การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปหลายเหลี่ยม

นายเอกสิทธิ์ สงวนหล่อสิทธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2554
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย
The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository(CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

SEQUENTIAL DISSECTION OF A RECTANGLE INTO POLYGONS

Mr. Eakasit Sanguanlorsit

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2011

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปหลายเหลี่ยม
โดย	นายเอกสิทธิ์ สงวนหล่อสิทธิ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	อาจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	อาจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

…….. คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

……. ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน)

……... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(อาจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

……. อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม
(อาจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ)

…….. กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล)

…….. กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี)

…….. กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(อาจารย์ ดร.ศิริรัตน์ สิงหันต์)

เอกสิทธิ์ สงวนหล่อสิทธิ์ : การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปหลายเหลี่ยม. (SEQUENTIAL DISSECTION OF A RECTANGLE INTO POLYGONS) **อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : อ.ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม อ.ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ 67 หน้า.**

งานวิจัยนี้แสดงขั้นตอนวิธีแบบชัดและแบบไม่ชัดในการแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปออกเป็นรูปหลายเหลี่ยม แล้วนำรูปหลายเหลี่ยมเหล่านั้นประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเริ่มต้น และ รูป k เหลี่ยม ที่คล้ายกันทั้งหมด n รูป เมื่อ $k \in \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ ในกรณีที่ $k = 3$ หรือ 6 สามารถหาเงื่อนไขบางประการเพื่อทำให้รูป k เหลี่ยมที่คล้ายกันทั้ง n รูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหรือรูปหกเหลี่ยมปกติ

ภาควิชา...คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต.....

สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....

ปีการศึกษา.....2554..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม.....

5272640023 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : SEQUENTIALLY DISSECTION / POLYGON / RECTANGLE / SIMILAR / REGULAR k -GON

EAKASIT SANGUANLORSIT : SEQUENTIAL DISSECTION OF A RECTANGLE INTO POLYGONS. ADVISOR : RATINAN BOONKLURB, Ph.D., CO-ADVISOR : JINNADIT LAORPAKSIN, Ed.D., 67 pp.

This research gives trivial and non-trivial algorithms to dissect a rectangle sequentially into polygons that can be reassembled to a rectangle, which is similar to the initial rectangle, and n -similar k -gons, where $k \in \{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. In particular, for $k = 3$ or 6, under some conditions such n -similar triangles and hexagons are regular.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature .....

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature .....

Academic Year : 2011 Co-advisor's Signature .....

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษาหลัก อ.ดร. รตินันท์ บุญเคลือบ และอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม อ.ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ ในการให้แรงบันดาลใจ แหล่งข้อมูลต่าง ๆ ในการจัดทำหัวข้อวิทยานิพนธ์และสำหรับการให้ข้อเสนอแนะ คำอธิบาย แนวทาง ประสบการณ์ ตลอดจนความช่วยเหลือต่าง ๆ ในการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.วนิดา เหมะกุล ผศ.ดร. ณัฐพันธ์ กิติสิน ผศ.ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี และ อ.ดร.ศิริรัตน์ สิงหันต์ สำหรับข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้

ขอขอบคุณอาจารย์ รุ่นพี่ เพื่อน ๆ รุ่นน้อง เจ้าหน้าที่ในภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่เกี่ยวข้องในการให้ความรู้เพื่อใช้เป็นพื้นฐานซึ่งสามารถนำความรู้ต่าง ๆ มาประยุกต์ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ และสำหรับความช่วยเหลือในการจัดพิมพ์รูปเล่ม แบบฟอร์ม รวมทั้งเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณกำลังใจที่สำคัญยิ่งของ คุณพ่อ คุณแม่ พี่ และน้องที่มีให้ตลอดมา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย..... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..... จ

กิตติกรรมประกาศ..... ฉ

สารบัญ..... ช

บทที่

1. บทนำ..... 1

   1.1 นิยาม คำศัพท์ที่เกี่ยวข้อง..... 1

   1.2 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา..... 2

2. การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปสามเหลี่ยม..... 5

   2.1 การแบ่งแบบชัด..... 5

   2.2 การแบ่งแบบไม่ชัด..... 16

3. การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปห้าเหลี่ยม..... 22

   3.1 การแบ่งแบบชัด..... 22

   3.2 การแบ่งแบบไม่ชัด..... 25

4. การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปหกเหลี่ยม..... 31

   4.1 การแบ่งแบบชัด..... 31

   4.2 การแบ่งแบบไม่ชัด..... 36

5. การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยม..... 42

   5.1 การแบ่งแบบชัด..... 42

   5.2 การแบ่งแบบไม่ชัด..... 47

6. การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปแปดเหลี่ยม..... 53

   6.1 การแบ่งแบบชัด..... 53

   6.2 การแบ่งแบบไม่ชัด..... 58

7. ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ..... 64

   7.1 ข้อสรุป..... 64

   7.2 ข้อเสนอแนะ..... 64

รายการอ้างอิง..... 66

บทที่ **หน้า**

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์..... 67

บทที่ 1

บทนำ

1.1 นิยาม คำศัพท์ที่เกี่ยวข้อง

ในที่นี้จะให้นิยามเบื้องต้นเกี่ยวกับคำศัพท์ที่เกี่ยวข้องในวิทยานิพนธ์เล่มนี้

บทนิยามที่ 1.1.1 รูปหลายเหลี่ยมหรือรูป n เหลี่ยม (polygon or n - gon) คือเซตของจุดทุกจุดบนขอบและภายในอาณาบริเวณบนระนาบ $\mathbb{R}^2$ ที่ปิดล้อมด้วยส่วนของเส้นตรงจำนวนจำกัดเส้น โดยจะเรียกส่วนของเส้นตรงที่ปิดล้อมอาณาบริเวณดังกล่าวว่าเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยม

บทนิยามที่ 1.1.2 รูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียว (simple polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมที่เส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยมชนิดนี้จะไม่ตัดกันเอง

หมายเหตุ สำหรับวิทยานิพนธ์เล่มนี้ รูปหลายเหลี่ยมที่กล่าวถึงทั้งหมดจะหมายถึง รูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียว และเพื่อความสะดวกจะใช้คำว่ารูปหลายเหลี่ยมแทนคำว่า รูปหลายเหลี่ยมเชิงเดียว

บทนิยามที่ 1.1.3 รูปหลายเหลี่ยม P **คล้าย** (similar) กับรูปหลายเหลี่ยม Q ถ้าสามารถขยาย หรือบีบ P ให้เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการกับรูปหลายเหลี่ยม Q ได้ นั่นคือ มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x_0 \in \mathbb{R}^2$ และเมทริกซ์ $A \neq 0$ ซึ่ง $f(x) = x_0 + Ax$ และ $f(P) = Q$ ทำให้ได้ว่า รูปหลายเหลี่ยม P คล้ายกับรูปหลายเหลี่ยม Q เมื่อ มุมที่สมนัยกันระหว่างรูปหลายเหลี่ยม P และรูปหลายเหลี่ยม Q มีขนาดเท่ากันทุกคู่ และอัตราส่วนของความยาวด้านที่สมนัยกันระหว่างรูปหลายเหลี่ยม P และรูปหลายเหลี่ยม Q เป็นสัดส่วนเดียวกันทุกคู่

บทนิยามที่ 1.1.4 ให้ P เป็นรูปหลายเหลี่ยมรูปหนึ่ง D เป็น**การแบ่ง** (dissection) ของ P เมื่อ D เป็นหมู่ (collection) ของรูปหลายเหลี่ยมย่อย $\{P_1, P_2, P_3, ..., P_k\}$ ซึ่งเป็นผลแบ่งกั้น (partition) ของ P และจะเรียก P_i ทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ ว่าชิ้น (piece) ของ P ทั้งนี้รูปหลายเหลี่ยมย่อยที่เป็นชิ้นสองชิ้นใด ๆ ของ P อาจไม่มีส่วนซ้อนทับกัน หรือถ้ามีส่วนซ้อนทับกันก็เฉพาะบางส่วนของเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยมย่อยทั้งสองนั้นเท่านั้น นั่นคือ สำหรับ $1 \leq i < j \leq k$ ใด ๆ $P_i \cap P_j = \varnothing$ หรือ $P_i \cap P_j$ คือบางส่วนของเส้นรอบรูปของ P_i และ P_j อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ถ้าบรรดาชิ้นทั้งหลายของ P ใน D ไม่คล้ายกับ P จะเรียก D ว่าเป็น**การแบ่งแบบไม่ชัด** (non-trivial dissection) ในทางกลับกันหากมีชิ้นของ P ใน D อย่างน้อยหนึ่งชิ้นที่คล้ายกับ P จะเรียก D ว่าเป็น**การแบ่งแบบชัด** (trivial dissection)

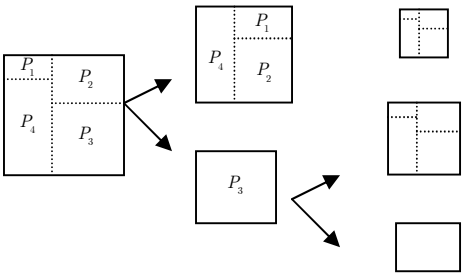
บทนิยามที่ 1.1.5 ให้ P เป็นรูปหลายเหลี่ยมรูปหนึ่ง การ**แบ่งเชิงลำดับออกเป็น n รูป** (n - sequentially dissection) ของ P คือการแบ่ง D ที่ชิ้นของ P ใน D สามารถนำมาประกอบให้เป็นรูปหลายเหลี่ยม n รูปที่คล้ายกับ P ทุกจำนวนนับ n

บทนิยามที่ 1.1.6 **รูปหลายเหลี่ยมปกติ** (regular polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมที่ด้านแต่ละด้านมีความยาวเท่ากันและมุมแต่ละมุมมีขนาดเท่ากัน

1.2 ความเป็นมา และความสำคัญของปัญหา

ในปี 1997 Akiyama และ Nakamura [1] ได้ทำการศึกษาการแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเป็น n รูปดังนี้

ให้ $l \in \mathbb{R}^+$ และให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ l หน่วย Akiyama และ Nakamura [1] ได้แสดงตัวอย่างการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกมาเป็นรูปหลายเหลี่ยมจำนวน 4 ชิ้น คือ P_1, P_2, P_3 และ P_4 แล้วนำรูปหลายเหลี่ยมทั้ง 4 ชิ้น มาประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 2 รูป โดยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปแรกประกอบได้จากรูปหลายเหลี่ยม P_1, P_2 และ P_4 ในขณะที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่สองคือ P_3 จากนั้นนำรูป P_3 ไปทำการแบ่งต่อด้วยวิธีเดิม จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอีก 2 รูป (ดังรูปที่ 1.2.1) ดังนั้นเมื่อทำการแบ่งด้วยวิธีเดิมไปเรื่อย ๆ จะได้ว่าในการแบ่งครั้งที่ n จะมีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่ $n+1$ รูป ถ้าให้ n แทนจำนวนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหลังจากทำการแบ่งไป $n-1$ ครั้ง และให้ $f(n)$ แทนจำนวนชิ้นของรูปหลายเหลี่ยมที่ถูกแบ่งออกมาจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปแรกแล้ว จะได้ว่า $f(n) = 3n-2$

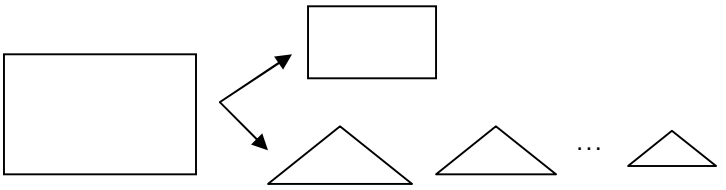


รูปที่ 1.2.1

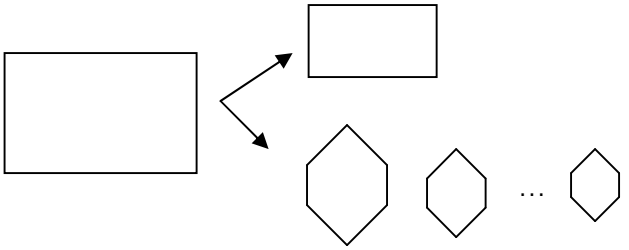
งานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการขยายและปรับฐานคิดจากการแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใน [1] ดังนี้

ในแง่ของการขยาย จะพิจารณารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้างและความยาวเป็น a และ b หน่วยตามลำดับ

ส่วนในด้านของการปรับ จะทำโดยในการแบ่งครั้งที่ n นำรูปหลายเหลี่ยมทั้งหลายที่แบ่งแล้วมาประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป ที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้นและรูปหลายเหลี่ยม n รูป ที่คล้ายกันทั้งหมด เช่น รูปที่ 1.2.2 และ 1.2.3 แสดงการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแล้วนำมาประกอบกันใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป พร้อมกับรูปสามเหลี่ยมและรูปหกเหลี่ยมตามลำดับ



รูปที่ 1.2.2



รูปที่ 1.2.3

สำหรับการแบ่งที่ปรับใหม่นี้ เมื่อแบ่งไป n ครั้งจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรก 1 รูป และรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกันทั้งหมด n รูป

ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ให้บทนิยามสำหรับการแบ่งเชิงลำดับออกเป็น n รูปแบบใหม่ที่ได้ปรับและขยายฐานคิดจากการแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใน [1] ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 1.2.1</u> ให้ P และ Q เป็นรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ การแบ่ง D ของรูป P จะเป็น**การแบ่งเชิงลำดับ** $(1+n)-P-Q$ ถ้าชิ้นของ P ใน D สามารถประกอบกันเป็นรูป

หลายเหลี่ยมที่คล้ายกับ P จำนวน 1 รูปและประกอบกันเป็นรูปหลายเหลี่ยม Q จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมดทุกจำนวนนับ n

สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $g(n)$ แทนจำนวนของรูปหลายเหลี่ยมที่ถูกแบ่งออกมาจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรกหลังจากทำการแบ่งไปแล้ว n ครั้ง งานวิจัยชิ้นนี้ได้คำนวณสูตรของ $g(n)$ สำหรับการแบ่งเชิงลำดับแบบต่าง ๆ ที่สร้างขึ้น

ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะใช้สัญลักษณ์ T, R, P, Hx, Hp และ O แทนรูปสามเหลี่ยม, รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, รูปห้าเหลี่ยม, รูปหกเหลี่ยม, รูปเจ็ดเหลี่ยมและรูปแปดเหลี่ยมตามลำดับ โดยแบ่งการนำเสนอเป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$, $(1+n)-R-P$, $(1+n)-R-Hx$, $(1+n)-R-Hp$ และ $(1+n)-R-O$ ทั้งแบบชัดและแบบไม่ชัดในบทที่ 2, 3, 4, 5 และ 6 ตามลำดับ สำหรับการแบ่งเชิงลำดับแบบ $(1+n)-R-T$ และ $(1+n)-R-Hx$ แบบชัดและแบบไม่ชัดนั้นสามารถหาเงื่อนไขบนความยาวด้านทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปซึ่งคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเริ่มต้น พร้อมด้วยลำดับของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าในการแบ่งเชิงลำดับแบบ $(1+n)-R-T$ และได้ผลลัพธ์เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปซึ่งคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเริ่มต้น พร้อมด้วยลำดับของรูปหกเหลี่ยมปกติในการแบ่งเชิงลำดับแบบ $(1+n)-R-Hx$ ตามลำดับ

บทที่ 2

การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปสามเหลี่ยม

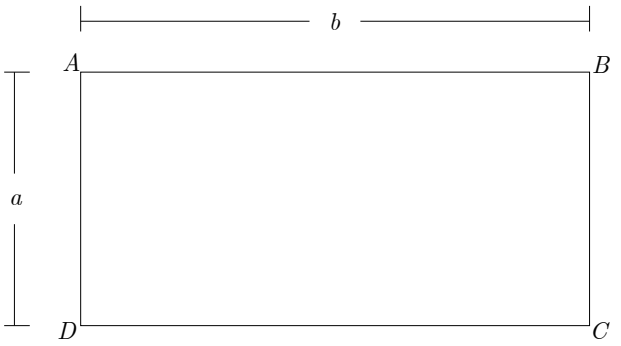
2.1 การแบ่งแบบชัด

ขั้นตอนวิธี 2.1.1 การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}D^{(1)}$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน $D^{(1)}A^{(1)}$ ยาว a หน่วย และด้าน $A^{(1)}B^{(1)}$ ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

หมายเหตุ สำหรับวิทยานิพนธ์เล่มนี้ เพื่อความสะดวกจะละการเขียนตัวยกแสดงจำนวนครั้งของการทำซ้ำสำหรับจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมต่าง ๆ เช่น จะเขียน A แทน $A^{(i)}$ ทุก $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ เป็นต้น

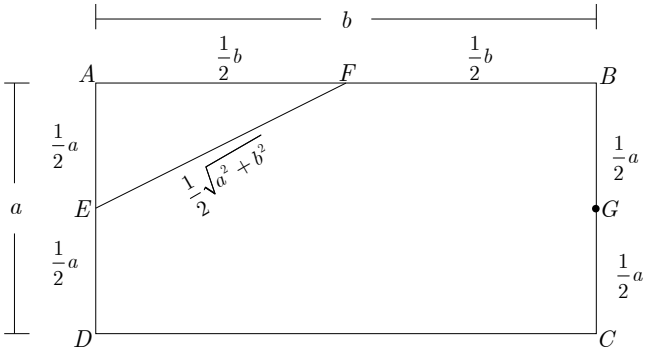
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 2.1.1



รูปที่ 2.1.1

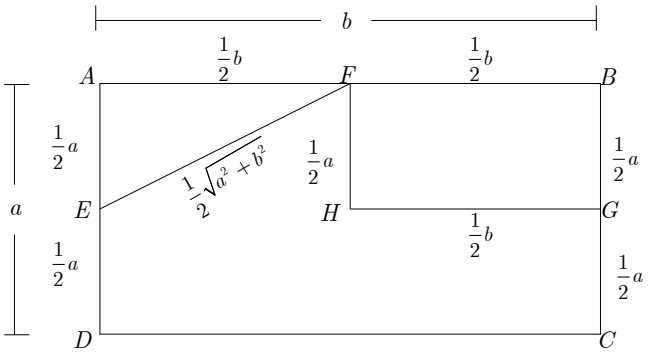
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด $E,\ F$ และ G เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $DA,\ AB$ และ BC ตามลำดับ ดังนั้น $DE = EA = \frac{1}{2}a = BG = GC$ และ $AF = \frac{1}{2}b = FB$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E ไปยังจุด F โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่าส่วนของเส้นตรง EF ยาว $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ หน่วย



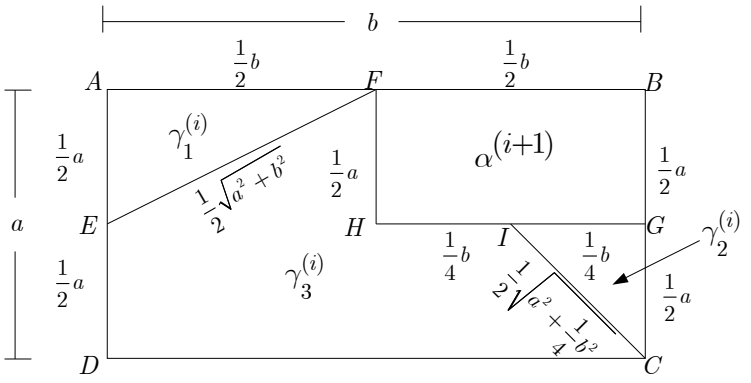
รูปที่ 2.1.2

2. จากจุด F ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน AD และจากจุด G ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน AB ให้ส่วนของเส้นตรงทั้งสองนี้ตัดกันที่จุด H ดังนั้น $HF = \frac{1}{2}a$ และ $GH = \frac{1}{2}b$



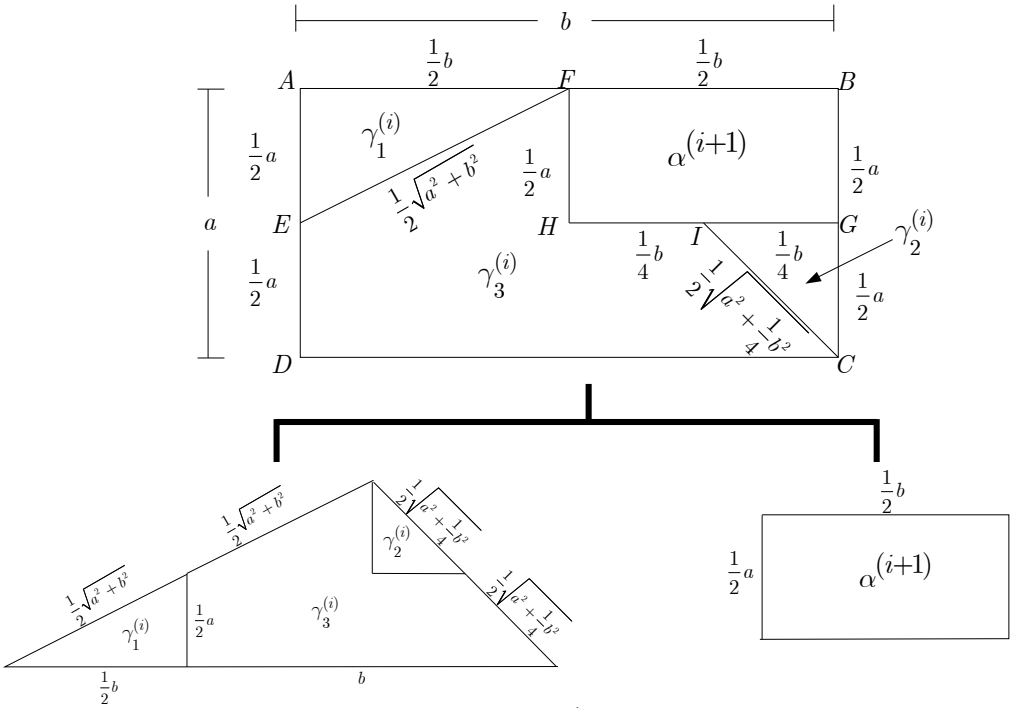
รูปที่ 2.1.3

3. ให้จุด I เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง GH จะได้ว่า $IH = \frac{1}{4}b = GI$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด I ไปยังจุด C โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $CI = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $FBGH$ รูปสามเหลี่ยม AFE รูปสามเหลี่ยม IGC และรูปหกเหลี่ยม $FHICDE$ ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$ และ $\gamma_3^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 2.1.4

4. แยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง EA มาแนบกับส่วนของเส้นตรง DE และให้จุด A ติดกับจุด D และนำรูป $\gamma_2^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง GC มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HF ให้จุด C ติดกับจุด F และส่วนของเส้นตรง GI มาแนบกับส่วนของเส้นตรง IH และให้จุด G ติดกับจุด H



รูปที่ 2.1.5

ดังนั้นจะได้ $\alpha^{(i+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และได้รูปสามเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ๆ จำนวน 4 ชิ้น

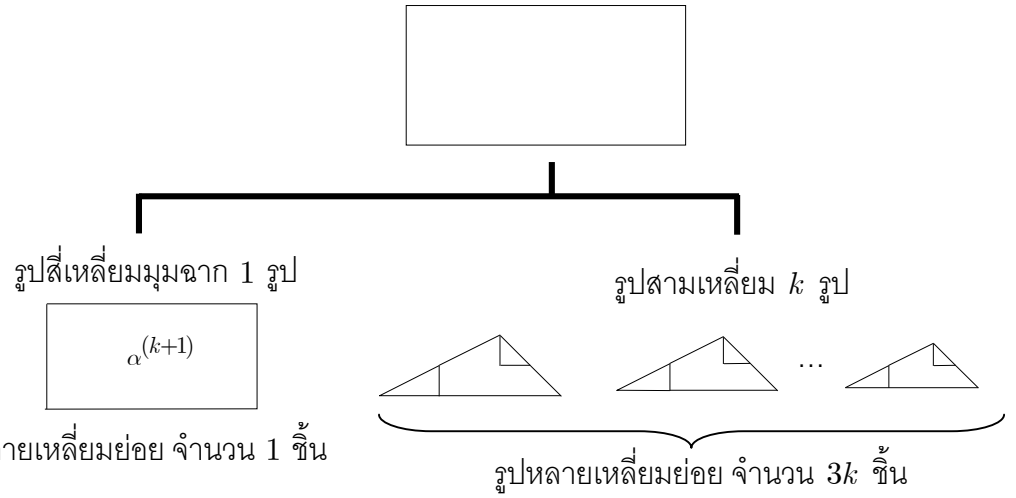
5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1

ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 2.1.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้ $\alpha^{(n+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ไม่ได้ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปสามเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 3 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.1.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 2.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบชัดโดย $g(n)=3n+1$

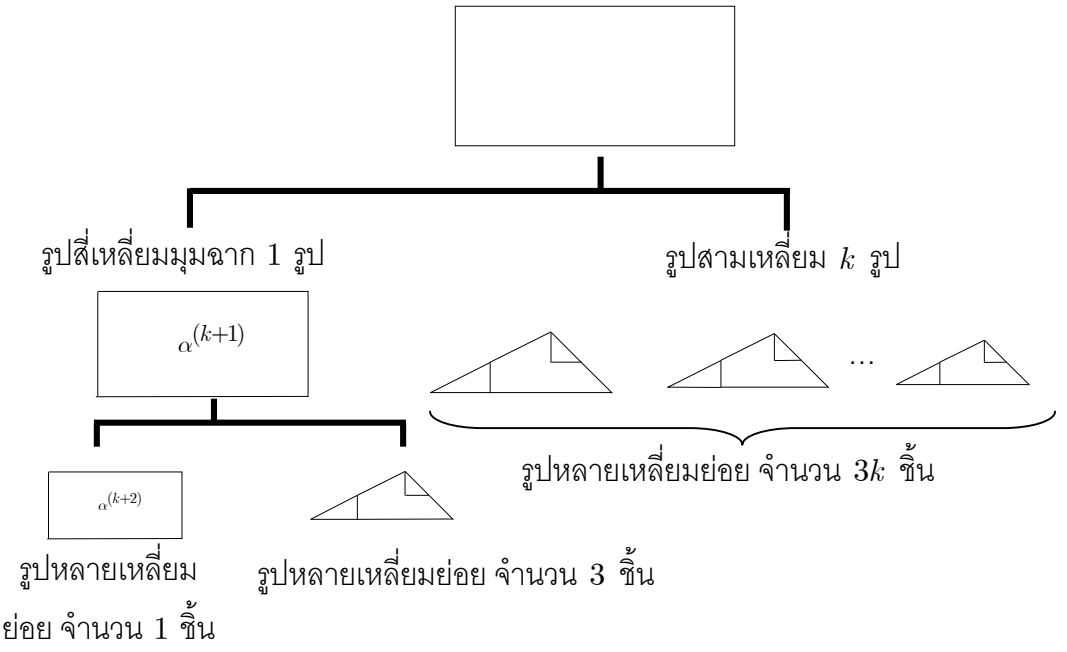
<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 2.1.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 2.1.1 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 4 ชิ้น ซึ่งมี 1 ชิ้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 3 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 2.1.1 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-T$ แบบชัดที่ $4=3(1)+1=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 2.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-T$ แบบชัดที่ $g(k)=3k+1$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 2.1.6



รูปที่ 2.1.6

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 2.1.1 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 4 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+2)}$ และประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 2.1.7



รูปที่ 2.1.7

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-T$ โดยที่

$$4+3k = 3(k+1)+1 = g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 2.1.1 เป็นจริง □

หากพิจารณาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธี 2.1.1 ดังรูปที่ 2.1.5 จะสามารถสรุปเป็นบทแทรก ดังต่อไปนี้

<u>บทแทรกที่ 2.1.1</u> รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1.1 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก็ต่อเมื่อ $\sqrt{2}a = b$

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมจากรูปที่ 2.1.5 จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก็ต่อเมื่อ

$$(a^2+b^2)+\left(a^2+\frac{1}{4}b^2\right)=\frac{9}{4}b^2$$

ทำให้ได้ว่าความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.1.5 จะสอดคล้องทฤษฎีบทพีทาโกรัสก็ต่อเมื่อ $\sqrt{2}a=b$

ดังนั้นในกรณีที่ $\sqrt{2}a=b$ จะได้ว่าลำดับของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากขั้นตอนวิธี 2.1.1 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งหมด □

<u>บทแทรกที่</u> 2.1.2 รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1.1 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็ต่อเมื่อ $2a=\sqrt{5}b$ หรือ $a=\sqrt{2}b$

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมจากรูปที่ 2.1.5 จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็ต่อเมื่อ

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{3}{2}b \text{ หรือ } \sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}=\frac{3}{2}b$$

ทำให้ได้ว่าความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.1.5 จะเท่ากันสองด้านก็ต่อเมื่อ $2a=\sqrt{5}b$ หรือ $a=\sqrt{2}b$

ดังนั้นในกรณีที่ $2a=\sqrt{5}b$ หรือ $a=\sqrt{2}b$ จะได้ว่าลำดับของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากขั้นตอนวิธี 2.1.1 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งหมด □

<u>บทแทรกที่</u> 2.1.3 รูปสามเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธีที่ 2.1.1 ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติว่ารูปสามเหลี่ยมจากรูปที่ 2.1.5 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้ว่า

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}$$

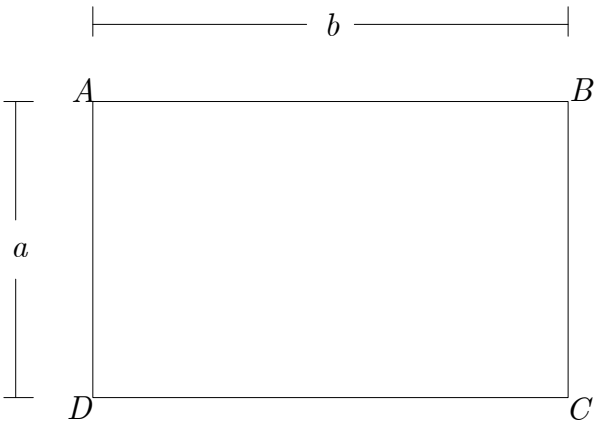
แต่ $b\in\mathbb{R}^+$ ดังนั้นจึงได้ว่ารูปสามเหลี่ยมจากรูปที่ 2.1.5 ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า □

ในขั้นตอนต่อไปจะแสดงขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบชัดอีกวิธีหนึ่ง สำหรับวิธีนี้จะทำให้รูปสามเหลี่ยม n รูปที่ประกอบขึ้นมานั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และเมื่อกำหนดเงื่อนไขบางประการให้กับความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้นแล้วรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ได้จะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

<u>ขั้นตอนวิธี</u> 2.1.2 การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

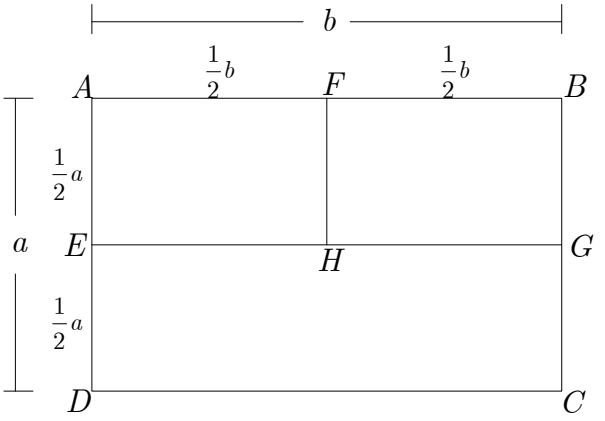
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 2.1.8



รูปที่ 2.1.8

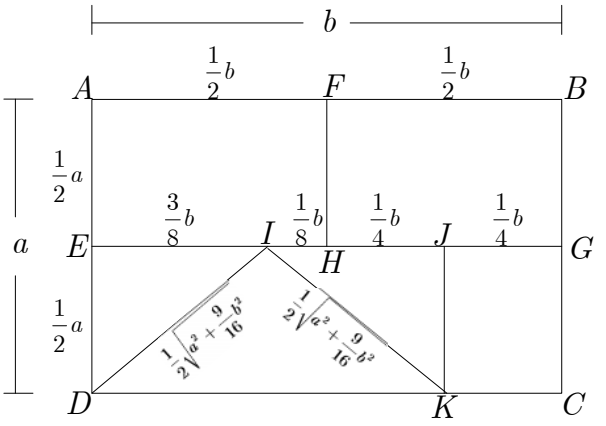
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด $E,\ F$ และ G เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $DA,\ AB$ และ BC ตามลำดับ ดังนั้น $DE = EA = \frac{1}{2}a = BG = GC$ และ $AF = \frac{1}{2}b = FB$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E ไปยังจุด G และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน DA ให้ส่วนของเส้นตรงทั้งสองนี้ตัดกันที่จุด H ดังนั้น $EH = \frac{1}{2}b = HG$



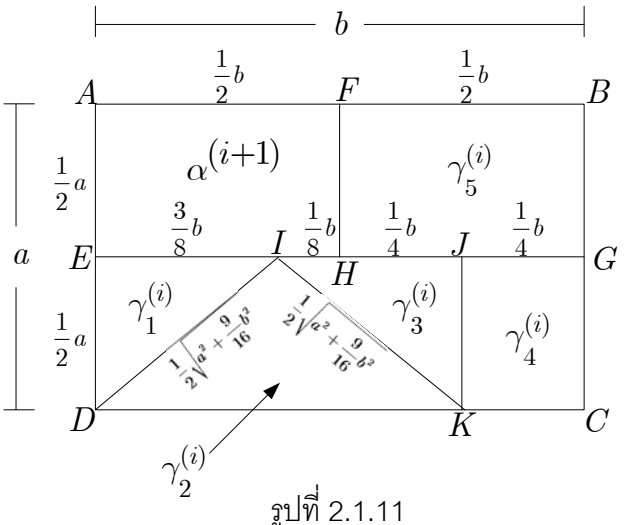
รูปที่ 2.1.9

2. ให้จุด I เป็นจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง EH โดยที่ $EI = \frac{3}{8}b$ ดังนั้น $IH = \frac{1}{8}b$ ให้จุด J เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง HG ดังนั้น $HJ = \frac{1}{4}b = JG$ จากจุด J ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับด้าน CD ที่จุด K เพราะว่า $EI = \frac{3}{8}b = IJ$ และ $DE = \frac{1}{2}a = JK$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $DI = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{9}{16}b^2} = IK$



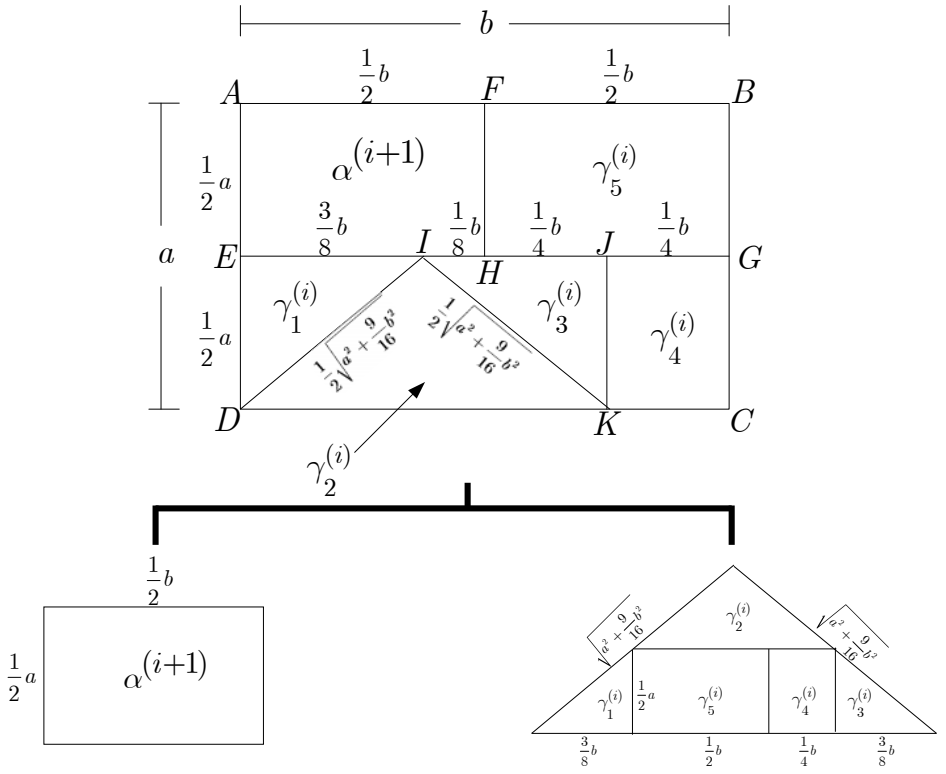
รูปที่ 2.1.10

3. เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $AFHE$ รูปสามเหลี่ยม EID รูปสามเหลี่ยม IKD รูปสามเหลี่ยม IJK รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $JGCK$ และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $FBGH$ ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$, $\gamma_3^{(i)}$, $\gamma_4^{(i)}$ และ $\gamma_5^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 2.1.11

4. แยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\gamma_5^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง FB มาแนบกับส่วนของเส้นตรง KD และให้จุด F ติดกับจุด D จากนั้นนำรูป $\gamma_4^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ และรูป $\gamma_5^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JG มาแนบกับส่วนของเส้นตรง KD และให้จุด G ติดกับจุด K และส่วนของเส้นตรง KJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง BG และให้จุด J ติดกับจุด B จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_5^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง DE มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HF และให้จุด E ติดกับจุด F จากนั้นนำรูป $\gamma_3^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_4^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JK มาแนบกับส่วนของเส้นตรง GC และให้จุด J ติดกับจุด C



รูปที่ 2.1.12

ดังนั้นจะได้ $\alpha^{(i+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และได้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 6 ชิ้น

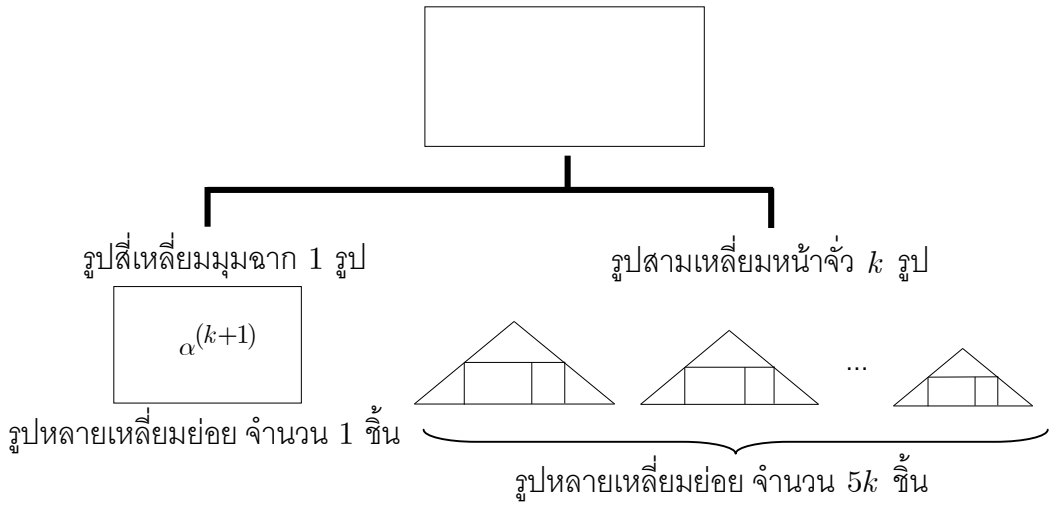
5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1

ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 2.1.2 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้ $\alpha^{(n+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ไม่ได้ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 5 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.1.2</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 2.1.2 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบชัดโดย $g(n)=5n+1$

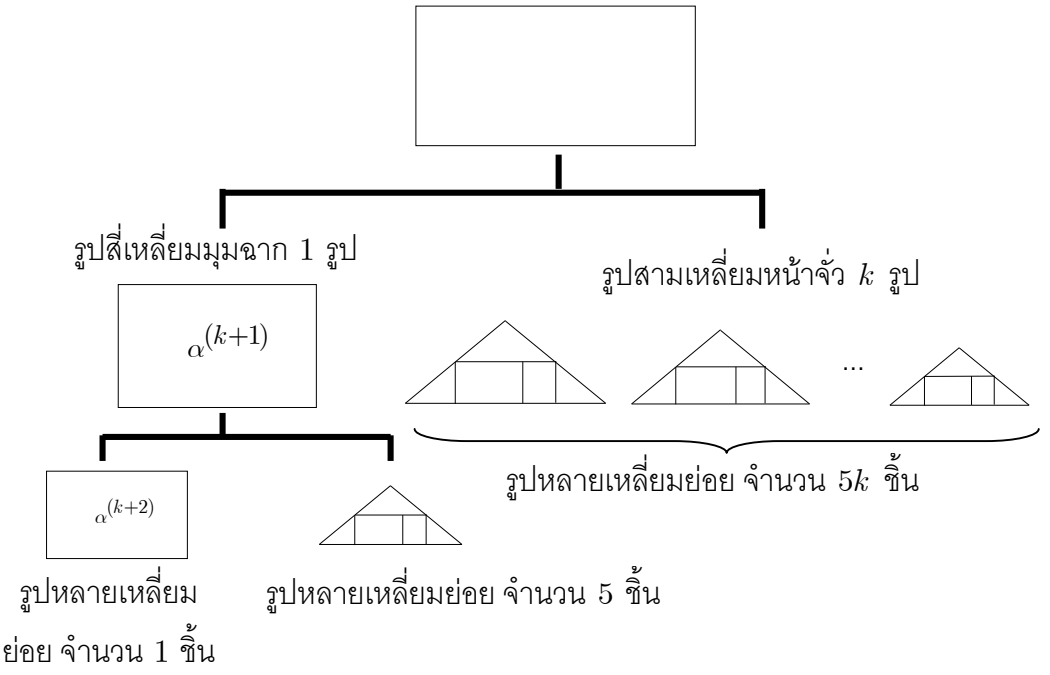
<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 2.1.12 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 2.1.2 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 6 ชิ้น ซึ่งมี 1 ชิ้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 5 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 2.1.2 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-T$ แบบชัดที่ $6=5(1)+1=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธีที่ 2.1.2 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-T$ แบบชัดที่ $g(k)=5k+1$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 2.1.13



รูปที่ 2.1.13

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 2.1.2 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 6 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+2)}$ และประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 1 รูปที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 2.1.14



รูปที่ 2.1.14

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-T$ โดยที่

$$6+5k = 5(k+1)+1 = g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 2.1.2 เป็นจริง □

หากพิจารณาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธี 2.1.2 ดังรูปที่ 2.1.12 จะสามารถสรุปเป็นบทแทรก ดังต่อไปนี้

<u>บทแทรกที่ 2.1.4</u> รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1.2 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก็ต่อเมื่อ $4a = 3b$

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมจากภาพที่ 2.1.12 จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนี้จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก็ต่อเมื่อ

$$\left(a^2+\frac{9}{16}b^2\right)+\left(a^2+\frac{9}{16}b^2\right)=\frac{9}{4}b^2$$

ทำให้ได้ว่าความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.1.12 จะสอดคล้องทฤษฎีบทพีทาโกรัสก็ต่อเมื่อ $4a = 3b$

