T-\{U\}_y\{N\}_y^T)dxdy \qquad (จ.28)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$[C^1_{zt}] = \sum_e \iint_e \upsilon_{xz}(\{N\}_y\{U\}^T_y - \{N\}_y\{V\}^T_x)dxdy \qquad (จ.29)$$

$$[C^0_{tt}] = \sum_e \iint_e \upsilon_{zz}(\{V\}_x\{V\}^T_x - \{V\}_x\{U\}^T_y - \{U\}_y\{V\}^T_x + \{U\}_y\{U\}^T_y)dxdy \qquad (จ.30)$$

อินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในแต่ละอีลีเมนต์ แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\iint_e \{U\}\{U\}^T dxdy = \begin{bmatrix} uu_{11} & uu_{12} - b_2^2/12 & uu_{13} - b_1^2/12 \\ uu_{21} - b_2^2/12 & uu_{22} & uu_{23} - b_3^2/12 \\ uu_{31} - b_1^2/12 & uu_{32} - b_3^2/12 & uu_{33} \end{bmatrix} \qquad (จ.31)$$

เมื่อ
$$uu_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}(b_{i1}^2 - b_{i1}b_i + b_i^2), i = j \\ \dfrac{1}{12}(b_{i1}b_{j1} + b_ib_j - 2b_{i2}b_{i2}), i \neq j \end{cases} \qquad (จ.32)$$

$$\iint_e \{U\}\{V\}^T dxdy = \begin{bmatrix} uv_{11} & uv_{12} - b_2c_2/12 & uv_{13} - b_1c_1/12 \\ uv_{21} - b_2c_2/12 & uv_{22} & uv_{23} - b_3c_3/12 \\ uv_{31} - b_1c_1/12 & uv_{32} - b_3c_3/12 & uv_{33} \end{bmatrix} \qquad (จ.33)$$

เมื่อ
$$uv_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{12}(2b_{i1}c_{i1} - b_{i1}c_i - b_ic_{i1} + 2b_ic_i), i = j \\ \dfrac{1}{12}(b_{i1}c_{j1} + b_ic_j - 2b_{j2}c_{i2}), i \neq j \end{cases} \qquad (จ.34)$$

$$\iint_e \{V\}\{V\}^T dxdy = \begin{bmatrix} vv_{11} & vv_{12} - c_2^2/12 & vv_{13} - c_1^2/12 \\ vv_{21} - c_2^2/12 & vv_{22} & vv_{23} - c_3^2/12 \\ vv_{31} - c_1^2/12 & vv_{32} - c_3^2/12 & vv_{33} \end{bmatrix} \qquad (จ.35)$$

เมื่อ
$$vv_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}(c_{i1}^2 - c_{i1}c_i + c_i^2), i = j \\ \dfrac{1}{12}(c_{i1}c_{j1} + c_ic_j - 2c_{j2}c_{i2}), i \neq j \end{cases} \qquad (จ.36)$$

$$\left[\iint_e \{U\}\{N\}^T_x dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{12A_e} b_j(b_{i1} - b_i) \qquad (จ.37)$$

$$\left[\iint_e \{U\}\{N\}^T_y dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{12A_e} c_j(b_{i1} - b_i) \qquad (จ.38)$$

$$\left[\iint_e \{V\}\{N\}^T_x dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{12A_e} b_j(c_{i1} - c_i) \qquad (จ.39)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\left[\iint_e \{V\}\{N\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{12A_e} c_j (c_{i1} - c_i) \qquad (จ.40)$$

$$\left[\iint_e \{V\}_x \{V\}_x^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{16A_e^3}[(b_i c_{i1} - b_{i1} c_i)(b_j c_{j1} - b_{j1} c_j)] \qquad (จ.41)$$

$$\left[\iint_e \{V\}_x \{U\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{16A_e^3}[(b_i c_{i1} - b_{i1} c_i)(c_j b_{j1} - c_{j1} b_j)] \qquad (จ.42)$$

$$\left[\iint_e \{U\}_y \{U\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{16A_e^3}[(c_i b_{i1} - c_{i1} b_i)(c_j b_{j1} - c_{j1} b_j)] \qquad (จ.43)$$

$$\left[\iint_e \{V\}\{V\}_x^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{24A_e^2}(c_{i1} - c_i)(b_j c_{j1} - b_{j1} c_j) \qquad (จ.44)$$

$$\left[\iint_e \{V\}\{U\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{24A_e^2}(c_{i1} - c_i)(c_j b_{j1} - c_{j1} b_j) \qquad (จ.45)$$

$$\left[\iint_e \{N\}_y \{V\}_x^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{8A_e^2} c_i (b_j c_{j1} - b_{j1} c_j) \qquad (จ.46)$$

$$\left[\iint_e \{N\}_y \{U\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{8A_e^2} c_i (c_j b_{j1} - c_{j1} b_j) \qquad (จ.47)$$

$$\iint_e \{V\}\{U\}^T dxdy = \left[\iint_e \{U\}\{V\}^T dxdy\right]^T \qquad (จ.48)$$

$$\iint_e \{N\}_x \{U\}^T dxdy = \left[\iint_e \{U\}\{N\}_x^T dxdy\right]^T \qquad (จ.49)$$

$$\iint_e \{N\}_y \{U\}^T dxdy = \left[\iint_e \{U\}\{N\}_y^T dxdy\right]^T \qquad (จ.50)$$

$$\iint_e \{N\}_x \{V\}^T dxdy = \left[\iint_e \{V\}\{N\}_x^T dxdy\right]^T \qquad (จ.51)$$

$$\iint_e \{N\}_y \{V\}^T dxdy = \left[\iint_e \{V\}\{N\}_y^T dxdy\right]^T \qquad (จ.52)$$

