บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

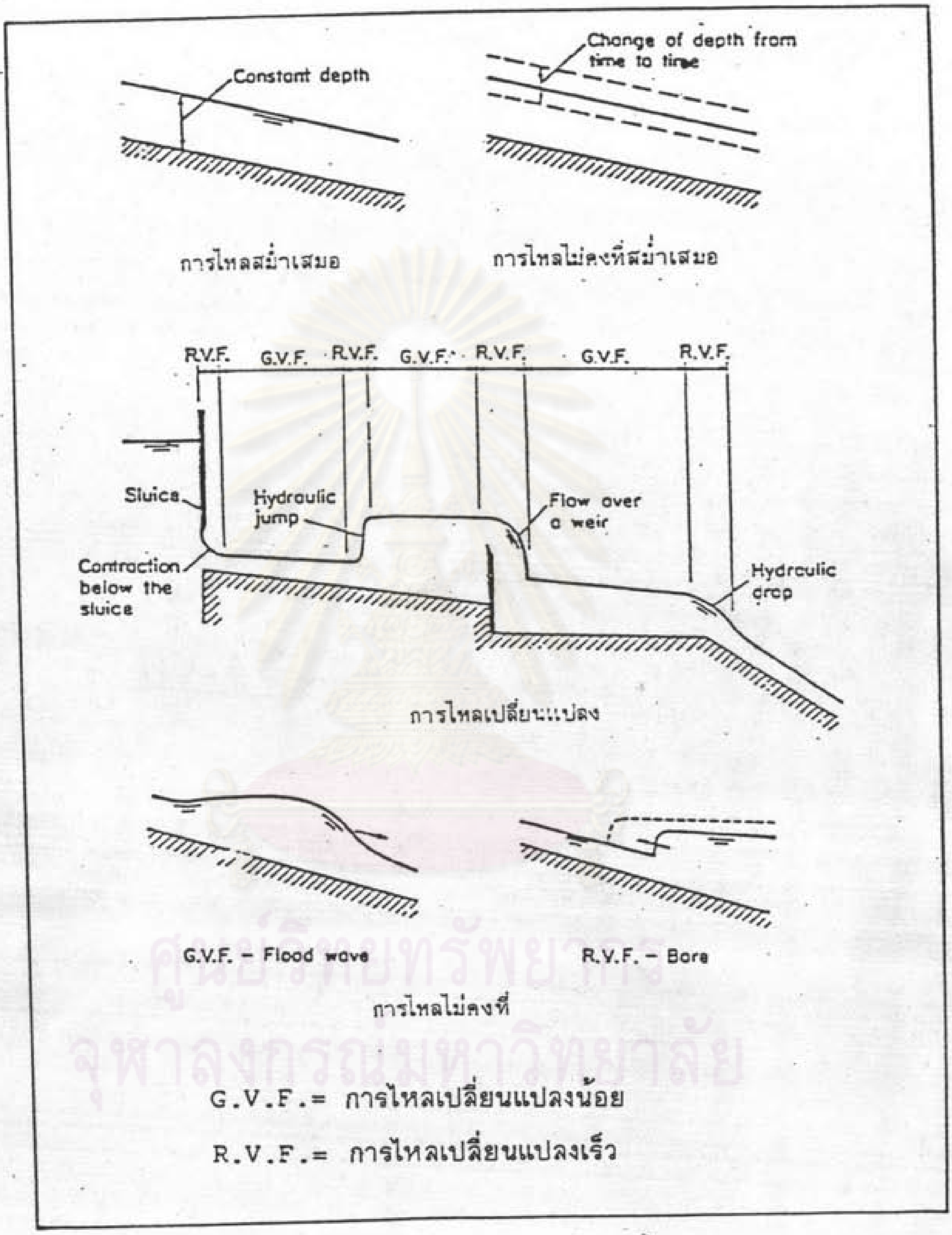
3.1 การจำแนกการไหลในทางน้ำเปิด

การจำแนกการไหลในทางน้ำเปิดกำหนดได้สองประการ ประการแรก ได้แก่ การจำแนกตามชนิดการไหล ซึ่งพิจารณา เกณฑ์สัมพันธ์กับเวลาและเกณฑ์สัมพันธ์กับตำแหน่งพื้นที่ของการไหล อีกประการได้แก่ การจำแนกตามสภาวะของการไหล

3.1.1 ชนิดของการไหล

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์การไหลกับเวลา โดยพิจารณา ณ.ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งในทางน้ำ จะพบว่าสามารถแบ่งชนิดการไหลตามระบบเวลาได้สองชนิดดังแสดงในรูป 3-1 คือ การไหลคงที่ ซึ่งมีตัวแปรการไหลทุกตัวแปร เช่น อัตราการไหลหรือความลึกการไหล เป็นต้น คงที่ตลอดเวลาในช่วงที่พิจารณา ส่วนการไหลของน้ำอีกชนิดหนึ่งเมื่อพิจารณาเทียบกับเวลา ได้แก่การไหลไม่คงที่ ซึ่งก็คือ กรณีการไหลที่มีตัวแปรการไหลบางตัวแปรเปลี่ยนกับเวลา เช่น อัตราการไหล ความลึกการไหล เป็นต้น ในความเป็นจริงแล้วการไหลในทางน้ำเปิดธรรมชาติมักจะเป็นการไหลไม่คงที่เป็นส่วนใหญ่ เช่น น้ำไหลในแม่น้ำในช่วงฤดูฝน เป็นต้น สำหรับการไหลคงที่ จะเกิดขึ้นในทางน้ำเปิดที่สร้างขึ้นและมีระบบควบคุมการไหลด้วยอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ ตัวอย่าง เช่น คลองชลประทานที่มีประตูน้ำควบคุมการปล่อยน้ำ เป็นต้น อย่างไรก็ตามในบางครั้งเพื่อจะลดความยุ่งยากในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลไม่คงที่ที่มีความผันแปรกับเวลาไม่มากนัก อาจพิจารณากำหนดเป็นการไหลคงที่ในช่วงเวลาอันสั้น เช่น การไหลในแม่น้ำธรรมชาติในช่วงฤดูแล้ง

เมื่อพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ของตัวแปรการไหลกับตำแหน่งพื้นที่การไหล โดยพิจารณาที่เวลาใดเวลาหนึ่งสามารถแบ่งชนิดการไหลออกได้เป็นสองชนิดคือ การไหลสม่ำเสมอและการไหลเปลี่ยนแปลง โดยที่ การไหลสม่ำเสมอหมายถึงการไหลที่มีความลึกของการไหล



รูป 3-1 การจำแนกชนิดการไหลในทางน้ำเปิด

คงที่ทุก ๆ จุดหรือที่หน้าตัดตามแนวยาวของทางน้ำเปิดตลอดช่วงที่ศึกษา ส่วนการไหลเปลี่ยนแปลงคือการไหลที่ความลึกของการไหลเปลี่ยนแปลงไปตามระยะทางของทางน้ำเปิด ดังแสดงในรูป 3-1

สำหรับการไหลเปลี่ยนแปลง เมื่อพิจารณาลักษณะการเปลี่ยนแปลงของระดับผิวน้ำต่อระยะทางสามารถจำแนกเป็นสองชนิดคือ การไหลเปลี่ยนแปลงน้อย ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงความลึกเทียบกับระยะทางน้อยผิวน้ำมีความราบเรียบและการเปลี่ยนแปลงเร็ว ที่มีการเปลี่ยนแปลงความลึกของการไหลทันทีทันใดในระยะทางสั้น ๆ ซึ่งจะเกิดกรณีที่เรียกว่า ปรากฏการณ์เฉพาะแห่ง เช่น การยกระดับน้ำเมื่อน้ำไหลลงมาจากฝายกั้นน้ำและน้ำตก ดังแสดงใน รูป 3-1

โดยสรุป เมื่อพิจารณาการไหลด้วยเกณฑ์เวลาและตำแหน่งพื้นที่ สามารถจำแนกชนิดของการไหล ได้เป็น 6 ชนิด คือ

1) การไหลคงที่ $\frac{d}{dt}(Q, y \cdot \cdot) = 0$
   - 1.1) การไหลสม่ำเสมอ $\left|\frac{dy}{dx}\right| = 0$
   - 1.2) การไหลเปลี่ยนแปลงน้อย $\left|\frac{dy}{dx}\right| = 0$
   - 1.3) การไหลเปลี่ยนแปลงเร็ว $\left|\frac{dy}{dx}\right| >> 0$

2) การไหลไม่คงที่ $\frac{d}{dt}(Q, y \cdot \cdot) = 0$
   - 2.1) การไหลไม่คงที่สม่ำเสมอ $\left|\frac{dy}{dx}\right| = 0$
   - 2.2) การไหลไม่คงที่เปลี่ยนแปลงน้อย $\left|\frac{dy}{dx}\right| = 0$
   - 2.3) การไหลไม่คงที่เปลี่ยนแปลงเร็ว $\left|\frac{dy}{dx}\right| >> 0$

3.1.2 สภาวะการไหล

การจำแนกการไหลด้วยสภาวะของการไหล เป็นการพิจารณาผลของแรงกระทำ 3 ชนิด ประกอบด้วย แรงจากความหนืด แรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลกและแรงเนื่องจากความเฉื่อยของมวล มีลักษณะสรุปได้ดังนี้

1) ผลของความหนืดต่อการไหล ซึ่งสำคัญในการไหลแบบท่อ เมื่อเปรียบเทียบกับความเฉื่อยของมวลการไหล จะแบ่งเป็นสามสภาวะคือ การไหลแบบราบเรียบซึ่งเป็นการไหลที่มีแรงกระทำต่อการไหลเนื่องจากความหนืดสูงมาก เมื่อเปรียบเทียบกับแรงเนื่องจากความเฉื่อยอนุภาคของน้ำจะเคลื่อนที่ในแนวที่แน่นอนและราบเรียบซึ่งเรียกว่า เส้นกระแสน้ำ การไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งเป็นการไหลที่มีแรงกระทำเนื่องจากความหนืดน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับแรงเนื่องจากความเฉื่อยและจะมีอนุภาคของน้ำเคลื่อนที่ในทิศทางที่ไม่แน่นอน ส่วนการไหลซึ่งผสมกันอยู่ระหว่างสภาวะทั้งสองจะเรียกว่า การไหลแบบผสม

การจำแนกสภาวะการไหลอันมีผลเนื่องจากความหนืดจะกำหนดได้โดยการพิจารณาค่าของ Reynold Number , $R_e = LV/\nu$ เช่นเดียวกับการไหลในท่อ

โดย V คือ ความเร็วของการไหล

L คือ ความยาวจำเพาะ

ν คือ ค่าความหนืดเชิงจลน์ของน้ำ

การไหลแบบท่อใช้ความยาวจำเพาะเท่ากับขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางท่อ สำหรับการไหลแบบทางน้ำเปิดจะใช้ค่าความยาวจำเพาะเท่ากับรัศมีชลศาสตร์ ซึ่งเท่ากับ อัตราส่วนของพื้นที่หน้าตัดต่อความยาวเส้นเปียกน้ำของหน้าตัดคลอง การไหลในทางน้ำเปิดที่พบเห็นทั่วไปจะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน ส่วนผลกระทบของความหนืดต่อการไหลมีดังนี้

การไหล	การไหลแบบท่อ $R_e = VD/\nu$	การไหลแบบทางน้ำเปิด $R_e = VR/\nu$
การไหลแบบราบเรียบ	$R_e < 2000$	$R_e < 500$
การไหลแบบผสม	$2000 < R_e < 4000$	$500 < R_e < 2000$
การไหลแบบปั่นป่วน	$R_e > 4000$	$R_e > 2000$

2) ผลของแรงโน้มถ่วงของโลกต่อการไหลซึ่งสำคัญมากในการไหลแบบทางน้ำเปิด เนื่องจากการไหลในทางน้ำเปิดนี้ แรงดึงดูดของโลก เป็นปัจจัยที่มีอิทธิพลหลักต่อการไหลหรืออีกนัยหนึ่ง เป็นการไหลด้วยน้ำหนักของมวลน้ำไหล บนความแตกต่างของระดับน้ำหรือความลาดเท ผลของแรงโน้มถ่วงของโลกต่อการไหลจะพิจารณาจาก Froude Number, F_r ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่าง แรงกระทำเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก(g)ต่อแรงกระทำเนื่องจากความเฉื่อย หรือ

$$F_r = V/(gL)^{0.5} = V/(gD)^{0.5}$$

โดย L คือ ความยาวจำเพาะ (ในทางน้ำเปิด L เท่ากับความลึกชลศาสตร์)

$D = A/B_S$

A คือ พื้นที่หน้าตัดการไหล

B_S คือ ความกว้างของผิวน้ำอิสระบนหน้าตัดการไหล

การจำแนกผลของแรงโน้มถ่วงของโลกต่อการไหล โดยใช้ Froude Number สามารถสรุปได้ดังนี้

Froude Number	การไหล
$F_r = 1.0$, $V = (gD)^{0.5}$	การไหลสภาวะวิกฤต
$F_r < 1.0$, $V < (gD)^{0.5}$	การไหลสภาวะใต้วิกฤต
$F_r > 1.0$, $V > (gD)^{0.5}$	การไหลสภาวะเหนือวิกฤต

ซึ่งความเร็ววิกฤต $V = (gD)^{0.5}$ จะเป็นความเร็วของคลื่นน้ำที่เกิดขึ้นในบริเวณน้ำตื้น เมื่อคลื่นน้ำเกิดในทางน้ำเปิดที่มีการไหลสภาวะใต้วิกฤติ จะพบว่าคลื่นน้ำเคลื่อนที่ทวนน้ำได้ ในขณะที่คลื่นในทางน้ำเปิดที่มีการไหลสภาวะเหนือวิกฤติ คลื่นน้ำไม่สามารถเคลื่อนที่ทวนน้ำได้ เพราะความเร็วการไหล $V > (gD)^{0.5}$