ดังนั้นในกรณีที่ $4a = 3b$ จะได้ว่าลำดับของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากขั้นตอนวิธี 2.1.2 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งหมด □

<u>บทแทรกที่ 2.1.5</u> รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.1.2 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าก็ต่อเมื่อ $4a = 3\sqrt{3}b$

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณารูปสามเหลี่ยมจากภาพที่ 2.1.12 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าก็ต่อเมื่อ

$$\sqrt{a^2 + \frac{9}{16}b^2} = \frac{3}{2}b$$

ทำให้ได้ว่าความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.1.2 จะเท่ากันทั้งสามด้านก็ต่อเมื่อ $4a = 3\sqrt{3}b$

ดังนั้นในกรณีที่ $4a = 3\sqrt{3}b$ จะได้ว่าลำดับของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากขั้นตอนวิธี 2.1.2 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด □

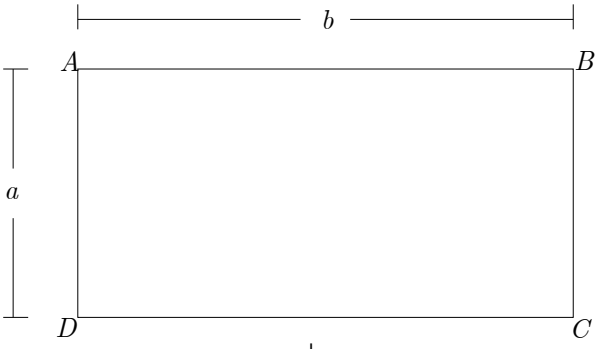
ในหัวข้อต่อไปจะแสดงขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบไม่ชัด โดยลำดับของรูปสามเหลี่ยมทั้งหลายที่ได้จากขั้นตอนวิธีใหม่นั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.1.5

2.2 การแบ่งแบบไม่ชัด

<u>ขั้นตอนวิธี 2.2.1</u> การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบไม่ชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

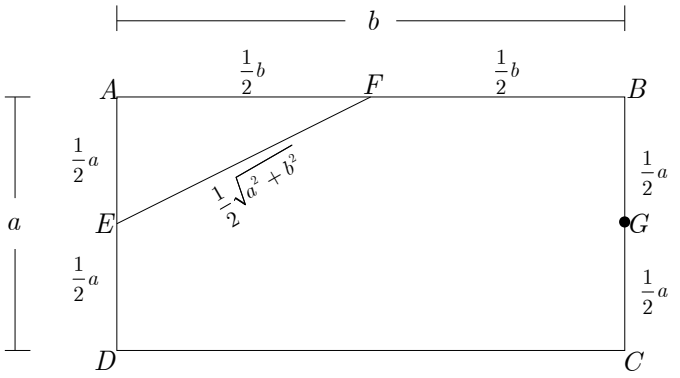
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 2.2.1



รูปที่ 2.2.1

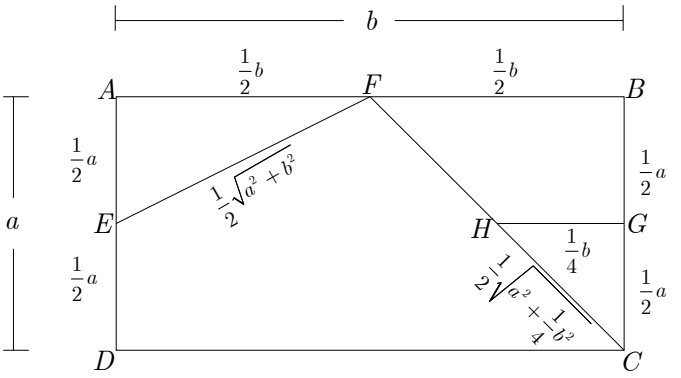
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด $E,\ F$ และ G เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $DA,\ AB$ และ BC ตามลำดับ ดังนั้น $EA = DE = \frac{1}{2}a = BG = GC$ และ $AF = \frac{1}{2}b = FB$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E ไปยังจุด F โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $EF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$



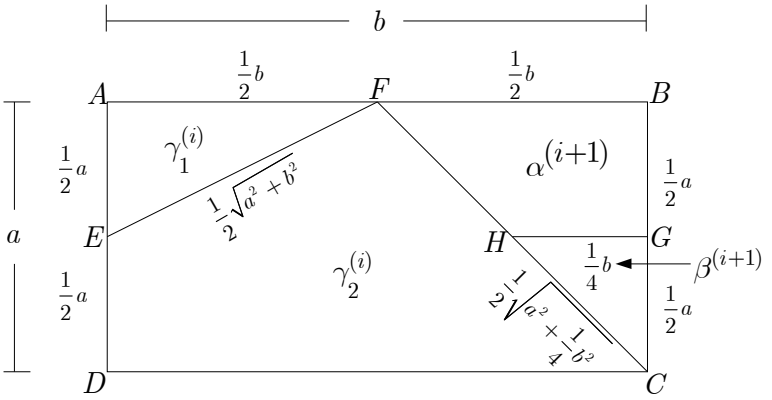
รูปที่ 2.2.2

2. ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ไปยังจุด C และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด G ให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง CF ที่จุด H ดังนั้น $HG = \frac{1}{4}b$ และโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $HC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$



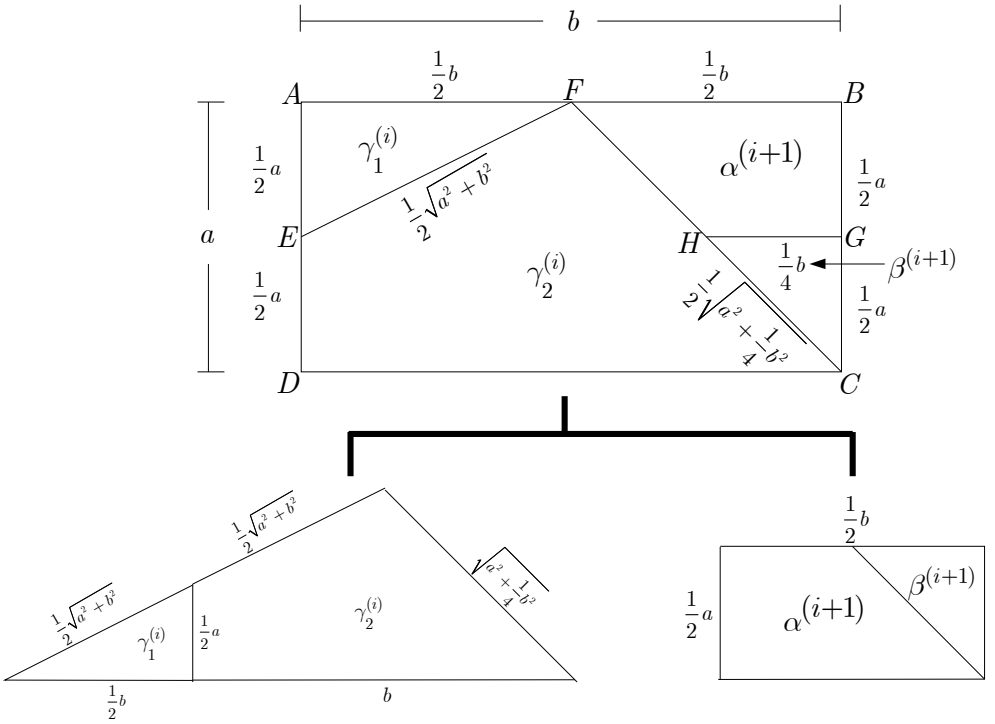
รูปที่ 2.2.3

3. เรียกรูปสี่เหลี่ยม $FBGH$ รูปสามเหลี่ยม HGC รูปสามเหลี่ยม AFE และรูปสี่เหลี่ยม $FCDE$ ว่า $\alpha^{(i+1)},\ \beta^{(i+1)},\ \gamma_1^{(i)}$ และ $\gamma_2^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 2.2.4

4. แยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ และรูปสามเหลี่ยม $\beta^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\alpha^{(i+1)}$ มาแนบกับรูป $\beta^{(i+1)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง FH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HC และให้จุด F ติดกับจุด C จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง EA มาแนบกับส่วนของเส้นตรง DE และให้จุด A ติดกับจุด D



รูปที่ 2.2.5

ดังนั้นจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และได้รูปสามเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 4 ชิ้น

5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1 โดยมองว่าส่วนของเส้นตรงที่เป็นรอยต่อระหว่าง $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ คือส่วนของเส้นตรง FC ในข้อ 2

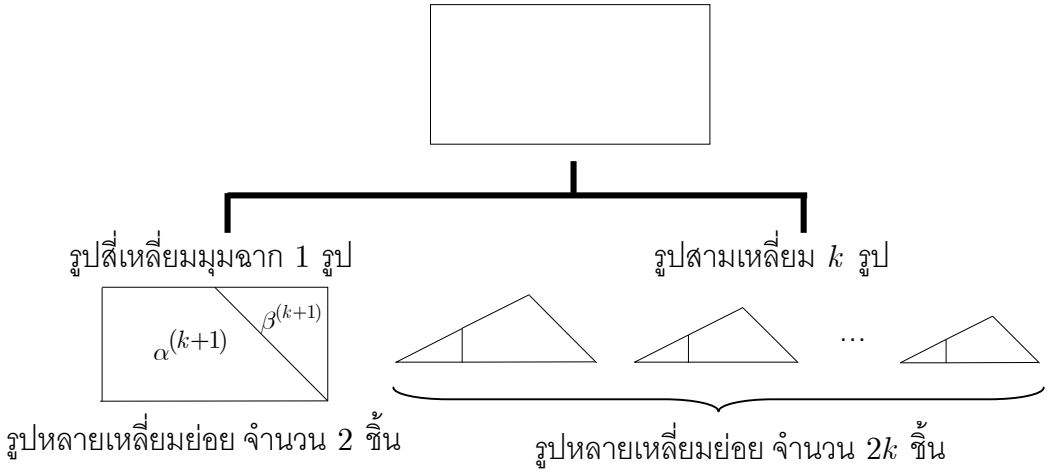
ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 2.2.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ประกอบจากรูป $\alpha^{(n+1)}$ และ $\beta^{(n+1)}$ และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปสามเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 2 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.2.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 2.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบไม่ชัดโดย $g(n)=2n+2$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 2.2.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 2.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 4 ชิ้น ซึ่งมี 2 ชิ้นประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 2 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 2.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-T$ แบบไม่ชัดที่

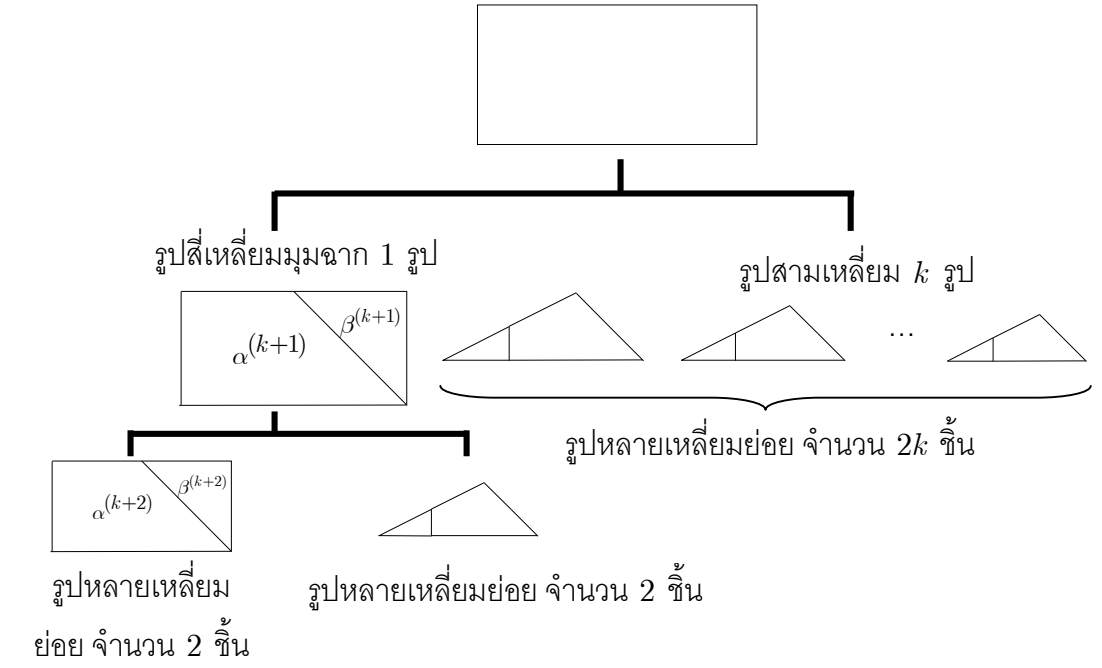
$4=2(1)+2=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 2.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-T$ แบบไม่ชัดที่ $g(k)=2k+2$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 2.2.6



รูปที่ 2.2.6

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 2.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+1)}$ และ $\beta^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 4 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+2)}$ กับ $\beta^{(k+2)}$ และประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 2.2.7



รูปที่ 2.2.7

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-T$ โดยที่

$$4+2k = 2(k+1)+1 = g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 2.2.1 เป็นจริง □

สังเกตว่าความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ดังรูปที่ 2.2.5 จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่ได้เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.1.5 ดังนั้นโดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรกที่ 2.1.1, 2.1.2 และ 2.1.3 จะสามารถสรุปได้ว่าบทแทรกต่อไปนี้เป็นจริงเช่นกัน

บทแทรกที่ 2.2.1 รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.2.1 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากก็ต่อเมื่อ $\sqrt{2}a = b$

บทแทรกที่ 2.2.2 รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.2.1 จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็ต่อเมื่อ $2a = \sqrt{5}b$ หรือ $a = \sqrt{2}b$

บทแทรกที่ 2.2.3 รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธีที่ 2.2.1 จะไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

บทที่ 3

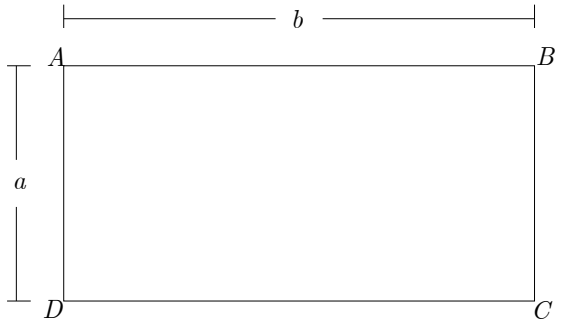
การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปห้าเหลี่ยม

3.1 การแบ่งแบบชัด

ขั้นตอนวิธี 3.1.1 การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-P$ แบบชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

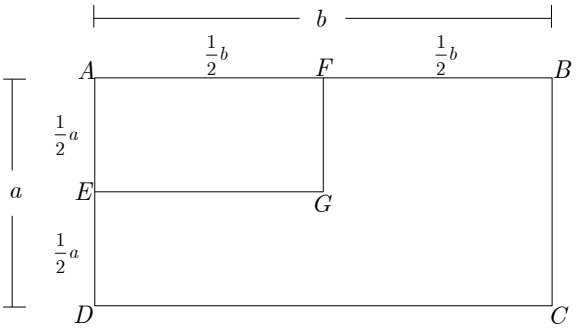
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 3.1.1



รูปที่ 3.1.1

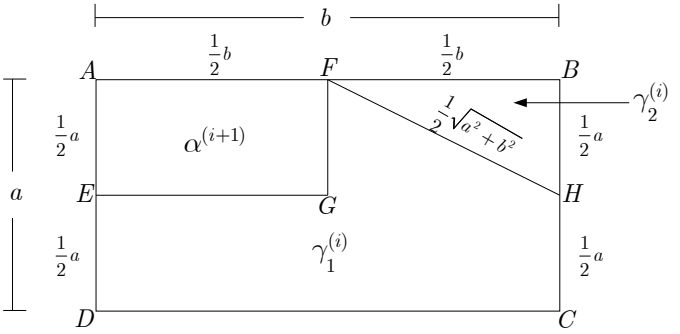
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน DA และ AB ตามลำดับ จากจุด E ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน AB และจากจุด F ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน DA ให้ส่วนของเส้นตรงทั้งสองนี้ตัดกันที่จุด G ดังนั้น $GE = \frac{1}{2}b$ และ $FG = \frac{1}{2}a$



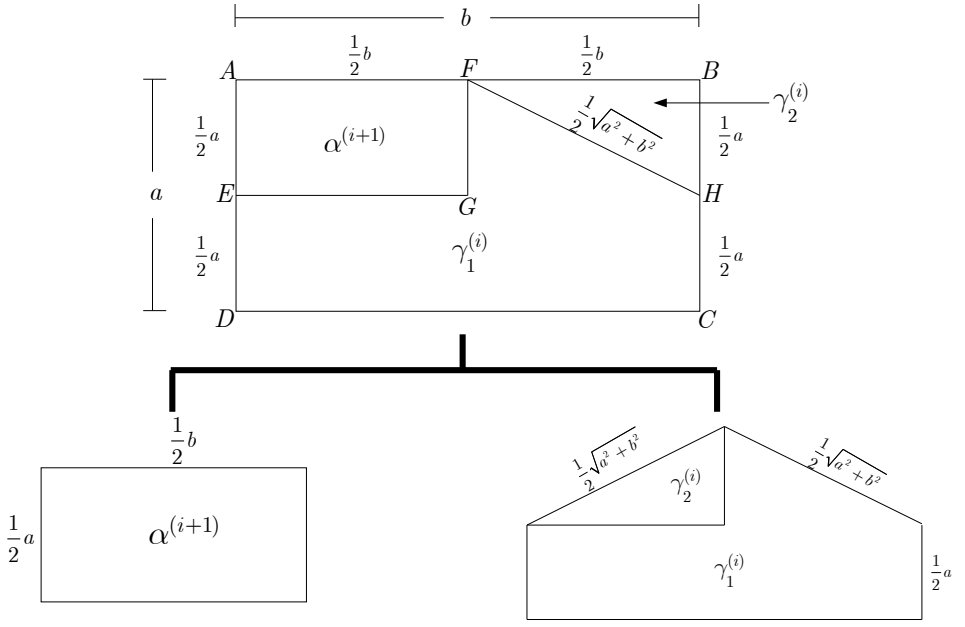
รูปที่ 3.1.2

2. ให้จุด H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC จากจุด H ลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุด F โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $HF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $AFGE$ รูปหกเหลี่ยม $EGFHCD$ และรูปสามเหลี่ยม FBH ว่า $\alpha_1^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$ และ $\gamma_2^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.1.3

3. แยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\gamma_2^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง BH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง FG และให้จุด B ติดกับจุด G และส่วนของเส้นตรง FB มาแนบกับส่วนของเส้นตรง EG และให้จุด F ติดกับจุด E



รูปที่ 3.1.4

ดังนั้นจะได้ $\alpha^{(i+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และรูปห้าเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 3 ชิ้น

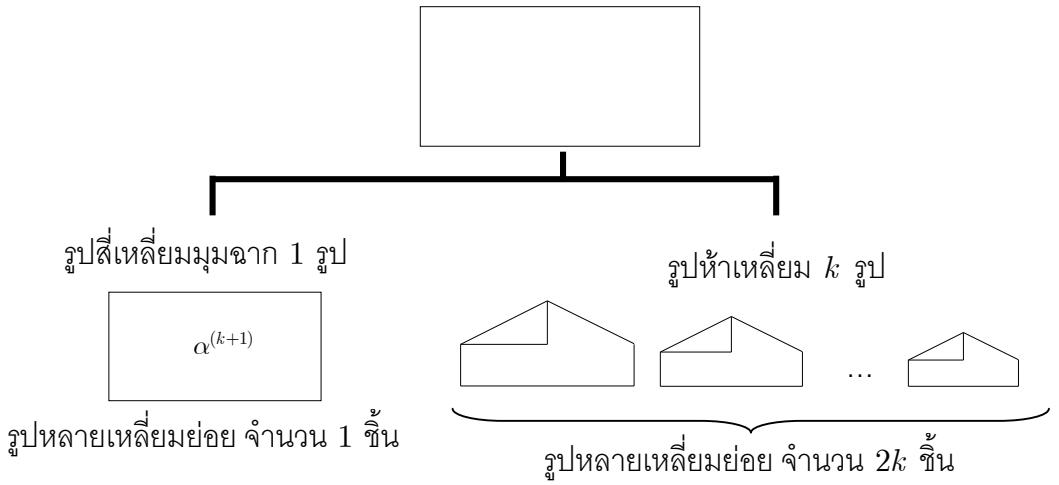
4. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1

ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 3.1.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้ $\alpha^{(n+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ไม่ได้ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปห้าเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 2 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.1.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 3.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-P$ แบบชัดโดย $g(n)=2n+1$