$$\iint_e \{U\}_y \{V\}_x^T dxdy = \left[\iint_e \{V\}_x \{U\}_y^T dxdy\right]^T \qquad (จ.53)$$

$$\iint_e \{V\}_x \{V\}^T dxdy = \left[\iint_e \{V\}\{V\}_x^T dxdy\right]^T \qquad (จ.54)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\iint_e \{U\}_y \{V\}^T dxdy = \left[\iint_e \{V\} \{U\}_y^T dxdy \right]^T \qquad (จ.55)$$

$$\iint_e \{V\}_x \{N\}_y^T dxdy = \left[\iint_e \{N\}_y \{V\}_x^T dxdy \right]^T \qquad (จ.56)$$

$$\iint_e \{N\}_y \{U\}_y^T dxdy = \left[\iint_e \{U\}_y \{N\}_y^T dxdy \right]^T \qquad (จ.57)$$

โดยที่ $\{V\}_x \equiv \partial\{V\}/\partial x$, $\{U\}_x \equiv \partial\{U\}/\partial x$, $\{N\}_x \equiv \partial\{N\}/\partial x$ และ $\{N\}_y \equiv \partial\{N\}/\partial y$, $(i,i1,i2)$ และ $(j,j1,j2)$ เรียงลำดับในลักษณะมอดุโล 3

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ฉ

อินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่าง

อินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างในอีลีเมนต์สามเหลี่ยมสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้ (Kardestuncer , 1988; Sivester และ Ferrari, 1990)

$$I^e(l,m,n) = \iint_e (L_1)^l (L_2)^m (L_3)^n \, dxdy \qquad \text{(ฉ.1a)}$$

$$= \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} 2A \qquad \text{(ฉ.1b)}$$

เมื่อ (L_1, L_2, L_3) คือฟังก์ชันเชิงเส้นที่สามารถหาได้จากสมการ

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{(ฉ.2)}$$

เมื่อ

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \qquad \text{(ฉ.3)}$$

$$b_k = y_l - y_m \qquad \text{(ฉ.4)}$$

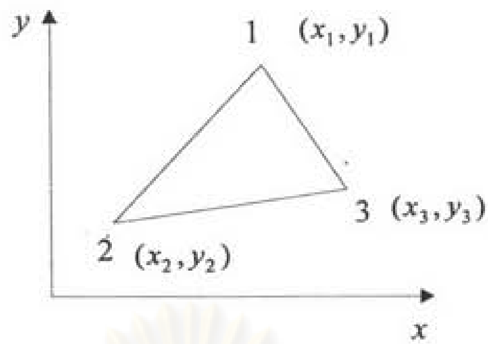
$$c_k = x_m - x_l \qquad \text{(ฉ.5)}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยที่ (k,l,m) เรียบลำดับในลักษณะมอดุโล 3, (x_1,y_1), (x_2,y_2) และ (x_3,y_3) คือพิกัดของมุม 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ตามลำดับ ดังแสดงในรูป ฉ.1 , A คือพื้นที่ของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมซึ่งหาได้จากสมการ

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(ฉ.6)}$$

โดยที่ $|\ |$ คือตัวกำหนด



รูป ฉ.1 อีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม และพิกัดโนด

สำหรับอีลีเมนต์อันดับที่หนึ่ง ดังแสดงในรูป ฉ.1 ฟังก์ชันรูปร่าง $\{N\}$ คือ

$$\{N\} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T \tag{ฉ.7}$$

ผลอินทิกรัลของฟังก์ชันรูปร่างสำหรับแต่ละอีลีเมนต์ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้า 3 องค์ประกอบ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามแม่เหล็กตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าตามขวาง 2 องค์ประกอบ และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสและในแนวแกน มีดังนี้

$$\left[\iint_e \{N\}\{N\}^T dxdy\right]_{ij} = \begin{cases} \dfrac{A}{6}, i = j \\ \dfrac{A}{12}, i \neq j \end{cases} \tag{ฉ.8}$$

$$\left[\iint_e \{N\}_x \{N\}_x^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{4A} b_i b_j \tag{ฉ.9}$$

$$\left[\iint_e \{N\}_x \{N\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{4A} b_i c_j \tag{ฉ.10}$$

$$\left[\iint_e \{N\}_y \{N\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{1}{4A} c_i c_j \tag{ฉ.11}$$

$$\left[\iint_e \{N\}\{N\}_x^T dxdy\right]_{ij} = \frac{b_j}{6} \tag{ฉ.12}$$

$$\left[\iint_e \{N\}\{N\}_y^T dxdy\right]_{ij} = \frac{c_j}{6} \tag{ฉ.13}$$

$$\iint_e \{N\}_y \{N\}_x^T dxdy = \left[\iint_e \{N\}_x \{N\}_y dxdy\right]^T \tag{ฉ.14}$$

$$\iint_e \{N\}_{,x}\{N\}^T dxdy = \left[\iint_e \{N\}\{N\}_{,x}^T dxdy \right]^T \qquad (\text{ฉ}.15)$$

$$\iint_e \{N\}_{,y}\{N\}^T dxdy = \left[\iint_e \{N\}\{N\}_{,y}^T dxdy \right]^T . \qquad (\text{ฉ}.16)$$

เมื่อ $i =\ ,2\ ,3$ และ $j = 1,2\ ,3$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียน

นายชัยรัตน์ พินทอง เกิดวันที่ 11 กรกฎาคม พ.ศ. 2513 ที่อำเภอแม่แจ่ม จังหวัดเชียงใหม่ สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในปีการศึกษา 2534 จากนั้นเข้าทำงานในบริษัท ยางสยามอุตสาหกรรม จำกัด ในตำแหน่งวิศวกรไฟฟ้า ปี พ.ศ. 2535 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2536