บทที่ 3

ทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้าง

3.1 <u>บทนำ</u>

การวิเคราะห์โครงสร้างโดยทั่วไปอาศัยทฤษฎีอีลาสติกเป็นพื้นฐานสำคัญ ทฤษฎีนี้สามารถใช้ศึกษาการตอบสนอง (response) ของโครงสร้างอีลาสติกได้อย่างถูกต้อง แต่ถ้าวัสดุมีคุณสมบัติที่แปรเปลี่ยนตามเวลา เช่นมีการคืบ การไหลพลาสติก ฯลฯ ทฤษฎีอีลาสติกก็ไม่อาจนำมาใช้ทำนายพฤติกรรมในระยะเวลานานได้ ถึงกระนั้นก็ตามมักนิยมใช้ทฤษฎีนี้ในการออกแบบเบื้องต้น เพื่อหาขนาดรูปร่างหน้าตัดและเหล็กเสริม จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ผลในระยะยาวนานต่อไป

การวิจัยนี้สมมุติว่าคอนกรีตเป็นวัสดุวิสโคอีลาสติกเชิงเส้นตรง และทำการวิเคราะห์โดยอาศัยการแปลงลาปลาซ (Laplace transformation) และหลักการสมนัย (correspondence principle) ซึ่งจะกล่าวต่อไป

3.2 <u>การวิเคราะห์โครงสร้างโดยทฤษฎีอีลาสติก</u>

การวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีอีลาสติกในการวิจัยนี้ มีสมมุติฐานสำคัญ ๆ ดังต่อไปนี้

1. วัสดุซึ่งอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนดอันหนึ่ง ถือว่าเป็นวัสดุเนื้อเดียว (homogeneous material)

2. วัสดุซึ่งอยู่ภายในขอบเขตที่กำหนดอันหนึ่ง ถือว่ามีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic property) ภายใต้หน่วยแรงหรืออุณหภูมิที่เปลี่ยนไป

3. หน่วยแรงและความเครียดของวัสดุมีความสัมพันธ์อีลาสติกเชิงเส้นตรง

4. การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (deformation) มีขนาดเล็กมาก

5. คอนกรีตยึดเกาะเหล็กเสริมโดยไม่มีการลื่นไถล

พิจารณาวัตถุอันหนึ่งใน 3 มิติ (รูปที่ 3.1) ซึ่งอยู่ในสภาพสมดุลย์ เนื่องจากการกระทำของแรงภายนอก ทำให้เกิดแรงภายในและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างขึ้น

พิจารณาสภาวะสมดุลย์ของแรงภายนอกและแรงภายในที่จุดใด ๆ P ภายในวัตถุ (รูปที่ ๓.2) ภายใต้พิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) จะได้สมการสมดุลย์คือ

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad (๓.1)$$

หรือ

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \qquad (๓.1ก)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \qquad (๓.1ข)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \qquad (๓.1ค)$$

โดยที่

x_1, x_2, x_3 = พิกัดคาร์ทีเซียน ๓ มิติ (three-dimensional Cartesian coordinates)

σ_{ij} = ส่วนประกอบของหน่วยแรงที่จุดใด ๆ

f_i = แรงที่เกิดบนสสารวัตถุ (body force) ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในแนวแกน i

เมื่อวัตถุเปลี่ยนตำแหน่ง (displace) รูปร่างของวัตถุนั้นอาจเปลี่ยนไป การเปลี่ยนรูปร่างนี้ทำให้เกิดความเครียดขึ้นภายใน ซึ่งมีความสัมพันธ์กับระยะเปลี่ยนตำแหน่งตามสมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (๓.2)$$

หรือ

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad (๓.2ก)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad (๓.2ข)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad (๓.2ค)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (3.2ง)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \quad (3.2จ)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \quad (3.2ฉ)$$