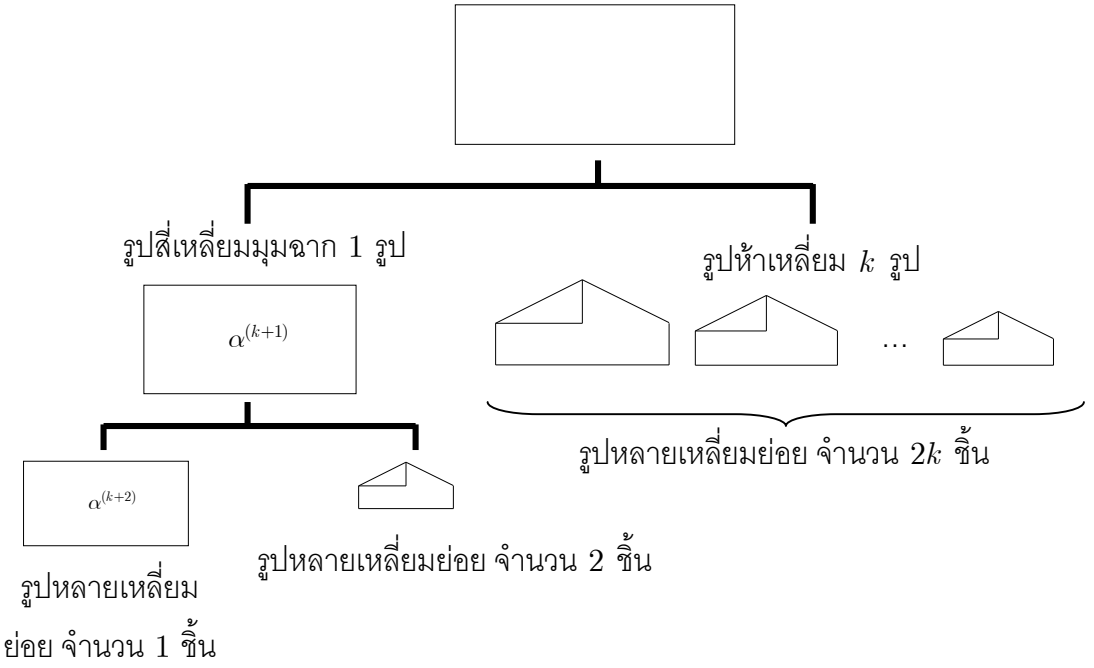
<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 3.1.4 รูปสี่เหลี่ยมมุม $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 3.1.1 ขั้นที่ 1 – 3 ออกมาเป็น 3 ชิ้น ซึ่งมี 1 ชิ้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 2 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปห้าเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 3.1.1 ขั้นที่ 1 – 3 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-P$ แบบชัดที่ $3=2(1)+1=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 3.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-P$ แบบชัดที่ $g(k)=2k+1$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 3.1.5



รูปที่ 3.1.5

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 3.1.1 ขั้นที่ 1 – 3 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 3 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+2)}$ และประกอบกันเป็นรูปห้าเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปห้าเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 3.1.6



รูปที่ 3.1.6

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-P$ โดยที่

$$3+2k = 2(k+1)+1 = g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 3.1.1 เป็นจริง □

<u>บทแทรกที่ 3.1.1</u> รูปห้าเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธี 3.1.1 ไม่เป็นรูปห้าเหลี่ยมปกติ

<u>บทพิสูจน์</u> เนื่องจากรูปห้าเหลี่ยมมุมฉากรูปที่ 3.1.4 เป็นรูปห้าเหลี่ยมที่มีมุม 2 มุมเป็นมุมฉาก ดังนั้นจะไม่เป็นรูปห้าเหลี่ยมปกติ □

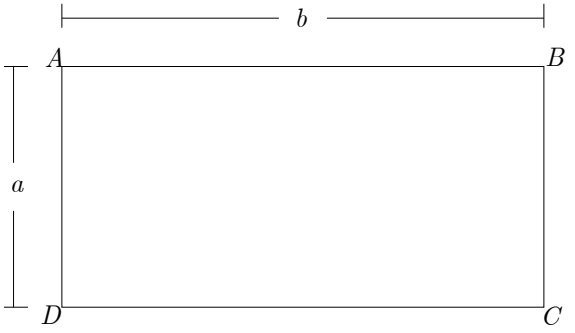
ในหัวข้อต่อไปจะแสดงขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-P$ แบบไม่ชัด

3.2 การแบ่งแบบไม่ชัด

<u>ขั้นตอนวิธี 3.2.1</u> การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-P$ แบบไม่ชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

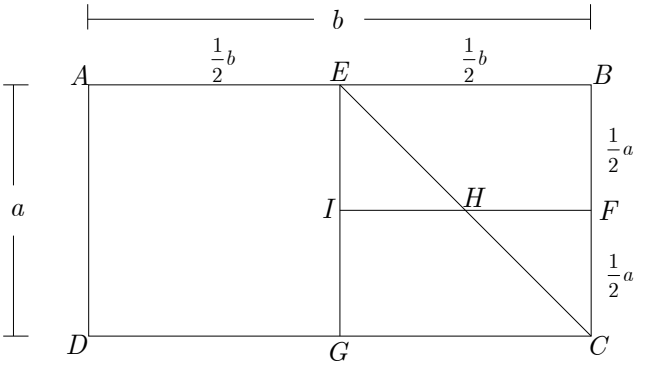
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 3.2.1



รูปที่ 3.2.1

สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

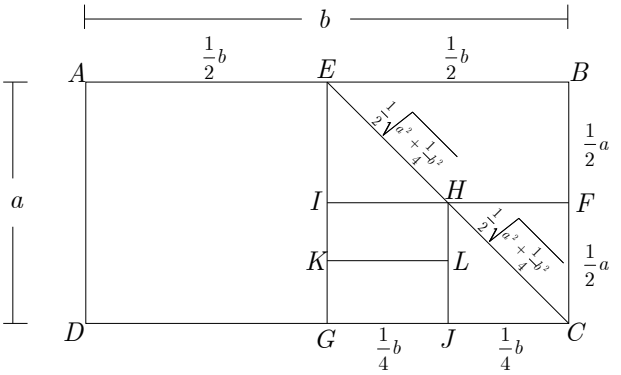
1. ให้จุด E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC จากจุด E ลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุด C และลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับด้าน CD ที่จุด G จากจุด F ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง EC ที่จุด H และตัดกับส่วนของเส้นตรง EG ที่จุด I สังเกตว่าสามเหลี่ยม EHI เท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยม CHF



รูปที่ 3.2.2

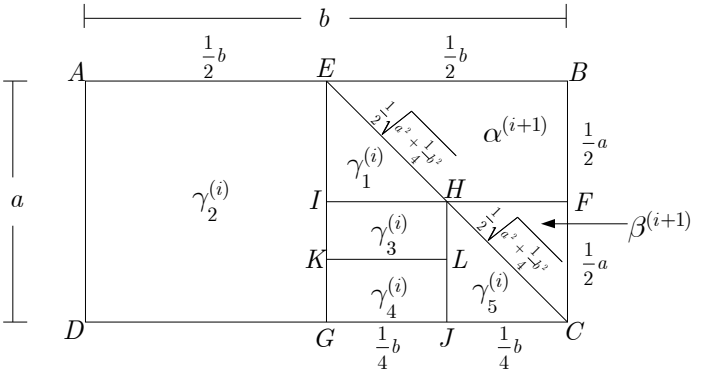
2. จากจุด H ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง CG ที่จุด J จากนั้นให้จุด K เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง GI จากจุด K ลากส่วนของ

เส้นตรงให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง HJ ที่จุด L ดังนั้น $CJ = \frac{1}{4}b = JG$ และโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $EH = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} = HC$



รูปที่ 3.2.3

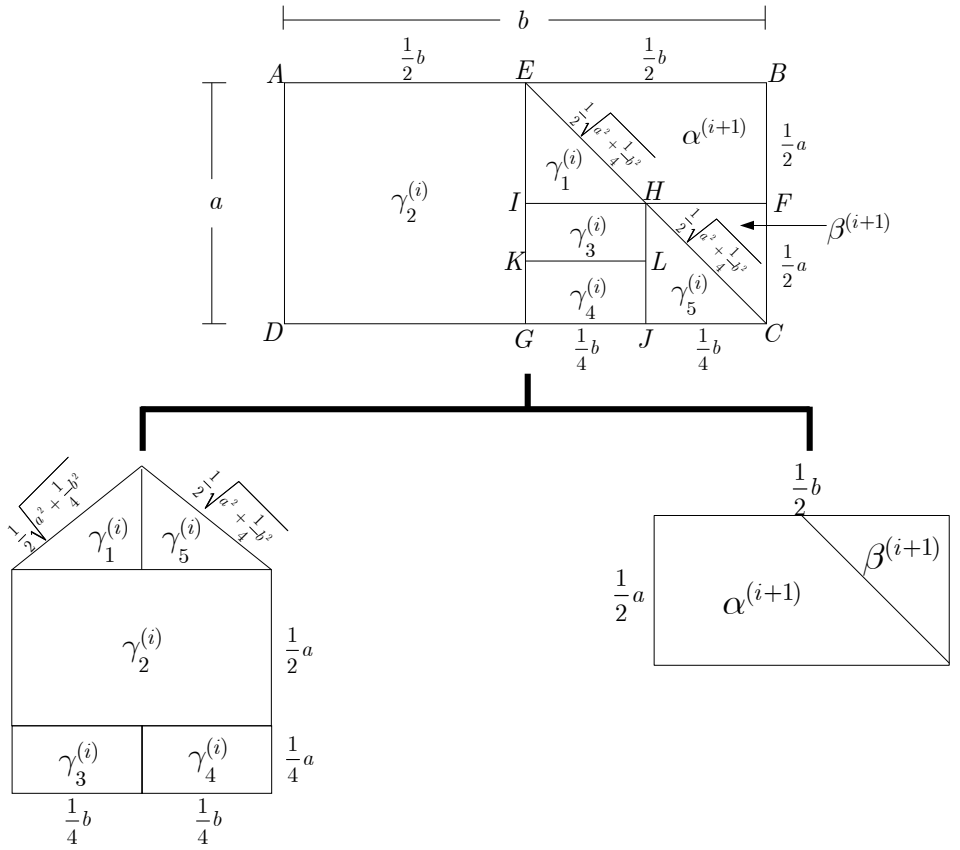
3. เรียกรูปสี่เหลี่ยม $EBFH$ รูปสามเหลี่ยม HFC รูปสามเหลี่ยม EHI รูปสี่เหลี่ยม $AEGD$ รูปสี่เหลี่ยม $IHLK$ รูปสี่เหลี่ยม $KLJG$ และรูปสามเหลี่ยม HCJ ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\beta^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$, $\gamma_3^{(i)}$, $\gamma_4^{(i)}$ และ $\gamma_5^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.2.4

4. แยกรูปสี่เหลี่ยม $\alpha^{(i+1)}$ และรูปสามเหลี่ยม $\beta^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\alpha^{(i+1)}$ มาแนบกับรูป $\beta^{(i+1)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง EH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HC และให้จุด E ติดกับจุด C จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ โดยให้ส่วนของ

เส้นตรง IH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง AE และให้จุด H ติดกับจุด A จากนั้นนำรูป $\gamma_5^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ และ $\gamma_2^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง IE ให้จุด J ติดกับจุด I และให้ส่วนของเส้นตรง CJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง AE และให้จุด C ติดกับจุด E จากนั้นนำรูป $\gamma_3^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง IH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง GD และให้จุด I ติดกับจุด D จากนั้นนำรูป $\gamma_4^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ และรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง KL มาแนบกับส่วนของเส้นตรง GD ให้จุด L ติดกับจุด G และให้ส่วนของเส้นตรง GK มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HL และให้จุด K ติดกับจุด H



รูปที่ 3.2.5

ดังนั้นจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และได้รูปห้าเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ที่ไม่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จำนวน 7 ชิ้น

5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1 โดยมองว่าส่วนของเส้นตรงที่เป็นรอยต่อระหว่าง $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ คือส่วนของเส้นตรง EC ในข้อ 1

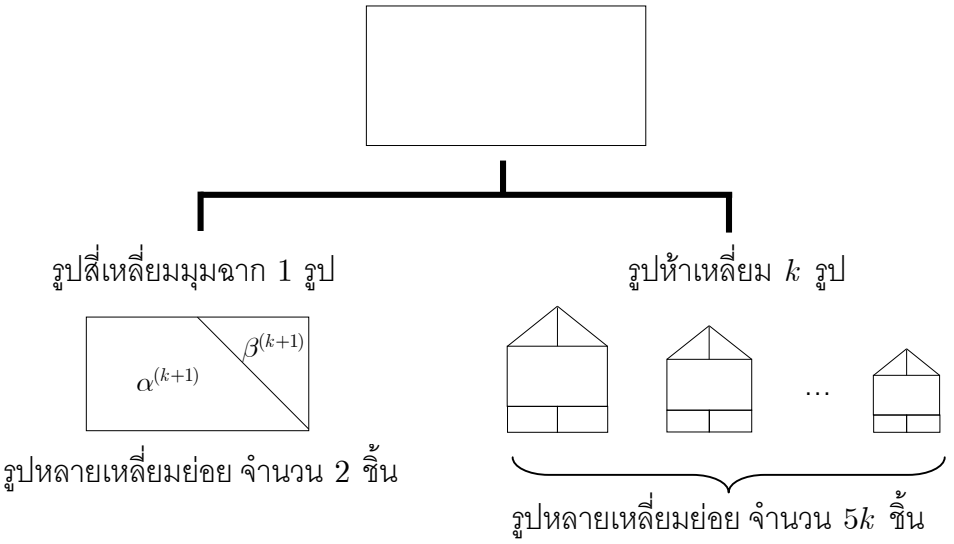
ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 3.2.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ประกอบจากรูป $\alpha^{(n+1)}$ และ $\beta^{(n+1)}$ และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปห้าเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 5 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 3.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-P$ แบบไม่ชัดโดย $g(n)=5n+2$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 3.2.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 3.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 7 ชิ้น ซึ่งมี 2 ชิ้นประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 5 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปห้าเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 3.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-P$ แบบไม่ชัดที่

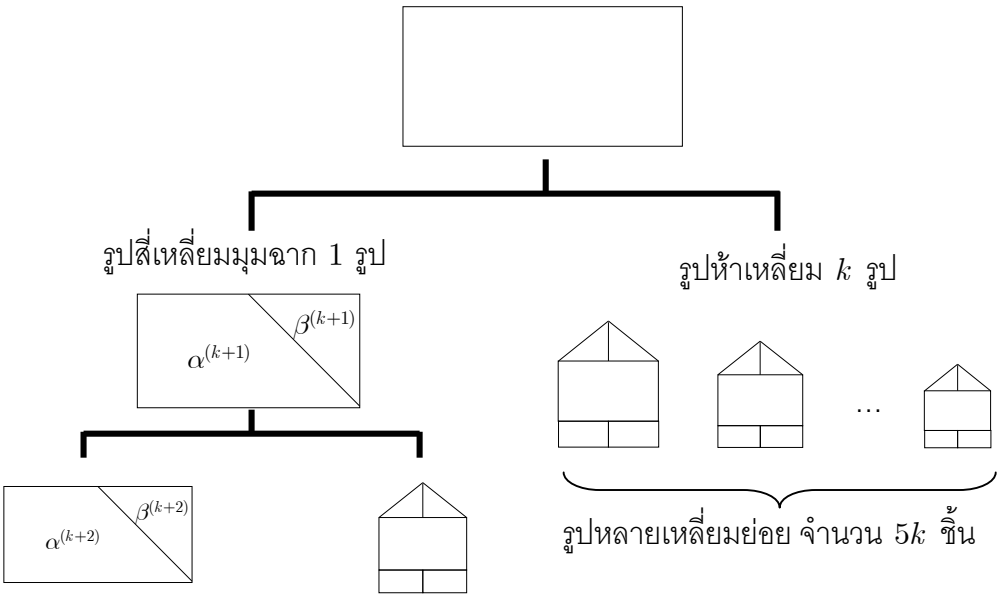
$7=5(1)+2=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 3.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-P$ แบบไม่ชัดที่ $g(k)=5k+2$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 3.2.6



รูปที่ 3.2.6

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 3.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+1)}$ และ $\beta^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ที่ไม่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรกได้อีก 7 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+2)}$ กับ $\beta^{(k+2)}$ โดยรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรกและประกอบกันเป็นรูปห้าเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปห้าเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 3.2.7



รูปที่ 3.2.7

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1 + (k+1) - R - P$ โดยที่

$$7 + 5k = 5(k+1) + 2 = g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 3.2.1 เป็นจริง □

<u>บทแทรกที่ 3.2.1</u> รูปห้าเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธี 3.2.1 ไม่เป็นรูปห้าเหลี่ยมปกติ

<u>บทพิสูจน์</u> เนื่องจากรูปห้าเหลี่ยมมุมฉากรูปที่ 3.2.5 เป็นรูปห้าเหลี่ยมที่มีมุม 2 มุมเป็นมุมฉาก ดังนั้นจะไม่เป็นรูปห้าเหลี่ยมปกติ □

บทที่ 4

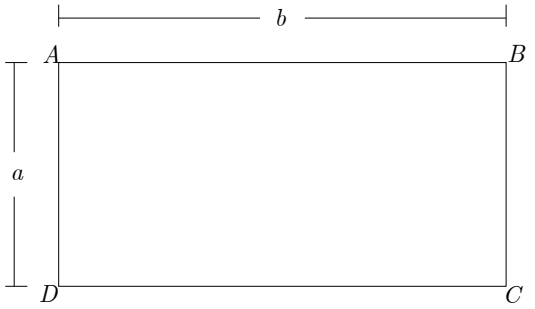
การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปหกเหลี่ยม

4.1 การแบ่งแบบชัด

ขั้นตอนวิธี 4.1.1 การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hx$ แบบชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

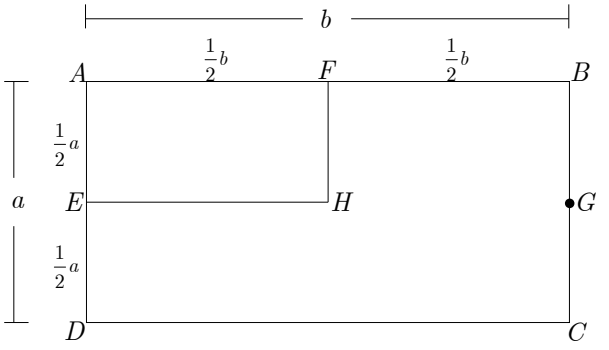
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 4.1.1



รูปที่ 4.1.1

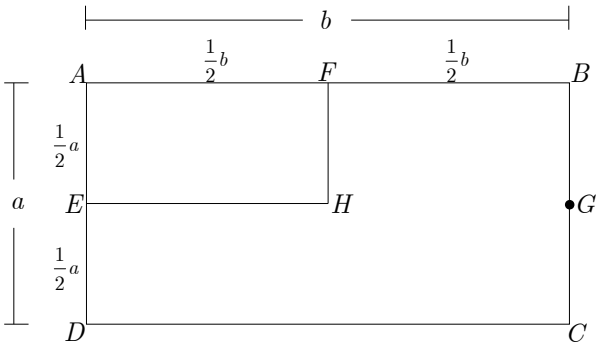
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด $E,\ F$ และ G เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $DA,\ AB$ และ BC ตามลำดับ ดังนั้น $DE = EA = \frac{1}{2}a = BG = GC$ และ $AF = \frac{1}{2}b = FB$



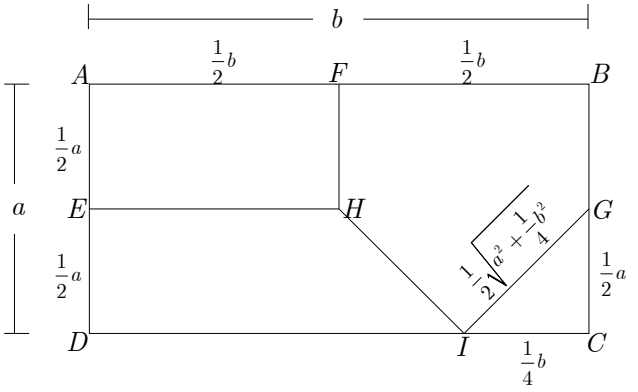
รูปที่ 4.1.2

2. จากจุด E ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน AB และจากจุด F ลากส่วนของเส้นตรง ให้ขนานกับด้าน BC ให้ส่วนของเส้นตรงทั้งสองนี้ตัดกันที่จุด H



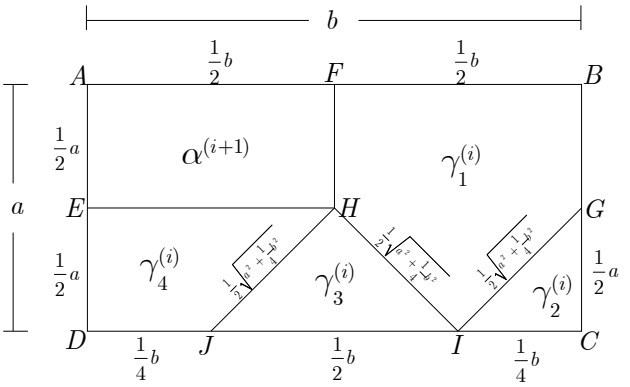
รูปที่ 4.1.3

3. ให้จุด I เป็นจุดของด้าน CD โดย $IC = \frac{1}{4}b$ จากนั้นจากจุด H ลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุด I และจากจุด I ลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุด G เพราะว่า $GC = \frac{1}{2}a$ และ $CI = \frac{1}{4}b$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $IG = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$



