Journal of Research Methodology Volume 10, Number 2 (July - December 1997)
วารสารวิธีวิทยาการวิจัย ปีที่ 10 ฉบับที่ 2 (กรกฎาคม - ธันวาคม 2540)

Assumptions in MANOVA and Discriminant Analysis : A Review

Teradech Chai-Aroon

ABSTRACT

Many researchers have used MANOVA (Mutivariate Analysis of Variance) and DA (Discriminant Analysis) to test their hypotheses for long time. Infact, most of inferential statistics have some assumptions, the requirement of such statistics. When the data conformed these assumptions, high power and low type I error rate were found. The purpose of this paper are 1) to describe assumptions of MANOVA and DA 2) to show the way that could be used to test these assumptions and 3) to solve the problem of violation of these assumptions.

The first assumption is independent assumption (independence of observed scores). It is very important because type I error rate will increase if observed scores are dependent. Researchers can test this assumption by computing intraclass correlation. Data transformation or using group mean as unit of analysis are possible ways to solve this problem.

The second assumption is normality assumption (multivariate normal distribution). Nonnormality will affect both Type I error and statistical power. Researchers can test this assumption by plotting square mahalanobis distance (d^2) coordinate with chi-square. When data are nonnormal, one can transform data and test normality again.

Finally and maybe most popular assumption is homogeneity assumption (population covariance matrixes are equal). Heterogeneous covariance matrix will affect both type I error and statistical power. Box'm statistic is the popular way to test this assumption. Researchers have two choices to make decision when data have heterogeneous covariance matrixes, transform data or use other statistics to test the difference about mean vectors. However, new estimation procedure is quite complex.

Journal of Research Methodology Volume 10, Number 2 (July - December 1997)
วารสารวิธีวิทยาการวิจัย ปีที่ 10 ฉบับที่ 2 (กรกฎาคม - ธันวาคม 2540)

ข้อตกลงในการทดสอบ MANOVA และ Discriminant Analysis : สาระสำคัญ การทดสอบ และแนวทางการแก้ไข

ธีรเดช ฉายอรุณ

บทคัดย่อ

การทดสอบด้วยสถิติ MANOVA และ Discriminant Analysis (DA) เป็นที่รู้จักและถูกนำมาใช้เพื่อทดสอบสมมุติฐานของนักวิจัยเป็นเวลานาน อย่างไรก็ตาม นักวิจัยไม่ควรลืมว่า สถิติอนุมานทั้งหลายต่างมีเงื่อนไขในตัวเอง ที่เรียกว่า ข้อตกลง (Assumptions) ซึ่งจะบ่งบอกถึงลักษณะข้อมูลที่จะทำการวิเคราะห์ หากข้อมูลเป็นไปตามข้อตกลง ก็จะส่งผลให้อำนาจการทดสอบสูงและความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ต่ำ และหากข้อมูลไม่เป็นไปตามนั้นจะส่งผลในทางตรงข้าม เพื่อให้ผู้วิจัยตระหนักถึงความสำคัญของข้อตกลงดังกล่าว บทความนี้จึงได้เสนอสาระสำคัญ การทดสอบและการแก้ไขข้อมูล สำหรับการวิเคราะห์ MANOVA และ DA ดังนี้

1. ความเป็นอิสระกันของค่าสังเกตแต่ละค่า ข้อตกลงนี้มีความสำคัญมากในการทดสอบ MANOVA เนื่องจากหากข้อมูลไม่เป็นอิสระต่อกันและจะส่งผลอย่างมากต่อความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ผู้วิจัยสามารถทดสอบได้โดยการคำนวณค่า Intraclass Correlation และหากข้อมูลไม่เป็นอิสระแล้วผู้วิจัยอาจแก้ไขโดยการลดระดับนัยสำคัญลงให้ต่ำกว่าที่ตั้งไว้ หรืออาจใช้ค่าเฉลี่ยของกลุ่มมาใช้เป็นหน่วยในการวิเคราะห์

2. การแจกแจงที่เป็น Multivariate Normal Distribution ซึ่งเป็นข้อตกลงของสถิติหลายตัวแปรแทบทุกการวิเคราะห์ หากข้อมูลมีการแจกแจงที่แตกต่างออกไปแล้วจะส่งผลหลายประการทั้งในเรื่องอำนาจการทดสอบ ความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 การจัดสมาชิกเข้ากลุ่มใน DA เป็นต้น การทดสอบอาจทำได้หลายทางไม่ว่าจะเป็นการคำนวณเองหรือใช้โปรแกรมสำเร็จรูป สำหรับแนวทางแก้ไขผู้วิจัยอาจใช้การแปลงข้อมูล แล้วทำการทดสอบซ้ำ

3. ความเท่ากันของเมตริกส์ความแปรปรวนร่วมประชากรแต่ละกลุ่ม การละเมิดข้อตกลงดังกล่าว ส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และอำนาจการทดสอบ ผู้วิจัยค่อนข้างจะคุ้นเคยกับการทดสอบข้อตกลงนี้เนื่องจากมีบรรจุในโปรแกรมสำเร็จรูปทั่วไปสถิติที่ใช้ทดสอบคือ Box'M การแก้ไขทำได้สองทางคือ การแปลงข้อมูล และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีใหม่ แต่วิธีหลังนี้ยังต้องคำนวณเอง และการคำนวณก็มีความซับซ้อนอยู่มาก

บทนำ

นักวิจัยเชิงปริมาณอาศัยสถิติอ้างอิงในการทดสอบสมมุติฐานการวิจัยของตน ซึ่งในปัจจุบันความเจริญก้าวหน้าด้านเทคโนโลยี ทำให้การวิเคราะห์ข้อมูลระดับตัวแปรเดียว (univariate) ถูกแทนที่ด้วยการวิเคราะห์ระดับหลายตัวแปร (multivariate) โปรแกรมสำเร็จรูปจำนวนมาก อาทิ SPSS SAS STATISTICA LISREL ฯลฯ ได้ถูกพัฒนาให้สามารถวิเคราะห์ข้อมูลที่สลับซับซ้อนได้ในเวลาเพียงไม่กี่นาที ช่วยให้ผู้วิจัยได้พัฒนาองค์ความรู้ในศาสตร์ต่าง ๆ เช่น การศึกษา จิตวิทยา พฤติกรรมศาสตร์ และอื่น ๆ ได้เป็นอย่างมาก ในจำนวนสถิติชั้นสูงเหล่านี้ การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปร (multivariate analysis of varaince : MANOVA) และการวิเคราะห์จำแนก (discriminant analysis : DA) เป็นสถิติวิเคราะห์ชั้นสูงที่พบมากในงานวิจัยตลอดมา เนื่องจากสถิติ MANOVA ใช้ทดสอบความแตกต่างของเวคเตอร์ค่าเฉลี่ยตัวแปรตามจำแนกตามตัวแปรอิสระ ซึ่งเป็นการขยายการวิเคราะห์จากการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) ในขณะที่สถิติ DA นอกจากจะใช้ทดสอบลักษณะเดียวกันกับ MANOVA (Huberty,1992 เรียก MANOVA ว่า Descriptive discriminant analysis) แล้ว ยังสามารถพยากรณ์โดยการจำแนกกลุ่มตัวอย่างเข้าสู่กลุ่มใหม่ โดยอาศัยอิทธิพลจากตัวแปรอิสระ (กรณีนี้เรียกว่า predictive discriminant analysis) การวิเคราะห์ทั้งสองรูปแบบนี้ช่วยตอบคำถามให้แก่นักวิจัยได้เป็นอย่างดี