โดยที่

u_i = การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดใด ๆ ในแนวแกน i

ε_{ij} = ส่วนประกอบของความเครียดซึ่งสอดคล้องกับส่วนประกอบของหน่วยแรงที่จุดใด ๆ

สมการทั้งหมดที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่าไม่ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติใด ๆ ของวัตถุเลย แต่คุณสมบัติของวัสดุจะกำหนดลักษณะการตอบสนองของโครงสร้าง ซึ่งบรรยายได้ด้วยกฎแห่งวัสดุ (constitutive law) สำหรับวัสดุอีลาสติกที่เป็นเนื้อเดียวกันและมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง กฎแห่งวัสดุเขียนได้เป็นดังนี้

$$\varepsilon_{ij} - \alpha\delta_{ij}\Delta T = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right] \quad (3.3)$$

หรือ

$$\varepsilon_{11} - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] \quad (3.3ก)$$

$$\varepsilon_{22} - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})\right] \quad (3.3ข)$$

$$\varepsilon_{33} - \alpha\Delta T = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right] \quad (3.3ค)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \quad (3.3ง)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \quad (3.3จ)$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31} \quad (3.3ฉ)$$

โดยที่ E = โมดูลัสยืดหยุ่น

ν = อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio)

α = สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน

ΔT = อุณหภูมิที่เปลี่ยนไป

δ_{ij} = ครอนเนคเคอร์เดลตา (Kronecker delta)

$$= \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i = j \\ 0 & \text{ถ้า } i \neq j \end{cases}$$

นอกเหนือจากสมการพื้นฐานดังกล่าวข้างต้นแล้ว ยังต้องพิจารณาสภาพขอบเขต (boundary condition) ซึ่งเป็นตัวกำหนดคำตอบเฉพาะในแต่ละปัญหา สภาพขอบเขตแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่ 1 ซึ่งมีการกำหนดหน่วยแรงกระทำภายนอก $f_i^{\Gamma_1}$ บนพื้นผิว Γ_1 ดังนี้

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = f_i^{\Gamma_1} \qquad (3.4)$$

โดยที่ n_j = ส่วนประกอบของเวคเตอร์ขนาด 1 หน่วย ซึ่งตั้งฉากกับผิวขอบเขต Γ_1

และส่วนที่ 2 ซึ่งมีการกำหนดการเปลี่ยนตำแหน่ง u_i บนพื้นผิว Γ_2 คือ

$$u_i(\underset{\sim}{x}) = u_i^{\Gamma_2} \qquad (3.5)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$ = พิกัดคาร์ทีเซียนของจุดใดๆบนพื้นผิว Γ_2

การหาคำตอบแบบสูตร (closed form solution) จากสมการเหล่านี้โดยตรงทำได้ค่อนข้างยาก ในการวิจัยนี้จึงอาศัยวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ เพื่อหาคำตอบโดยประมาณซึ่งมีหลักการย่อ ๆ คือ

1. แบ่งโครงสร้างจำลองเป็นชิ้นส่วนย่อย เชื่อมต่อกันที่จุดข้อ (nodes)

2. เขียนการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดใด ๆ เป็นฟังก์ชันของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดข้อ โดยสมมุติฟังก์ชันการเปลี่ยนตำแหน่งภายในแต่ละชิ้นส่วนย่อย ในการนี้ต้องพิจารณาความต่อเนื่องกับชิ้นส่วนย่อยที่อยู่ประชิดกัน

3. ใช้หลักการของงานสมมุติ (principle of virtual work) หรือหลักการพลังงาน (energy principle) ที่เหมาะสมจะสามารถหาสติฟเนส (stiffness) ของชิ้นส่วนย่อยได้

4. ใช้วิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง (direct stiffness method) จะได้สติฟเนสของโครงสร้างซึ่งสามารถแสดงในรูป

$$\left[K\right]\left\{r\right\} = \left\{q\right\} \tag{3.6}$$

โดยที่ $\left[K\right] = \sum_{e=1}^{m}\left[k_e\right]$ = ผลรวมของสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย

$\left\{r\right\}$ = เวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดขั้ว (nodal displacement vector)

$\left\{q\right\}$ = เวคเตอร์แรงที่จุดขั้ว (nodal force vector)