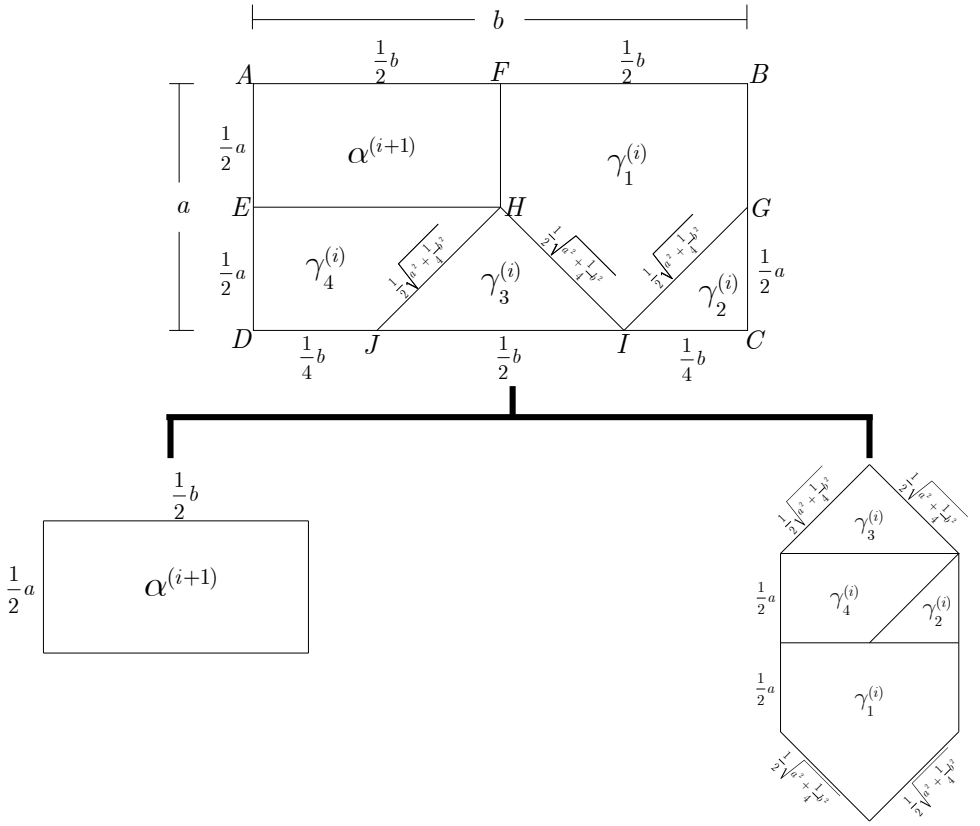
รูปที่ 4.1.4

4. ให้จุด J เป็นจุดของด้าน CD โดย $JD = \frac{1}{4}b$ ดังนั้น $IJ = \frac{1}{2}b$ จากนั้นจากจุด H ลากส่วนของเส้นตรงมายังจุด J ดังนั้น $JH = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$ และ $HI = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $AFHE$ รูปห้าเหลี่ยม $FBGIH$ รูปสามเหลี่ยม GCI รูปสามเหลี่ยม IJH และรูปสี่เหลี่ยม $EHJD$ ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$, $\gamma_3^{(i)}$ และ $\gamma_4^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 4.1.5

5. แยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\gamma_4^{(i)}$ ไปแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JD มาแนบกับส่วนของเส้นตรง FB และให้จุด D ติดกับจุด F จากนั้นนำรูป $\gamma_2^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ และ $\gamma_4^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง CI มาแนบกับส่วนของเส้นตรง FB ให้จุด C ติดกับจุด B และให้ส่วนของเส้นตรง GI มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HJ และให้จุด G ติดกับจุด H จากนั้นนำรูป $\gamma_3^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_4^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง IJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง EH และให้จุด J ติดกับจุด E



รูปที่ 4.1.6

ดังนั้นจะได้ $\alpha^{(i+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และรูปหกเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 5 ชิ้น

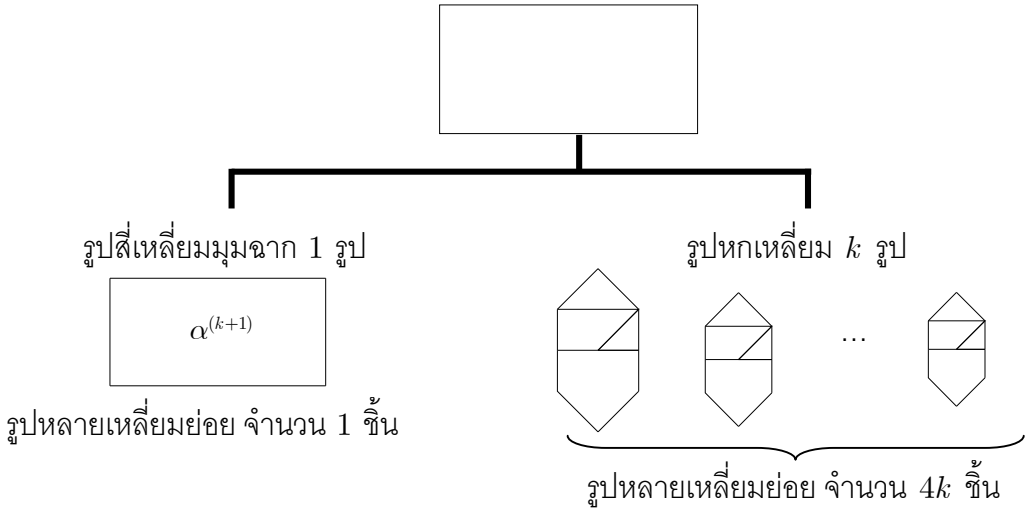
6. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1

ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 4.1.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้ $\alpha^{(n+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ไม่ได้ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปหกเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 4 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.1.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 4.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hx$ แบบชัดโดย $g(n)=4n+1$

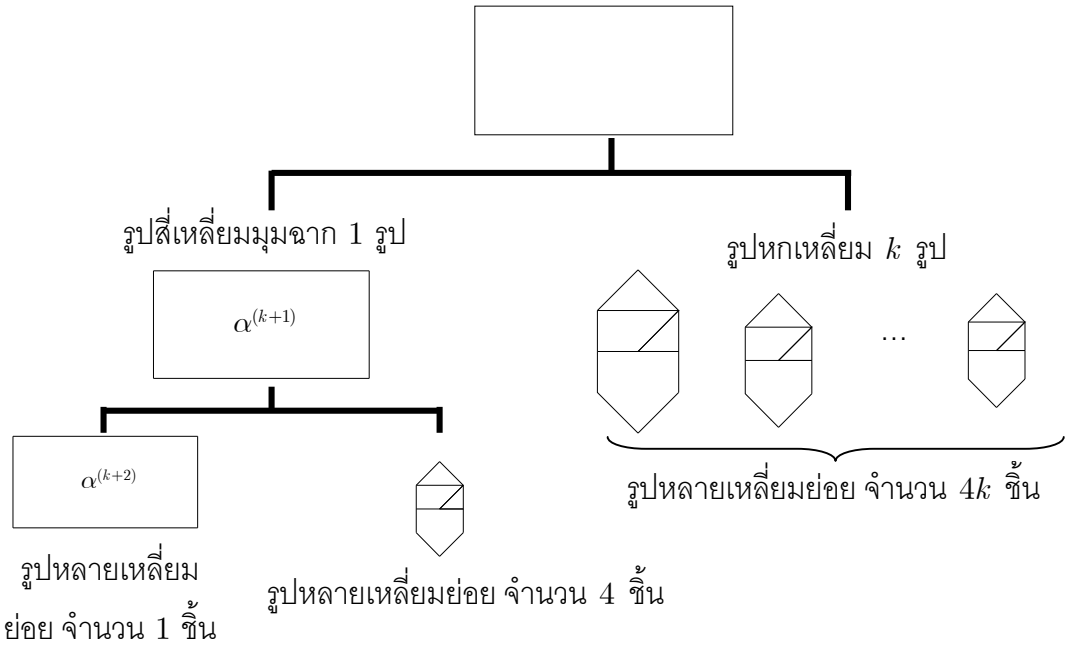
<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 4.1.6 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 4.1.1 ขั้นที่ 1 – 5 ออกมาเป็น 5 ชิ้น ซึ่งมี 1 ชิ้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 4 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปหกเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 4.1.1 ขั้นที่ 1 – 5 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-Hx$ แบบชัดที่ $5=4(1)+1=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 4.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-Hx$ แบบชัดที่ $g(k)=4k+1$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 4.1.7



รูปที่ 4.1.7

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธี 4.1.1 ขั้นที่ 1 – 5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 5 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+2)}$ และรูปหกเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปหกเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 4.1.8



รูปที่ 4.1.8

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-Hx$ โดยที่

$$5+4k=4(k+1)+1=g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 4.1.1 เป็นจริง □

หากพิจารณาความยาวด้านและมุมภายในของรูปหกเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธี 4.1.1 ดังรูปที่ 4.1.6 จะสามารถสรุปเป็นบทแทรก ดังต่อไปนี้

<u>บทแทรกที่ 4.1.1</u> รูปหกเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธีที่ 4.1.1 จะเป็นรูปหกเหลี่ยมปกติก็ต่อเมื่อ $2\sqrt{3}a=b$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูป 4.1.6 จะได้ว่าด้านของรูปหกเหลี่ยมจะเท่ากันทุกด้าน ก็ต่อเมื่อ

$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}=a$ นั่นคือ $2\sqrt{3}a=b$

ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ด้านของรูปหกเหลี่ยมนี้เท่ากันทุกด้าน พิจารณารูปสามเหลี่ยม GCI จะได้ว่า $\tan C\hat{I}G = \frac{GC}{CI} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ดังนั้น $C\hat{I}G = 30^\circ$ และ $I\hat{G}C = 60^\circ$ แสดงว่า $B\hat{G}I = 120^\circ$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุด H ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง IJ ที่จุด H' จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม $IH'H$ และรูปสามเหลี่ยม $HH'J$ เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม GCI ดังนั้นจะได้ว่า $B\hat{G}I = G\hat{I}H = 120^\circ = I\hat{H}F = J\hat{H}I$

นอกจากนี้ $D\hat{E}H + I\hat{J}H = 120^\circ$ และ $E\hat{H}J + I\hat{G}C + H\hat{I}J = 120^\circ$ จึงได้ว่ารูปหกเหลี่ยมจากรูปที่ 4.1.6 เป็นรูปหกเหลี่ยมปกติ

ดังนั้นหากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรกมีอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวเป็น $a : b = 1 : 2\sqrt{3}$ แล้วขั้นตอนวิธี 4.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n) - R - Hx$ แบบชัด ที่ลำดับของรูปหกเหลี่ยมทั้ง n รูปที่คล้ายกันนั้นเป็นรูปหกเหลี่ยมปกติทั้งหมด □

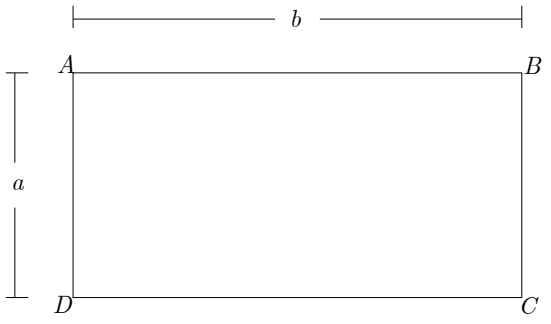
ในหัวข้อต่อไปจะแสดงขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n) - R - Hx$ แบบไม่ชัด

4.2 การแบ่งแบบไม่ชัด

ขั้นตอนวิธี 4.2.1 การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n) - R - Hx$ แบบไม่ชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

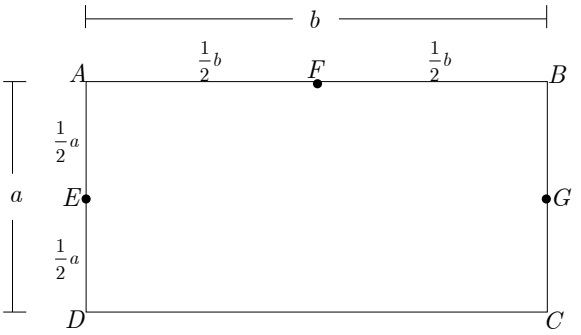
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 4.2.1



รูปที่ 4.2.1

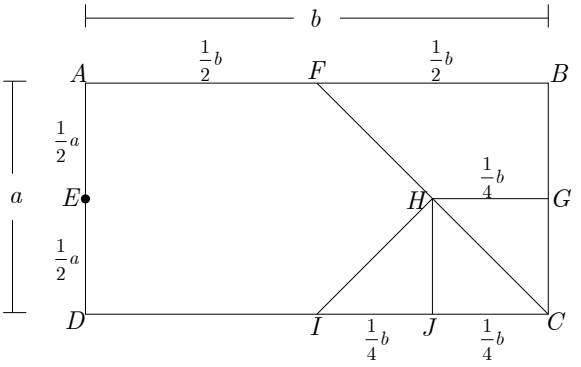
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด $E,\ F$ และ G เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $DA,\ AB$ และ BC ตามลำดับ ดังนั้น $DE = EA = \frac{1}{2}a = BG = GC$ และ $AF = \frac{1}{2}b = FB$



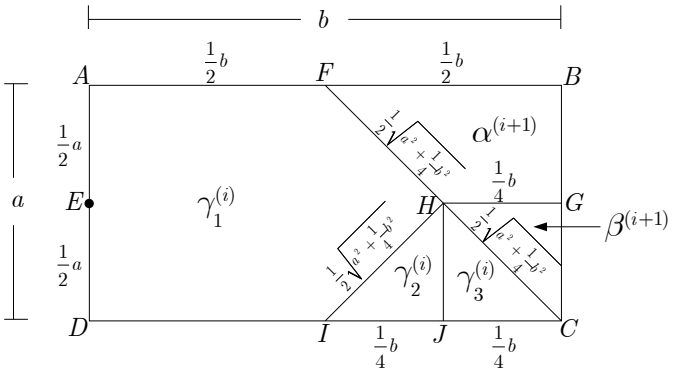
รูปที่ 4.2.2

2. จากจุด F ลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุด C จากจุด G ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง FC ที่จุด H เพราะว่ารูปสามเหลี่ยม FBC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม HGC ดังนั้น $HG = \frac{1}{4}b$ ให้ I เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD จากจุด H ลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุด I ให้ J เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CI และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด H ไปยังจุด J ดังนั้น $CJ = \frac{1}{4}b = JI$



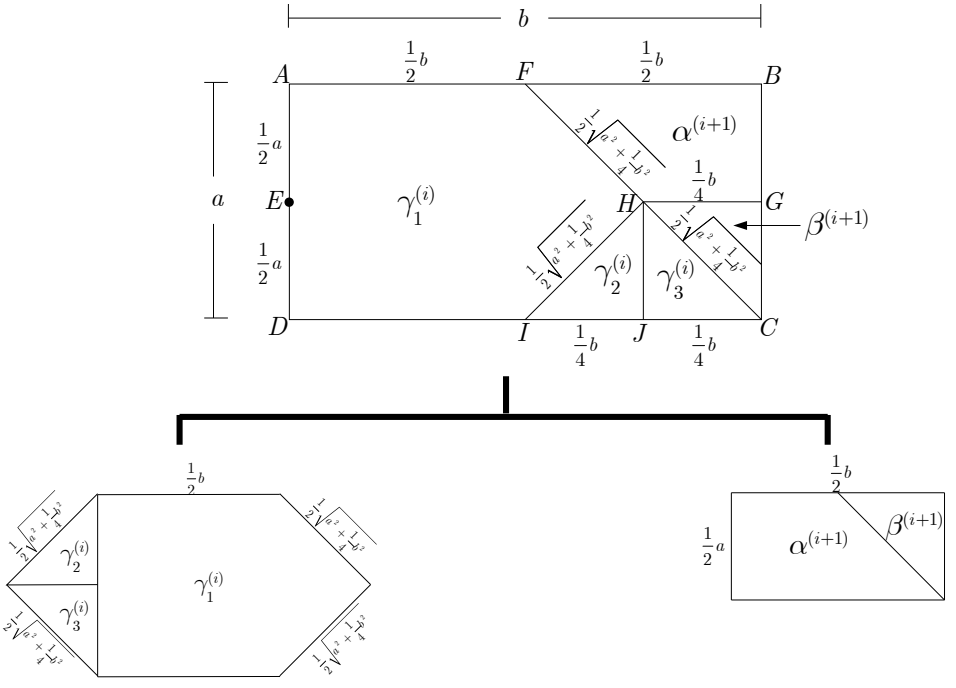
รูปที่ 4.2.3

3. โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $HF = IH = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} = HC$ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $FBGH$ รูปสามเหลี่ยม HGC รูปห้าเหลี่ยม $AFHID$ รูปสามเหลี่ยม HJI และรูปสามเหลี่ยม HCJ ว่า $\alpha^{(i+1)},\ \beta^{(i+1)},\ \gamma_1^{(i)},\ \gamma_2^{(i)}$ และ $\gamma_3^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 4.2.4

4. แยกรูปสี่เหลี่ยม $\alpha^{(i+1)}$ และรูปสามเหลี่ยม $\beta^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\alpha^{(i+1)}$ มาแนบกับรูป $\beta^{(i+1)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง FH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HC และให้จุด F ติดกับจุด C จากนั้นนำรูป $\gamma_2^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง DA และให้จุด H ติดกับจุด A จากนั้นนำรูป $\gamma_3^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ และรูป $\gamma_2^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JH มาแนบกับส่วนของเส้นตรง DE ให้จุด H ติดกับจุด D และให้ส่วนของเส้นตรง CJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง JI และให้จุด C ติดกับจุด I



รูปที่ 4.2.5

ดังนั้นจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และได้รูปหกเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 5 ชิ้น ที่ไม่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$

5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1 โดยมองว่าส่วนของเส้นตรงที่เป็นรอยต่อระหว่าง $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ คือส่วนของเส้นตรง FC ในข้อ 2

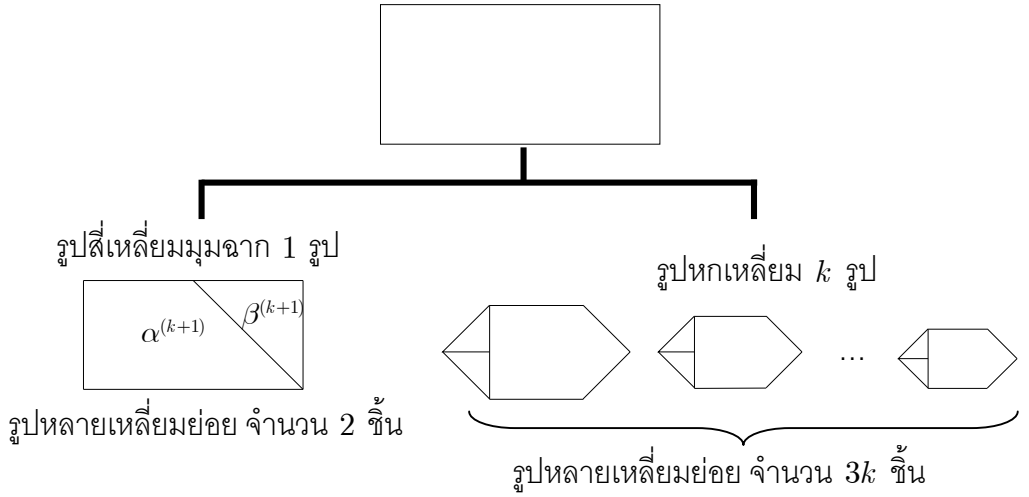
ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 4.2.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ประกอบจากรูป $\alpha^{(n+1)}$ และ $\beta^{(n+1)}$ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปหกเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 2 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.2.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 4.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hx$ แบบไม่ชัดโดย $g(n)=3n+2$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 4.2.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 4.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 5 ชิ้น ซึ่งมี 2 ชิ้นประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 3 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปหกเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 4.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-Hx$ แบบไม่ชัดที่

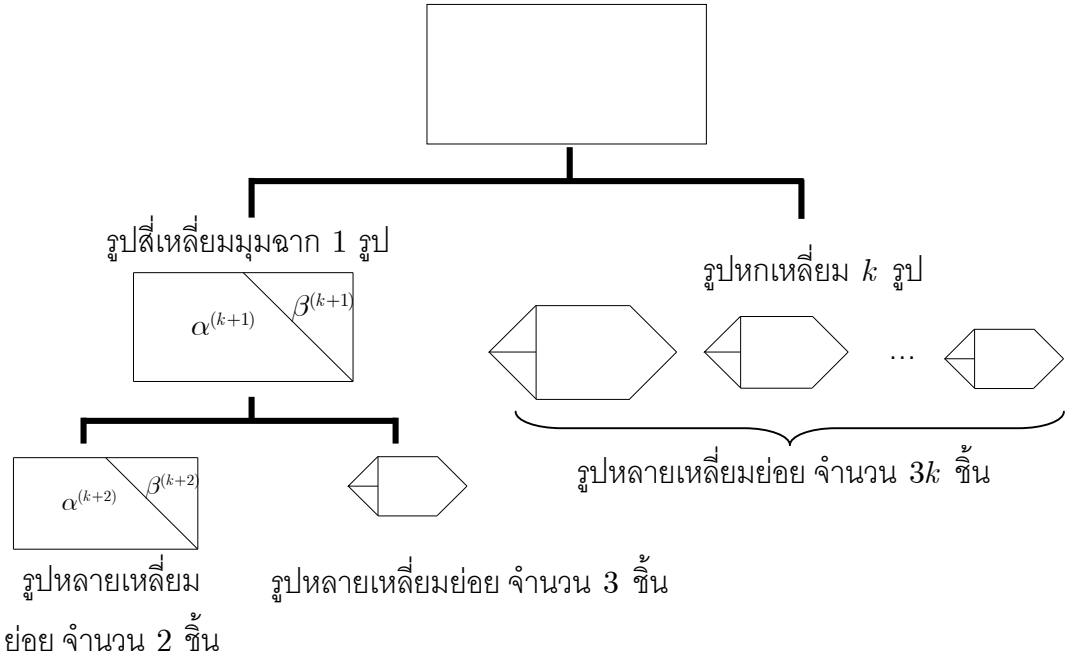
$5=3(1)+2=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 4.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-Hx$ แบบไม่ชัดที่ $g(k)=3k+2$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 4.2.6



รูปที่ 4.2.6

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 4.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+1)}$ และ $\beta^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 5 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+2)}$ กับ $\beta^{(k+2)}$ และประกอบกันเป็นรูปหกเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปหกเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 4.2.7



รูปที่ 4.2.7

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-Hx$ โดยที่

$$5+3k=3(k+1)+2=g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 4.2.1 เป็นจริง □