อย่างไรก็ตาม ไม่มีสถิติใดที่สามารถใช้ได้ในทุกสถานการณ์ การใช้สถิติอ้างอิงนั้นต้องอยู่ภายใต้ข้อตกลง (assumption) ซึ่งจะกำหนดลักษณะข้อมูลที่จะทำการวิเคราะห์ การตีความผลการวิเคราะห์นั้นอยู่บนพื้นฐานว่า ข้อมูลเป็นไปตามข้อตกลงทุกประการ (Fan,1996 : 668) ซึ่งหากเป็นเช่นนั้นย่อมจะเกิดประโยชน์สองประการ คือ จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 (Type I Error Rate : Nominal α) มีค่าเท่ากับหรือใกล้เคียงกับค่านัยสำคัญที่เป็นจริง (Actual α) นอกจากนี้ ยังจะทำให้มีอำนาจการทดสอบ (power of test statistics) สูง ซึ่งเป็นที่คาดหวังของนักวิจัยทุกคน (Sharma,1996 : 375)

ปัญหาอยู่ที่ว่า มีนักวิจัยจำนวนไม่น้อยที่ไม่ให้ความสำคัญกับการทดสอบข้อตกลง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะข้อตกลงบางข้อไม่สามารถวิเคราะห์ได้ด้วยโปรแกรมที่นักวิจัยเหล่านั้นคุ้นเคย หรืออาจเป็นเพราะไม่ทราบว่าจะแก้ปัญหาอย่างไรเมื่อข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลง ทำให้สรุปผลไปตามผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมเท่านั้น ผลก็คืออาจทำให้ข้อสรุปมีความคลาดเคลื่อน หรือมีความถูกต้องแม่นยำน้อยกว่าที่ควรจะเป็น ฉะนั้นบทความนี้จึงได้เสนอสาระสำคัญของข้อตกลงใน MANOVA และ DA การตรวจสอบข้อตกลงทุกข้อและแนวทางแก้ไขหากข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลง ทั้งที่นิยมใช้ในปัจจุบันและแนวทางที่เป็นแนวโน้มในอนาคต เพื่อเป็นแนวทางสำหรับนักวิจัยต่อไป

ข้อตกลงใน MANOVA และ DA (Assumptions of MANOVA/DA)

การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปร และการวิเคราะห์จำแนก มีข้อตกลงที่สำคัญเกี่ยวกับลักษณะข้อมูลที่จะวิเคราะห์ 3 ประการด้วยกัน คือ

1. ค่าสังเกตซึ่งหมายถึงตัวแปรค่าของตัวแปรต่อเนื่อง แต่ละค่ามีความเป็นอิสระต่อกัน

2. ค่าสังเกตได้จากกลุ่มตัวอย่าง ต้องมีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร (multivariate normal distribution)

3. เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร (population covariance matrix)ในแต่ละกลุ่มเท่ากัน

ข้อตกลงว่าด้วยการเป็นอิสระของค่าสังเกต (Independent Assumption)

ค่าสังเกต 2 ค่าใดๆ จะเป็นอิสระต่อกันได้ก็ต่อเมื่อ ผลของค่าสังเกตค่าแรกไม่ได้รับอิทธิพลจากค่าสังเกตค่าอื่น (Sharma, 1996 : 387) การเป็นอิสระอาจเกิดขึ้นได้เมื่อกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนไม่มีปฏิสัมพันธ์ต่อกัน เช่น ในการวิจัยที่เป็นภาคตัดขวาง (cross section) ที่ศึกษาในพื้นที่ขนาดใหญ่ กลุ่มตัวอย่างจะมาจากที่ต่างๆ ซึ่งแทบไม่มีโอกาสปฏิสัมพันธ์กันเลย ดังนั้นเราจึงพบว่าในการวิจัยแบบนี้ไม่ค่อยให้ความสำคัญกับความเป็นอิสระหรือไม่เป็นอิสระของค่าสังเกต นอกจากนี้ในการวิเคราะห์จำแนก(DA)ก็ไม่นับว่าการเป็นอิสระของข้อมูลเป็นข้อตกลงของการทดสอบ (Sharma, 1996 : 263-264) แต่สำหรับใน MANOVA แล้วยังนับว่าเรื่องนี้เป็นข้อตกลงที่มีความสำคัญมาก และถือว่าเป็นประเด็นแรกที่ต้องทำการตรวจสอบ ***หากข้อมูลไม่เป็นอิสระกันเพียงเล็กน้อย ก็จะส่งผลให้ค่านัยสำคัญที่เป็นจริง (actual α) สูงกว่านัยสำคัญที่ผู้วิจัยตั้งขึ้น (nominal α)อย่างมากถึง 10 เท่าทีเดียว*** (Stevens, 1992 : 239) ผลก็คือทำให้ค่าสถิติที่ได้ยากต่อการปฏิเสธ null hypothesis (conservative) นอกจากนี้ยังมีผลให้อำนาจการทดสอบต่ำด้วย

ปัญหาเรื่องความเป็นอิสระของค่าสังเกต จะพบได้อย่างชัดเจนในการวิจัยเชิงทดลอง ดังที่ Glass และ Hopkins (1984) ได้สรุปว่าเมื่อใดก็ตามที่เราสามารถให้การฝึกอบรม หรือการสอนเป็นรายบุคคลได้ ค่าสังเกตแต่ละค่าก็จะเป็นอิสระ แต่ถ้าเมื่อใดที่การสอนหรือการฝึกอบรมนั้นต้องอาศัยปฏิสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในกลุ่ม เช่น การอภิปรายกลุ่ม การให้คำปรึกษากลุ่ม ค่าสังเกตค่าหนึ่งมักจะได้รับอิทธิพลจากค่าสังเกตค่าอื่น ดังนั้นการวิจัยเชิงทดลองจึงมักมีการตรวจสอบความเป็นอิสระของค่าสังเกต ซึ่ง Stevens (1992 : 239) ได้เสนอให้คำนวณสหสัมพันธ์ภายในกลุ่ม (intraclass correlation) ด้วยสูตรต่อไปนี้

$$R = (MS_b - MS_w / MS_b + (n-1)MS_w) \qquad (1)$$

ค่า MS_b คือ Mean Square Between Group, MS_w คือ Mean Square within Group, n คือจำนวนสมาชิกในกลุ่ม การตีความค่า R นี้ก็เช่นเดียวกับค่าสหสัมพันธ์ทั่วไป และเมื่อได้ค่า R แล้วจึงนำไปเทียบกับตารางของ Scariano และ Davenport (1987) เพื่อจะได้ทราบว่าค่านัยสำคัญที่เป็นจริงเป็นเท่าใด

สำหรับแนวทางในการแก้ไขเมื่อเกิดปัญหาค่าสังเกตไม่เป็นอิสระต่อกัน Stevens (1992:243) ได้เสนอแนวทางไว้ 2 วิธีให้ผู้วิจัยเลือกใช้ตามความเหมาะสม ดังนี้

1. ลดระดับนัยสำคัญที่ผู้วิจัยตั้งขึ้น (nominal α) ลง เช่น กรณีทำการทดลอง 3 กลุ่ม แต่ละกลุ่มมีสมาชิก 30 คน และพบว่ามีสหสัมพันธ์ภายในกลุ่มเท่ากับ .10 ค่านัยสำคัญที่เป็นจริงจะเป็น .4917 แม้ว่าผู้วิจัยจะตั้งนัยสำคัญไว้ที่ .05 แต่ถ้าลดระดับนัยสำคัญที่ตั้งไว้เป็น .01 ค่านัยสำคัญที่เป็นจริงจะลดเหลือ .10

2. ในกรณีที่มีจำนวนกลุ่มมาก ๆ และสมาชิกในแต่ละกลุ่มมีจำนวนน้อย ให้ใช้ค่าเฉลี่ยของกลุ่มเป็นหน่วยในการวิเคราะห์ (unit of analysis) วิธีการดังกล่าวอาจทำให้ขนาดของกลุ่มตัวอย่างลดลง และไม่อาจศึกษาปฏิสัมพันธ์ (interaction effect) ได้เนื่องจากมีสมาชิกเพียงหนึ่งเดียวในแต่ละกลุ่ม (one subject per cell) แต่ก็ได้มีการทดสอบแล้วว่า อำนาจการทดสอบไม่ได้ลดลงแต่อย่างใด

ข้อตกลงเกี่ยวกับการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

เป็นที่ทราบกันดีว่า การทดสอบสถิติที่ใช้พารามิเตอร์ในระดับหลายตัวแปรทั้งหมด มีข้อตกลงเกี่ยวกับการแจกแจงของตัวแปรว่า จะต้องเป็นแบบปกติหลายตัวแปร (multivariate normal distribution) ปัญหาอยู่ที่ว่าการแจกแจงแบบนี้มีความสลับซับซ้อนไปตามจำนวนตัวแปร กล่าวคือ การแจกแจงแบบหลายตัวแปรนี้จะนำตัวแปรต่าง ๆ ที่จะวิเคราะห์มาแจกแจงดังกล่าวในระดับทฤษฎี จึงต้องอาศัยแนวคิดเกี่ยวกับการแจกแจงแบบปกติสำหรับตัวแปรเดียวก่อน (univariate normal distrbution) ในระดับตัวแปรเดียวแล้ว การแจกแจงของข้อมูลจะเป็นแบบปกติได้ก็ต่อเมื่อมีค่าเฉลี่ยเป็น μ และมีความแปรปรวนเป็น σ^2 และมี probability density function เป็น

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp-[(x-\mu)^2/2\sigma^2] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$

ซึ่งมีลักษณะการแจกแจงเป็นรูประฆังคว่ำและสมมาตร ส่วนการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร (multivariate normal distribution) นั้นก็พัฒนาต่อจากสมการที่ 2 โดยมี probability density function เป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\ |\Sigma|^{1/2})} \frac{\exp-(x-\mu)' \Sigma^{-1} (x-\mu)}{2} \qquad (3)$$

เมื่อ x เป็นเวคเตอร์ของค่าสังเกต, μ เป็นเวคเตอร์ของค่าเฉลี่ยของตัวแปรจำนวน p ตัว, Σ เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร (population covariance matrix) และ Σ^{-1} เป็น inverse matrix ของ Σ อนึ่งการแจกแจงนี้จะมีหลายมิติ ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนตัวแปร หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่ง จำนวนมิติจะเท่ากับจำนวนตัวแปร ดังนั้นความซับซ้อนของการแจกแจงจึงขึ้นอยู่กับจำนวนตัวแปรที่นำมาแจกแจงร่วมกัน (joint distribution)

ดังที่ได้กล่าวแล้วว่า สถิติที่ใช้พารามิเตอร์ทุกตัวต้องอาศัยข้อตกลงนี้ สำหรับ MANOVA และ DA แล้ว การละเมิดข้อตกลงนี้มีผลกระทบที่สำคัญ 4 ประการต่อไปนี้

1. สำหรับการวิเคราะห์จำแนกกลุ่ม การที่ข้อมูลมีการกระจายไม่เป็นแบบปกติหลายตัวแปรแล้ว ย่อมจะส่งผลให้การจัดสมาชิกเข้ากลุ่มใหม่หรือการพยากรณ์มีความคลาดเคลื่อนหรือผิดพลาดไป (Sharma, 1996: 263)

2. กรณีการแจกแจงมีลักษณะเบ้ (skewness) ผลการวิจัยยืนยันว่า ไม่มีผลกระทบใด ๆ ต่อการทดสอบ MANOVA หรือ DA (Sharma, 1996: 375) กล่าวคือ ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบจะมีความคงทน (robust) คือทำให้ค่านัยสำคัญที่กำหนดขึ้น (nominal α) ใกล้เคียงกับนัยสำคัญที่เป็นจริง (actual α)

3. กรณีการแจกแจงมีลักษณะโด่งกว่าปกติ (leptokurtic : โด่งมาก และ platykurtic : โด่งน้อย)จะส่งผลให้อำนาจการทดสอบต่ำลง (Sharma,1996 : 375) อย่างไรก็ตาม Olsen(1974) ได้ทดสอบและยืนยันว่าในการวิเคราะห์ MANOVA การแจกแจงที่มีลักษณะโด่งมาก (platykurtic distribution) จะทำให้อำนาจการทดสอบลดลงอย่างชัดเจน

4. การแจกแจงที่ไม่เป็นแบบปกติหลายตัวแปร จะมีผลต่อการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร เนื่องจากสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ Box's M นั้นมีความอ่อนไหวง่ายภายใต้เงื่อนไขนี้ (Stevens,1992 : 260)

จากปัญหาที่กล่าวมาทั้งหมดสำหรับการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร จึงทำให้นักวิเคราะห์ต้องทำการทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นนี้ จากการติดตามศึกษาเรื่องนี้มาระยะหนึ่ง พบว่าแนวทางการทดสอบนั้นมีสองรูปแบบด้วยกันคือ

1. ทดสอบด้วยกราฟ ในอดีตที่ผ่านมาเราพบกับปัญหาประการหนึ่งคือ ไม่มีโปรแกรมสำเร็จรูปใด ๆ ที่สามารถทดสอบข้อตกลงนี้ได้ ทางแก้ประการหนึ่งที่นิยมทำกันก็คือทดสอบการ

แจกแจงปกติแบบตัวแปรเดียวทีละตัวแปรโดยการทำ normal probability plot ซึ่งสามารถทำได้ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป เช่น SPSS แต่นักวิชาการหลายท่าน อาทิ Huberty (1994:63), Stevens(1992:245), Sharma(1996:375) มีความเห็นว่าการทดสอบดังกล่าวเป็นสิ่งที่ต้องกระทำเป็นอันดับแรก แต่ก็ไม่ได้หมายความว่าเมื่อตัวแปรแต่ละตัวมีการแจกแจงปกติแล้วจะทำให้เมื่อแจกแจงร่วมกัน จะทำให้มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรด้วย ดังนั้นนักวิชาการต่าง ๆ จึงได้พยายามหาทางที่จะทดสอบข้อตกลงนี้ การศึกษาที่น่าจะเป็นจุดเริ่มต้นของการทดสอบดังกล่าวได้แก่แนวคิดของ Johnson และ Wichern(1988) โดยเขาได้เสนอให้คำนวนค่า square mahalonobis distance (d^2) ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนโดยมีสูตรดังนี้ Johnson และ Wichern (1988 : 151)

$$d^2 = (x-\mu)' \Sigma^{-1}(x-\mu) \qquad (4)$$

เมื่อ x คือ เวคเตอร์ค่าสังเกตแต่ละคนที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนตัวแปร, μ เป็นเวคเตอร์ของค่าเฉลี่ยและ Σ^{-1} เป็น inverse population covariance matrix โดยปกติหากกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากพอ d^2 จะมีการแจกแจงแบบ Chi-Square(χ^2) โดยมี degrees of freedom เท่ากับจำนวนตัวแปร (p)(Johnson และ Wichern,1988 : 134) จากนั้นจึงนำค่า d^2 ไป plot คู่กับค่า χ^2 โดยมีขั้นตอนดังนี้ (Sharma 1996 : 381,Stevens, 1992 : 248)