เนื่องจากถังทรงกระบอกกลมมีสมมาตรที่จุดศูนย์กลางหน้าตัดวงกลมและแรงกระทำเป็นแรงซึ่งสมมาตรรอบแกนดังกล่าวด้วย จึงเลือกใช้ชิ้นส่วนย่อยที่สมมาตรรอบแกนหมุน (axisymmetric) สำหรับคอนกรีตใช้ชิ้นส่วนย่อยของแข็งสมมาตรรอบแกนหมุนชนิดไอโซพาราเมตริก 4 จุดขั้ว (four node isoparametric axisymmetric solid element) [21] ส่วนชิ้นส่วนเหล็กเสริมแบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

1. เหล็กเสริมเส้นตรง ซึ่งอาจวางในแนวใด ๆ ในระนาบที่ผ่านแกนหมุน
2. เหล็กเสริมตามแนวเส้นรอบวง (circumferential reinforcement)

เหล็กเสริมทั้งสองนี้จะคิดให้มีการอัดแรงหรือไม่ก็ได้

3.3 <u>ครีพคอมไพลแอนซ์</u> (creep compliance)

คอนกรีตที่ถูกแรงกระทำค้างไว้ต่อเนื่องกันจะมีความเครียดเกิดขึ้น ซึ่งมักสมมุติว่าประกอบด้วย 3 ส่วนคือ [15]

1. ความเครียดอีลาสติกซึ่งเกิดขึ้นทันทีทันใด และเมื่อเอาแรงกระทำออกก็สามารถคืนกลับได้ทันที (instantaeous recoverable strain) ความเครียดอีลาสติกเป็นปฏิภาคกลับกับค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต

2. ความเครียดเนื่องจากการคืบ ซึ่งคืนกลับได้ในระยะเวลานาน (time-dependent recoverable strain) ความเครียดส่วนนี้มักมีค่าน้อย เมื่อเปรียบเทียบกับส่วนอื่น ดังนั้น ในการวิเคราะห์บางครั้งอาจตัดทิ้งได้

3. ความเครียดเนื่องจากการคืบ ซึ่งไม่คืนกลับ (irrecoverable strain) ส่วนนี้เป็นส่วนสำคัญของการคืบของคอนกรีต

สำหรับวัสดุวิสโคอีลาสติกเชิงเส้นตรง ความเครียดเหล่านี้ที่เกิดขึ้นที่เวลาใดเวลาหนึ่งจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับหน่วยแรงค้าง (คงที่) ที่กระทำ ฟังก์ชันความเครียดต่อหนึ่งหน่วยแรงกระทำมีชื่อว่า ครีพคอมไพลแอนซ์ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของวัสดุวิสโคอีลาสติกเชิงเส้นตรง และต้องหาจากผลการทดลองการคืบของคอนกรีต ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับโครงสร้างมากที่สุด ในการวิจัยนี้ เราจะใช้ฟังก์ชันของครีพคอมไพลแอนซ์ที่ได้จากการวิจัยของ Jordaan และ Khalifa [15] กับ Argyris และคณะ [22] ซึ่งมีความเหมาะสมและสะดวกแก่วิธีการวิเคราะห์ที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไป ฟังก์ชันดังกล่าวเป็นดังนี้

1. สำหรับความเครียดอีลาสติก

$$J_e = \frac{1}{E_i} \qquad (3.7)$$

โดยที่ J_e = ความเครียดอีลาสติกต่อหนึ่งหน่วยแรงกระทำ

E_i = โมดูลัสยืดหยุ่นเมื่อเวลาเริ่มต้นใส่แรงกระทำ (กก./ซม.^{2})

2. สำหรับความเครียดซึ่งคืนกลับได้ในระยะเวลานาน Jordaan และ Khalifa [15] ได้เสนอสูตรสำเร็จสำหรับครีพคอมไพลแอนซ์คืนกลับได้ (J_d) ดังนี้

$$J_d = 0.638\text{x}10^{-6}\left[1-\exp\left\{-22.4\text{x}10^{6}(f(t)-f(\tau))\right\}\right] \qquad (3.8)$$