หากพิจารณาความยาวด้านและมุมภายในของรูปหกเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 โดยขั้นตอนวิธี 4.2.1 ดังรูปที่ 4.2.5 จะสามารถสรุปเป็นบทแทรก ดังต่อไปนี้

<u>บทแทรกที่ 4.2.1</u> รูปหกเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธีที่ 4.2.1 จะเป็นรูปหกเหลี่ยมปกติก็ต่อเมื่อ $2a=\sqrt{3}b$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูป 4.2.5 จะได้ว่าด้านของรูปหกเหลี่ยมจะเท่ากันทุกด้าน ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}b$ นั่นคือ $2a=\sqrt{3}b$

ภายใต้เงื่อนไขที่ทำให้ด้านของรูปหกเหลี่ยมนี้เท่ากันทุกด้าน พิจารณารูปสามเหลี่ยม HJI จะได้ว่า $\tan J\hat{I}H=\frac{HJ}{JI}=\sqrt{3}$ ดังนั้น $J\hat{I}H=60^\circ$ และ $I\hat{H}J=30^\circ$ แสดงว่า $H\hat{I}D=120^\circ$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุด H ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง FB ที่จุด H' จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม $FH'H$ และรูปสามเหลี่ยม CJH เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม HJI ดังนั้นจะได้ว่า $H\hat{I}D=F\hat{H}I=120^\circ=A\hat{F}H$

และจาก $I\hat{H}J+D\hat{A}F=120^\circ, J\hat{H}C+I\hat{D}A=120^\circ$ และ $J\hat{I}H+H\hat{C}J=120^\circ$ ดังนั้นจึงได้ว่ารูปหกเหลี่ยมจากรูปที่ 4.2.5 เป็นรูปหกเหลี่ยมปกติ

จากบทแทรกนี้จึงได้ว่าหากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรกมีอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวเป็น $a:b=\sqrt{3}:2$ แล้วขั้นตอนวิธี 4.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hx$ แบบไม่ชัด ที่ลำดับของรูปหกเหลี่ยมทั้ง n รูปที่คล้ายกันนั้นเป็นรูปหกเหลี่ยมปกติทั้งหมด □

บทที่ 5

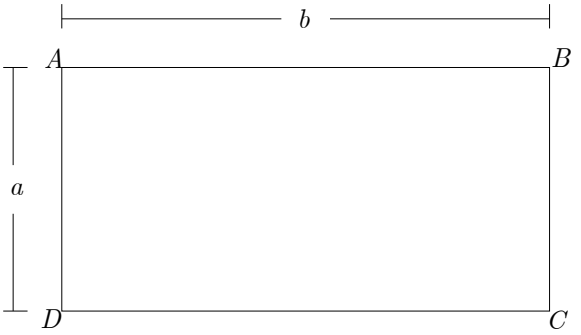
การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยม

5.1 การแบ่งแบบชัด

ขั้นตอนวิธี 5.1.1 การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hp$ แบบชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

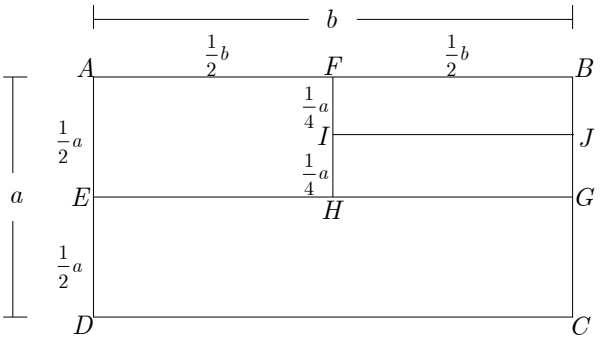
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 5.1.1



รูปที่ 5.1.1

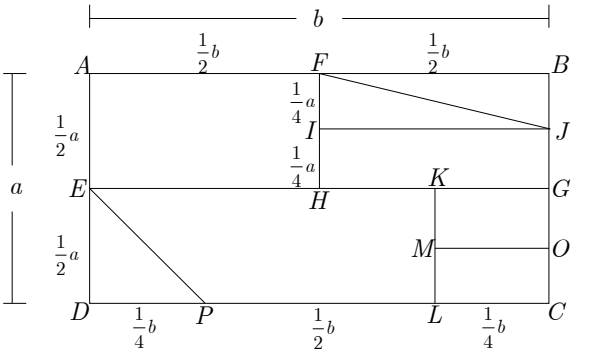
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน DA และ AB ตามลำดับ ดังนั้น $DE = \frac{1}{2}a = EA$ และ $AF = \frac{1}{2}b = FB$ ลากส่วนของเส้นตรงจาก E ให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับด้าน BC ที่จุด G และจากจุด F ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง EG ที่จุด H จากนั้นให้จุด I เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง FH และจากจุด I ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับส่วนของเส้นตรง FB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง BG ที่จุด J ดังนั้น $HI = IF = \frac{1}{4}b = BJ = JG$



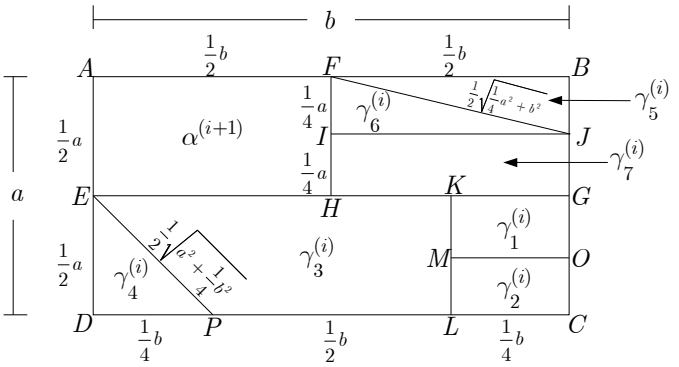
รูปที่ 5.1.2

2. ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ไปยังจุด J จากนั้นให้ K เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง HG และจากจุด K ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับด้าน CD ที่จุด L ดังนั้น $KG = \frac{1}{4}b = CL$ จากนั้นให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง LK และจากจุด M ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง GC ที่จุด O ต่อมาจากจุด E ลากส่วนของเส้นตรงมาตัดกับด้าน CD ที่จุด P โดยที่ $PD = \frac{1}{4}b$ ดังนั้น $LP = \frac{1}{2}b$



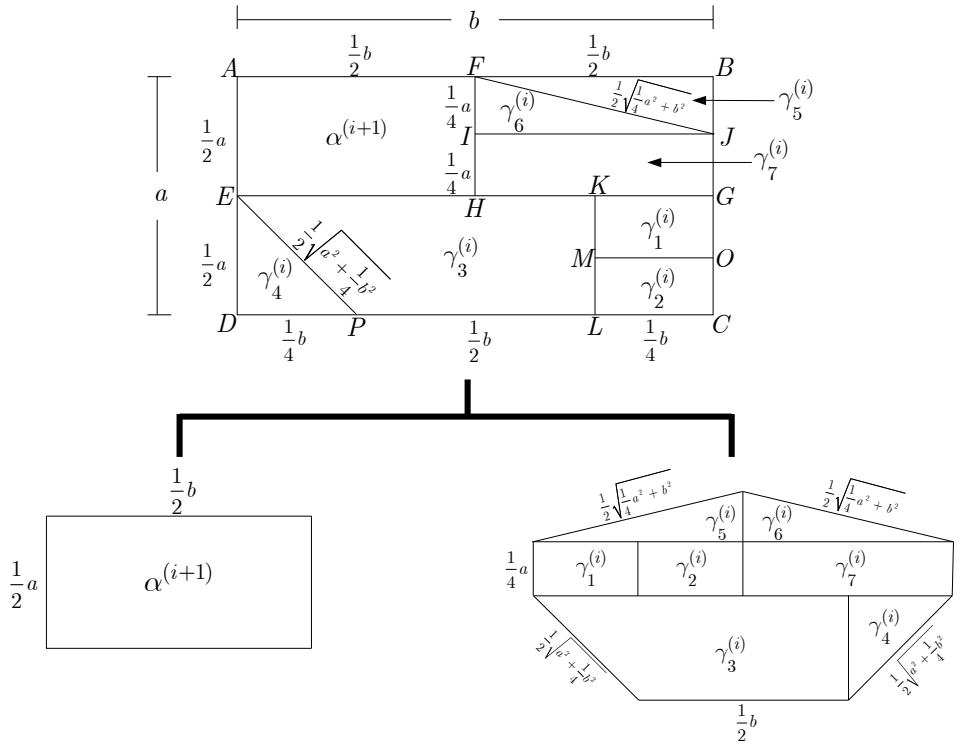
รูปที่ 5.1.3

3. โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $EP = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$ และ $FJ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $AFHE$ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $KGOM$ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $MOCL$ รูปสี่เหลี่ยม $EKLP$ รูปสามเหลี่ยม PDE รูปสามเหลี่ยม FBJ รูปสามเหลี่ยม JIF รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $IJGH$ ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$, $\gamma_3^{(i)}$, $\gamma_4^{(i)}$, $\gamma_5^{(i)}$, $\gamma_6^{(i)}$ และ $\gamma_7^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 5.1.4

4. แยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\gamma_2^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ และรูป $\gamma_7^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง CL มาแนบกับส่วนของเส้นตรง EH ให้จุด C ติดกับจุด H และให้ส่วนของเส้นตรง OC มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HI และให้จุด O ติดกับจุด I จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ และรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง GO มาแนบกับส่วนของเส้นตรง LM ให้จุด G ติดกับจุด M และให้ส่วนของเส้นตรง OM มาแนบกับส่วนของเส้นตรง EH และให้จุด M ติดกับจุด E จากนั้นนำรูป $\gamma_4^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ และรูป $\gamma_7^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง DE มาแนบกับส่วนของเส้นตรง LK ให้จุด E ติดกับจุด L และให้ส่วนของเส้นตรง PD มาแนบกับส่วนของเส้นตรง KG และให้จุด P ติดกับจุด G จากนั้นนำรูป $\gamma_5^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ และรูป $\gamma_6^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง FB มาแนบกับส่วนของเส้นตรง MO ให้จุด B ติดกับจุด O และให้ส่วนของเส้นตรง BJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง IF และให้จุด J ติดกับจุด F



รูปที่ 5.1.5

ดังนั้นจะได้ $\alpha^{(i+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และได้รูปเจ็ดเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 8 ชิ้น

5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1

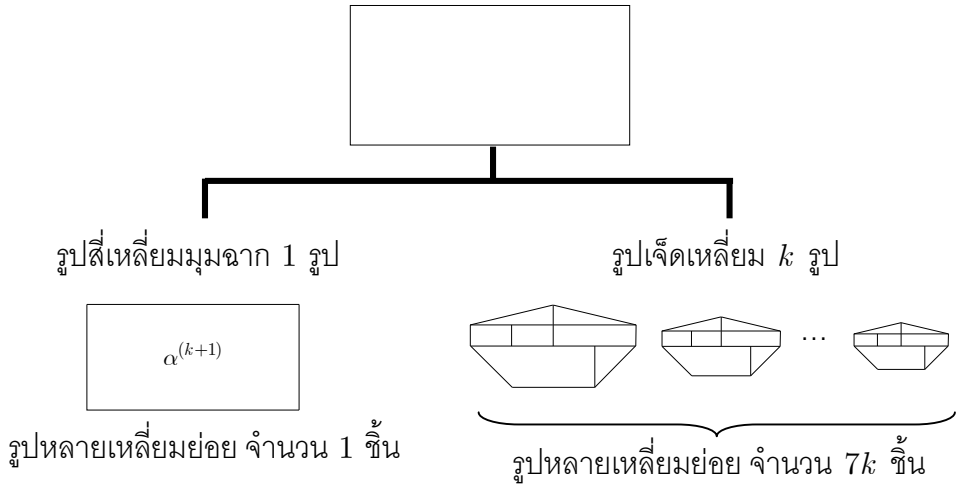
ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 5.1.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้ $\alpha^{(n+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อย 1 รูปที่ไม่ได้ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปเจ็ดเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 7 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.1.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 5.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hp$ แบบชัดโดย $g(n)=7n+1$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 5.1.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 5.1.1 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 8 ชิ้น ซึ่งมี 1 ชิ้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยม

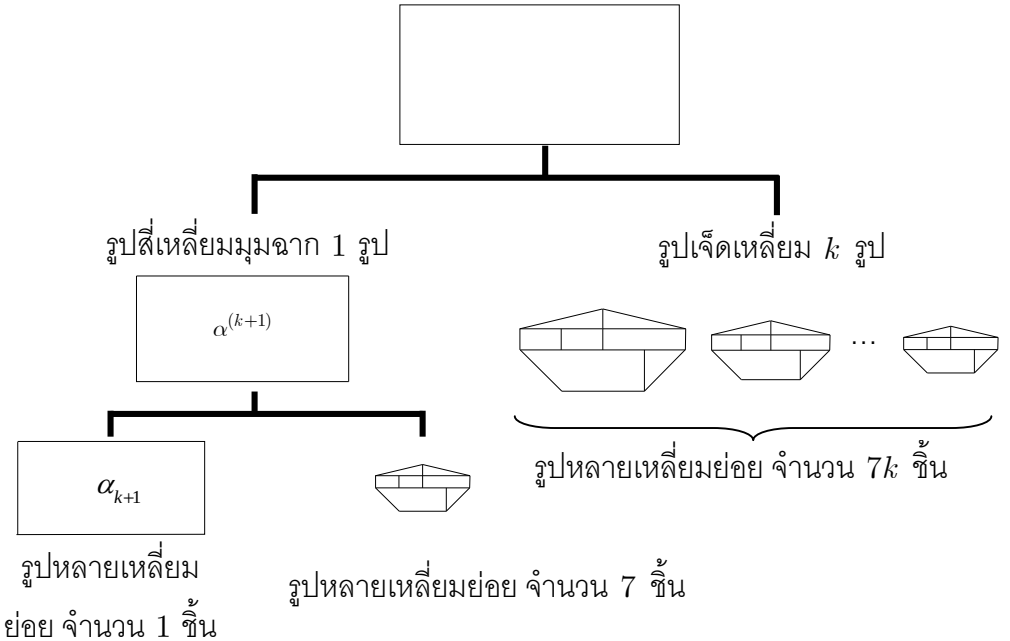
มุมฉากตั้งต้น และอีก 7 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 5.1.1 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-Hp$ แบบชัดที่ $8 = 7(1)+1 = g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 5.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-Hp$ แบบชัดที่ $g(k) = 7k+1$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 5.1.6



รูปที่ 5.1.6

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 5.1.1 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 8 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+2)}$ และประกอบกันเป็นรูปเจ็ดเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปเจ็ดเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 5.1.7



รูปที่ 5.1.7

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-Hp$ โดยที่

$$8+7k=7(k+1)+1=g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 5.1.1 เป็นจริง □

<u>บทแทรกที่ 5.1.1</u> รูปเจ็ดเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธี 5.1.1 ไม่เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมปกติ

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติว่ารูปเจ็ดเหลี่ยมจากรูปที่ 5.1.5 เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมปกติ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}=\frac{1}{4}a$$

แต่ $b\in\mathbb{R}^+$ ดังนั้นจึงได้ว่ารูปเจ็ดเหลี่ยมจากรูปที่ 5.1.5 ไม่เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมปกติ □

<u>บทพิสูจน์</u> เนื่องจาก a และ $b\in\mathbb{R}^+$ ดังนั้น $b^2\neq 0$ นั่นคือ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}\neq\frac{1}{4}a$ ทำให้รูปเจ็ดเหลี่ยมจากรูปที่ 5.1.5 ไม่เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมปกติ □

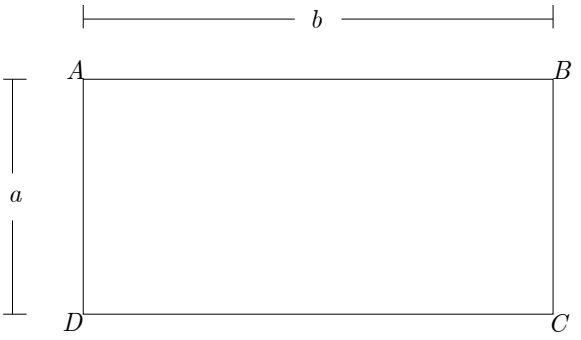
ในหัวข้อต่อไปจะแสดงขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hp$ แบบไม่ชัด

5.2 การแบ่งแบบไม่ชัด

<u>ขั้นตอนวิธี 5.2.1</u> การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hp$ แบบไม่ชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

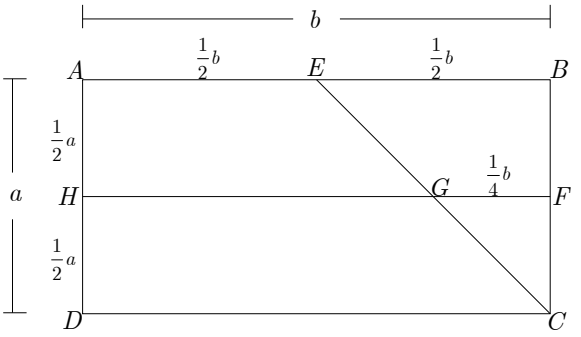
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 5.2.1



รูปที่ 5.2.1

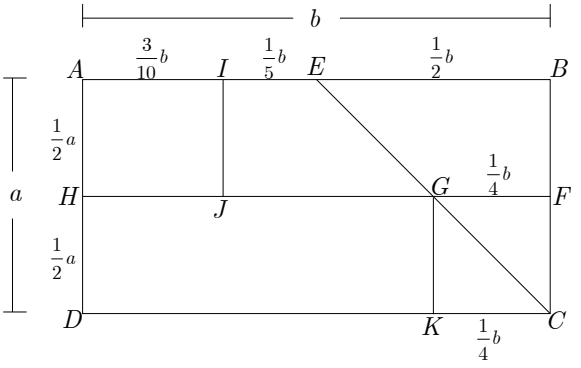
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด $E,\ F$ และ H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $AB,\ BC$ และ DA ตามลำดับ ดังนั้น $DH = HA = \frac{1}{2}a = BF = FC$ และ $AE = \frac{1}{2}b = EB$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน AB ตัดกับด้าน DA ที่จุด H และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E ไปยังจุด C ให้ส่วนของเส้นตรง FH และ EC มาตัดกันที่จุด G เพราะว่ารูปสามเหลี่ยม EBC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม GFC ดังนั้น $GF = \frac{1}{4}b$



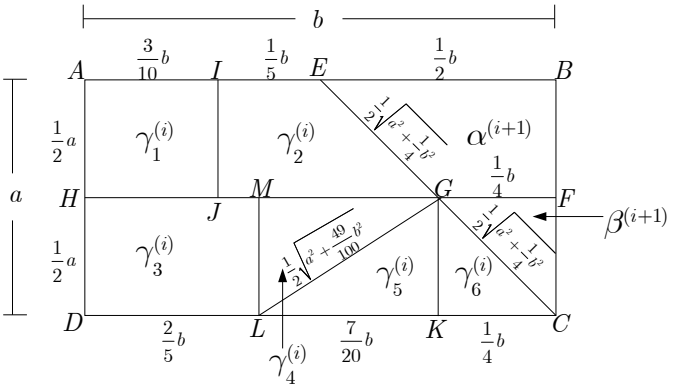
รูปที่ 5.2.2

2. ให้จุด I อยู่บนส่วนของเส้นตรง AE โดยที่ $AI = \frac{3}{10}b$ ดังนั้น $IE = \frac{1}{5}b$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด I ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง HG ที่จุด J และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด G ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับด้าน CD ที่จุด K ดังนั้น $CK = \frac{1}{4}b$



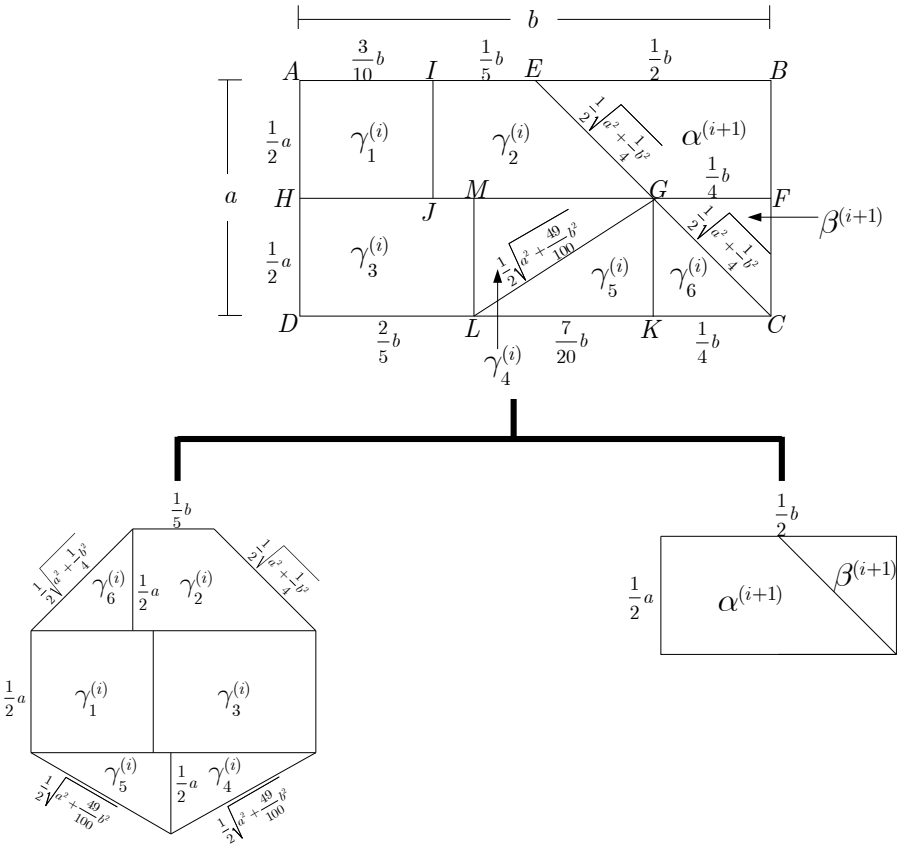
รูปที่ 5.2.3

3. ให้จุด L อยู่บนส่วนของเส้นตรง KD โดยที่ $KL = \frac{7}{20}b$ ดังนั้น $LD = \frac{2}{5}b$ จากนั้นจากจุด L ลากส่วนของเส้นตรงให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง HG ที่จุด M และจากจุด L ลากส่วนของเส้นตรงไปยังจุด G โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $FG = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} = GC$ และ $LG = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{49}{100}b^2}$ เรียกรูปสี่เหลี่ยม $EBFG$ รูปสามเหลี่ยม GFC รูปสี่เหลี่ยม $AIJH$ รูปสี่เหลี่ยม $IEGJ$ รูปสี่เหลี่ยม $HMLD$ รูปสามเหลี่ยม LMG รูปสามเหลี่ยม GKL และรูปสามเหลี่ยม CKG ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\beta^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$, $\gamma_3^{(i)}$, $\gamma_4^{(i)}$, $\gamma_5^{(i)}$ และ $\gamma_6^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 5.2.4