3) สรุปการจำแนกสภาวะการไหลโดยการรวมผลของความหนืดและแรงโน้มถ่วงของโลกต่อการไหลในทางน้ำเปิด จะสามารถจำแนกสภาวะการไหลได้เป็น 6 สภาวะ ดังรูป 3-2 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ความเร็วการไหลและความลึก สำหรับสภาวะการไหลต่าง ๆ

3.2 สมการอธิบายการไหลไม่คงที่และสมมติฐาน

สมการพื้นฐานในการอธิบายการไหลในทางน้ำเปิดแบบไม่คงที่ SAINT VENANT ได้นำมาเผยแพร่ครั้งแรกในปี ค.ศ. 1871 จนเป็นที่นิยมนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน สมการพื้นฐานนี้ประกอบด้วย สมการต่อเนื่องและสมการโมเมนตัม ซึ่งมีสมมติฐานและรายละเอียด ดังนี้

1) ความดันที่จุดใด ๆ เป็นความดันสถิตย์
2) พลังงานที่สูญเสียเนื่องจากความฝืดไม่ต่างกับกรณีการไหลแบบคงที่ และคำนวณจากสมการของ Manning
3) การกระจายความเร็วสม่ำเสมอในหน้าตัด สัมประสิทธิ์ของพลังงาน เท่ากับ 1
4) ความหนาแน่นของน้ำมีค่าคงที่ เท่ากับ 1,000 กก./ ม.^{3}
5) ความลาดเอียงของทางน้ำน้อย ($\tan \phi \approx 0$)
6) ความเร็วจากการจากอัตราไหลเข้าด้านข้าง ไม่มีผลต่อความเร็วในลำน้ำ

3.2.1 สมการต่อเนื่อง

สมการต่อเนื่องมาจากกฎการคงตัวของมวลสาร จากรูป 3-3 เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุม (control volume, C.V.) จะได้ว่าผลรวมของมวลสารที่ผ่านผิวหน้าควบคุม (control surface, C.S.) เท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลสารในปริมาตรควบคุม ดังนั้นสมการต่อเนื่อง สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\iint_{c.s.} \rho V \, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} \rho \, dv = 0$$

$$[\, \rho Q + \frac{\partial}{\partial x} (\rho Q) \, dx \,] - [\, \rho Q - \rho q_{\ell} \, dx \,] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A \, dx) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho Q) \, dx - \rho q_{\ell} \, dx + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) \, dx = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q_{\ell} = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

เมื่อ v คือ ปริมาตรควบคุม

A คือ พื้นที่หน้าตัดการไหล

3.2.2 สมการโมเมนตัม

สมการโมเมนตัมคือสมการแสดงการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม ซึ่งได้จากกฎข้อที่สองของ NEWTON คือผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อมวลสารจะเท่ากับผลรวมของอัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในปริมาตรควบคุมกับอัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมออกสุทธิที่ผิวหน้าควบคุม ดังสมการ 3-2 (ดูรูป 3-4 ประกอบ)

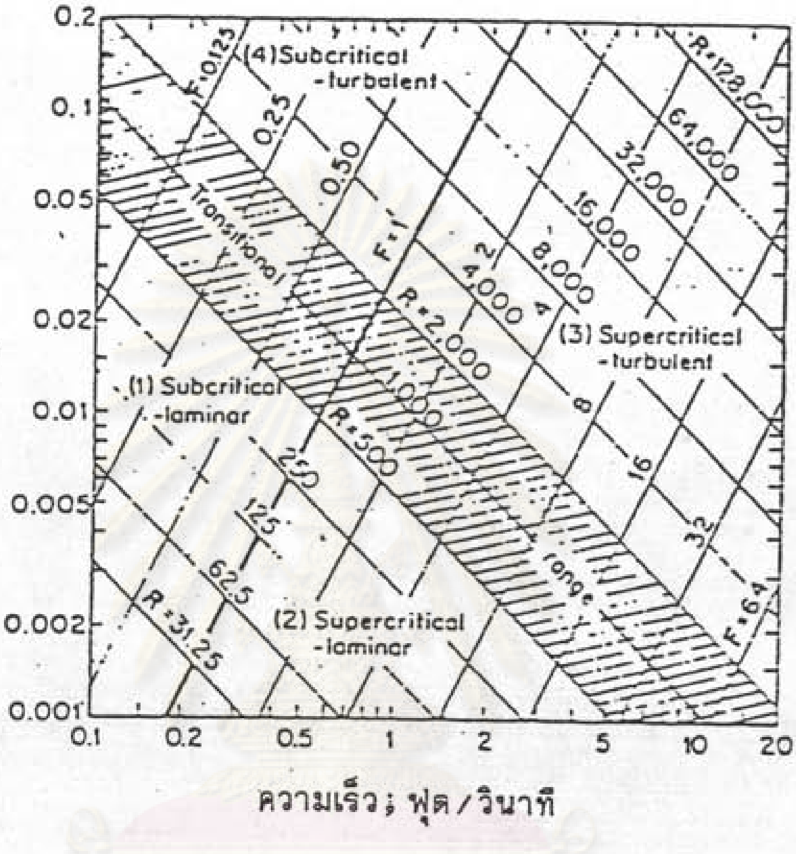
$$F_s = \iint_{c.s.} V(\rho V) \, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} V\rho \, dv \qquad (3\text{-}2)$$

สำหรับการไหลในทิศทาง x จะได้

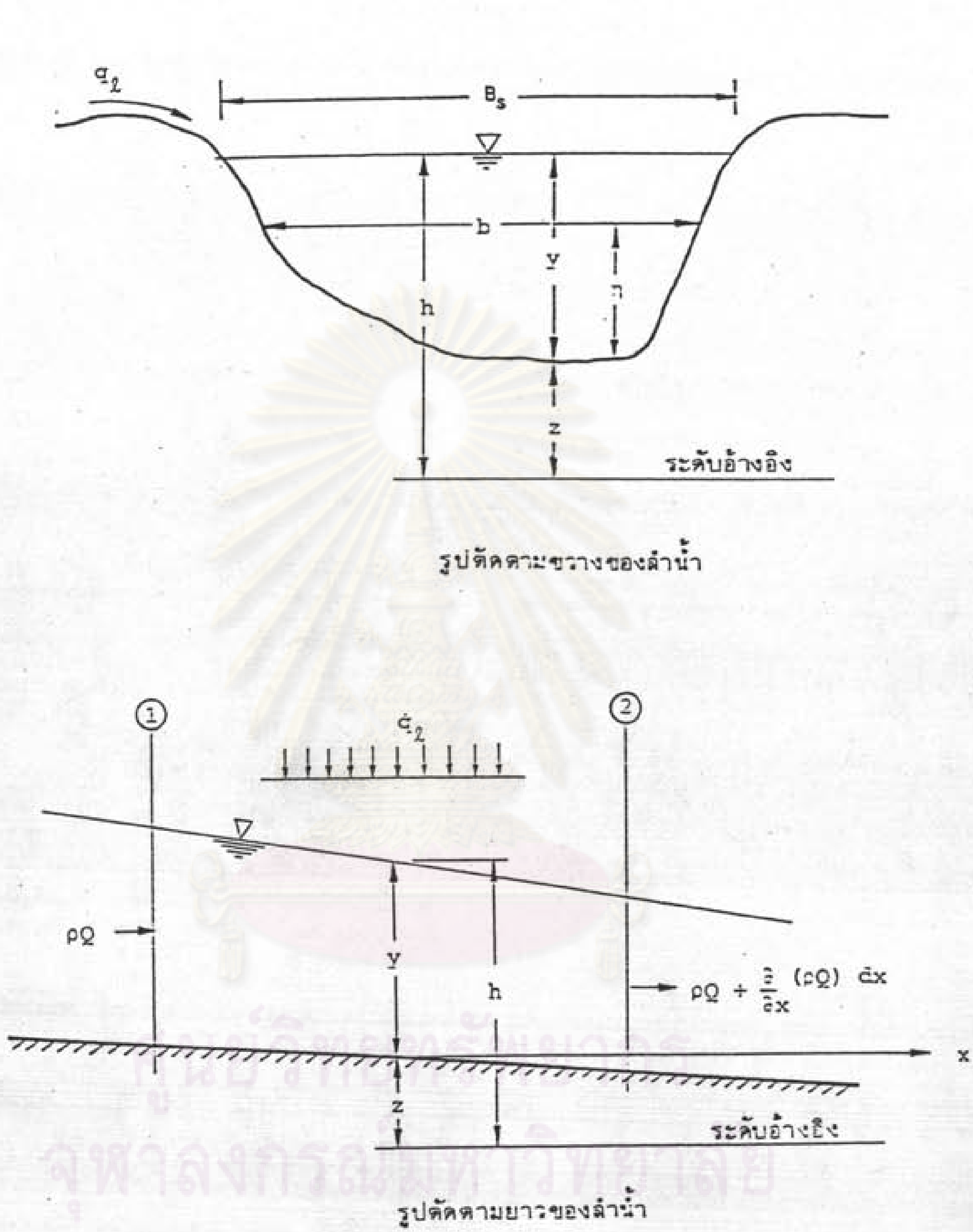
$$F_{sx} = \iint_{c.s.} V_x(\rho V) \, dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} V_x(\rho) \, dv$$

โดยที่

1) แรงกระทำภายนอก, F_{sx} พิจารณาจากแรง เนื่องจากความดันสถิตย์ แรงเสียดทาน และแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ตามลำดับ ดังสมการที่ 3-3



รูป 3-2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความลึกกับการจำแนกสภาวะการไหล

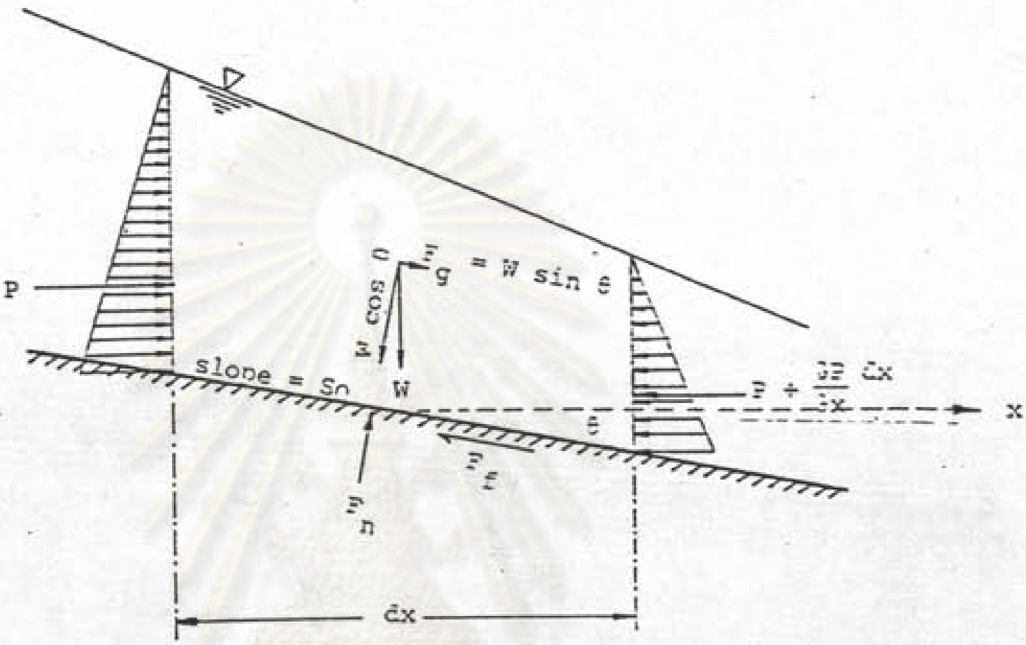


เมื่อ ρ = ความหนาแน่นของน้ำ

Q = อัตราไหล

q_ℓ = อัตราไหลด้านข้างต่อหน่วยความยาวตามลำน้ำ

รูป 3-3 รูปตัดตามขวางและรูปตัดตามความยาวของลำน้ำสำหรับศึกษา สมการต่อเนื่องและสมการโมเมนตัม



เมื่อ P = แรงเนื่องจากความดันสถิตของน้ำ

F_n = แรงปฏิกริยาที่พื้นกระทำต่อปริมาตรควบคุม

F_f = แรงเสียดทานที่พื้นกระทำต่อปริมาตรควบคุม

W = น้ำหนักของน้ำในปริมาตรควบคุม

S_o = ความลาดเอียงของท้องคลอง

dx = ความยาวของปริมาตรควบคุม

รูป 3-4 แรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อปริมาตรควบคุม

$$F_{sx} = P - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) - F_f \cos\phi + F_n \sin\phi \qquad (3\text{-}3)$$

1.1) แรงเนื่องจากความดันสถิตย์ด้านเหนือน้ำและท้ายน้ำ

$$P = \int_0^y \gamma(y - \eta)\, b(x,\eta)\, d\eta$$

โดย Leibnitz's rule สามารถแสดงผลได้ดังนี้

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx = \gamma \frac{\partial}{\partial x} [\, y \int_0^y b(x,\eta)\, d\eta \,]\, dx$$

$$= \gamma A \frac{\partial y}{\partial x} dx \qquad (3\text{-}4)$$

1.2) แรงเสียดทาน เมื่อ S_f คือ friction slope จะเท่ากับ

$$F_f \cos\phi \simeq F_f = \gamma A S_f\, dx \qquad (3\text{-}5)$$

1.3) แรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกที่กระทำต่อปริมาตรควบคุม

$$F_g = F_n \sin\phi$$

$$= \gamma A \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

$$= \gamma A S_0\, dx$$

$$(3\text{-}6)$$

แรงกระทำภายนอกรวมคำนวณได้จากการแทนค่าสมการ 3-4 ,3-5 และ 3-6ในสมการ 3-3 ได้ผลดังนี้

$$F_{sx} = -\gamma A \frac{\partial y}{\partial x} dx - \gamma A S_f \, dx + \gamma A S_0 \, dx \qquad (3\text{-}7)$$

2) อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในปริมาตรควบคุม โดยที่ปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับผลคูณของ พื้นที่หน้าตัดการไหล (A) กับความยาวของปริมาตรควบคุม (dx) ดังนั้นโมเมนตัมจะเท่ากับ A dx V_x หรือ Q dx ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} V_x \rho \, dv = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx \qquad (3\text{-}8)$$

3) อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมออกสุทธิที่ผ่านผิวหน้าควบคุม

$$\iint_{c.s.} V_x (\rho V) \, dA = \rho \frac{\partial}{\partial x} (QV) \, dx \qquad (3\text{-}9)$$

แทนค่าสมการ 3-2 ด้วยสมการ 3-7 , 3-8 และสมการ 3-9

$$-\gamma A \frac{\partial y}{\partial x} dx - \gamma A S_f \, dx + \gamma A S_0 \, dx = \rho \frac{\partial}{\partial x} (QV) \, dx + \frac{\partial}{\partial t} (V \rho A \, dx)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A}\right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gAS_f - gAS_0 = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial y}{\partial x} - S_0\right) + gAS_f = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS_f = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

คิด friction slope จากสูตรของ Manning

$$S_f = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} = \frac{n^2 |Q| \, Q}{A^2 R^{4/3}}$$

แทนค่า S_f ในสมการ 3-10

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x} + gA\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gn^2 Q|Q|}{AR^{4/3}} = 0$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2Q}{gA^2}B_S\frac{\partial h}{\partial t} + \left(1 - \frac{Q^2B}{gA^3}\right)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Q^2B}{gA^3}I + \frac{n^2|Q|Q}{A^2R^{4/3}} = 0$$

$$h - z = y$$

$$B\left(\frac{\partial h}{\partial x} + I\right) = B\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{-\partial z}{\partial x} = I$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gA^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{n^2Q|Q|}{A^2R^{4/3}} = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

3.3 <u>แนวคิดในการหาผลลัพธ์ของสมการของการไหล</u>

สมการของการไหลทั้งสองสมการในหัวข้อ 3.2 คือสมการ 3-1 และ สมการ 3-11 มีลักษณะเป็น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย การแก้สมการเพื่อหาผลลัพธ์โดยใช้วิธีวิเคราะห์ ทำได้ยาก ถึงแม้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์นี้จะเป็น ค่าที่ถูกต้องอย่างแท้จริง ก็ตาม ด้วยเหตุนี้จึงได้มีการคิดค้นวิธีต่างๆ มากมาย เพื่อจะสามารถนำมาใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว จนกระทั่งมีการพัฒนาวิธีเชิงตัวเลขขึ้นมา ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขจะเป็นผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องพอประมาณ ระดับความละเอียดแน่นอนของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับปัจจัยต่าง ๆ หลายประการ เช่น วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้นั้นมีความเหมาะสมกับลักษณะของปัญหามากน้อยเพียงใด คุณภาพของข้อมูลที่นำมาใช้ ศักยภาพของเครื่องคำนวณ ฯลฯ อย่างไรก็ตาม ระดับของความถูกต้องที่ต้องการนั้นมักจะกำหนดจากวัตถุประสงค์ที่จะนำผลลัพธ์ไปใช้งานเป็นกรณี ๆ ไป เช่น การวางแผนระบบส่งน้ำไม่จำเป็นต้องการผลลัพธ์จากการคำนวณคือ ค่าอัตราการไหลและระดับน้ำ

ในระดับที่มีความละเอียดเท่ากับค่าที่ใช้ในการออกแบบอาคารชลศาสตร์ การออกแบบระบบระบายน้ำภายในท่าอากาศยาน ต้องการความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์มากกว่าค่าที่ใช้ในการออกแบบระบบระบายน้ำของพื้นที่ชุมชนทั่วไป เป็นต้น

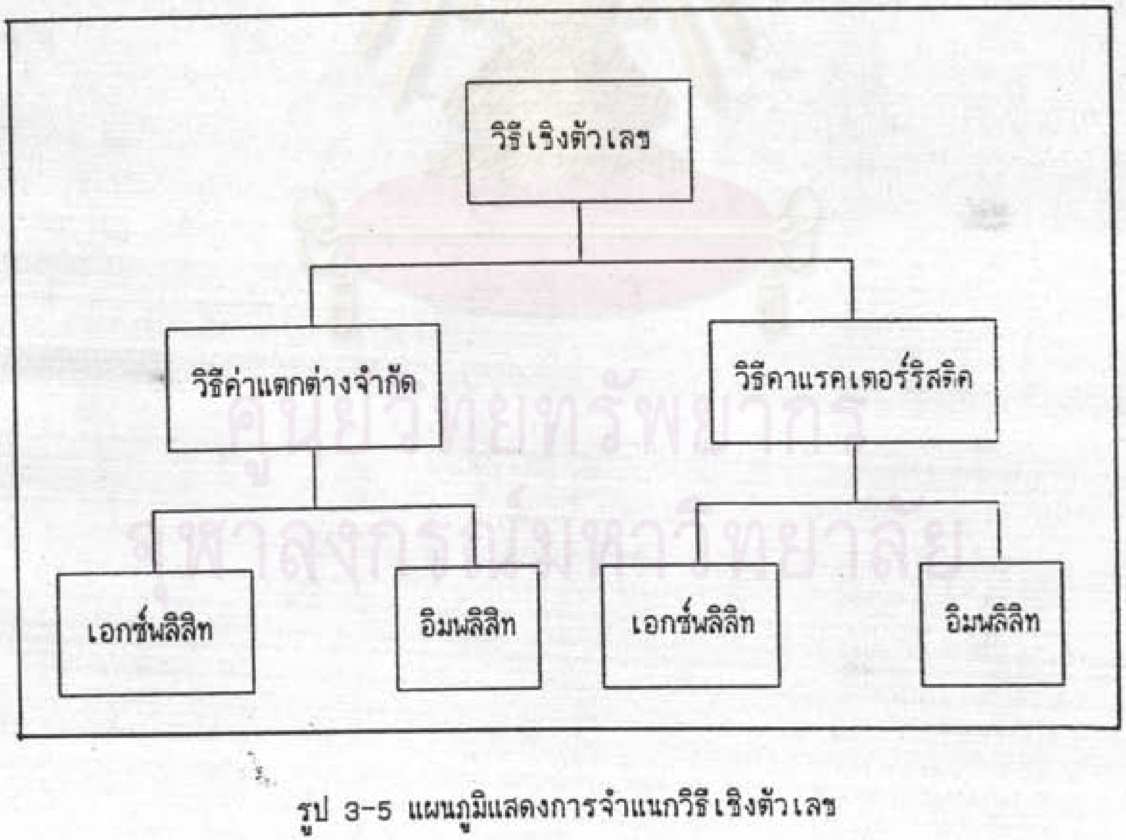
3.4 วิธีเชิงตัวเลข

วิธีเชิงตัวเลขที่นำมาใช้กับการหาผลลัพธ์ของชุดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพื้นฐานของการไหลแบบไม่คงที่ในทางน้ำเปิดนั้น มีหลายวิธี และแต่ละวิธีมีกระบวนการวิเคราะห์แตกต่างกัน ประสิทธิภาพของแต่ละวิธีนั้นพิจารณาได้จากระดับของความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ เช่น ความแม่นยำ เสถียรภาพ การลู่เข้า-ออก ฯลฯ นอกจากนี้ยังอาจจะพิจารณาจากเวลาที่ใช้คำนวณ แต่ละวิธีมีความเหมาะสมแตกต่างกันจึงไม่อาจจะระบุไปได้ว่าวิธีใดเป็น "วิธีที่-ดีที่สุด" เพราะว่า บางวิธีสามารถใช้ได้ดีกับปัญหาลักษณะหนึ่ง แต่ไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่ดีกับปัญหาอีกลักษณะหนึ่งก็ได้ ด้วยเหตุนี้ ในการพิจารณาเลือกใช้วิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมนั้นจึงขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาแต่ละกรณีไป

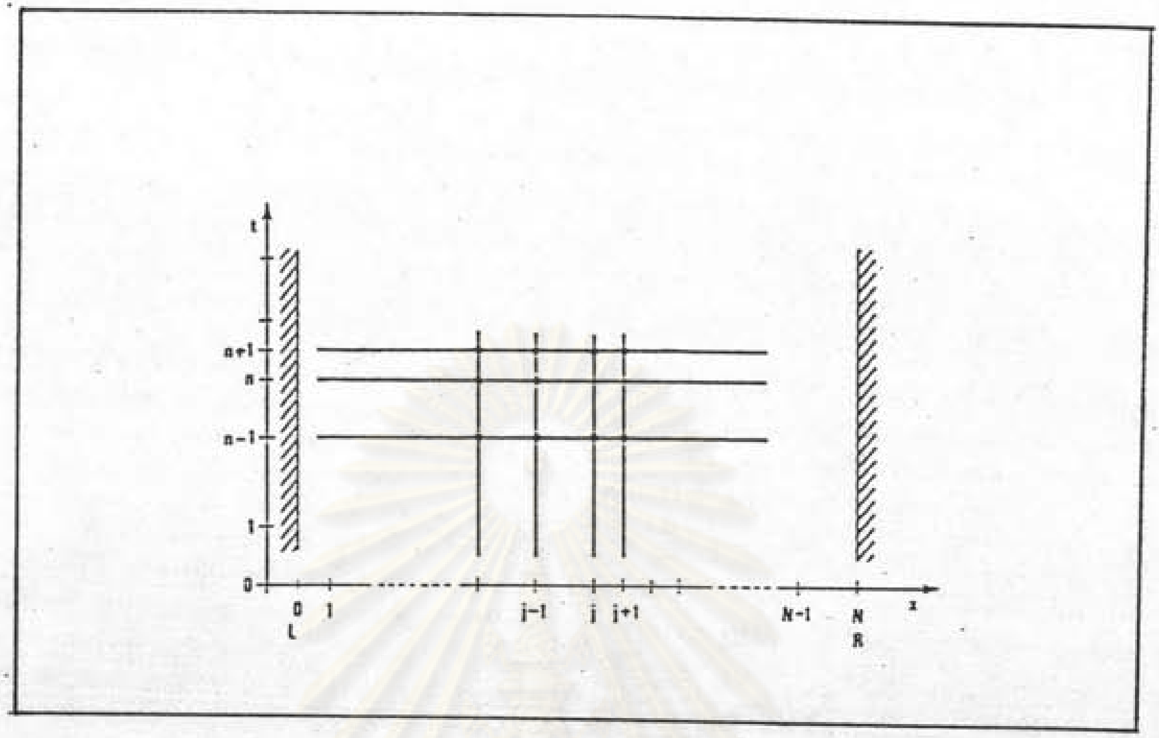
วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาการไหลในทางน้ำเปิด ที่นิยมนำไปประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลาย อาจจะจำแนกออกได้ดังแผนภูมิที่แสดงในรูป 3-5 ซึ่งก็คือ วิธีค่าแตกต่างจำกัดและวิธีคาแรคเตอร์ริสติค ทั้งสองวิธีนั้นมีหลักการที่เหมือนกันตรงที่ว่าเมื่อเริ่มต้นคำนวณ จะต้องแทน "ค่าแตกต่างจำกัด" ลงไปในชุดสมการอนุพันธ์ของการไหล ส่วนที่จะแตกต่างกันก็คือในวิธีค่าแตกต่างจำกัดนั้น จะทำการแทนค่าแตกต่างจำกัดลงไปในชุดสมการอนุพันธ์เดิมโดยตรง ในขณะที่วิธีหลังจะต้องทำการแปลงชุดสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบเฉพาะที่เรียกว่า "รูปแบบคาแรคเตอร์ริสติค" เสียก่อน ในการอ้างตำแหน่งของตัวแปร และผลการคำนวณ ซึ่งในที่นี้คือค่าระดับน้ำหรือความลึกของน้ำและอัตราการไหลหรือความเร็วการไหล ในกรณีของวิธีค่าแตกต่างจำกัด จะทำโดยใช้คู่ลำดับ (ระยะทาง-เวลา) บนระนาบระยะทาง-เวลา ซึ่งแสดงเป็นลักษณะตะแกรงได้ ดังรูป 3-6 ซึ่งที่แต่ละจุดตัดกันของตะแกรงจะเป็นตำแหน่งที่ต้องการคำนวณผลลัพธ์นั่นเอง ซึ่งก็หมายถึงว่าตำแหน่งที่ต้องการจะคำนวณผลลัพธ์ได้ถูกกำหนดเอาไว้ตั้งแต่แรกเริ่มการคำนวณ แต่ในทางตรงกันข้ามการคำนวณไม่สามารถจะกำหนดตำแหน่งดังกล่าวได้ในลักษณะเดียวกันนี้โดยใช้วิธีคาแรคเตอร์ริสติค เพราะว่าผลการคำนวณจะเป็นค่าที่

ตำแหน่งซึ่งโค้งคาแรคเตอร์ริสติคตัดกันบนระนาบระยะทาง-เวลา (จุด P ในรูป 3-7) แต่อย่างไรก็ตามการเชื่อมโยงผลการคำนวณไปยังตำแหน่งที่ต้องการนั้น สามารถทำได้โดยการหาค่าเฉลี่ยระหว่างผลลัพธ์จากตำแหน่งใกล้เคียงที่ทราบค่าแล้ว