โดยที่ $f(t)$ = ฟังก์ชันอ้างอิงของความเครียดซึ่งไม่คืนกลับ (ซม./ซม. ต่อ กก./ซม.^{2})

t = เวลา (วัน)

τ = เวลาที่เริ่มใส่แรงกระทำ (วัน)

ขนาดมากที่สุดของ J_d คือ $0.638\text{x}10^{-6}$ ซม./ซม. ต่อ กก./ซม.^{2} ซึ่งเป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิและเวลาที่เริ่มใส่แรงกระทำ แต่ถ้าคอนกรีตมีอายุมากขึ้นจะทำให้อัตราการเพิ่มของ J_d ช้าลง

ถ้าให้ $t' = f(t)$

และ $\tau' = f(\tau)$

จะเขียนสมการ (3.8) ได้เป็น

$$J_d = 0.638 x 10^{-6}\left[1-\exp\left\{-22.4 x 10^{-6}(t'-\tau')\right\}\right] \quad (3.8ก)$$

t' มีชื่อเรียกว่าเวลาเสมือน (pseudo time)

3. สำหรับความเครียดเนื่องจากการคืบซึ่งไม่คืนกลับมีค่าขึ้นกับอุณหภูมิ และเวลาที่เริ่มใส่แรงกระทำ เป็นที่ทราบดีว่าเมื่ออายุคอนกรีตตอนใส่แรงกระทำมีค่ามาก การคืบจะน้อยลง ความเครียดส่วนไม่คืนกลับที่เวลา t ใด ๆ สำหรับแรงกระทำเมื่ออายุ τ สมมุติว่าหาได้จากฟังก์ชันอ้างอิงของความเครียดส่วนไม่คืนกลับที่เวลา t โดยที่ใส่แรงกระทำเมื่อเวลา τ_o ลบด้วยความเครียดส่วนไม่คืนกลับที่จะเกิดขึ้นจากเวลา τ_o ถึง τ (ดูรูปที่ 3.3) สำหรับผลของอุณหภูมินั้นสมมุติว่า ความเครียดส่วนไม่คืนกลับเป็นปฏิภาคตรงกับอุณหภูมิ โดยสมมุติฐานดังกล่าว Jordaan และ Khalifa [15] ได้เสนอสูตรความเครียดนี้เป็น

$$J_f = \frac{T}{25}\left[f(t) - f(\tau)\right] \quad (3.9)$$

$$J_f = \frac{T}{25}\left[t' - \tau'\right] \quad (3.9ก)$$

โดยที่ J_f = ความเครียดซึ่งไม่คืนกลับ (ซม./ซม. ต่อ กก./ซม.^{2})

T = อุณหภูมิ (องศาเซลเซียส)

ใช้อุณหภูมิ 25° เซลเซียสเป็นอุณหภูมิอ้างอิง

จาก Argyris และคณะ [22] ได้ฟังก์ชันของ f(t) เป็น

$$f(t) = 46.2 x 10^{-6}\left[(t)^{0.025}-(\tau_o)^{0.025}\right] \quad (3.9ข)$$

τ_o = เวลาที่เริ่มต้นของฟังก์ชัน f(t)

ครีพคอมไพลแอนซ์ทั้งหมด $J(\underset{\sim}{x},t,\tau)$ เป็นผลรวมของส่วนต่าง ๆ ข้างต้น นั่นคือ

$$J = J_e + J_d + J_f \quad (3.10)$$

ซึ่งเขียนได้เฉพาะสำหรับงานวิจัยนี้คือ

$$J(\underset{\sim}{x},t,\tau) = \frac{1}{E_i(\underset{\sim}{x})}+0.638 x 10^{-6}\left[1-\exp\left\{-22.4 x 10^{6}(f(t)-f(\tau))\right\}\right]+\frac{T(\underset{\sim}{x})}{25}\left[f(t)-f(\tau)\right] \quad (3.10ก)$$

$$J(\underset{\sim}{x},t'-\tau') = \frac{1}{E_i(\underset{\sim}{x})} + 0.638\text{x}10^{-6}\left[1-\exp\left\{-22.4\text{x}10^{6}(t'-\tau')\right\}\right] + \frac{T(\underset{\sim}{x})}{25}\left[t'-\tau'\right]$$

(3.10ข)

ลักษณะของสมการ (3.10) แสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 3.4 ในบางกรณีอาจตัด J_d ออกเนื่องจากมีค่าน้อย ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิและครีพคอมไพลแอนซ์ส่วนคืนกลับไม่ได้ เป็นเส้นตรง

3.4 <u>การวิเคราะห์โครงสร้างโดยทฤษฎีวีสโคอีลาสติกเชิงเส้นตรง</u>

ในการวิจัยนี้ใช้ทฤษฎีวีสโคอีลาสติกเชิงเส้นตรง ซึ่งมีสมมุติฐานสำคัญดังต่อไปนี้ [15]

1. สถาพขอบเขตของโครงสร้างไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา
2. อุณหภูมิที่จุดใดๆ ภายในขอบเขตที่กำหนดไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา
3. แรงที่กระทำที่จุดใด ๆ ภายในขอบเขตที่กำหนดไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา
4. อัตราส่วนปัวซองของคอนกรีตมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิและเวลา

เมื่อพิจารณาปัญหาวีสโคอีลาสติกเชิงเส้นตรงโดยอาศัยการแปลงลาปลาซ จะพบว่ามีการสมนัยกับปัญหาอีลาสติกคือ เมื่อแทนค่า $\frac{1}{E}$ ในคำตอบของหน่วยแรงความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งจากการวิเคราะห์อีลาสติกด้วย $s\bar{J}$ จะได้คำตอบเป็นการแปลงลาปลาซของคำตอบวีสโคอีลาสติกคูณด้วย s โดยที่ s เป็นพารามิเตอร์ของการแปลงลาปลาซและ $\bar{J}$ คือการแปลงลาปลาซของครีพคอมไพลแอนซ์ หลักการนี้เรียกว่าหลักการสมนัยซึ่งจะพิสูจน์ให้เห็นในลำดับต่อไป

สมการพื้นฐานซึ่งได้แก่สมการสมดุลย์ สมการความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่ง ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด รวมทั้งสภาพขอบเขตที่ถูกกำหนดของทฤษฎีวีสโค-อีลาสติกเชิงเส้นตรง ในพิกัดคาร์ทีเซียน 3 มิติเป็นดังนี้

3.3.1 สมการสมดุลย์

$$\sigma_{ij,j}(\underset{\sim}{x},t) + f_i(\underset{\sim}{x},t) = 0 \qquad (3.11)$$

หรือ

$$\sigma_{ij,j}(\underset{\sim}{x},t) + f_i(\underset{\sim}{x}) = 0 \qquad (3.11ก)$$

3.3.2 สมการความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่ง

$$\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \frac{1}{2}u_{i,j}(\underset{\sim}{x},t) + \frac{1}{2}u_{j,i}(\underset{\sim}{x},t) \qquad (3.12)$$

3.3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด

$$\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t)-\alpha\delta_{ij}\Delta T(\underset{\sim}{x},t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t)-\nu\delta_{ij}\sigma_{kk}(\underset{\sim}{x},t)\right] J(\underset{\sim}{x},t,\tau)\,d\tau \qquad (3.13)$$

$$\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t)-\alpha\delta_{ij}\Delta T(\underset{\sim}{x}) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t)-\nu\delta_{ij}\sigma_{kk}(\underset{\sim}{x},t)\right] J(\underset{\sim}{x},t,\tau)\,d\tau \qquad (3.13ก)$$

3.3.4 สภาพขอบเขตส่วนที่ 1 ซึ่ง $\underset{\sim}{x} \in \Gamma_1$

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t).n_j = f_i^{\Gamma_1}(\underset{\sim}{x},t) \qquad (3.14)$$

หรือ $$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t).n_j = f_i^{\Gamma_1}(\underset{\sim}{x}) \qquad (3.14ก)$$

สภาพขอบเขตส่วนที่ 2 ซึ่ง $\underset{\sim}{x} \in \Gamma_2$

$$u_i(\underset{\sim}{x},t) = u_i^{\Gamma_2}(\underset{\sim}{x},t) \qquad (3.15)$$

หรือ $$u_i(\underset{\sim}{x},t) = u_i^{\Gamma_2}(\underset{\sim}{x}) \qquad (3.15ก)$$

โดยที่

$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t)$, $\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t)$, $u_i(\underset{\sim}{x},t)$

= หน่วยแรง, ความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดใด ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง $\underset{\sim}{x}$, และเวลา t

จากสมการพื้นฐานข้างต้นและนิยามของเวลาเสมือน เมื่อพิจารณาปัญหาทั้งหมดในตัวแปรของเวลาเสมือนโดยอาศัยการแปลงลาปลาซจะเขียนสมการ (3.11ก) (3.12) (3.13ก) (3.14ก) และ (3.15ก) ได้ตามลำดับดังนี้

$$s\bar{\sigma}_{ij,j}(\underset{\sim}{x},s)+f_i(\underset{\sim}{x}) = 0 \qquad (3.16)$$

$$s\bar{\varepsilon}_{ij}(\underset{\sim}{x},s) = \frac{1}{2}\left[s\bar{u}_{i,j}(\underset{\sim}{x},s)+s\bar{u}_{j,i}(\underset{\sim}{x},s)\right] \qquad (3.17)$$

$$s\bar{\varepsilon}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)-\alpha\delta_{ij}\Delta T(\underset{\sim}{x}) = s\bar{J}(\underset{\sim}{x},s)\left[(1+\nu)s\bar{\sigma}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)-\nu\delta_{ij}s\bar{\sigma}_{kk}(\underset{\sim}{x},s)\right] \qquad (3.18)$$

$$s\bar{\sigma}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)\,n_j = f_i^{\Gamma_1}(\underset{\sim}{x}) \qquad (3.19)$$

$$s\,\bar{u}_i(\underset{\sim}{x},s) = u_i^{\Gamma_2}(\underset{\sim}{x}) \quad (3.20)$$

โดยที่ s = พารามิเตอร์ของการแปลงลาปลาซ

$\bar{g}$ = การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน g โดยที่ g เป็นฟังก์ชันใด ๆ (σ, ε, ฯลฯ)

ตัวแปรที่ไม่รู้ค่าของสมการ (3.16 - 3.20) คือ $s\bar{\sigma}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)$, $s\bar{\varepsilon}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)$ และ $s\bar{u}_i(\underset{\sim}{x},s)$ คำตอบของตัวแปรเหล่านี้หาได้จากสภาพขอบเขตที่ถูกกำหนดในส่วนที่ 1 $f_i^{\Gamma_1}(\underset{\sim}{x})$ และส่วนที่ 2 $u_i^{\Gamma_2}(\underset{\sim}{x})$ จะเห็นได้ว่าสมการเหล่านี้คล้ายคลึงกับที่ได้จากการวิเคราะห์โดยทฤษฎีอีลาสติก ถ้าหากแทน $s\bar{\sigma}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)$, $s\bar{\varepsilon}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)$, $s\bar{u}_i(\underset{\sim}{x},s)$ และ $s\bar{J}(\underset{\sim}{x},s)$ ด้วย σ_{ij}, ε_{ij}, u_i และ $\frac{1}{E}$ ตามลำดับเราก็จะได้สมการเหมือนกับสมการพื้นฐานในทฤษฎีอีลาสติกทุกประการ นั่นคือในโครงสร้างเดียวกัน เมื่อหาคำตอบอีลาสติกได้เป็น σ_{ij}, ε_{ij} และ u_i แล้วแทนค่า $\frac{1}{E}$ ด้วย $s\bar{J}(\underset{\sim}{x},s)$ ก็จะได้คำตอบของ $s\bar{\sigma}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)$, $s\bar{\varepsilon}_{ij}(\underset{\sim}{x},s)$ และ $s\bar{u}_i(\underset{\sim}{x},s)$ ตามลำดับ ต่อจากนั้นเป็นการหาคำตอบของ $\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t')$, $\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t')$ และ $u_i(\underset{\sim}{x},t')$ โดยอาศัยการผกผันของการแปลงลาปลาซ ในที่สุดก็จะได้คำตอบของหน่วยแรงความเครียดและการเปลี่ยนตำแหน่งที่เวลา t ใด ๆ นับตั้งแต่เมื่อมีแรงกระทำที่เวลา τ โดยแทนค่า $t' = f(t)$

ในการผกผันของการแปลงลาปลาซบางครั้ง จะพบกับความยากลำบาก ที่จะหาคำตอบของฟังก์ชันผกผันโดยตรง การใช้วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) เข้าช่วยจะทำให้หาคำตอบได้สะดวกขึ้น เช่นเมื่อจะผกผันการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $s\bar{\sigma}(\underset{\sim}{x},s)$ ที่ตำแหน่ง $\underset{\sim}{x}$ จุดหนึ่ง ให้ฟังก์ชัน $s\bar{\sigma}(\underset{\sim}{x},s)$ เป็นตามสมการข้างล่างคือ

$$s\bar{\sigma}(\underset{\sim}{x},s) = a_0\bar{\phi}_0(s)+a_1\bar{\phi}_1(s)+\dots\dots+a_n\bar{\phi}_n(s) \quad (3.21)$$

โดยที่ $\phi_i, i=0,n$ = ฟังก์ชันแห่งการประมาณ (interpolation functions) ที่เหมาะสมและง่ายแก่การผกผันการแปลงลาปลาซ

$a_i, i=0,n$ = สัมประสิทธิ์ซึ่งสอดคล้องกับ ϕ_i

ค่า $a_i, i = 0,n$ หาได้โดยการแทนค่า $s\bar{\sigma}(s)$ ที่สมนัยกับ $\bar{\phi}_i(s), i = 0,n$ จำนวน n+1 ครั้ง จะได้สมการ n+1 สมการซึ่งมี $a_i, i = 0, n$ เป็นตัวไม่รู้ค่า การผกผันการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $s\bar{\sigma}(\underset{\sim}{x},s)$ ซึ่งเท่ากับการผกผันการแปลงลาปลาซของเหล่าฟังก์ชันด้านขวามือของสมการ (3.21) จึงหาได้ง่าย เนื่องจากครั้งแรกได้เลือกฟังก์ชัน $\bar{\phi}_i$ เตรียมไว้อย่างดีก่อนแล้ว

วิธีเชิงตัวเลขของการผกผันการแปลงลาปลาซนี้ สามารถใช้หาคำตอบวีสโคอีลาสติกของโครงสร้างได้ ไม่ว่าคำตอบอีลาสติกจะเป็นคำตอบแบบสูตร หรือเป็นตัวเลขซึ่งได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอเลเมนต์ Jordaan และ Khanlifa [15] เลือกใช้ $\bar{E}(x,s)$ เป็นฟังก์ชันแห่งการประมาณ โดยให้

$$s\bar{\sigma}(\underset{\sim}{x},s) \approx a_0 + a_1\bar{E}(\underset{\sim}{x},s)+a_2\bar{E}^2(\underset{\sim}{x},s) \qquad (3.22)$$

โดยที่ $\dfrac{1}{\bar{E}(\underset{\sim}{x},s)} = s\bar{J}(\underset{\sim}{x},s)$

สังเกตว่าฟังก์ชัน $\bar{E}(x,s)$ ที่นิยามข้างต้นมิใช่เป็นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันการผ่อนคลาย

ภาคผนวก ก แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์เสาคอนกรีตเสริมเหล็กโดยทฤษฎีวีสโคอีลาสติกเชิงเส้นตรง ซึ่งอาศัยการสมนัยและเปรียบเทียบคำตอบหน่วยแรงของคอนกรีต และเหล็กเสริมซึ่งได้จากวิธีเชิงตัวเลขกับคำตอบแบบสูตร