4. แยกรูปสี่เหลี่ยม $\alpha^{(i+1)}$ และรูปสามเหลี่ยม $\beta^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\alpha^{(i+1)}$ มาแนบกับรูป $\beta^{(i+1)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง EG มาแนบกับส่วนของเส้นตรง GC และให้จุด E ติดกับจุด C จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง IJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง DH และให้จุด I ติดกับจุด H จากนั้นนำรูป $\gamma_6^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง CK มาแนบกับส่วนของเส้นตรง AI และให้จุด C ติดกับจุด A จากนั้นนำรูป $\gamma_2^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_6^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JI มาแนบกับส่วนของเส้นตรง KG และให้จุด I ติดกับจุด G จากนั้นนำรูป $\gamma_5^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ และรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง KL มาแนบกับส่วนของเส้นตรง LH และให้จุด L ติดกับจุด H จากนั้นนำรูป $\gamma_4^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ และรูป $\gamma_5^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง MG มาแนบกับส่วนของเส้นตรง LD ให้จุด G ติดกับจุด L และให้ส่วนของเส้นตรง LM มาแนบกับส่วนของเส้นตรง GK และให้จุด M ติดกับจุด K



รูปที่ 5.2.5

ดังนั้นจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และรูปเจ็ดเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 8 ชิ้นที่ไม่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$

5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1 โดยมองว่าส่วนของเส้นตรงที่เป็นรอยต่อระหว่าง $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ คือส่วนของเส้นตรง EC ในข้อ 1

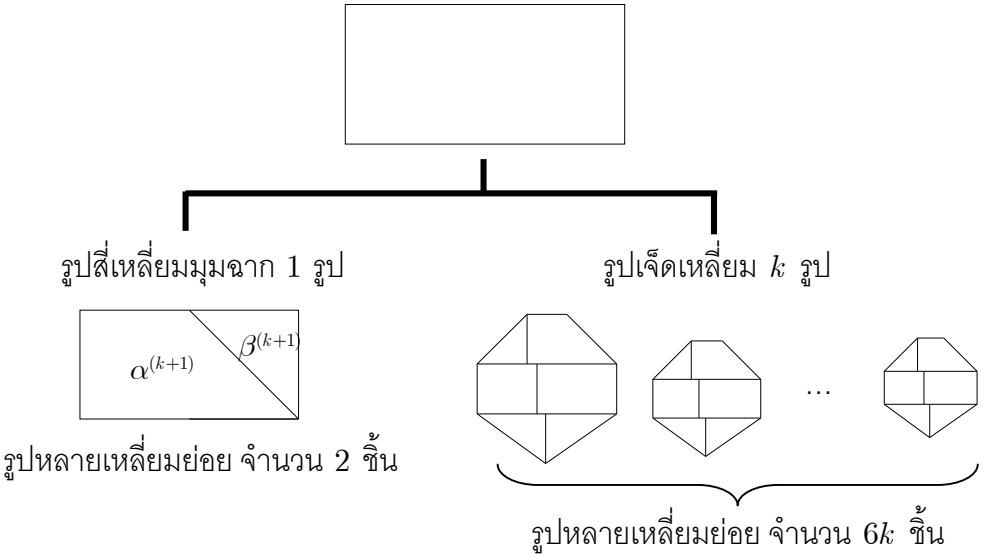
ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 5.2.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ประกอบจากรูป $\alpha^{(n+1)}$ และ $\beta^{(n+1)}$ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปเจ็ดเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 6 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.2.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 5.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hp$ แบบไม่ชัดโดย $g(n)=6n+2$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 5.2.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 5.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 8 ชิ้น ซึ่งมี 2 ชิ้นประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 6 ชิ้นนำมาประกอบกันเป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 5.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-Hp$ แบบไม่ชัดที่

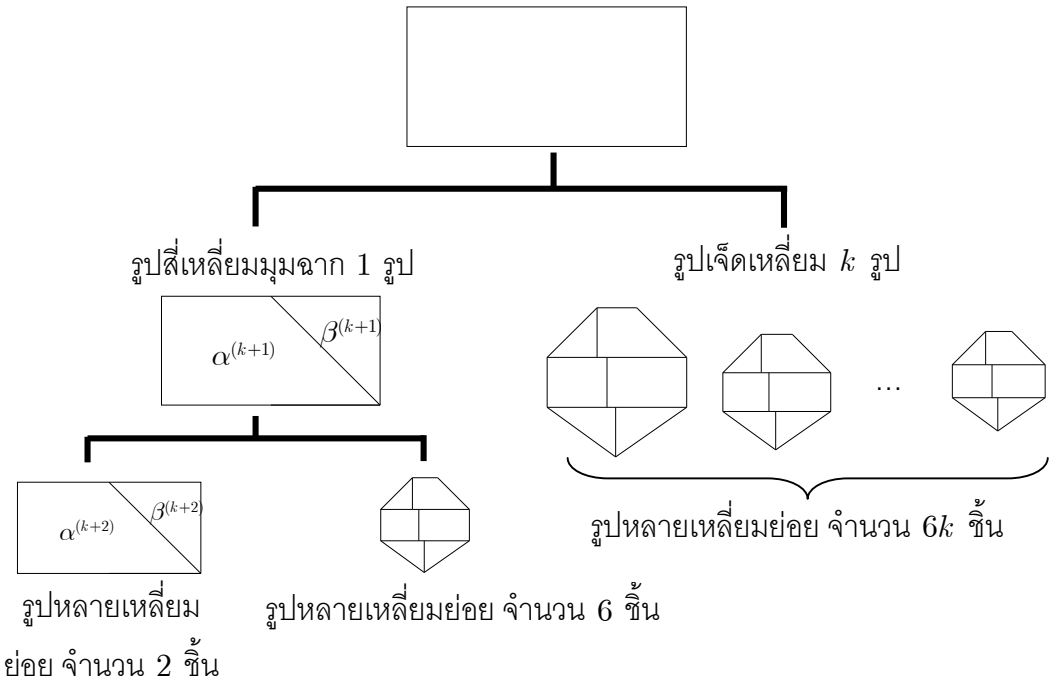
$8=6(1)+2=g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 5.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-Hp$ แบบไม่ชัดที่ $g(k)=6k+2$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 5.2.6



รูปที่ 5.2.6

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 5.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+1)}$ และ $\beta^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 8 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+2)}$ กับ $\beta^{(k+2)}$ และรูปเจ็ดเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปเจ็ดเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 5.2.7



รูปที่ 5.2.7

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-Hp$ โดยที่

$$8+6k = 6(k+1)+2 = g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 5.2.1 เป็นจริง □

<u>บทแทรกที่</u> 5.2.1 รูปเจ็ดเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธี 5.2.1 ไม่เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมปกติ

<u>บทพิสูจน์</u> เนื่องจาก a และ $b \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น $b^2 \neq 0$ นั่นคือ $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2} \neq \frac{1}{2}a$ ทำให้รูปเจ็ดเหลี่ยมจากรูปที่ 5.2.5 ไม่เป็นรูปเจ็ดเหลี่ยมปกติ □

บทที่ 6

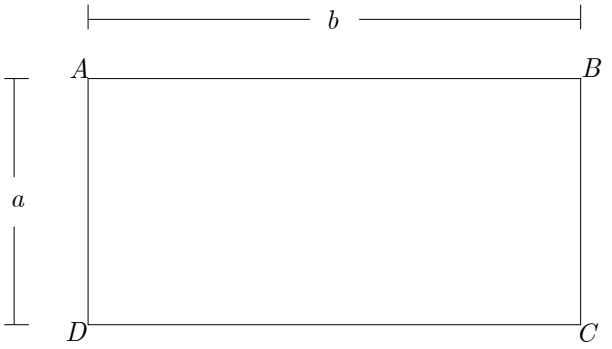
การแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้เป็นรูปแปดเหลี่ยม

6.1 การแบ่งแบบชัด

ขั้นตอนวิธี 6.1.1 การแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-O$ แบบชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

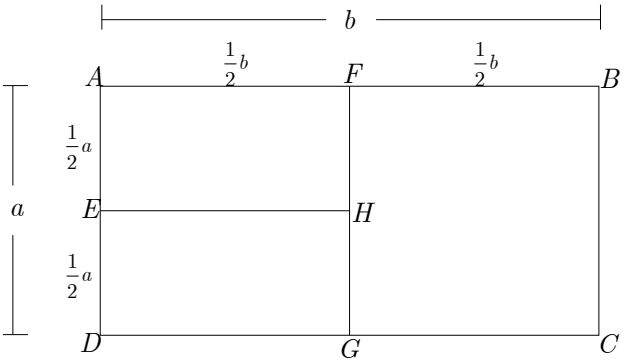
ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 6.1.1



รูปที่ 6.1.1

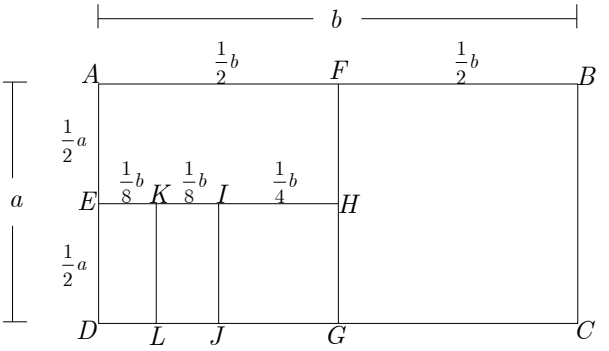
สำหรับ $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

1. ให้จุด E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน DA และ AB ตามลำดับ ดังนั้น $DE = \frac{1}{2}a = EA$ และ $AF = \frac{1}{2}b = FB$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับด้าน CD ที่จุด G และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E ให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง GF ที่จุด H



รูปที่ 6.1.2

2. ให้จุด I เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EH ดังนั้น $EI = \frac{1}{4}b = IH$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด I ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง GD ที่จุด J ให้จุด K เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง EI ดังนั้น $EK = \frac{1}{8}b = KI$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด K ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง JD ที่จุด L

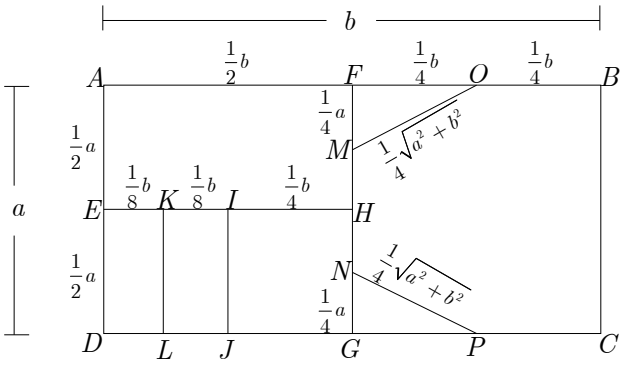


รูปที่ 6.1.3

3. ให้จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง HF ให้จุด N เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง GH ดังนั้น $GN = NH = \frac{1}{4}a = HM = MF$ ให้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง FB ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด M ไปยังจุด O และให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง CG ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด N ไปยังจุด P ดังนั้น

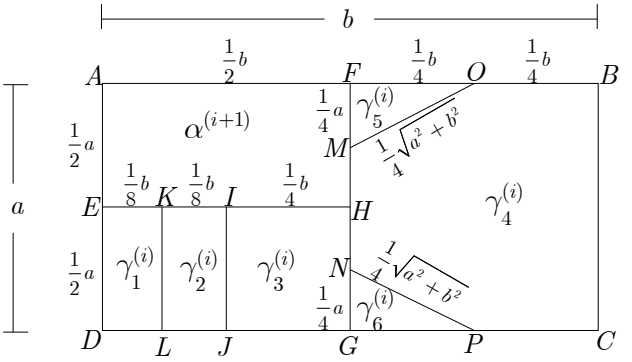
$FO = OB = \frac{1}{4}b = GP = PC$ และโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า

$OM = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2} = NP$



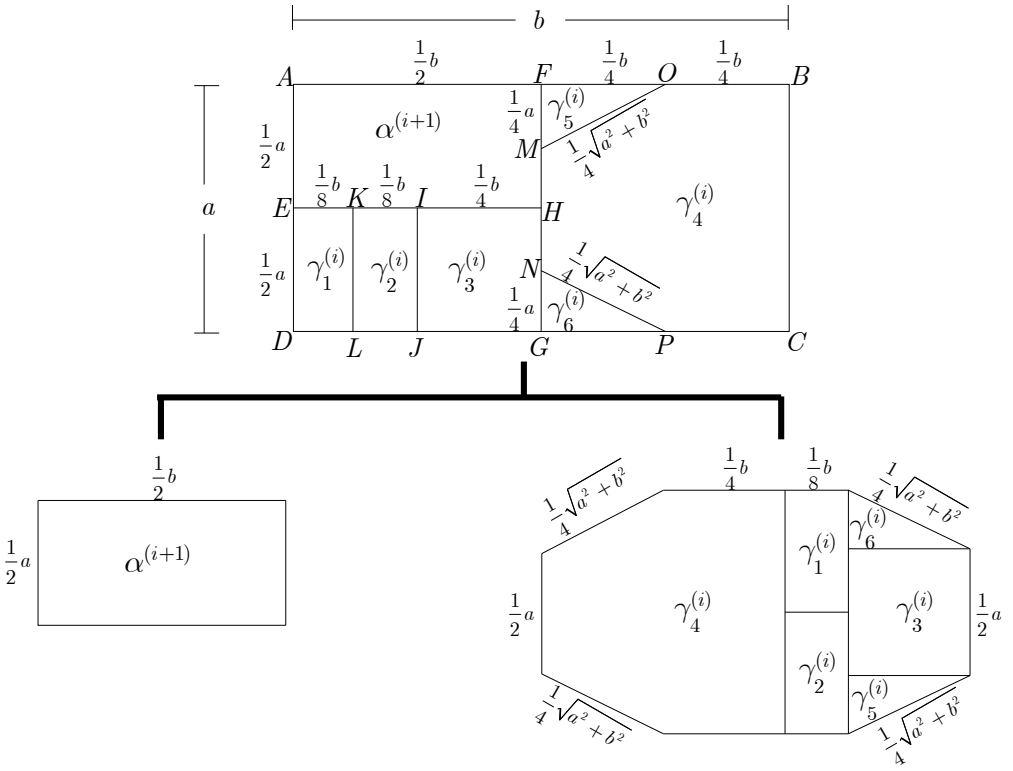
รูปที่ 6.1.4

4. เรียกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $AFHE$ รูปสี่เหลี่ยม $EKLD$ รูปสี่เหลี่ยม $KIJL$ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $IHGJ$ รูปหกเหลี่ยม $MOBCPN$ รูปสามเหลี่ยม MFO และรูปสามเหลี่ยม PGN ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$, $\gamma_3^{(i)}$, $\gamma_4^{(i)}$, $\gamma_5^{(i)}$ และ $\gamma_6^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 6.1.5

5. แยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_4^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง DE มาแนบกับส่วนของเส้นตรง BC และให้จุด E ติดกับจุด B จากนั้นนำรูป $\gamma_2^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ และรูป $\gamma_4^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง KI มาแนบกับส่วนของเส้นตรง LD ให้จุด I ติดกับจุด L และให้ส่วนของเส้นตรง LK มาแนบกับส่วนของเส้นตรง BC และให้จุด L ติดกับจุด C จากนั้นนำรูป $\gamma_5^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง MF มาแนบกับส่วนของเส้นตรง IJ และให้จุด M ติดกับจุด J จากนั้นนำรูป $\gamma_3^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_5^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง GJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง FO และให้จุด G ติดกับจุด O จากนั้นนำรูป $\gamma_6^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ และรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง GN มาแนบกับส่วนของเส้นตรง KL ให้จุด N ติดกับจุด K และให้ส่วนของเส้นตรง GP มาแนบกับส่วนของเส้นตรง IH และให้จุด P ติดกับจุด H



รูปที่ 6.1.6

ดังนั้นจะได้ $\alpha^{(i+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และรูปแปดเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 7 ชิ้น

6. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1

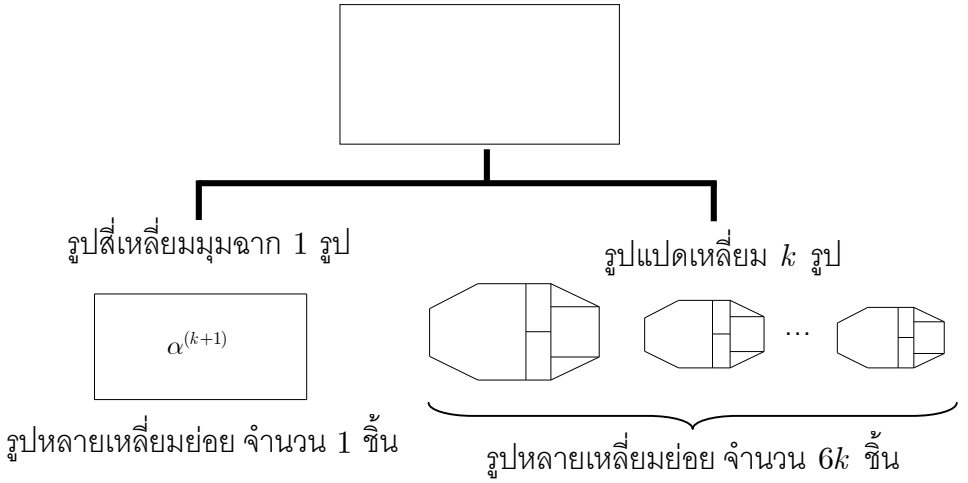
ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 6.1.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้ $\alpha^{(n+1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ไม่ได้ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปแปดเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 6 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่</u> <u>6.1.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 6.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-O$ แบบชัดโดย $g(n)=6n+1$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 6.1.6 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 6.1.1 ขั้นที่ 1 – 5 ออกมาเป็น 7 ชิ้น ซึ่งมี 1 ชิ้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยม

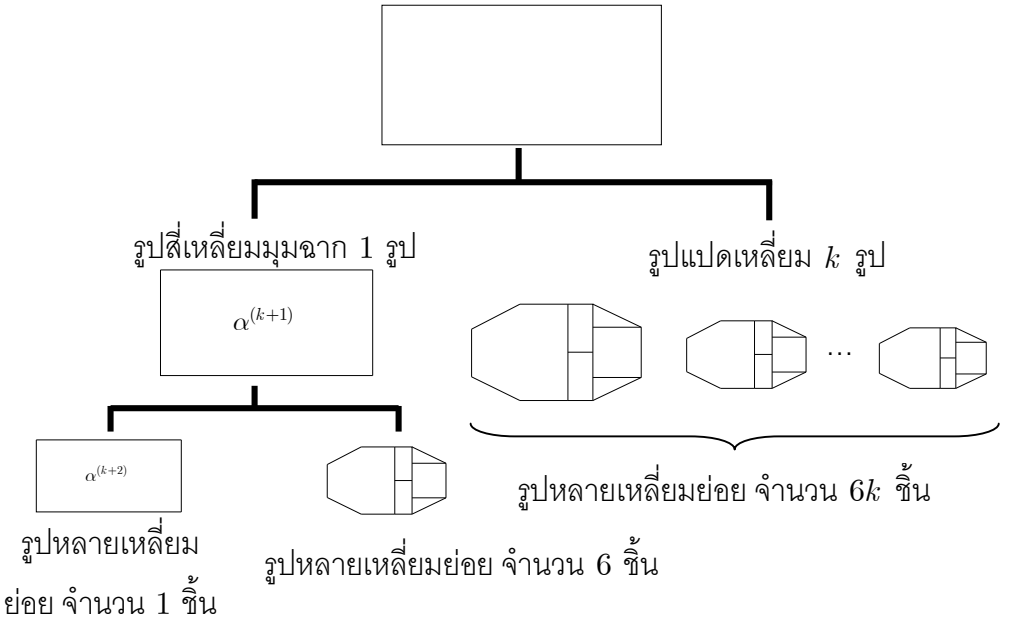
มุมฉากตั้งต้น และอีก 6 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปแปดเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 6.1.1 ขั้นที่ 1 – 5 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-O$ แบบชัดที่ $7 = 6(1)+1 = g(1)$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 6.1.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-O$ แบบชัดที่ $g(k) = 6k+1$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 6.1.7



รูปที่ 6.1.7

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 6.1.1 ขั้นที่ 1 – 5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 7 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(k+2)}$ และประกอบกันเป็นรูปแปดเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปแปดเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 6.1.8