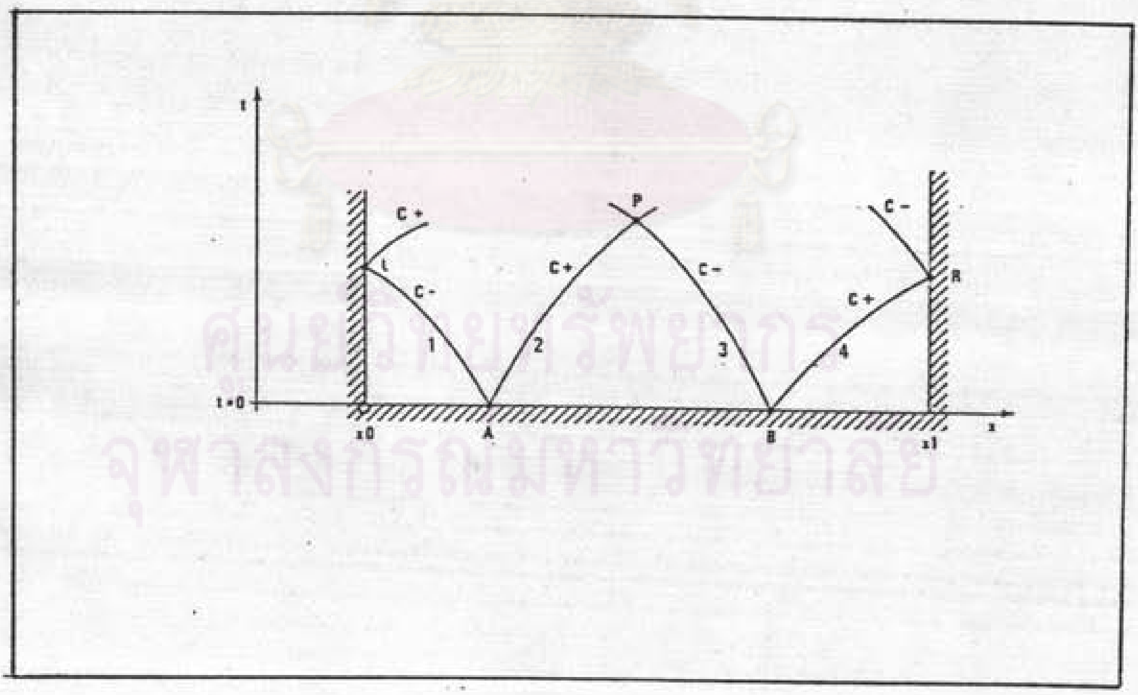
วิธีการทั้งสองที่ได้กล่าวถึงนี้ยังอาจจะจำแนกย่อยลงไปได้อีกโดยใช้เกณฑ์พิจารณาจากรูปแบบของสมการพีชคณิต ที่เกิดจากการแทนค่าแตกต่างจำกัดลงไปในชุดสมการอนุพันธ์ของการไหล วิธีในการประมาณค่าแตกต่างจำกัดมีหลายวิธีซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อที่ 3.4.2 สมการพีชคณิตที่เกิดขึ้นภายหลังแทนค่าแตกต่างจำกัดแล้วจำแนกได้ 2 ลักษณะ คือ สมการพีชคณิตเชิงเส้นตรงและสมการพีชคณิตเชิงเส้นโค้ง วิธีค่าแตกต่างจำกัดหรือวิธีคาร์แรคเตอร์ริสติคที่คำนวณผลลัพธ์โดยการแก้สมการจากชุดสมการพีชคณิตเชิงเส้นตรง จะเป็นวิธีแบบเอกซ์พลิสิท ส่วนที่คำนวณจากชุดสมการพีชคณิตเชิงเส้นโค้งจะเป็นวิธีแบบอิมพลิสิท



รูป 3-5 แผนภูมิแสดงการจำแนกวิธีเชิงตัวเลข



รูป 3-6 ระนาบระยะทาง-เวลา ในการคำนวณโดย วิธีค่าแตกต่างจำกัด



รูป 3-7 ระบาบระยะทาง-เวลา ในการคำนวณโดย วิธีคาแรคเตอร์ริสติค

ในการพิจารณาตัดสินใจเลือกเอาวิธีการใดวิธีการหนึ่งไปประยุกต์ใช้นั้น ขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการ ยกตัวอย่าง เช่น ลักษณะหรือธรรมชาติของปัญหา ประเภทการจัดเก็บข้อมูล คุณภาพของข้อมูล ฯลฯ ในการเลือกใช้วิธีใดนั้นต้องพิจารณาเป็นแต่ละกรณี ๆ ไป

3.4.1 วิธีค่าแตกต่างจำกัด

วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ของชุดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพื้นฐานของการไหลแบบไม่คงที่ในทางน้ำเปิด สำหรับการศึกษานี้ คือ วิธีค่าแตกต่างจำกัด ซึ่งหลักการของวิธีค่าแตกต่างจำกัดนั้นจะเริ่มการคำนวณโดยการแทนค่า "เทอมอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชั่น" ในชุดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพื้นฐานของการไหลแบบไม่คงที่ ด้วย "เทอมค่าแตกต่างจำกัด" สมการที่เกิดขึ้นภายหลังที่ได้แทนค่าดังกล่าวในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วเรียกว่า สมการค่าแตกต่างจำกัด

3.4.2 การประมาณค่าแตกต่างจำกัด

รูปแบบทั่วไปที่นิยมใช้ในการประมาณค่าแตกต่างจำกัดมีอยู่ 3 ลักษณะ ได้แก่ central-difference forward-difference และ backward-difference ซึ่งอธิบายดังต่อไปนี้

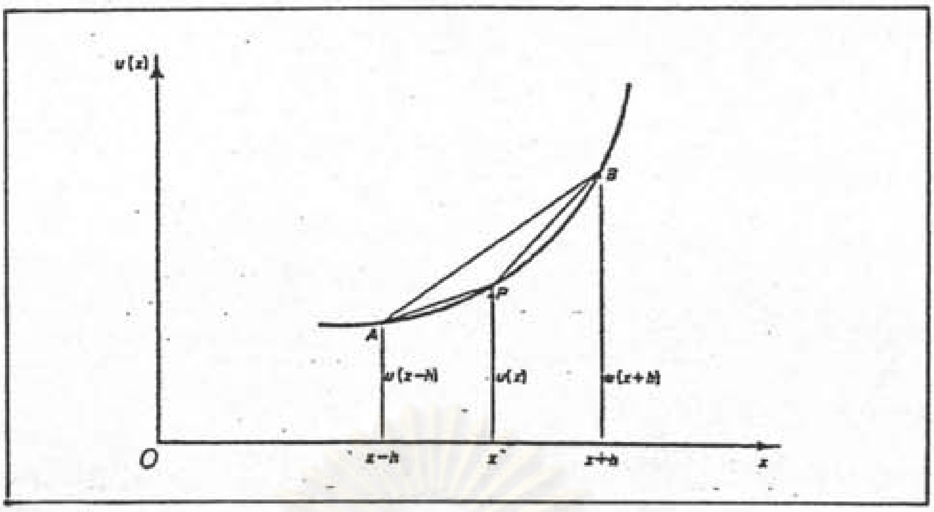
กำหนดให้ u และ u' เป็นฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่มีความต่อเนื่องของตัวแปรอิสระ x (รูป 3-8) เมื่อกระจายฟังก์ชั่น u โดยใช้ทฤษฎีอนุกรมของเทเลอร์ สามารถเขียนได้เป็น

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \ldots \qquad (3-12)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) - \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \ldots \qquad (3-13)$$

เมื่อนำ สมการ 3-12 รวมกับ สมการ 3-13 จะได้

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + O(h^4) \qquad (3-14)$$



รูป 3-8 โค้งความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน u(x)

โดยที่ $O(h^4)$ คือ เทอมต่าง ๆ ที่มี h ยกกำลัง 4 หรือสูงกว่า ซึ่งมีค่าน้อยจนกระทั่งไม่ต้องนำมาพิจารณา สามารถละเอาไว้ได้ จาก สมการ 3-14 จัดรูปใหม่จะได้

$$u''(x) = \left(\frac{d^2u}{dx}\right)_{x=x} = \frac{1}{h^2}\{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)\} \qquad (3-15)$$

ผลต่างของ สมการ3-12 และ สมการ 3-13 โดยไม่นำเทอมที่ h ยกกำลัง 3 และสูงกว่ามาพิจารณา คือ

$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x} = \frac{1}{2h}\{u(x+h)-u(x-h)\} \qquad (3-16)$$

โดยการพิจารณา สมการ 3-16 จะเห็นได้ว่า $u'(x)$ คือ ค่าความชันของเส้นสัมผัสส่วนโค้งที่จุด P มีค่าโดยประมาณเท่ากับค่าความชันของเส้นโค้ง AB ซึ่ง การประมาณค่าแตกต่างในลักษณะเช่นนี้เรียกว่า การประมาณค่าแบบ central-difference นอกจากนี้ ยังสามารถแทนค่าของความชันของเส้นสัมผัสส่วนโค้งที่จุด P ได้จาก ความชันของเส้นโค้ง PB หรือ AP โดยที่

$$u'(x) = \text{ความชันของเส้นโค้ง PB} = \frac{1}{h}\{u(x+h)-u(x)\} \qquad (3-17)$$

หรือ

$$u'(x) = \text{ความชันของเส้นโค้ง AP} = \frac{1}{h}\{u(x)-u(x-h)\} \qquad (3-18)$$

โดยที่ การประมาณค่าแตกต่าง ในสมการ 3-17 และสมการ 3-18 เรียกว่า การประมาณค่าแบบ forward-difference และ backward-difference ตามลำดับ

3.4.3 วิธีการอ้างตำแหน่งของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระสองตัว

กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x(ระยะทาง) กับ t(เวลา) ตำแหน่งของฟังก์ชัน สามารถแสดงได้บน ระนาบ x-t ดังแสดงในรูป 3-9 ซึ่งมี แกนนอน และแกนตั้ง เป็นแกนของ ระยะทาง และเวลา ตามลำดับ

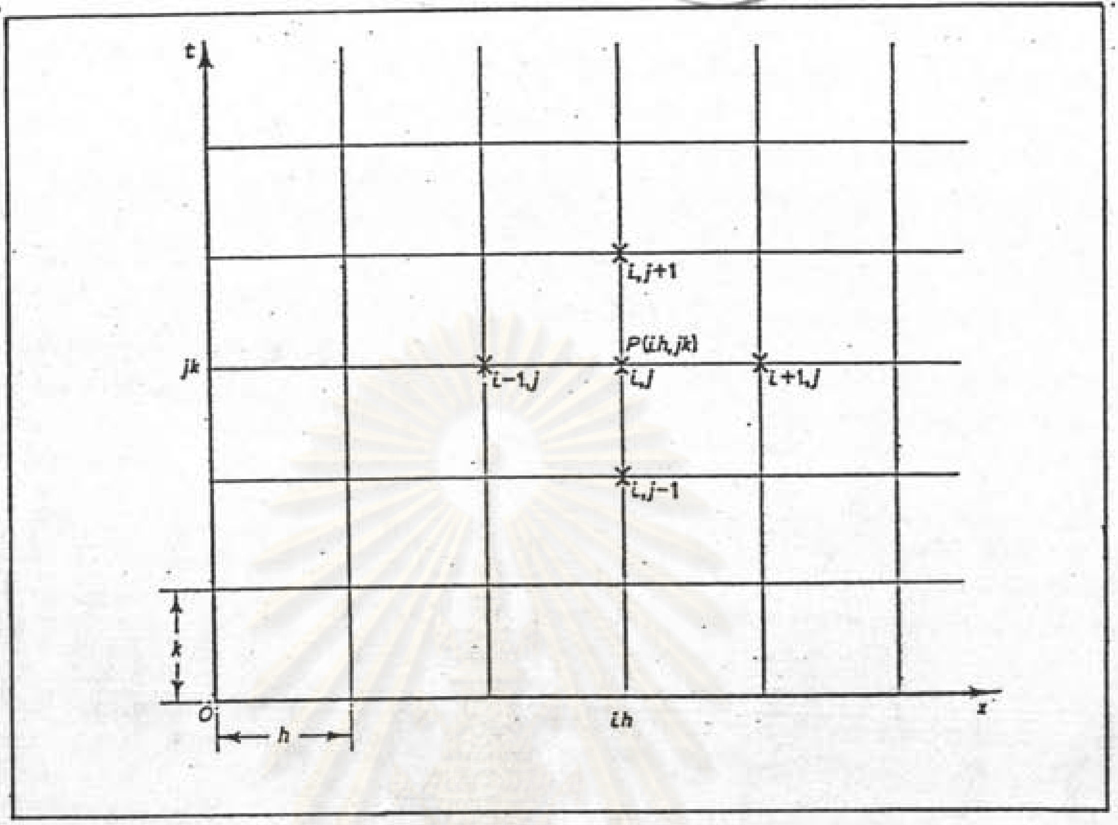
เพื่อที่จะอ้างตำแหน่งของฟังก์ชัน u ที่ตำแหน่งใด ๆ บนระนาบ x-t จึงทำการแบ่งแกนระยะทาง และแกนเวลาออกเป็นช่วง ๆ มีขนาดของ หนึ่งช่วงระยะทางและหนึ่งช่วงเวลา เป็น h และ k ตามลำดับ จากจุดตัดบนแกนทั้งสองจึงลากเส้นขนานกับแกนทั้งสองตัดกันเป็นลักษณะตะแกรง โดยที่สี่เหลี่ยมเล็ก ๆ มีขนาดเท่ากับ h x k การอ้างตำแหน่งของฟังก์ชัน u ในระนาบ x-t สามารถเขียนได้ ดังนี้คือ $u(x,t) = u(ih,jk) = u_{i,j}$ โดยที่ i,j เป็นเลขจำนวนเต็มบวกมีค่า 0,1,2,3,...

จาก สมการ 3-15 สามารถเขียนใหม่โดย วิธีอ้างตำแหน่ง ดังกล่าวได้ คือ

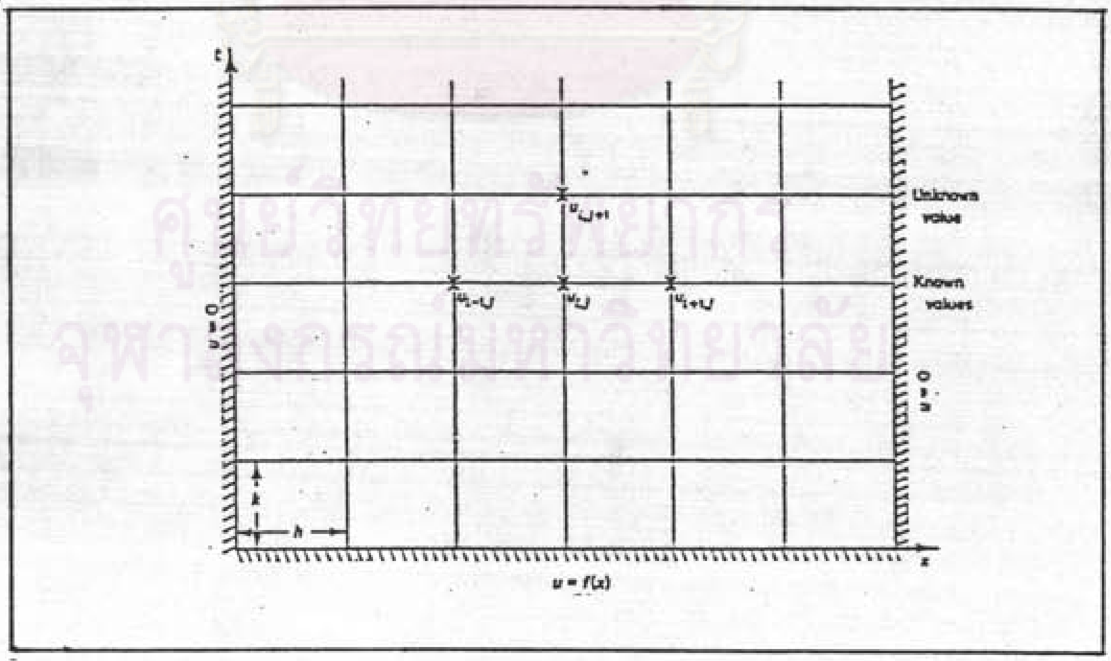
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u[(i+1)h,jk] - 2u[ih,jk] + u[(i-1)h,jk]}{h^2}$$

ในทำนองเดียวกัน เทอมค่าแตกต่างจำกัด ของเทอมอนุพันธ์ของฟังก์ชัน u เทียบกับ ตัวแปร t ที่ใช้วิธีการประมาณค่าแบบ forward-difference สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}$$



รูป 3-9 ระนาบระยะทาง-เวลา ของฟังก์ชันสองตัวแปร u(x)



รูป 3-10 ระนาบระยะทาง-เวลา ของฟังก์ชันสองตัวแปร u(x) สำหรับใช้อธิบายการประมาณค่าแตกต่างจำกัด

3.4.4 แบบแผนค่าแตกต่างจำกัด

ดังได้กล่าวมาแล้วในการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านชลศาสตร์ได้มีการนำสมการอธิบายการไหลคือ สมการต่อเนื่องและสมการโมเมนตัม มาประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง โดยนำเอาวิธีเชิงตัวเลขมาใช้หาผลลัพธ์ของสมการ สำหรับวิธีค่าแตกต่างจำกัดนั้นในขั้นตอนแรกจะต้องแทนค่าในเทอมอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน ของสมการอธิบายการไหลด้วยเทอมค่าแตกต่างจำกัดก่อน ซึ่งในปัญหาการไหลภายใต้เงื่อนไขหรือในสภานการไหลที่แตกต่างกัน จะใช้หลักเกณฑ์ในการกำหนดวิธีการประมาณค่าสำหรับแต่ละเทอมในสมการอนุพันธ์ย่อยแตกต่างกัน ในบางหลักเกณฑ์กำหนดให้ประมาณค่าสำหรับทุกเทอมในสมการด้วยวิธี central เหมือนกันหมด แต่บางหลักเกณฑ์กำหนดใช้วิธี central forward หรือ backward เฉพาะสำหรับแต่ละเทอมแตกต่างกันไป หลักเกณฑ์ในการกำหนดวิธีประมาณค่าจะถูกเสนอในลักษณะของ " แบบแผนค่าแตกต่างจำกัด " ในที่นี้จะยกตัวอย่าง แบบแผน Leap-Frog และแบบแผน Abbott-Ionescu ซึ่งได้กำหนดวิธีในการแทนค่าดังนี้ คือ

1) แบบแผน Leap-Frog กำหนดให้ใช้การประมาณค่าแตกต่างจำกัดแบบ central-difference ในการแทน เทอมอนุพันธ์ย่อยของอัตราการไหล(Q)และของระดับน้ำ(h)ทั้งที่แปรตามระยะทาง(x)และแปรตามเวลา(t) คือ $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}$

2) แบบแผน Abbott-Ionescu ซึ่งเป็นแบบแผนที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ กำหนดให้ใช้การประมาณค่าแตกต่างจำกัดแบบ central-difference ในการแทนเทอมอนุพันธ์ย่อยของอัตราการไหลและของระดับน้ำที่แปรตามระยะทางคือ $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}$ และใช้ forward-difference กับ เทอมอนุพันธ์ย่อยของอัตราการไหลที่แปรตามเวลา คือ $\frac{\partial Q}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}$

ลักษณะของ สมการค่าแตกต่างจำกัด จะอยู่ในรูปของสมการพีชคณิต ซึ่งสามารถจำแนก โดยใช้เกณฑ์ของวิธีในการหาผลลัพธ์ของสมการ ได้เป็นสองแบบคือสมการแบบอิมพลิสิตและสมการแบบเอกซ์พลิสิต ขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ของสมการพีชคณิตทั้งสองแบบ จะอธิบายโดยการยกตัวอย่าง ดังต่อไปนี้

จาก สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพาราโบลิก

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3-19)$$

แทนค่า เทอมทางซ้ายและทางขวาของสมการ 3-19 โดยใช้ การประมาณค่าแตกต่างจำกัด วิธี forward-difference และวิธี central-difference (ดูรูป 3-10 ประกอบ) ตามลำดับจะได้

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \qquad (3-20)$$

โดยที่ $x = ih, (i = 0,1,2,\ldots)$

และ $t = jk, (j = 0,1,2,\ldots)$

จัดรูปสมการ 3-20 ใหม่ จะได้

$$u_i^{j+1} = u_i^j + r(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) \qquad (3-21)$$

โดยที่ $r = \Delta t/(\Delta x)^2 = k/h^2$

พิจารณาฟังก์ชั่น u ทุกฟังก์ชั่นทางขวามือของสมการ 3-21 ซึ่งเป็นเทอมที่ทราบค่าแล้ว จากการคำนวณที่ระดับเวลา j ดังนั้นจึงสามารถคำนวณค่าของฟังก์ชั่น u_i ที่ระดับเวลา j+1 ได้โดยการแทนค่าเทอมฟังก์ชั่น u ทางขวาของสมการด้วย $u_{i-1,j}$, $u_{i,j}$, $u_{i+1,j}$ สมการที่สามารถ คำนวณค่าผลลัพธ์ของสมการโดยวิธีการเช่นนี้ เรียกว่า สมการค่าแตกต่างจำกัดเอกซ์พลิสิท และแบบแผนที่ใช้ในการแทนเทอมอนุพันธ์ลงไปในสมการลักษณะนี้เรียกว่าแบบแผนค่าแตกต่างจำกัดเอกซ์พลิสิท

ในกรณีของอิมพลิสิทถ้าใช้แบบแผนค่าแตกต่างจำกัดของ Crank-Nicolson ในการแทนค่าเทอมอนุพันธ์ ซึ่งหลังจากแทนค่าแตกต่างจำกัด ด้วยแบบแผนนี้แล้ว สมการ 3-19 สามารถเขียนในรูปสมการค่าแตกต่างจำกัดได้ ดังนี้

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}=\frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}\right\} \qquad (3\text{-}22)$$

พิจารณาทางด้านซ้ายของสมการ เป็นการประมาณค่าแตกต่างโดยวิธี forward-difference ส่วนทางด้านขวาของสมการ เป็นค่าเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าแตกต่างโดยวิธี central-difference ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน u ที่ระดับเวลา j และ j+1 สมการ 3-22 จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$-ru_{i-1}^{j+1}+(2+2r)u_i^{j+1}-ru_{i+1}^{j+1}=ru_{i-1}^j+(2-2r)u_i^j+ru_{i+1}^j \qquad (3\text{-}23)$$

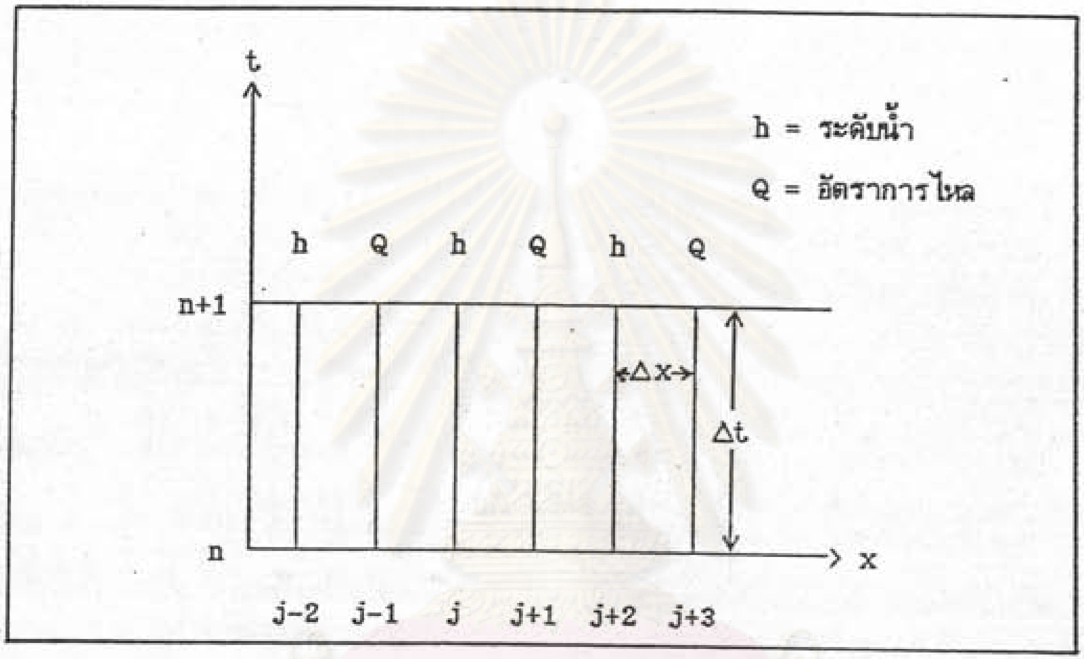
ในสมการ 3-23 ทางด้านซ้ายประกอบด้วยฟังก์ชัน u ที่ไม่ทราบค่า 3 เทอม คือ ฟังก์ชัน u ที่ระยะ i-1, i, i+1 และที่ระดับเวลา j+1 คือ u_{i-1}, u_i, u_{i+1} จากรูป 3-10 ถ้ามีจุดภายในทั้งหมดจำนวน N จุด (i = 1,2,...,N) บนแนวแกน x จะสามารถสร้าง " ชุดสมการพร้อมกัน " (simultaneous equations) สำหรับการคำนวณที่ระดับเวลาถัดไป คือที่ระดับเวลา j+1 จำนวน N สมการได้จากสมการ 3-23 เช่น ที่ระดับเวลา j+1 จะได้ชุดสมการพร้อมกันจำนวนหนึ่งชุด คือ

$$\begin{aligned}
-ru_0 + (2+2r)u_1 - ru_2 &= ru_0 + (2-2r)u_1 + ru_2 \\
-ru_1 + (2+2r)u_2 - ru_3 &= ru_1 + (2-2r)u_1 + ru_3 \\
-ru_2 + (2+2r)u_3 - ru_4 &= ru_2 + (2-2r)u_3 + ru_4 \\
\vdots \qquad\qquad &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
-ru_{N-1} + (2+2r)u_N - ru_{N+1} &= ru_{N-1} + (2-2r)u_N + ru_{N+1}
\end{aligned}$$

ซึ่ง ค่าฟังก์ชัน u ที่ระดับเวลา j+1 หรือ u_i (i = 1,2,...N) จะสามารถคำนวณได้โดยการแก้ชุดสมการทั้ง N สมการ ในการคำนวณครั้งหนึ่ง ๆ สมการค่าแตกต่างจำกัดในรูปสมการ เช่นนี้ เรียกว่าสมการค่าแตกต่างจำกัดอิมพลิสิท และแบบแผนของ Crank-Nicolson

นี้เป็นแบบแผนค่าแตกต่างจำกัดอิมพลิสิท

3.5 แบบแผนค่าแตกต่างจำกัดที่นำมาใช้ทำการศึกษา



รูป 3-11 แบบแผน Abbott-Ionescu

แบบแผนที่นำมาใช้ศึกษาในครั้งนี้คือ แบบแผน Abbott - Ionescu เสนอโดยสถาบันวิศวกรรมศาสตร์และสิ่งแวดล้อมนานาชาติของเนเธอร์แลนด์ เมื่อ ปี ค.ศ. 1967 ค่าของฟังก์ชั่น Q และ h ณ เวลาใด ๆ n (n=1,2,3,...) ที่จุด j(j=1,2,3,..) เป็นค่าที่ได้จากการคำนวณบนแนวแกน X สลับไป-มา ดังรูป 3-11 สมการต่อเนื่อง จะถูกแทนค่าที่จุดซึ่งคำนวณ ค่าระดับน้ำ (h) ส่วน สมการโมเมนตัมจะถูกแทนค่าที่จุดซึ่งคำนวณค่าอัตราการไหล (Q) ค่าความแตกต่างจำกัดของฟังก์ชั่น สำหรับสมการต่อเนื่อง สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left\{ \frac{1}{2}\left(Q_{j-1}^{n} + Q_{j+1}^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(Q_{j-1}^{n} + Q_{j-1}^{n+1}\right) \right\}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t}\left(h_j^{n+1} - h_j^{n}\right)$$

ส่วน ค่าความแตกต่างจำกัดของฟังก์ชั่นและอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชั่น สำหรับ สมการโมเมนตัม สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{x_j - x_{j-1}}{x_j - x_{j-2}}\left(h_{j-1}^{n+1} - h_{j-2}^{n}\right) + \frac{x_{j-1} - x_{j-2}}{x_j - x_{j-2}}\left(h_j^{n+1} - h_j^{n}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t}\left(Q_{j-1}^{n+1} - Q_{j-1}^{n}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{1}{x_j - x_{j-2}}\left\{\frac{1}{2}\left(h_j^{n} + h_j^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(h_{j-2}^{n} + h_{j-2}^{n+1}\right)\right\}$$

$$Q\,|Q| \approx |Q_j^{n}| \cdot Q_j^{n+1}$$

เมื่อแทนค่า เทอมความแตกต่างจำกัด ลงใน ชุดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพื้นฐานของการไหล แล้วจัดใหม่ให้อยู่ในรูปของ สมการค่าแตกต่างจำกัด ได้ คือ

สมการต่อเนื่อง

$$A_j\, Q_{j-1}^{n+1} + B_j\, h_j^{n+1} + C_j\, Q_{j+1}^{n+1} = D_j \qquad \text{(3-24 ก.)}$$

สมการโมเมนตัม

$$A_j^{*}\, h_j^{n+1} + B_j^{*}\, Q_{j-1}^{n+1} + C_j^{*}\, h_{j-2}^{n+1} = D_j^{*} \qquad \text{(3-24 ข.)}$$

โดยที่ สัมประสิทธิ์ A_j, B_j, C_j, D_j, A_j^{*}, B_j^{*}, C_j^{*}, D_j^{*} เป็นกลุ่มของฟังก์ชั่นที่ทราบค่าแล้วเมื่อเวลาที่ n

$$A_j = -\frac{1}{4\Delta X}$$

$$B_j = +\frac{B_S}{\Delta t} \qquad \text{(3-25)}$$

$$C_j = +\frac{1}{4\Delta X}$$

$$D_j = -\frac{1}{4\Delta x}\left(Q_{j+1}^{n} - Q_{j-1}^{n}\right) + \frac{B_s}{\Delta t}h_j - q_j$$

$$A_j^{*} = -\frac{Q\,B_s}{gA^2\Delta t} - \left(1-\frac{Q^2B}{gA^3}\right)\cdot\frac{1}{4\Delta x}$$

$$B_j^{*} = \frac{1}{gA\Delta t} + \frac{n^2\left|Q_j^{n}\right|}{A^2R^{4/3}}$$

$$C_j^{*} = -\frac{Q\,B_s}{gA^2\Delta t} + \left(1-\frac{Q^2B}{gA^3}\right)\cdot\frac{1}{4\Delta x} \qquad (3\text{-}25\ \text{ต่อ})$$

$$D_j^{*} = \frac{1}{gA\Delta t}\cdot Q_j^{n} - \frac{Q}{gA^2\Delta t}\cdot B_s\left(h_{j-1}^{n} + h_{j+1}^{n}\right)$$

$$- \left\{\left(1-\frac{Q^2B}{gA^3}\right)\cdot\frac{1}{4\Delta x}\right\}\left(h_{j+1}^{n} - h_{j-1}^{n}\right) + \frac{Q^2B}{gA^3}\cdot I$$

3.6 <u>ขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ของชุดสมการค่าแตกต่างจำกัด</u>

ในการหาค่าของผลลัพธ์ ซึ่งในที่นี้ก็คือ อัตราการไหลและระดับน้ำที่ระดับเวลาใด ๆ n (n=1,2,3,...N) มีขั้นตอนดังนี้ คือ

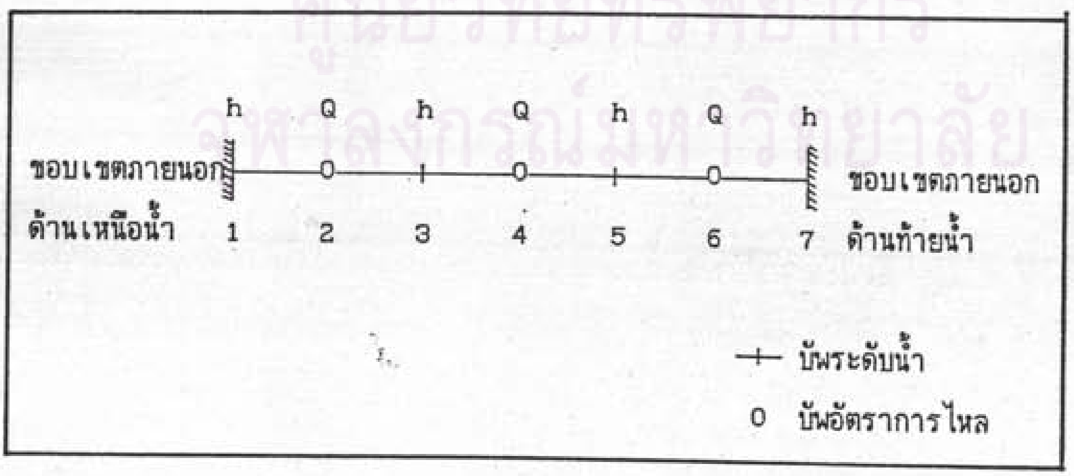
1) คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ A_j, B_j, C_j, D_j และ A_j^{*}, B_j^{*}, C_j^{*}, D_j^{*} ในสมการ 3-25 โดยใช้ข้อมูลทางชลศาสตร์และข้อมูลทางกายภาพของทางน้ำที่ระดับเวลา n
2) แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่คำนวณจาก ข้อ (1) ในสมการ 3-24 ก. และสมการ 3-24 ข. จะได้ " ชุดสมการพร้อมกัน " ของสมการพีชคณิตเชิงเส้นตรง มีจำนวน เท่ากับ จำนวนบัพภายใน(interior node)ของทางน้ำ
3) แก้ สมการพร้อมกัน โดยใช้วิธี Double Sweep ซึ่งจะได้อธิบายในหัวข้อถัดไป

3.7 วิธี Double Sweep

วิธี Double Sweep เป็น กระบวนการปฏิบัติงานเป็นขั้น ๆ ตามลำดับ เพื่อแก้ชุดสมการพีชคณิตเชิงเส้นตรง วิธีการนี้เป็นที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง เพราะว่าสามารถหาผลลัพธ์ได้รวดเร็วและมีระดับความถูกต้องแม่นยำสูง ชุดสมการพีชคณิตดังกล่าวนั้นสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในลักษณะของเมตริกซ์ได้ วิธี Double sweep ที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ของสมการของการไหลในทางน้ำเปิด สามารถที่จะแยกพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีทางน้ำสายเดี่ยว และกรณีทางน้ำที่เชื่อมต่อกับทางน้ำสายอื่น

3.7.1 การหาผลลัพธ์ของทางน้ำสายเดี่ยว

การแก้ปัญหาของ ทางน้ำสายเดี่ยว มักจะมีการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบเขตภายนอกทั้งด้านเหนือน้ำและท้ายน้ำ เป็น ความสัมพันธ์ของระดับน้ำกับเวลา ความสัมพันธ์ของอัตราการไหลกับเวลา ฯลฯ สำหรับในกรณีของปัญหาที่ทำการศึกษานี้ ได้กำหนดเงื่อนไขที่ขอบเขตที่ด้านเหนือน้ำและท้ายน้ำเป็น ความสัมพันธ์ของระดับน้ำกับเวลา การแบ่งช่วงระยะทางของทางน้ำจะแบ่งตามแบบแผนของ Abbott-Ionescu ซึ่งจะมี บัพระดับน้ำ และ บัพอัตราการไหลสลับกันตลอดแนวของทางน้ำ ดังแสดงในรูป 3-12 เมื่อแทนค่าตัวแปรต่าง ๆ ลงไปในสมการ 3-24 จะได้



รูป 3-12 แผนภาพแสดงลำน้ำสายเดี่ยว

ชุดสมการพีชคณิตพร้อมกัน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลคูณของเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_u & N_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & S_2 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & S_3 & T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 & S_4 & T_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_5 & S_5 & T_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & S_6 & T_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_d & N_d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ G_6 \\ G_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_u \\ U_u \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ L_d \end{bmatrix}$$

โดยที่ M, N, L คือ สัมประสิทธิ์ของสมการที่แสดงความสัมพันธ์ที่ขอบเขตภายนอกทางด้านเหนือน้ำ ($j=1$) และทางด้านท้ายน้ำ ($j=7$) ส่วนค่า G_j แทนตัวแปรระดับน้ำหรืออัตราการไหลขึ้นอยู่กับตำแหน่งของบัพและค่าสัมประสิทธิ์ R_j, S_j, T_j, U_j คือค่าสัมประสิทธิ์ A_j, B_j, C_j, D_j หรือ A^*_j, B^*_j, C^*_j, D^*_j ในสมการ 3-24 ก. และ 3-24 ข.

ในการเริ่มต้นคำนวณของวิธี Double Sweep นั้น ต้องทำการกำหนดความสัมพันธ์อนุเคราะห์ ขึ้นมาก่อน คือ

$$G_{j-1} = E_j G_j + F_j \qquad (3\text{-}26)$$

และแทนค่าความสัมพันธ์จากสมการ 3-26 ในสมการ 3-24 ก.หรือ สมการ 3-24 ข. ที่บัพภายในของทางน้ำจะได้

$$R_j G_{j-1} + S_j G_j + T_j G_{j+1} = U_j \qquad (3\text{-}27)$$

จากสมการ 3-27 จัดรูปใหม่จะได้ความสัมพันธ์ของ G_j กับ G_{j+1} คือ

$$G_j = \frac{-T_j G_{j+1} + (U_j - R_j F_j)}{S_j + R_j E_j} \qquad (3\text{-}28)$$

เปรียบเทียบสมการ 3-28 กับ สมการ 3-26 จะได้

$$E_{j+1} = \frac{-T_j}{S_j + R_j E_j} \quad , \quad F_{j+1} = \frac{U_j - R_j F_j}{S_j + R_j E_j} \qquad (3\text{-}29)$$

ในกรณีของทางน้ำสายเดี่ยวซึ่งมีลักษณะดังแสดงใน รูป 3-12 สามารถแสดงการแทนค่าใน สมการ 3-26 โดยเริ่มจากบัพที่ 2 (j = 2) ได้

$$G_1 = E_2 G_2 + F_2 \qquad (3\text{-}30)$$

เมื่อกำหนดให้ บัพที่ 1 เป็นบัพระดับน้ำ(h) และบัพที่ 2 เป็นบัพอัตราการไหล(Q) สมการ 3-30 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$h_1 = E_2 Q_2 + F_2 \qquad (3\text{-}31)$$

เนื่องจาก h_1 เป็นค่าที่กำหนดขึ้นที่ขอบเขตทางด้านเหนือน้ำ (j=1)

$$E_2 = 0 \text{ และ } F_2 = h_1$$

จากความสัมพันธ์ของ E_j, F_j ในสมการ 3-29 สามารถคำนวณค่า E_j, F_j ได้ทุกบัพ จนกระทั่งถึงขอบเขตภายนอกทางด้านท้ายน้ำ ในกรณีของทางน้ำที่ยกเป็นตัวอย่าง คือ บัพ j=7 ซึ่งจากสมการ 3-26 จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ คือ

$$G_6 = E_7 G_7 + F_7 \quad (3\text{-}32)$$

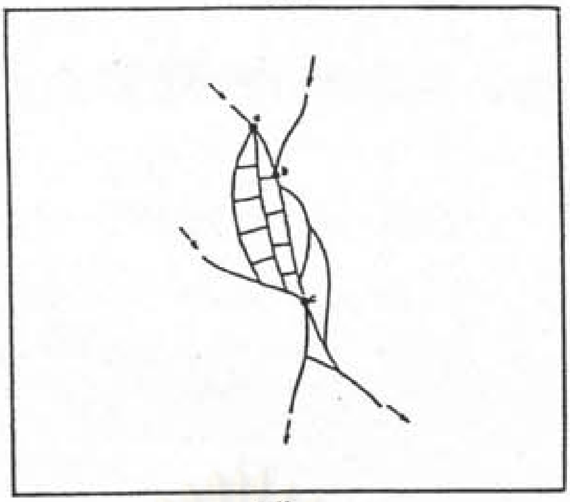
หรือ $$Q_6 = E_7 h_7 + F_7$$

เนื่องจาก h_7 เป็นค่าระดับน้ำที่ได้กำหนดขึ้น ที่ขอบเขตภายนอกทางด้านท้ายน้ำ ดังนั้นจึงสามารถทำการคำนวณ ค่าของระดับน้ำและอัตราการไหล คือ h_j และ Q_j ตลอดทางน้ำได้โดยการคำนวณย้อนกลับมายัง ขอบเขตภายนอกทางด้านเหนือน้ำ โดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการ 3-26

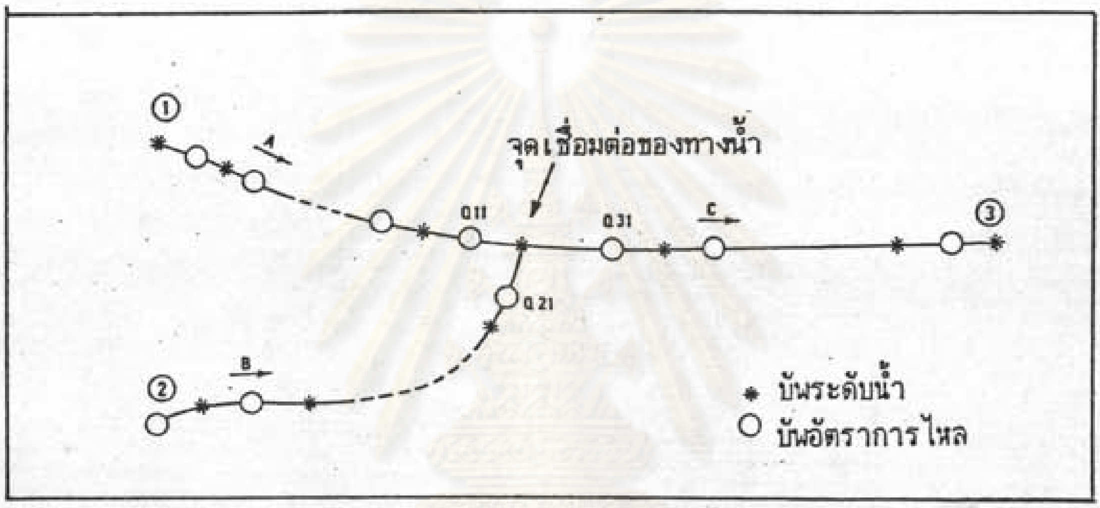
อย่างไรก็ตาม ตราบใดที่สภาวะของการไหลของน้ำในทางน้ำยังเป็น การไหลแบบภายใต้วิกฤต การคำนวณโดยใช้วิธี Double Sweep สามารถเริ่มต้นได้ทั้งจากขอบเขตภายนอกทางด้านเหนือน้ำและทางด้านท้ายน้ำ ซึ่งการคำนวณทั้งสองแบบจะให้ผลลัพธ์ที่มีค่าเท่ากัน

3.7.2 ทางน้ำที่เชื่อมต่อกับทางน้ำสายอื่น

ในกรณีที่ทางน้ำมีลำน้ำสาขาเชื่อมต่อกับทางน้ำสายหลัก ซึ่งในบางครั้งเรียกระบบทางน้ำที่มีลักษณะแบบนี้ว่า "tree-like" โดยที่ลำน้ำสาขาที่เชื่อมต่อกับลำน้ำสายหลักนั้นอาจจะเป็นลำน้ำที่มีลักษณะที่ไหลเข้ามารวมกับลำน้ำสายหลักหรือที่ผันน้ำออกจากลำน้ำสายหลักก็ได้วิธี Double Sweep สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับทางน้ำที่มีลักษณะดังกล่าวข้างต้นได้ยกเว้นลำน้ำที่มีลักษณะครบวง ดังแสดงในรูป 3-13 จะต้องใช้วิธีเฉพาะในการพิจารณาแตกต่างออกไป อย่างไรก็ตามการใช้วิธี Double Sweep ในการหาผลลัพธ์ของการไหลในทางน้ำหลักที่เชื่อมต่อกับลำน้ำสาขาดังกล่าว ทิศทางการไหลของน้ำในลำน้ำในแต่ละสายไม่ใช่สาระสำคัญของการคำนวณ สิ่งจำเป็นซึ่งต้องคำนึงถึงก็คือ ลำดับของการคำนวณ และอีกประการหนึ่งก็คือ การแบ่งช่วงระยะทางของทางน้ำ ซึ่งจะต้องแบ่งให้ตำแหน่งของ บัพระดับน้ำหรือ บัพของอัตราการไหล สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบเขตด้วย เช่น ทางน้ำที่มีลักษณะดังแสดงในรูป 3-14 และ สมมุติว่าจุดเริ่มต้น (บัพที่ 1) ของลำน้ำสายที่ 1 เป็นเงื่อนไขที่ขอบเขตภายนอกซึ่งกำหนดเป็น ความสัมพันธ์ระหว่างระดับน้ำกับเวลา เพราะฉะนั้น บัพที่ 1 จะต้องเป็นระดับน้ำและตรงจุดเชื่อมต่อของทางน้ำ (J) จะต้องเป็น บัพระดับน้ำ ด้วย



รูป 3-13 ลำน้ำที่มีลักษณะครบวง



รูป 3-14 ผังแสดงจุดเชื่อมต่อลำน้ำเพื่อใช้กับวิธี Abbott-Ionescu

ในการคำนวณต้องแยกพิจารณาลำน้ำแต่ละสายเป็นลักษณะของทางน้ำสายเดี่ยว ในกรณีนี้คือ สายที่ 1 สายที่ 2 และ สายที่ 3 ค่า E_j, F_j สามารถคำนวณได้จากสมการ 3-29 และค่า E_j, F_j คู่สุดท้ายของลำน้ำสายที่ 1 ก็คือ E_{11+1}, F_{11+1} จากสมการ 3-26 สามารถเขียนความสัมพันธ์ของระดับน้ำ และอัตราการไหล ได้ดังนี้

$$Q_{11}^{n+1} = E_{11+1}\, h_J^{n+1} + F_{11+1} \qquad (3\text{-}33)$$

พิจารณาดูจากการแบ่งบันในลำน้ำ จะสังเกตได้ว่าในขณะนี้ ยังไม่สามารถคำนวณค่า E_{31}, F_{31} ซึ่งเป็นค่า สัมประสิทธิ์ที่เชื่อมโยงกับ บัน h_J และ Q_{31} ต่อไปได้ในทันที จึงต้องคำนวณ E_j, F_j คู่สุดท้าย คือ E_{21+1}, F_{21+1} ก่อน และทำนองเดียวกับ สมการ 3-33 ความสัมพันธ์ของระดับน้ำ และอัตราการไหล สามารถเขียนได้เป็น

$$Q_{2i}^{n+1} = E_{2i+1}\, h_J^{n+1} + F_{2i+1} \qquad (3\text{-}34)$$

ในการพิจารณา ค่าของระดับน้ำที่จุดเชื่อมต่อ ได้กำหนดสมมติฐานว่า "ระดับน้ำที่จุดเชื่อมต่อมีค่าเท่ากัน" ดังนั้นสมการต่อเนื่อง (สมการ3-24 ก.) ที่จุดเชื่อมต่อ คือ

$$(A_1 Q_{1i}^{n+1} + A_2 Q_{2i}^{n+1}) + B_J h_J^{n+1} + C_J Q_{3i}^{n+1} = D_J \qquad (3\text{-}35)$$

แทนค่า Q_{1i} และ Q_{2i} ลงไปในสมการ 3-35 และจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระดับน้ำกับอัตราการไหลได้ ดังนี้ คือ

$$h_J^{n+1} = E_{3i}\, Q_{3i}^{n+1} + F_{3i}$$

โดยที่

$$E_{3i} = \frac{-C_J}{B_J + A_1 E_{1i+1} + A_2 E_{2i+1}}$$

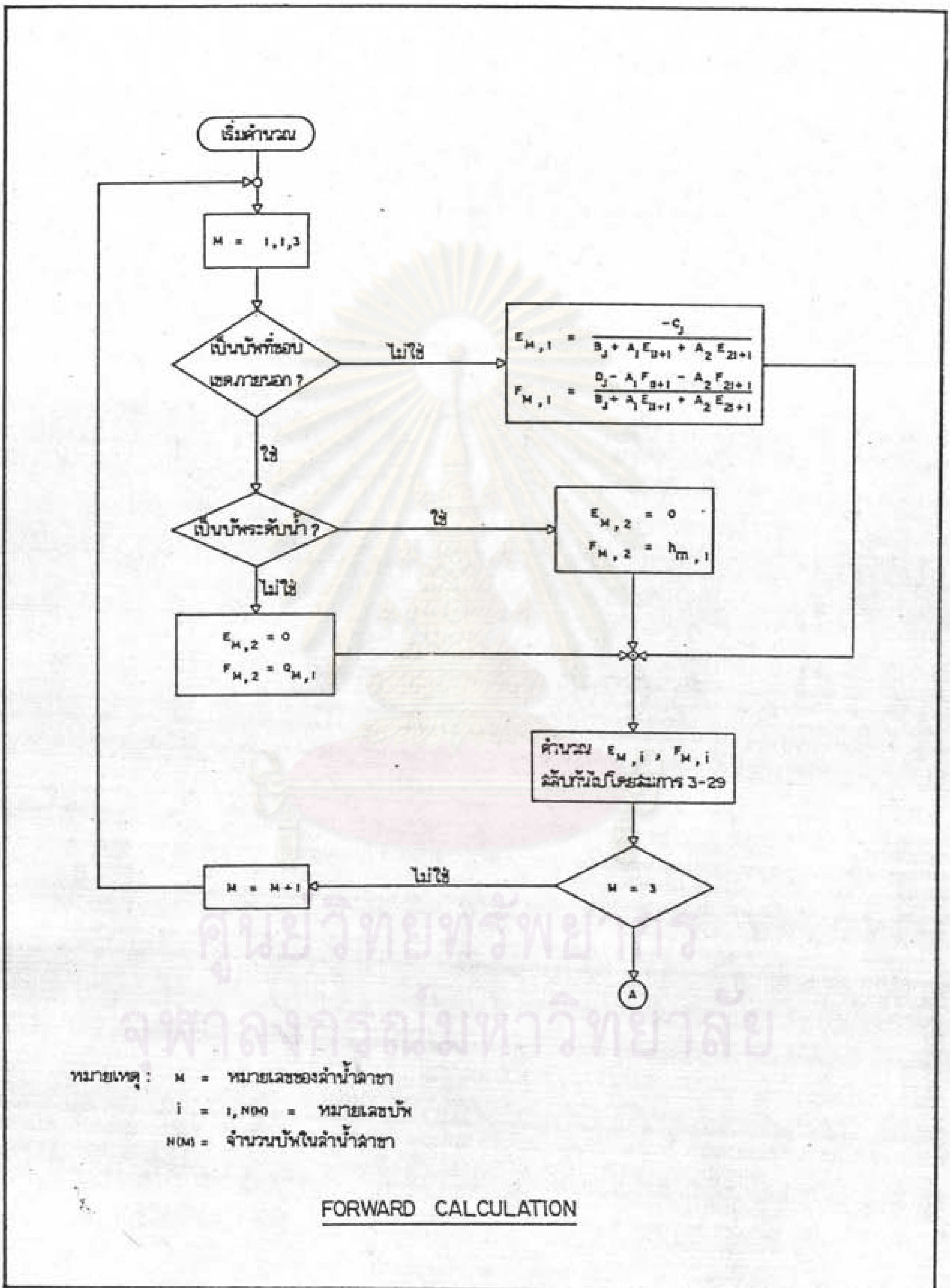
และ

$$F_{3i} = \frac{D_J - A_1 F_{1i+1} - A_2 F_{2i+1}}{B_J + A_1 E_{1i+1} + A_2 E_{2i+1}}$$

เมื่อหาค่า E_{3i} และ F_{3i} ได้แล้ว ก็สามารถหาค่า E_3, F_3 ของทางน้ำสายที่ 3 ต่อไปได้จนกระทั่งถึงบัพสุดท้ายของทางน้ำ การคำนวณ ระดับน้ำและอัตราการไหล ที่ระดับเวลาถัดไป n+1 ก็ใช้วิธีการเดียวกับการคำนวณในทางน้ำสายเดี่ยว ดังได้อธิบายแล้ว แต่จะแตกต่างกันที่เชื่อมต่อซึ่งจะนำสมการ 3-33 และสมการ 3-34 มาใช้คำนวณแทน ผังอธิบายขั้นตอนการคำนวณแสดงไว้ในรูป 3-15

3.8 เงื่อนไขที่ขอบเขต

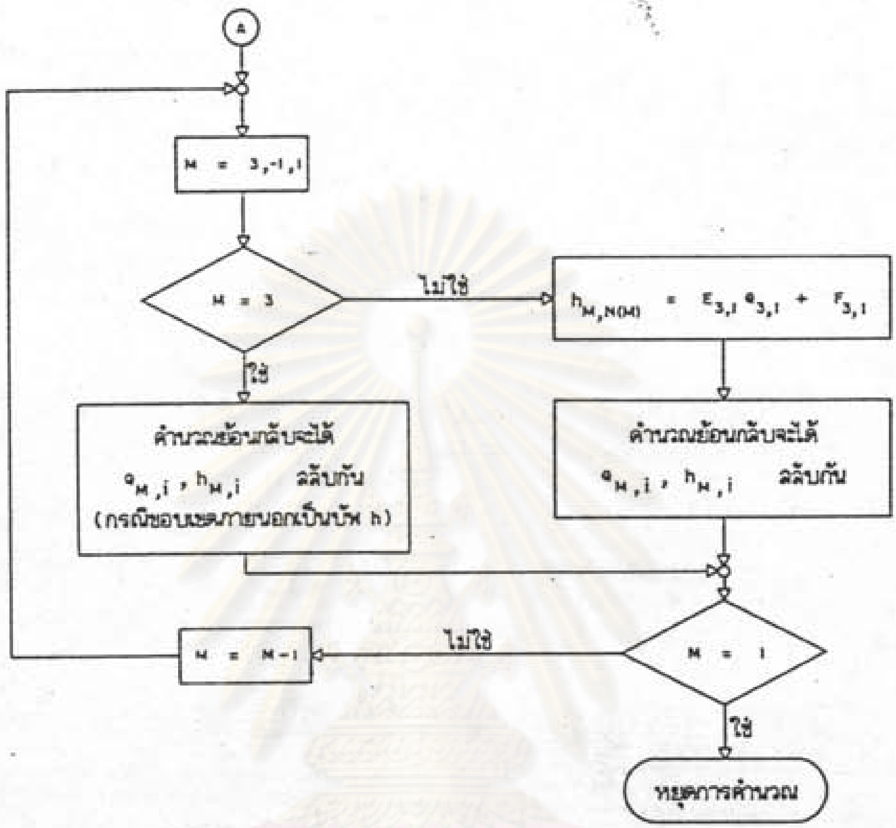
ในกรณีของแม่น้ำบางนราจะมีเงื่อนไขที่มีผลกระทบต่อพฤติกรรมการไหลของน้ำ ในลำน้ำอยู่ 2 ประเภท ได้แก่



$$E_{M,1} = \frac{-C_j}{B_j + A_1 E_{1J+1} + A_2 E_{2I+1}}$$

$$F_{M,1} = \frac{D_j - A_1 F_{1J+1} - A_2 F_{2I+1}}{B_j + A_1 E_{1J+1} + A_2 E_{2I+1}}$$

รูป 3-15 ผังอธิบายขั้นตอนการคำนวณในกรณีที่มีลำน้ำสายย่อยเชื่อมต่อกับลำน้ำสายหลัก



BACKWARD CALCULATION

รูป 3-15(ต่อ)

1) เงื่อนไขที่ขอบเขตภายนอก เนื่องจากปากน้ำของแม่น้ำบางนราจะเปิดออกสู่ทะเล การขึ้นลงของน้ำทะเลจึงเป็นสาเหตุประการสำคัญที่จะส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการไหลภายในลำน้ำโดยตรง หรืออาจกล่าวได้ว่าระดับน้ำทะเลจะเป็นตัวควบคุมปริมาณน้ำที่จะไหลจากแม่น้ำบางนราลงสู่ทะเล ด้วยเหตุนี้จึงใช้ข้อมูลระดับน้ำทะเลซึ่งเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระดับน้ำกับเวลาเป็นข้อมูลกำหนดเงื่อนไขที่ขอบเขตภายนอก

2) เงื่อนไขที่ขอบเขตภายใน เนื่องจากตามสภาพทางกายภาพตลอดแนวแม่น้ำบางนรา มีลำน้ำสาขาไหลมาบรรจบเป็นระยะ ๆ นอกจากนั้นยังมีคลองระบายน้ำเช่นคลองน้ำแบ่ง ซึ่งขุดขึ้นเพื่อช่วยเสริมประสิทธิภาพของการระบายน้ำออกสู่ทะเลด้วย ที่จุดบรรจบกันของลำน้ำจะเรียกว่า " จุดเชื่อมต่อภายใน " และเป็นเงื่อนไขสำคัญอีกประการหนึ่งที่จะมีอิทธิพลต่อพฤติกรรมการไหล

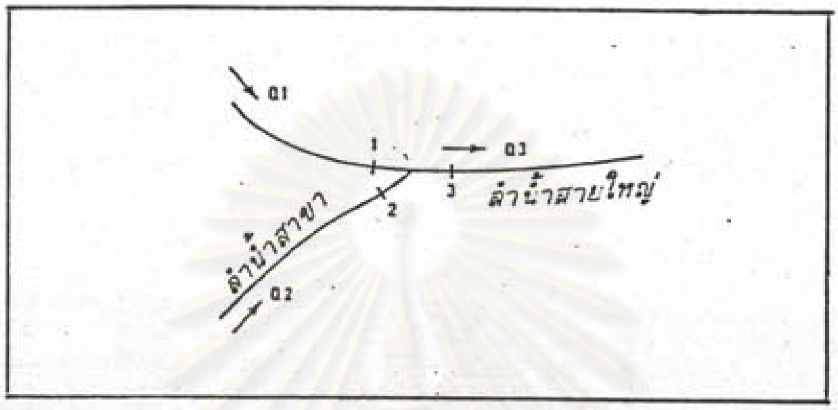
ในปี ค.ศ. 1965 Armando Balloffet ได้ทำ การพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับทางน้ำสาขาที่ไหลมาบรรจบกับทางน้ำสายใหญ่ โดยได้จำแนกทางน้ำสาขาเป็น 2 ประเภท ได้แก่ ทางน้ำสาขาที่เป็นอิสระ และทางน้ำสาขาที่ไม่เป็นอิสระ โดยจะหมายความถึงความเป็นอิสระในการคำนวณกราฟแสดงปริมาณการไหลของทางน้ำสาขาเหล่านั้น กล่าวคือในการคำนวณปริมาณการไหลของทางน้ำสาขาที่เป็นอิสระ สามารถคำนวณปริมาณการไหลโดยไม่ต้องคำนึงถึงข้อมูลระดับน้ำของทางน้ำสายใหญ่ โดยทั่วไปทางน้ำสาขามักจะเป็นลำน้ำที่ไม่มีการสำรวจข้อมูลของลักษณะรูปร่างหน้าตัดของลำน้ำและไม่ได้มีการติดตั้งสถานีวัดระดับน้ำ ในทางปฏิบัติจะคำนวณปริมาณการไหลได้โดยใช้วิธีการสังเคราะห์น้ำท่า สำหรับทางน้ำสาขาที่ไม่เป็นอิสระหมายถึงทางน้ำที่ต้องคำนวณปริมาณการไหลโดยจะต้องคำนึงถึงข้อมูลระดับน้ำและอัตราการไหลของทางน้ำสายใหญ่ประกอบด้วย ในการคำนวณปริมาณการไหลในทางน้ำสาขาที่ไม่เป็นอิสระนี้นิยมใช้สมมติฐานทางชลศาสตร์ 2 ประการ (ดูรูป 3-16 ประกอบ) คือ

1) ที่จุดเชื่อมต่อ ผลรวมทางพีชคณิตของอัตราการไหลมีค่าเป็นศูนย์

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

2) ที่จุดเชื่อมต่อ ระดับน้ำ มีค่าเท่ากัน

$$h_1 = h_2 = h_3$$



รูป 3-16 ปริมาณน้ำและทิศทางการไหลเมื่อลำน้ำสายใหญ่มีลำน้ำสาขาไหลมาบรรจบ

3.9 เงื่อนไขเริ่มต้นการคำนวณ

ในการคำนวณสามารถกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นว่า ระดับน้ำที่ทุก ๆ หน้าตัดในระบบตลอดแนวของลำน้ำที่กำลังพิจารณามีค่าเท่ากันหมด สำหรับในกรณีการจำลองปัญหาการไหลในแม่น้ำบางนรานี้ ได้กำหนดให้ค่าของระดับน้ำเบื้องต้นที่ ระดับ +0.200 เมตร-รทก. เท่ากันตลอดแนวลำน้ำ และ อัตราการไหลเริ่มต้นมีค่าเท่ากับศูนย์

3.10 การคำนวณค่าความสูญเสียพลังงานทั้งหมดของน้ำที่ไหลผ่านระหว่างตอม่อของประตูระบาย

ในปี ค.ศ.1840 D'Aubuisson ได้เสนอสมการเพื่อใช้คำนวณค่าความสูญเสียพลังงานของการไหลเมื่อปริมาณน้ำไหลผ่านประตูระบายน้ำ (ดูรูป 3-17 ประกอบ)

$$\Delta h_p = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{c^2 b_2^2 (H_1 - \Delta h_p)^2} - \frac{1}{b_1^2 H_1^2}\right] \qquad (3\text{-}36)$$

เมื่อ Δh_p คือ ค่าความสูญเสียพลังงานเนื่องจากประตูน้ำเมื่อคิดเทียบเป็นความสูงของน้ำ, เมตร

Q คือ ปริมาณการไหล, ลบ.ม./วินาที

c คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของตอม่อ ดังแสดงในรูป 3-18

b_2 คือ ความกว้างของช่องเปิดประตูควบคุมน้ำ, เมตร

h_1 คือ ความลึกของน้ำทางด้านเหนือของประตูน้ำ, เมตร

h_2 คือ ความลึกของน้ำขณะไหลผ่านตอม่อ, เมตร

h_3 คือ ความลึกของน้ำทางด้านท้ายของประตูน้ำ, เมตร

b_1 คือ ความกว้างของทางน้ำทางด้านเหนือประตู, เมตร

g คือ ค่าความโน้มถ่วงของโลก มีค่าเท่ากับ 9.81 เมตร/วินาที^{2}

เนื่องจาก h_p มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่า h_1 ดังนั้นในการคำนวณจึงไม่นำค่า hp มาพิจารณา สมการ 3-36 จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta h_p \doteq \frac{Q^2}{2gb_1^2H_1^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 - 1\right]$$

สำหรับการคำนวณค่าความสูญเสียพลังงานทั้งหมด ได้ใช้หลักเกณฑ์ในการพิจารณาในรูปความสัมพันธ์ตามสมการต่อไปนี้ คือ

ค่าความสูญเสียพลังงานทั้งหมด = ค่าความสูญเสียพลังงานเนื่องจากความเสียดทานภายในลำน้ำ + ค่าความสูญเสียพลังงานจากการไหลผ่านประตูน้ำ (3-37)

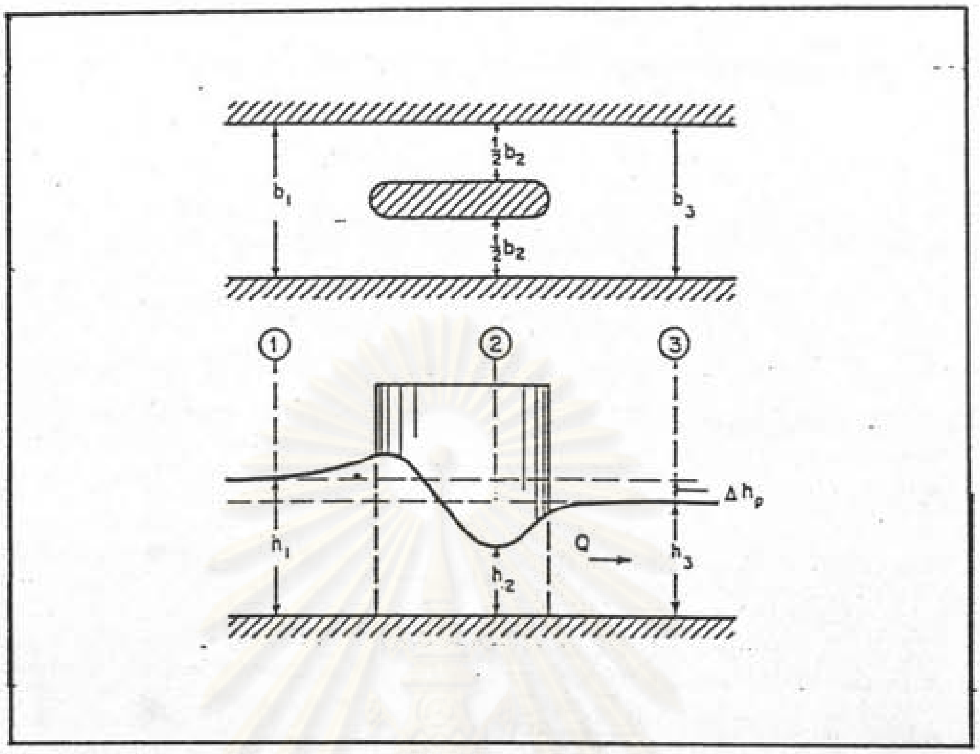
จากสูตรของ Manning ;

$$Q = \frac{AR^{2/3}}{n} \cdot \sqrt{S}$$

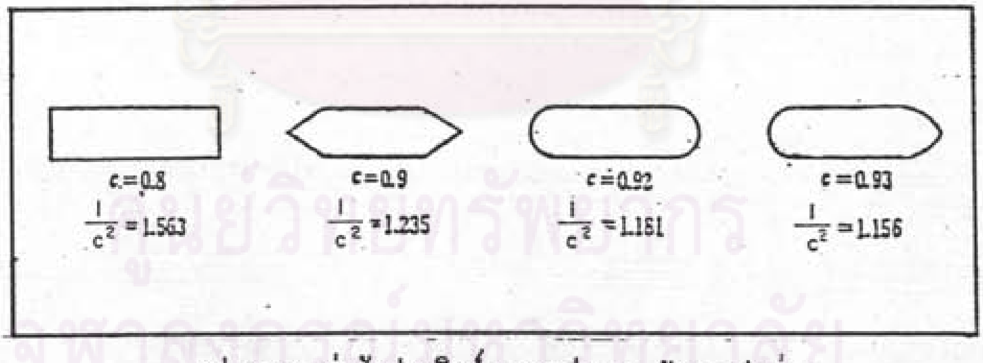
โดยที่ s คือ ความชันของเส้นพลังงานของการไหล

หรือ

$$\sqrt{S} = \frac{n \cdot Q}{AR^{2/3}}$$



รูป 3-17 ลักษณะการไหลของน้ำผ่านตอม่อสะพาน



รูป 3-18 ค่าสัมประสิทธิ์ของตอม่อ(c) ลักษณะต่าง ๆ

สมการ 3-37 สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{n_e^2 \cdot Q^2}{A^2 \cdot R^{4/3}} \cdot \Delta X = \frac{n^2 \cdot Q^2}{A^2 \cdot R^{4/3}} \cdot \Delta X + \frac{Q^2}{2gb_1^2 H_1^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 - 1\right]$$

โดยที่ x = ช่วงระยะทางระหว่างรูปตัดของลำน้ำ, เมตร

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

n_e = $n_{effective}$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานประสิทธิผลของ Manning

$$= n_e = \left[n^2 + \frac{A^2 \cdot R^{4/3}}{2gb_1^2 H_1^2} \cdot \frac{1}{\Delta X}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 - 1\right\}\right]^{1/2} \quad (3\text{-}38)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานประสิทธิผลของ Manning ที่คำนวณได้จากสมการ 3-38 จะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่รวมเอาอิทธิพลของความเสียดทานทั้งที่เกิดจากการไหลของน้ำผ่านตอม่อและที่ผ่านช่วงทางน้ำเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร โดยนับจากที่ตำแหน่งเหนือน้ำของประตูระบายขึ้นไป 1 กิโลเมตรถึงตำแหน่งท้ายน้ำซึ่งห่างจากประตูระบายเป็นระยะทาง 1 กิโลเมตร ค่าสัมประสิทธิ์นี้จะนำไปแทนค่าในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ B_j ในสมการ 3-25 โดยที่ตำแหน่ง j จะเป็นตำแหน่งที่มีการติดตั้งประตูระบายน้ำ