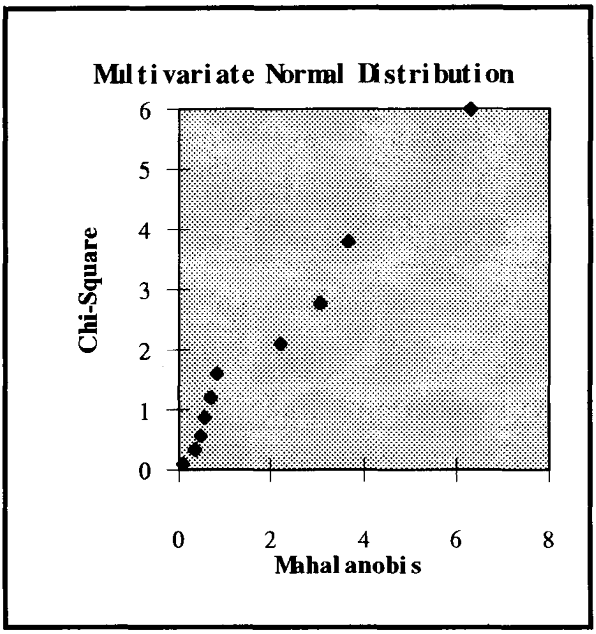
1. เรียงลำดับค่าd^2 จากน้อยไปมาก
2. คำนวนตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์ของค่า d^2 แต่ละค่า จากสูตร (j-.5)/n
3. หาค่า χ^2 จากตารางที่ degrees of freedom = p, (j-.5)/n
4. นำค่า d^2 และค่า χ^2 ไป plot หากกราฟมีลักษณะคล้ายเส้นตรงทแยงก็แสดงว่าการแจกแจงมีลักษณะเป็นแบบปกติหลายตัวแปร

ตัวอย่าง Johnson และ Wichern (1988) ได้นำเสนอข้อมูลเกี่ยวกับบริษัทธุรกิจ 10 แห่งเกี่ยวกับที่มาของรายได้ ซึ่งประกอบไปด้วยทรัพย์สินเดิม (X_1) และรายได้สุทธิ (X_2) รายละเอียดเป็นดังนี้ (หน่วยเป็นล้านเหรียญ)

บริษัท	X_1	X_2	บริษัท	X_1	X_2
G.M.	26.7	3.3	Std.Oil	14.8	.9
Exxon	38.4	2.4	IBM	19.0	2.7
Ford	19.2	1.7	Gulf	14.2	.8
Mobil	20.6	1.0	G.E	13.7	1.1
Texaco	18.9	.9	Chrysler	7.7	.2

เมื่อนำคะแนนดิบมาแปลงเป็น d^2 และค่า X^2 / แล้วนำไป plot ได้ผลดังนี้

J	d^2	χ^2_2 (j-.5)/10)
1	.07	.10
2	.34	.33
3	.47	.58
4	.55	.86
5	.69	1.20
6	.81	1.60
7	2.21	2.10
8	3.08	2.77
9	3.67	3.79
10	6.32	5.99



จากกราฟพอจะเห็นแนวโน้มว่ามีลักษณะเป็นเส้นตรง จึงอาจสรุปว่าการแจกแจงนี้เป็นแบบปกติหลายตัวแปรได้ สำหรับในกรณีสองตัวแปรเช่นนี้บางทีอาจเรียกว่า bivariate normal distribution

อย่างไรก็ตาม แนวคิดของ Johnson และ Wichern (1988) ไม่ได้นำมาสู่การปฏิบัตินัก เนื่องจากปัญหาการหาค่า d^2 และค่า χ^2 ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนค่อนข้างจะมีความยุ่งยากและล่าช้า แม้ว่านักวิชาการท่านอื่นจะพยายามทำให้กระบวนการดังกล่าวง่ายขึ้น และแม้ว่าในปัจจุบันโปรแกรม SAS 6.0 (Fan, 1996) ในโปรแกรมย่อยที่ชื่อว่า IML สามารถทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรตามแนวคิดนี้ได้อย่างสมบูรณ์ โดยปราศจากข้อจำกัดเรื่องจำนวนตัวแปรและจำนวนกลุ่มตัวอย่างอีกต่อไป แต่ปัญหาของการทดสอบด้วยกราฟน่าจะมีสองประการ คือ ประการแรก การตัดสินใจว่าการแจกแจงจะเป็นแบบปกติหลายตัวแปรหรือไม่นั้น เป็นไปตามการวินิจฉัยของผู้วิเคราะห์เอง ซึ่งขาดความเป็นปรนัย ประการที่สอง สำหรับในประเทศไทยแล้วโปรแกรม SAS นั้นยังไม่เป็นที่แพร่หลายทั่วไป เพียงแต่นิยมใช้กันในกลุ่มเฉพาะเท่านั้น นักวิจัยไทยส่วนใหญ่คุ้นเคยกับโปรแกรม SPSS ซึ่งโปรแกรมดังกล่าวไม่สามารถทดสอบข้อตกลงนี้ได้

2. **ทดสอบด้วยค่าสถิติ** ในเรื่องนี้ Mardia (1970) ได้เสนอวิธีการหาค่าความเบ้ และความโด่งแบบหลายตัวแปร (multivariate skewness and kurtosis) หากค่าความเบ้และความโด่งแบบหลายตัวแปรเป็นศูนย์แล้ว ย่อมแสดงว่าการแจกแจงมีแนวโน้มเป็นแบบปกติหลายตัวแปรด้วย นอกจากนี้ Joreskog และ Sorbom (1993) ได้เสนอค่าสถิติ χ^2 ที่ใช้ทดสอบว่าการแจกแจงนั้นแตกต่างจากการแจกแจงปกติหลายตัวแปรหรือไม่ ซึ่งค่าสถิติทั้ง 3 ค่านี้ อยู่ในโปรแกรม LISREL8 /PRELIS2 อนึ่งการทดสอบด้วยค่าสถิตินี้ จะทำให้ผลการทดสอบมีความเป็นปรนัยมากขึ้น นอกจากนั้น ในประเทศไทยก็เริ่มมีการใช้โปรแกรม LISREL8/PRELIS2 กันมากขึ้น จึงเห็นว่าการทดสอบด้วยวิธีนี้น่าจะนำมาใช้ได้สะดวกกว่า

ในตอนที่แล้วได้อธิบายให้ทราบถึงปัญหาที่เกิดขึ้นเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงไม่เป็นแบบปกติหลายตัวแปร และการทดสอบข้อตกลงดังกล่าวแล้ว ปัญหาต่อไปก็คือ เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงไม่เป็นแบบปกติหลายตัวแปรแล้ว (Multivariate Normal Distribution) แล้วจะทำอย่างไร ซึ่งในเรื่องนี้นักวิชาการหลายท่าน อาทิ Johnson และ Wichern (1988) Stevens (1992) Sharma (1992) ได้เสนอให้ทำการแปลงข้อมูล (data transformation) โดยทำตามลำดับขั้น ดังนี้

1. ทดสอบการแจกแจงแบบปกติทีละตัวแปรก่อน เพื่อดูว่าตัวแปรใดที่มีการแจกแจงไม่เป็นปกติ ซึ่งอาจทำได้โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติทั่วไป เช่น SPSS STATISTICA เป็นต้น

2. ทำการแปลงข้อมูลตัวแปรที่เป็นปัญหา ซึ่งอาจใช้ตารางของ Stevens(1992:252) โดยผู้วิจัยต้องสร้าง histogram ของตัวแปรแต่ละตัวก่อน จากนั้นนำรูปแบบการกระจายที่ได้ไปเทียบกับตารางของ Stevens ว่าควรจะแปลงข้อมูลด้วยวิธีใด นอกจากนี้ Kirk (1995 : 104 – 106) ยังได้เสนอวิธีการแปลงข้อมูล 4 วิธีการด้วยกัน คือ

2.1 ใช้ค่ารากที่สองของตัวแปรเดิม (square-root transformation) ในกรณีที่การแจกแจงคล้ายกับการแจกแจงปัวซอง (poisson distribution) และค่าเฉลี่ยแต่ละกลุ่มกับค่าความแปรปรวนเป็นสัดส่วนกัน การใช้ค่ารากที่สองจะมีความเหมาะสม การแปลงข้อมูลทำโดยการเพิ่มคำสั่ง COMPUTE ในโปรแกรม SPSS เช่น

COMPUTE NEWY = SQRT(Y) เมื่อ Y คือตัวแปรเดิม, NEWY คือตัวแปรใหม่

COMPUTE NEWY = SQRT(Y+.05) หรือ SQRT(Y)+SQRT(Y+1) สำหรับกรณีกลุ่มตัวอย่างมีขนาดน้อยกว่า 10

2.2 ใช้ค่า Logarithm กรณีค่าเฉลี่ยแต่ละกลุ่มกับค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) เป็นสัดส่วนกัน หรือตัวแปรตามมีค่าความเบ้ (skewness) เป็นบวก การแปลงข้อมูลทำโดยการเพิ่มคำสั่ง COMPUTE ในโปรแกรม SPSS เช่น

COMPUTE NEWY = LN(Y)

COMPUTE NEWY = LN(Y+1) ใช้ในกรณีมีค่าบางค่าเป็นศูนย์หรือมีค่าน้อยมาก

2.3 การใช้เศษส่วนกลับ (reciprocal transformation) ในกรณีที่ค่ากำลังสองของค่าเฉลี่ยแต่ละกลุ่มกับค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นสัดส่วนกัน การแปลงข้อมูลด้วยวิธีนี้จะมีความเหมาะสม ซึ่งทำได้โดยการเพิ่มคำสั่ง COMPUTE ในโปรแกรม SPSS

COMPUTE NEWY = 1/Y

COMPUTE NEWY = 1/(Y+1) ใช้ในกรณีที่มีค่าบางค่าเป็นศูนย์

2.4 ใช้ angular sine (angular or inverse sine transformation) ในกรณีตัวแปรมีการแจกแจงแบบ binomial distribution และค่าเฉลี่ยกับค่าความแปรปรวนเป็นสัดส่วนกัน การแปลงข้อมูลด้วยวิธีนี้จะมีความเหมาะสม ซึ่งทำได้โดยการเพิ่มคำสั่ง COMPUTE ในโปรแกรม SPSS เช่น

COMPUTE NEWY = 2ARSIN(SQRT(Y))

ในทางปฏิบัติแล้วโดยทั่วไปมักนิยมใช้ค่ารากที่สองของค่าเดิมมาเป็นหลักในการแปลงข้อมูล (Johnson และ Wichern,1988 : 156, Sharma,1996 :383) การแปลงข้อมูลจะทำให้การแจกแจงของข้อมูลนั้นมีลักษณะเข้าสู่แบบปกติมากขึ้น ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่ว่า การแจกแจงของข้อมูลจะเป็นปกติหลายตัวแปรได้นั้น ตัวแปรทุกตัวต้องมีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribition) ก่อน

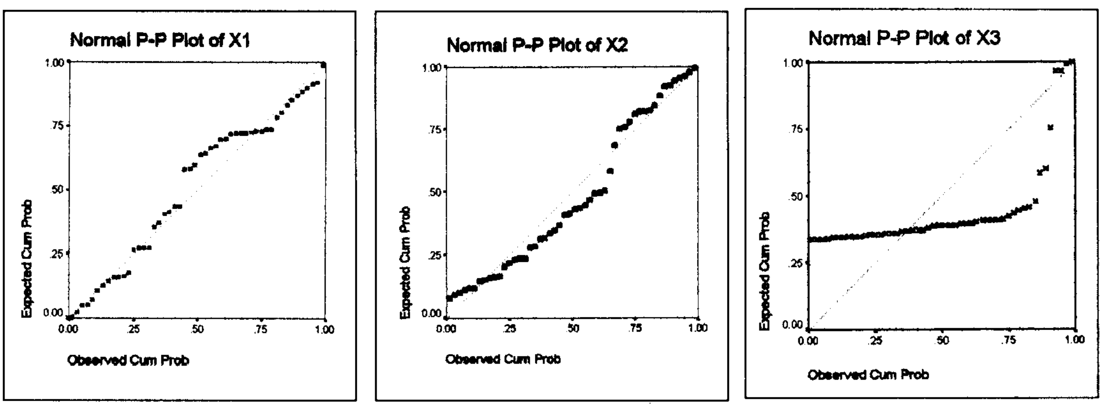
3. เมื่อแปลงข้อมูลเสร็จแล้วทำการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร อีกครั้งหนึ่ง และหากยังพบว่าการแจกแจงยังไม่เป็นปกติหลายตัวแปรอีก ก็ต้องทำการแปลงข้อมูลด้วยวิธีการอื่นต่อไป

ตัวอย่าง Sharma (1996:388) ได้เสนอข้อมูลที่มีปัญหาการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร เพื่อให้ผู้วิจัยได้ทดลองเลือกการแปลงข้อมูลมาใช้ปรับข้อมูล ให้เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร ลักษณะข้อมูลประกอบด้วย ตัวแปร 3 ตัว คือ X_1 X_2 และ X_3 และมีจำนวนกลุ่มตัวอย่าง 50 คน ผู้เขียนได้เริ่มจากการทดสอบการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรก่อน โดยคำนวณค่าความเบ้และความโด่งแบบหลายตัวแปรที่เสนอโดย Mardia (1970) ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

	ค่าสถิติ Z	P-Value
ความเบ้ (multivariate skewness)	12.668	.000*
ความโด่ง (multivariate kurtosis)	5.139	.000*

* มีนัยสคำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตาราง แสดงว่า ค่าความเบ้และความโด่งแบบหลายตัวแปร แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ผู้เขียนจึงทำการทดสอบระดับตัวแปรเดียว เพื่อหาว่าตัวแปรใดบ้างที่ส่งผลให้การแจกแจงร่วมกันไม่เป็นแบบปกติหลายตัวแปร โดยทำ normal probability plot ทีละตัวแปร ผลเป็นดังนี้



จากรูป พบว่าตัวแปรที่น่าจะมีปัญหาเรื่องการกระจายมากที่สุด ได้แก่ X_3 สำหรับ X_1 และ X_2 นั้นแม้จะมีปัญหาบ้าง แต่ก็ไม่มากนัก ผู้เขียนจึงทดลองแปลงข้อมูลสองครั้ง ครั้งแรกใช้ค่ารากที่สองของ X_3 ครั้งที่สองใช้ natural log ของตัวแปร X_3 พบว่าการใช้ natural log จะให้ผลดีกว่า จากนั้นจึงทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรอีกครั้ง ผลเป็นดังนี้

	ค่าสถิติ Z	P-Value
ความเบ้ (multivariate skewness)	2.823	.002*
ความโด่ง (multivariate kurtosis)	-.421	.337*

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตาราง พบว่า ความโด่งแบบหลายตัวแปรเริ่มเข้าสู่ปกติแล้ว เนื่องจากการทดสอบค่า Z พบว่าไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แต่ความเบ้ยังคงแตกต่างจากศูนย์อยู่ อย่างไรก็ตาม ดังที่ได้กล่าวแล้วว่า ความเบ้ของข้อมูลนั้น ไม่มีผลกระทบต่อการวิเคราะห์ MANOVA และ DA มากนัก ดังนั้นจึงถือว่าการแปลงข้อมูลเพียงเท่านี้มีความเหมาะสมที่จะวิเคราะห์ต่อไปได้

ข้อตกลงว่าด้วยความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรแต่ละกลุ่ม (Homogeneity of Population Covariance Matrix)

ข้อตกลงดังกล่าวนับว่ามีความสำคัญอย่างยิ่ง และนักวิจัยที่ใช้สถิติ MANOVA หรือ DA ส่วนใหญ่จะทำการทดสอบข้อตกลงนี้เสมอ ตามทฤษฎีของเมทริกซ์แล้ว เมทริกซ์ A จะเท่ากับเมทริกซ์ B ได้ด้วยเหตุผลสองประการด้วยกัน ประการแรก ต้องมีขนาดเท่ากัน เช่น A มีขนาด 3x3 B มีขนาด3x3 เรียกว่ามีขนาดเท่ากัน ประการที่สอง ค่าของสมาชิกทั้งสองเมทริกซ์ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันต้องมีค่าเท่ากัน จึงจะเรียกว่าเมทริกซ์ทั้งสองเท่ากัน เช่น

ถ้า $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 12 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad B_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 12 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A = B$

สมมุติให้ A คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในกลุ่มที่ 1(Σ_1) และ B คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในกลุ่มที่ 2 (Σ_2) ค่าของสมาชิกตามแนวทแยงของทั้งสองเมทริกซ์คือ ค่าความแปรปรวนของแต่ละตัวแปรในแต่ละกลุ่ม ส่วนค่าที่อยู่นอกแนวทแยงได้แก่ ค่าความแปรปรวนร่วม (covariance) ระหว่างตัวแปรทีละคู่ ซึ่งจำนวนค่าความแปรปรวนร่วมที่ไม่ซ้ำกันในหนึ่งเมทริกซ์จะมีเท่ากับ 1/2P(P-1) ค่า เมื่อ P เป็นจำนวนตัวแปร ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การที่เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในกลุ่มที่1(Σ_1) และกลุ่มที่ 2 (Σ_2) จะมีค่าเท่ากันได้นั้น ทั้งสองเมทริกซ์จะต้องมีความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมเท่ากัน

ปัญหาก็คือหากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในแต่ละกลุ่ม (Σ_J) แตกต่างกัน ผลที่ตามมาจะเป็นอย่างไร สำหรับการทดสอบ MANOVA และ DA แล้วข้อตกลงข้อนี้มีความสำคัญมากกว่าข้อตกลงว่าด้วยการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร (Timm,1975:251) เนื่องจาก การที่ข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลงนี้จะทำให้เกิดผลหลายประการดังต่อไปนี้

1. ในกรณีจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มเท่ากัน และความแตกต่างระหว่างเมทริกซ์ ความแปรปรวนร่วมของประชากรในแต่ละกลุ่ม (Σ_J) ไม่แตกต่างกันมากนัก จะไม่ส่งผลใดๆ ต่อความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 (type I error) คือ จะทำให้ระดับนัยสำคัญที่เป็นจริง (actual α) มีค่าใกล้เคียงกับระดับนัยสำคัญที่ผู้วิจัยตั้งขึ้น (nominal α) อย่างไรก็ตาม หากความแตกต่างระหว่างเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในแต่ละกลุ่มมีสูงมาก จะส่งผลให้ค่าระดับนัยสำคัญที่เป็นจริง มีค่าสูงกว่าระดับนัยสำคัญที่ผู้วิจัยตั้งขึ้น ซึ่งทำให้การทดสอบดังกล่าวง่ายต่อการปฏิเสธ null hypothesis (liberal)(Stevens, 1992:257)

2. ในกรณีจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มไม่เท่ากัน และพบว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในแต่ละกลุ่มแตกต่างกัน ไม่ว่าจะมากหรือน้อยเพียงใดก็ตามย่อมจะส่งผลโดยตรงต่อความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 (type I error) ในสองลักษณะคือ อาจจะส่งผลให้ค่าระดับนัยสำคัญที่เป็นจริง มีค่าสูงกว่าระดับนัยสำคัญที่ผู้วิจัยตั้งขึ้นซึ่งย่อมจะทำให้ค่าสถิติที่ได้จากการทดสอบง่ายต่อการปฏิเสธ null hypothesis(liberal) หรืออาจทำให้ค่าระดับนัยสำคัญที่เป็นจริงมีค่าต่ำกว่าระดับนัยสำคัญที่ผู้วิจัยตั้งขึ้นซึ่งจะส่งผลให้ค่าสถิติที่ได้จากการทดสอบนั้นยากต่อการปฏิเสธ null hypothesis (conservative) ก็ได้แล้วแต่กรณี (Steven,1992:257)

3. หากพบว่ามีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย ระหว่างเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในแต่ละกลุ่มก็จะส่งผลต่ออำนาจของการทดสอบได้โดยตรง ไม่ว่าจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มจะเท่ากันหรือไม่ก็ตาม จากงานวิจัยของ Holloway และ Dunn (อ้างถึงใน Stevens,1992:258) ได้ทดสอบและยืนยันข้อสรุปดังกล่าว ตัวอย่างเช่น กรณี 2 ตัวแปรและสมาชิกในแต่ละกลุ่มเท่ากับ 25

เมื่อพบว่าระหว่างเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในแต่ละกลุ่มเท่ากันจะทำให้อำนาจการทดสอบมีถึง .86 แต่ถ้าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรในแต่ละกลุ่มไม่เท่ากันแล้วจะทำให้อำนาจการทดสอบลดลงเหลือเพียง .77 เป็นต้น

จากปัญหาที่เกิดขึ้นเมื่อข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลงดังกล่าว ดังนั้นนักวิจัยจึงต้องทำการทดสอบว่าข้อมูลของตนนั้น เป็นไปตามข้อตกลงหรือไม่ ได้กล่าวไว้แล้วว่า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรทุกกลุ่มจะมีค่าเท่ากันได้นั้น สมาชิกทุกตัวของทุกเมทริกซ์ ซึ่งก็คือค่าความแปรปรวนและค่าความแปรปรวนร่วมจะต้องมีค่าเท่ากัน แต่ในทางปฏิบัติแล้วเราเก็บข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง สิ่งที่เรานำไปวิเคราะห์ก็คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่าง (sample covariance matrix :S_j) ดังนั้นเราจึงต้องอาศัยสถิติอ้างอิงมาเป็นเครื่องมือในการทดสอบโดยอาศัยข้อมูลดิบจากกลุ่มตัวอย่าง แล้วอ้างอิงกลับไปสู่ประชากร ในระดับการวิเคราะห์ตัวแปรเดียว (ANOVA) เราใช้สถิติ Cochrans C สถิติ Bartlett Box หรือสถิติ Levene test สำหรับทดสอบความเท่ากันของค่าความแปรปรวนของกลุ่มประชากร แต่เมื่อผู้วิจัยใช้การวิเคราะห์ในระดับหลายตัวแปรแล้ว การทดสอบข้อตกลงนี้จึงต้องใช้สถิติให้เหมาะสม ซึ่ง Box (อ้างถึงใน Timm, 1975 : 252) ได้พัฒนาสถิติที่ใช้ทดสอบข้อตกลงนี้ โดยอาศัยสถิติ Bartlett Box เป็นพื้นฐาน สถิติดังกล่าวคือ Box' s M Test ซึ่งมีสูตรดังนี้คือ

$$M = (N-g)\log|S| - \sum_{i-1}^{g} v_i \log|S_i| \qquad (5)$$

เมื่อ N คือจำนวนคนทั้งหมด, g คือ จำนวนกลุ่ม, S คือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด, S_i คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มที่ i ส่วน v_i มีค่าเท่ากับ (p(p+1) (g-1))2 สำหรับโปรแกรม SPSS แล้วจะนำค่า M ที่คำนวณได้ไปแปลงเป็นค่าสถิติ F และค่าสถิติ χ^2 แล้วจึงทดสอบสมมติฐาน หากพบว่าปฏิเสธ null hypothesis ก็แสดงว่า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรแต่ละกลุ่มแตกต่างกัน

สำหรับแนวทางแก้ไขเมื่อเกิดปัญหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรไม่เท่ากันนั้น จากการศึกษาค้นคว้าพบว่าน่าจะมีอยู่ด้วยกันสองแนวทางหลัก คือ

1. แนวดั้งเดิมที่ปฏิบัติกันมา ได้แก่การแปลงข้อมูล (Data transformation) โดยพิจารณาทีละตัวแปรว่า

- ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนแต่ละกลุ่ม เป็นสัดส่วนที่ใกล้เคียงกันหรือไม่ ถ้าเป็นก็ให้แปลงข้อมูล โดยการหาค่ารากที่สองของข้อมูลทีละคน (Sharma, 1996:386)

- ทดสอบความเท่ากันของค่าความแปรปรวนของกลุ่มประชากร (univariate test homogeneity of variance) ด้วยสถิติ Bartlett test ซึ่งมีในโปรแกรมสำเร็จรูปทั่วไป จากนั้น

หากพบว่าตัวแปรใดที่ความแปรปรวนของประชากรไม่เท่ากันทุกกลุ่มแล้ว ก็ให้แปลงข้อมูลตัวแปรนั้น

ในทางปฏิบัติผู้วิจัยอาจใช้เพียงวิธีหนึ่งวิธีใด หรืออาจต้องใช้ทั้งสองวิธี และเมื่อทำการแปลงข้อมูลแล้วก็ทำการทดสอบ ด้วยสถิติ Box's M ใหม่อีกครั้งหนึ่ง

ตัวอย่าง ผลการวิเคราะห์ MANOVA ก่อนทำการแปลงข้อมูล (Sharma, 1996:386-387)

ตัวแปร	**Y1**		**Y1**	
	Mean	*Variance*	*Mean*	*Variance*
กลุ่มที่ 1	3.856	1.40	5.949	1.42
กลุ่มที่ 2	17.460	7.43	5.844	.93

สำหรับตัวแปร Y1 ค่าสถิติ Barlett Box F เท่ากับ 13.97, P=.000 สัดส่วนระหว่างค่าเฉลี่ยกับความแปรปรวนในกลุ่มที่ 1 เท่ากับ 3.856/1.40 = 2.754 กลุ่มที่ 2 เท่ากับ 17.460/7.43 = 2.34 ตัวแปร Y2 ค่าสถิติ Bartlett Box F เท่ากับ .77112, P=.380 สัดส่วนระหว่างค่าเฉลี่ยกับค่าความแปรปรวนในกลุ่มที่ 1 เท่ากับ 5.949/1.42=4.189 กลุ่มที่ 2 เท่ากับ 5.844/.93=6.284 สำหรับค่าสถิติ Box's M = 15.567, P=.002 ซึ่งแสดงว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรทั้งสองกลุ่มแตกต่างกัน และค่าสถิติ F จากการทดสอบ MANOVA มีค่าเท่ากับ 272.374, P=.000 ซึ่งปฏิเสธ Null Hypothesis ที่ว่า $H_0:\mu_1=\mu_2$ จะสังเกตว่าสัดส่วนค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนในตัวแปร Y1 ของทั้งสองกลุ่มนั้นมีค่าใกล้เคียงกัน อีกทั้งยังพบว่าในตัวแปร Y1 ค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันด้วย นักวิจัยจึงแปลงข้อมูลตัวแปร Y1โดยการหาค่ารากที่สองของทุกคน แล้วทำการวิเคราะห์ใหม่ พบว่าสถิติ Box's M = 1.555, P=.691 แสดงว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันและค่าสถิติFจากการทดสอบMANOVA มีค่าเท่ากับ 226.114, P=.000 ซึ่งปฏิเสธ null hypothesis ที่ว่า $H_0:\mu_1=\mu_2$ เช่นเดียวกัน แต่มีข้อสังเกตว่า ค่าสถิติ F ครั้งหลังนี้มีค่าน้อยกว่าครั้งแรกมาก ทำให้ทราบว่าการทดสอบ ครั้งแรกนั้นมีลักษณะง่ายต่อการปฏิเสธ null hypothesis (liberal)

2. แนวทางที่จะเป็นแนวโน้มในอนาคต คือ การใช้สถิติอ้างอิงที่ไม่มีข้อตกลงว่าด้วยความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากร สถิติอ้างอิงที่จะกล่าวเป็นตัวอย่างต่อไปนี้บางตัวได้มีการศึกษากันแพร่หลายแล้ว แต่บางตัวก็เพิ่งจะพัฒนาเสร็จได้ไม่นานและยังไม่บรรจุไว้ในโปรแกรมสำเร็จรูป แต่ก็คาดหวังว่าอีกไม่นานคงเป็นที่แพร่หลาย สถิติที่จะกล่าวถึงมีดังนี้

2.1 กรณี Two-group discriminant analysis เมื่อพบว่า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรไม่เท่ากัน หรือมีการแจกแจงไม่เป็นปกติหลายตัวแปรแล้ว ผู้วิจัยสามารถใช้สถิติ logistic regression ได้ เนื่องจากสถิติดังกล่าวไม่มีข้อตกลงทั้งสองข้อที่กล่าวมาแล้ว(Shama,1996 : 332)

2.2 กรณี Two-Group MANOVA แต่เดิมเราใช้สถิติ Hotelling T^2 ซึ่งมีสูตร ดังนี้ (Coombs และคณะ,1996:157)

$$T^2 = (n_1 n_2)/(n_1+n_2)(X_1-X_2)' S^{-1} (X_1-X_2) \qquad (6)$$

เมื่อ X1 คือ เวคเตอร์ค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1, X2 คือ เวคเตอร์ค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ 2, S^{-1} คือ inverse covariance matrix ของกลุ่มตัวอย่าง, n1 คือจำนวนสมาชิกในกลุ่ม 1 และ n_2 คือจำนวนสมาชิกในกลุ่ม 2 แต่เนื่องจาก S นั้นเป็น pooled within group covariance matrix ดังนั้นหาก $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ แล้วก็ไม่อาจใช้ S มีนักวิชาการจำนวนหนึ่ง เช่น James, Johensen, Kim เป็นต้นได้พัฒนาสถิติ T^2 ขึ้นมาใหม่โดยใช้สูตรดังนี้ (Coombs และคณะ,1996:159)

$$T^2_v = (X_1-X_2)'(S_1/n_1+S_2/n_2)^{-1}(X1-X2) \qquad (7)$$

เมื่อ S_1 เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มที่ 1 และ S_2 เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มที่ 2

จะสังเกตว่าสถิติใหม่นี้ได้แยกเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของแต่ละกลุ่มออกคำนวณต่างหากไม่ได้รวมกันเหมือนสูตรเดิม นอกจากนั้นนักวิชาการดังกล่าวยังได้ระบุวิธีการหาค่าวิกฤต(Critical value) ที่แตกต่างกันไป ซึ่งการคำนวณค่าวิกฤตนี้มีความซับซ้อนมากจะไม่ขอกล่าวในที่นี้ แต่จากการวิจัยยืนยันว่าสถิติ T^2_v นี้ให้ค่านัยสำคัญที่เป็นจริงใกล้เคียงกับนัยสำคัญที่ผู้วิจัยตั้งขึ้นซึ่งดีกว่าสถิติ T^2 เดิม

2.3 กรณี K-group MANOVA แต่เดิมเรามีเกณฑ์ที่ใช้ในการทดสอบความแตกต่างของเวคเตอร์ค่าเฉลี่ยอยู่ 4 เกณฑ์คือ เกณฑ์ของ Roy, Holtelling-Lawley, Pillai Bartlett และ Wilk ซึ่งทั้ง 4 เกณฑ์อาศัยค่าไอเกน (eigen values) มาเป็นส่วนสำคัญในการคำนวณซึ่งค่าไอเกนนี้ก็อาศัยเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด เป็นส่วนสำคัญในการคำนวณเช่นกัน และเมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรแต่ละกลุ่มไม่เท่ากันแล้ว ก็ไม่อาจใช้

เมทริกซ์ที่เป็นของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดได้ ซึ่ง Coombs และ Algina (1996) ได้พัฒนาเกณฑ์ทั้ง 4 ที่กล่าวมาแล้วใหม่ โดยพยายามคำนวณค่าไอเกนแบบใหม่ไม่ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรแต่ละกลุ่มต้องเท่ากัน ซึ่งสูตรที่คำนวณนั้นไม่ยากเพียงแต่มีปัญหาอยู่ที่การหาค่าวิกฤตที่ค่อนข้างซับซ้อนมาก อีกทั้งผลการวิจัยยังอยู่ภายใต้ขอบเขตที่จำกัด เช่น จำกัดจำนวนตัวแปรหรือจำนวนกลุ่มตัวอย่าง เป็นต้น ซึ่งยังคงต้องพัฒนาต่อไป นอกจากนี้สถิติดังกล่าวยังต้องอาศัยการคำนวณเองเป็นส่วนใหญ่ ยังไม่ได้บรรจุไว้ในโปรแกรมสำเร็จรูป จึงยังไม่ขอเสนอรายละเอียดในที่นี้

บทส่งท้าย

การทดสอบข้อตกลงในการวิเคราะห์ MANOVA และ DA ควรทำตามลำดับคือ ทดสอบความเป็นอิสระก่อน จากนั้นก็ทดสอบการแจกแจงว่าเป็นแบบปกติหลายตัวแปรหรือไม่ และจบด้วยการทดสอบความเท่ากันของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของกลุ่มประชากรแต่ละกลุ่ม หากในแต่ละขั้นตอนเกิดมีปัญหาขึ้นมาก็ทำการแก้ไขให้เป็นไปตามข้อตกลง แล้วทำการวิเคราะห์ต่อไป หากผู้อ่านได้ติดตามบทความนี้อย่างต่อเนื่องคงจะเห็นว่าการทำให้ข้อมูลเป็นไปตามข้อตกลงนั้นเป็นเรื่องที่ไม่ยากเกินไป โดยเฉพาะในปัจจุบันที่มีเครื่องมือช่วยในการวิเคราะห์ที่ทันสมัยมากขึ้น แม้ว่าในอนาคตข้างหน้านักวิจัยอาจเลือกใช้สถิติตัวอื่นที่ไม่มีข้อตกลงมากนัก และสามารถวิเคราะห์ได้ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปทั่วไป แต่ตราบเท่าที่เรายังต้องใช้สถิติที่ถูกจำกัดด้วยข้อตกลงดังกล่าว ผู้วิจัยก็จำเป็นที่จะต้องทดสอบข้อตกลงของการวิเคราะห์ทุกประเภท เพื่อให้ผลการวิจัยมีความสอดคล้องกับลักษณะข้อมูลมากที่สุด

เอกสารอ้างอิง

Coombs,W.T.and Algina, J. 1996. New Test Statistics for MANOVA/Descriptive Discriminant Analysis. ***Educational and Psychological Measurement.*** 56,(3) 382-402.

Coombs,W.T., Algina, J. and Oltman. D.O. 1996. Univariate and Multivariate Omnibus Hypothesis Tests Selected to Control Type I Error Rates When Population Variance are not Necessarily Equal. ***Review of Educational Research.*** 66,(2) 137-179.

Fan,X.1996. An SAS Program for Assessing Multivariate Normality. ***Educational and Psychology Measurement*** 56,(4) 669-674.

Glass,G., and Hopkins, K. 1984. ***Statistics Methods in Educational and Psychology.*** New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Huberty, C.J.1994. ***Applied Discriminant Analysis.*** New York: John Wiley & Sons, Inc.

Johnson, N.and Wichern, D. 1988. ***Applied Multivariate Statistical Analysis.*** (2nd ed.) New Jersey : Prentice-Hall,Inc.

Joreskog, K.G. and Sorbom, D. 1993. ***PRELIS2 user's reference guide.*** Chicago : Scientific Software.

Kirk, R.E.1995. ***Experimental Design.*** (5th ed.) New York: Brook/Cole Publishing Company.

Olsen, C.L.1974. Comparative Robustness of Six Tests in Multivariate Analysis of Variance. ***Journal of the American Statistical Association.69,*** (348), 894-907.

Mardia, K.V. 1970. Measures of Multivariance Skewness and Kurtosis with Applications. ***Biometrika.*** 57,519-530.

Sharma, S.1996. ***Applied Multivariance Techniques.*** New York : John Wiley& Sons,Inc.

Scariano.S. and Davenport, J. 1987. The Effects of Violations of the Independent Assumption the One Way ANOVA. ***The American Statistician*** 41,123-129.

Steven, J. 1992. ***Applied Multivariate Statistics for the Social Science.***(2nd ed.) New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates,Inc.

Timm, N.H. 1975. ***Multivariate Analysis with Applications in Education and Psychology.*** Montery, CA : Brooks-Cole.