รูปที่ 6.1.8

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-O$ โดยที่

$$7+6k=6(k+1)+1=g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 6.1.1 เป็นจริง □

<u>บทแทรกที่ 6.1.1</u> รูปแปดเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธี 6.1.1 จะไม่เป็นรูปแปดเหลี่ยมปกติ

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติว่ารูปแปดเหลี่ยมจากรูปที่ 6.1.6 เป็นรูปแปดเหลี่ยมปกติ จะได้ว่า

$$\sqrt{3}a=b \text{ และ } 2a=\sqrt{5}b$$

ดังนั้น $a=0$ แต่ $a\in\mathbb{R}^+$ ดังนั้นจึงได้ว่ารูปแปดเหลี่ยมจากรูปที่ 6.1.6 จะไม่เป็นรูปแปดเหลี่ยมปกติ □

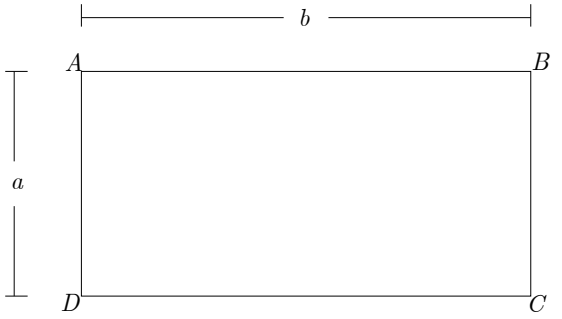
ในหัวข้อต่อไปจะแสดงขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-O$ แบบไม่ชัด

6.2 การแบ่งแบบไม่ชัด

<u>ขั้นตอนวิธี 6.2.1</u> การแบ่งเชิงลำดับออกเป็น $(1+n)-R-O$ แบบไม่ชัด

กำหนด $\alpha^{(1)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $ABCD$ ที่มีความยาวของด้านกว้างและด้านยาวเป็นจำนวนจริงบวก โดยด้าน DA ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว b หน่วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ ที่กำหนดให้ สามารถวาดรูปได้ดังรูปที่ 6.2.1

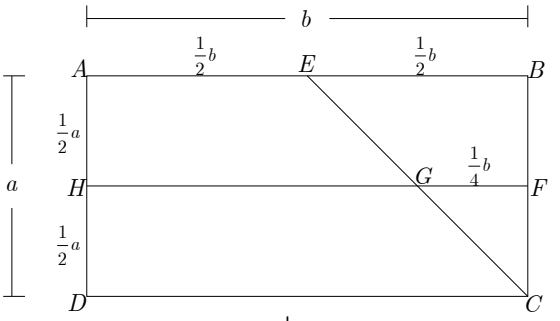


รูปที่ 6.2.1

สำหรับ $i\in\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n\}$ ทำการวนซ้ำโดย

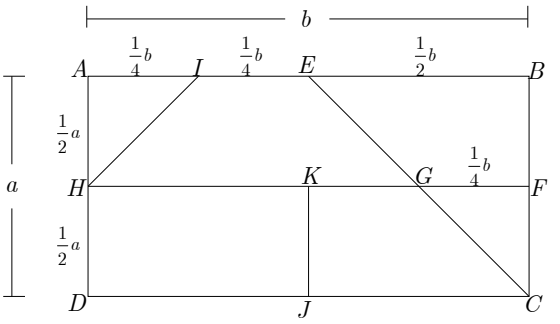
1. ให้จุด $E,\ F$ และ H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $AB,\ BC$ และ DA ตามลำดับ ดังนั้น $DH=HA=\frac{1}{2}a=BF=FC$ และ $AE=\frac{1}{2}b=EB$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด F ให้ขนานกับด้าน AB ตัดกับด้าน DA ที่จุด H และลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E ไปยัง

จุด C ให้ส่วนของเส้นตรง FH และ EC มาตัดกันที่จุด G เพราะว่ารูปสามเหลี่ยม EBC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม GFC ดังนั้น $GF = \frac{1}{4}b$



รูปที่ 6.2.2

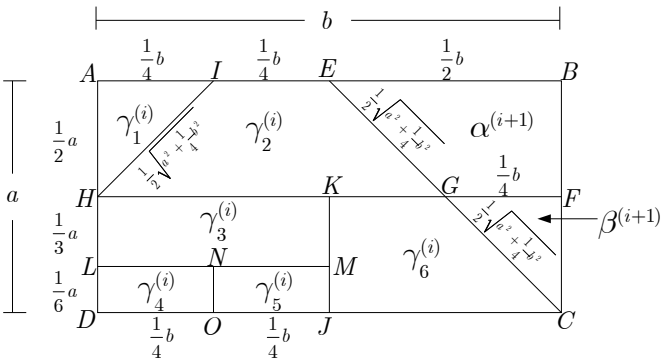
2. ให้จุด I เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AE ดังนั้น $AI = \frac{1}{4}b = IE$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด I ไปยังจุด H ให้จุด J เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด J ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง HG ที่จุด K



รูปที่ 6.2.3

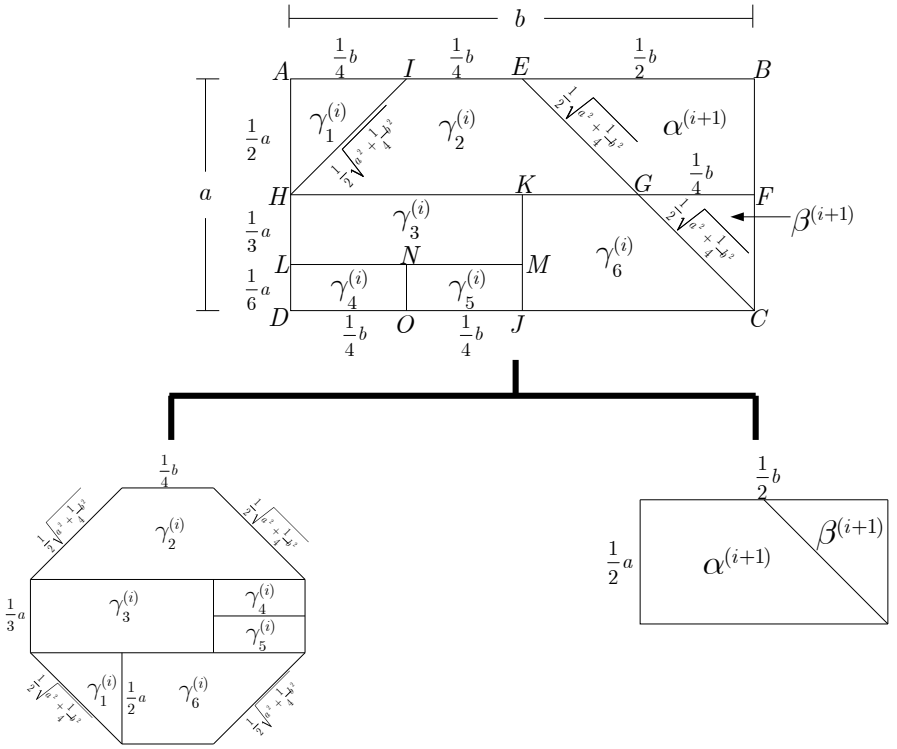
3. ให้จุด L อยู่บนส่วนของเส้นตรง DH โดยที่ $DL = \frac{1}{6}a$ ดังนั้น $LH = \frac{1}{3}a$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด L ให้ขนานกับด้าน AB มาตัดกับส่วนของเส้นตรง KJ ที่จุด M ให้จุด N เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง LM ดังนั้น $LN = \frac{1}{4}b = NM$ ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด N ให้ขนานกับด้าน DA มาตัดกับส่วนของเส้นตรง JD ที่จุด O ดังนั้นโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $IH = EG = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} = GC$ เรียกรูปสี่เหลี่ยม $EBFG$ รูปสามเหลี่ยม GFC รูปสามเหลี่ยม HAI รูปสี่เหลี่ยม $IEGH$ รูปสี่เหลี่ยม $HKML$ รูปสี่เหลี่ยม

$LNOD$ รูปสี่เหลี่ยม $NMJO$ และรูปสี่เหลี่ยม $KGCJ$ ว่า $\alpha^{(i+1)}$, $\beta^{(i+1)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$, $\gamma_3^{(i)}$, $\gamma_4^{(i)}$, $\gamma_5^{(i)}$ และ $\gamma_6^{(i)}$ ตามลำดับ



รูปที่ 6.2.4

4. แยกรูปสี่เหลี่ยม $\alpha^{(i+1)}$ และรูปสามเหลี่ยม $\beta^{(i+1)}$ ออกจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ จากนั้นนำรูป $\alpha^{(i+1)}$ มาแนบกับรูป $\beta^{(i+1)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง EG มาแนบกับส่วนของเส้นตรง GC และให้จุด E ติดกับจุด C จากนั้นนำรูป $\gamma_1^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง AI มาแนบกับส่วนของเส้นตรง LM และให้จุด I ติดกับจุด L จากนั้นนำรูป $\gamma_4^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_2^{(i)}$ และรูป $\gamma_3^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง LN มาแนบกับส่วนของเส้นตรง GH ให้จุด N ติดกับจุด G และให้ส่วนของเส้นตรง DL มาแนบกับส่วนของเส้นตรง KM และให้จุด L ติดกับจุด K จากนั้นนำรูป $\gamma_5^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_3^{(i)}$ และรูป $\gamma_4^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง ON มาแนบกับส่วนของเส้นตรง KM ให้จุด O ติดกับจุด M และให้ส่วนของเส้นตรง NM มาแนบกับส่วนของเส้นตรง OD และให้จุด N ติดกับจุด D จากนั้นนำรูป $\gamma_6^{(i)}$ มาแนบกับรูป $\gamma_1^{(i)}$ และรูป $\gamma_5^{(i)}$ โดยให้ส่วนของเส้นตรง JK มาแนบกับส่วนของเส้นตรง HA ให้จุด J ติดกับจุด A และให้ส่วนของเส้นตรง CJ มาแนบกับส่วนของเส้นตรง JL และให้จุด C ติดกับจุด J



รูปที่ 6.2.5

ดังนั้นจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบได้นี้คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ และได้รูปแปดเหลี่ยม 1 รูป โดยใช้การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย จำนวน 8 ชิ้น

5. เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นที่ 1 โดยมองว่าส่วนของเส้นตรงที่เป็นรอยต่อระหว่าง $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ คือส่วนของเส้นตรง EC ในข้อ 1

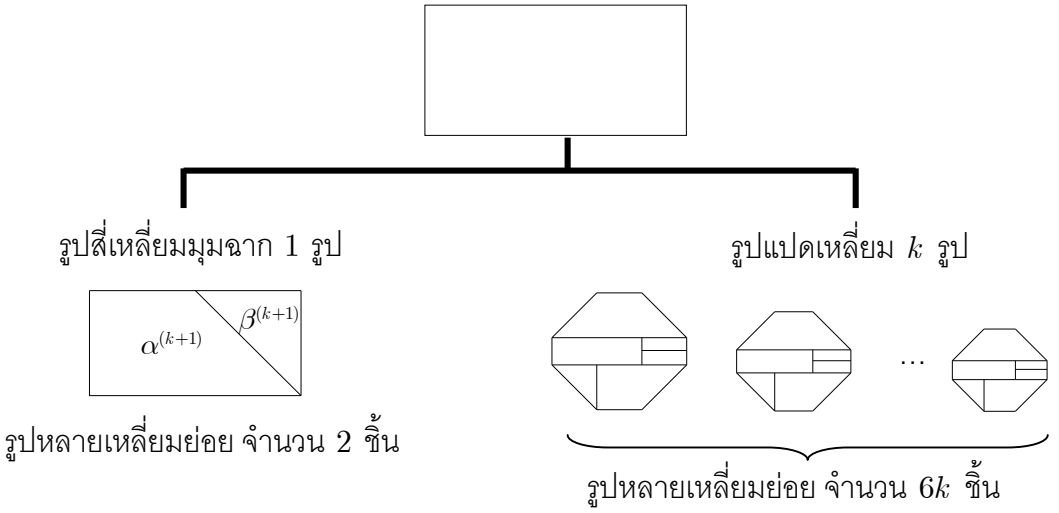
ด้วยวิธีการแบ่งแบบเดิมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(i+1)}$ และ $\beta^{(i+1)}$ จะมีอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(i)}$ ดังนั้นขั้นตอนวิธี 6.2.1 ที่ทำวนซ้ำจำนวน n ครั้งทำให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปที่ประกอบจากรูป $\alpha^{(n+1)}$ และ $\beta^{(n+1)}$ และคล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น $\alpha^{(1)}$ และลำดับของรูปแปดเหลี่ยมที่ประกอบจากรูปหลายเหลี่ยมย่อย 6 ชิ้น จำนวน n รูปที่คล้ายกันทั้งหมด □

<u>ทฤษฎีบทที่ 6.2.1</u> สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ขั้นตอนวิธี 6.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-O$ แบบไม่ชัดโดย $g(n)=6n+2$

<u>บทพิสูจน์</u> จากรูปที่ 6.2.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\alpha^{(1)}$ สามารถแบ่งเชิงลำดับด้วยขั้นตอนวิธีที่ 6.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 ออกมาเป็น 8 ชิ้น ซึ่งมี 2 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้น และอีก 6 ชิ้นนำมาประกอบเป็นรูปแปดเหลี่ยมจำนวน 1 รูป ดังนั้นขั้นตอนวิธี 6.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+1)-R-O$ แบบไม่ชัดที่

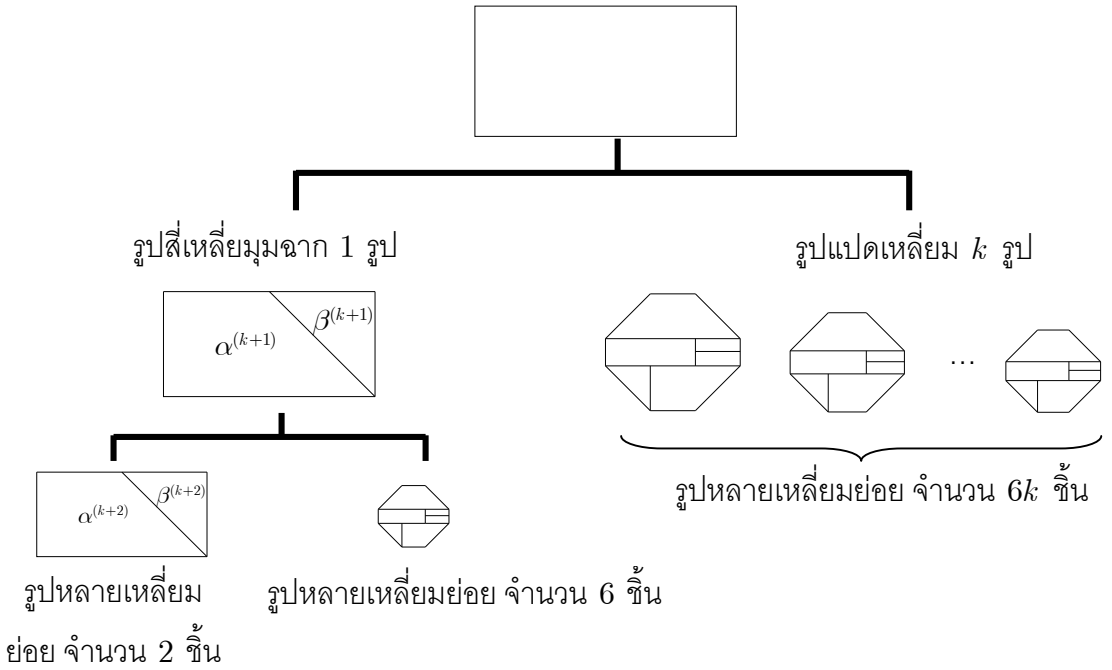
$$8 = 6(1) + 2 = g(1)$$

ให้ k เป็นจำนวนนับที่ทำให้ขั้นตอนวิธี 6.2.1 เป็นการแบ่งเชิงลำดับ $(1+k)-R-O$ แบบไม่ชัดที่ $g(k) = 6k + 2$ ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 6.2.6



รูปที่ 6.2.6

เมื่อดำเนินตามขั้นตอนวิธีที่ 6.2.1 ขั้นที่ 1 – 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+1)}$ และ $\beta^{(k+1)}$ สามารถแบ่งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ได้อีก 8 ชิ้น แล้วแยกออกมาเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วย $\alpha^{(k+2)}$ กับ $\beta^{(k+2)}$ และชิ้นที่เหลือประกอบกันเป็นรูปแปดเหลี่ยม 1 รูปที่คล้ายกับรูปแปดเหลี่ยม k รูปที่ได้มาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 6.2.7



รูปที่ 6.2.7

จึงได้การแบ่งเชิงลำดับ $1+(k+1)-R-O$ โดยที่

$$8+6k = 6(k+1)+1 = g(k+1)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทที่ 6.2.1 เป็นจริง □

<u>บทแทรกที่ 6.2.1</u> รูปแปดเหลี่ยมที่ได้ในการแบ่งครั้งที่ 1 ของขั้นตอนวิธี 6.2.1 ไม่เป็นรูปแปดเหลี่ยมปกติ

<u>บทพิสูจน์</u> เนื่องจาก a และ $b \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น $\frac{5}{9}a^2+\frac{1}{4}b^2 \neq 0$ นั่นคือ $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2} \neq \frac{1}{3}a$ ทำให้รูปแปดเหลี่ยมจากรูปที่ 6.2.5 ไม่เป็นรูปแปดเหลี่ยมปกติ □

บทที่ 7

ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

7.1 ข้อสรุป

7.1.1 งานวิจัยนี้ให้ขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งแบบชัดและแบบไม่ชัดออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย เพื่อประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป และรูป k เหลี่ยม n รูป ที่คล้ายกันทั้งหมดเมื่อ $k = \{3, 5, 6, 7, 8\}$

7.1.2 หาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปหลายเหลี่ยมย่อย $g(n)$ กับจำนวนรูป k เหลี่ยม หลังจากทำการแบ่งเชิงลำดับไป n ครั้ง

7.1.3 เมื่อกำหนดเงื่อนไขบางประการให้กับความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่ามีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบชัดที่ได้ผลเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหนึ่งรูปที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรก และลำดับของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า n รูป และมีการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-Hx$ ทั้งแบบชัดและแบบไม่ชัดที่ได้ผลเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหนึ่งรูปที่คล้ายกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปแรก และลำดับของรูปหกเหลี่ยมปกติ n รูป

7.2 ข้อเสนอแนะ

7.2.1 แม้ว่าขั้นตอนวิธีการแบ่งเชิงลำดับแบบใหม่ที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นเพียงวิธีหนึ่งในการแบ่งเชิงลำดับเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ และผู้วิจัยได้พยายามหาขั้นตอนวิธีที่ทำให้ $g(n)$ ซึ่งเป็นจำนวนชิ้นของรูปหลายเหลี่ยมย่อยที่แบ่งออกมาจากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตั้งต้นในขั้นตอนวิธีต่าง ๆ นั้น เป็นค่า $g(n)$ ที่น้อยที่สุดแต่ยังไม่ได้มีการพิสูจน์ยืนยันว่าเป็นเช่นนั้นจริง ผู้วิจัยจึงเสนอว่าควรมีการวิจัยและพิสูจน์เพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อคาดการณ์ดังกล่าว

7.2.2 สำหรับขั้นตอนวิธีในการแบ่งเชิงลำดับ $(1+n)-R-T$ แบบไม่ชัด $(1+n)-R-P$ ทั้งแบบชัดและไม่ชัด $(1+n)-R-Hp$ ทั้งแบบชัดและไม่ชัด และ $(1+n)-R-O$ ทั้งแบบชัดและไม่ชัดที่ได้นำเสนอไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไม่สามารถให้ผลเป็นลำดับของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปห้าเหลี่ยมปกติ รูปเจ็ดเหลี่ยมปกติ และรูปแปดเหลี่ยมปกติได้ ผู้วิจัยจึงเสนอว่าน่าจะมีการหาขั้นตอนวิธีในการแบ่งเชิงลำดับเพื่อให้ผลที่เป็นลำดับของรูปหลายเหลี่ยมเหล่านี้เป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติทั้งหมดได้

7.2.3 ในกรณีที่ $k = 4$ การแบ่งเชิงลำดับที่ได้ปรับและขยายฐานคิดจาก Akiyama และ Nakamura [1] เหมือนที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะมีลักษณะเฉพาะบางอย่างที่น่าสนใจซึ่งผู้วิจัยจะได้ศึกษาเพิ่มเติมต่อไป

รายการอ้างอิง

[1] Akiyama, J., Nakamura, G.: An efficient dissection for a sequentially n-divisible square, Proceeding of the Discrete and Computational Geometry Workshop held in Tokyo, Japan, 1997. Tokai University, Tokyo, 1997.

[2] Fourrey, E.: Curiosités Géométriques, Vuibert et Nony, Paris,1907.

[3] Frederickson, G. N., Dissections: Plane & Fancy, Cambridge University Press, 1997.

[4] Gardner, M.: The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, Simon and Schuster, New York, 1961.

[5] Kraitchik, M.: Mathematical Recreations, Northon, New York, 1942.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ นายเอกสิทธิ์ สงวนหล่อสิทธิ์ เกิดวันที่ 25 ธันวาคม 2527 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีครุศาสตรบัณฑิต (มัธยมศึกษา) คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2551

ในระหว่างการจัดทำวิทยานิพนธ์ ได้มีการนำเสนอผลงานทางวิชาการในงานการประชุมวิชาการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และประยุกต์ประจำปี 2554 (Annual Pure and Applied Mathematics Conference 2011) ระหว่างวันที่ 19-20 พฤษภาคม 2554 ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย