# บทที่ 2

## ทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์

### 2.1 ลักษณะของลมธรรมชาติ

ลมที่เกิดขึ้นในธรรมชาติเกิดจากการเคลื่อนตัวของมวลอากาศ เนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิของชั้นบรรยากาศ ซึ่งความเร็วลมจะไม่คงที่ตลอดความสูงจากพื้นผิวดินเนื่องจากบริเวณผิวดินจะมีความฝืด (Friction) ทำให้ความเร็วของลมลดลง ความฝืดจะมีผลกระทบลดลงเมื่อสูงจากพื้นดินมากขึ้น จนถึงความสูงค่าหนึ่งที่ความฝืดจะไม่มีผลต่อความเร็วลมเรียกว่า ความสูงเกรเดียนต์ (Gradient height) จากปรากฏการณ์นี้ทำให้ความเร็วลมมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 2.1 ลักษณะการเคลื่อนที่ของความเร็วลมแบบนี้เรียกว่าการไหลแบบชั้น (Boundary layer flow) และสามารถที่จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วลมกับความสูงอยู่ในรูปของสมการยกกำลัง (Power law) ซึ่งเสนอไว้โดย Hellman ได้ดังนี้

$$\frac{V_Z}{V_{ZG}} = \left( \frac{Z}{Z_G} \right)^{\alpha} \tag{2.1}$$

โดยที่ $V_Z$ คือ ความเร็วลมเฉลี่ยที่ความสูงใดๆ $Z$

$V_{ZG}$ คือ ความเร็วลมเฉลี่ยที่ความสูงเกรเดียนต์ $Z_G$

$\alpha$ คือ ดัชนียกกำลังที่ขึ้นอยู่กับลักษณะภูมิประเทศ



ในข้อกำหนด NBC (1990) แบ่งลักษณะภูมิประเทศออกเป็น 4 แบบ และได้กำหนดค่า $\alpha$ และ $Z_G$ สำหรับภูมิประเทศแต่ละแบบไว้ดังแสดงในตารางที่ 2.1

ลักษณะสำคัญอีกอย่างหนึ่งของลมตามธรรมชาติคือความเร็วของลมจะไม่คงที่ แต่จะแปรเปลี่ยนตามเวลาดังแสดงในรูปที่ 2.2 ความเร็วลมที่เวลาใดๆ สามารถแยกเป็น 2 ส่วน คือ ค่าเฉลี่ยซึ่งจะคงที่และส่วนที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาแสดงได้ดังนี้

$$V(t) = \overline{V} + v(t) \tag{2.2}$$

โดยที่ $V(t)$ คือ ความเร็วลมที่เวลา t ใดๆ

$\overline{V}$ คือ ความเร็วลมเฉลี่ย

$v(t)$ คือ ความเร็วลมที่แปรเปลี่ยนไปจากความเร็วลมเฉลี่ยตามเวลา

## 2.2 การวิเคราะห์แบบพลศาสตร์ (Dynamic Analysis)

ในการวิเคราะห์ทางพลศาสตร์สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่โดยพิจารณาจากกฎข้อที่สองของนิวตันได้ดังนี้ (ดูรายละเอียดใน Clough,1993)

$$\{R(t)\} - \{f_D\} - \{f_S\} = [M]\{\ddot{u}\} \tag{2.3}$$

โดยที่ $\{R(t)\}$ คือ แรงภายนอก

$\{f_D\}$ คือ แรงจากความหน่วง (Damping force) ซึ่งเป็นปฏิภาคกับความเร็ว

$\{f_S\}$ คือ แรงต้านทานอีลาสติก (Elastic resisting force) แปรตามการเคลื่อนที่

$[M]$ คือ เมตริกซ์ของมวล

$\{\ddot{u}\}$ คือ เวคเตอร์ของอัตราเร่ง



โดยการเขียนแรงที่เกี่ยวข้องในพจน์ของระยะการเคลื่อนที่ จะสามารถแปลงสมการที่ (2.3) เป็นสมการในรูปการเคลื่อนที่ ซึ่งจะมีลักษณะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second ordinary differential equations) ดังนี้

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{R\} \tag{2.4}$$

โดยที่ $[K]$ คือ เมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง

$[C]$ คือ เมตริกซ์ของความหน่วง

$\{R\}$ คือ เวคเตอร์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อโครงสร้าง

$\{u\}$ คือ เวคเตอร์ของการเคลื่อนที่

$\{\dot{u}\}$ คือ เวคเตอร์ของความเร็ว

ขั้นตอนเบื้องต้นในการหาคำตอบของระบบสมการที่ (2.4) คือการหาความถี่ธรรมชาติของระบบโครงสร้าง ซึ่งสามารถหาได้โดยการพิจารณาการเคลื่อนที่อย่างอิสระโดยปราศจากการหน่วง (Undamped free vibration) นั่นคือ $\{R\} = 0,[C] = 0$ และสมการจะลดรูปเป็น

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\} = \{0\} \qquad (2.5)$$

สมมุติให้การเคลื่อนที่อยู่ในรูป

$$\{u(t)\} = \{\phi_n\}q_n(t) \qquad (2.6)$$

โดยที่ $\{\phi_n\}$ คือ ขนาดซึ่งแปรเปลี่ยนตามเวลาของการเคลื่อนที่ในรูปแบบ $\{\phi_n\}$

$q_n(t)$ คือ ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ขึ้นกับเวลา

สมมุติให้ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ที่ขึ้นกับเวลาเป็นการเคลื่อนที่ในรูปฟังก์ชันฮาร์โมนิคอย่างง่าย (Simple harmonic function) คือ

$$q_n(t) = \{A_n\}\cos\omega_n t + \{B_n\}\sin\omega_n t \qquad (2.7)$$

โดยที่ $\omega$ คือ ความถี่ธรรมชาติเชิงรอบ (Circular natural frequency)

และค่าคงที่ $\{A_n\}$ และ $\{B_n\}$ เป็นค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับเงื่อนไขสภาวะเริ่มต้น (Initial conditions) ของการเคลื่อนที่ จากสมการที่ (2.6) และ (2.7) จะหาอัตราเร่งอยู่ในรูปการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$\left\{\ddot{u}(t)\right\} = -\omega_n^2\{u(t)\} \qquad (2.8)$$

แทนค่าสมการที่ (2.6) และสมการที่ (2.8) ลงในสมการที่ (2.5) จะได้

$$\left(-\omega_n^2[M]\{\phi_n\}+[K]\{\phi_n\}\right)q_n(t)=\{0\} \tag{2.9}$$

สมการดังกล่าวข้างต้นเป็นจริงได้ 2 ลักษณะคือ $q_n(t)=0$ ซึ่งเป็นคำตอบเห็นได้ง่าย (Trivial solution) แต่ไม่มีประโยชน์เนื่องจากไม่มีการเคลื่อนที่ของระบบ คำตอบอีกลักษณะหนึ่งที่เป็นไปได้คือ

$$\left([K]-\omega_n^2[M]\right)\{\phi_n\}=\{0\} \tag{2.10}$$

สมการที่ (2.10) จะได้ผลลัพธ์ที่เห็นได้ไม่ง่าย (Nontrivial solution) คือ $\{\phi_n\}\neq 0$ ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์เมตริกซ์ (Coefficient matrix) เป็นเอกฐาน (Singular) ซึ่งมีเงื่อนไขคือ

$$\det\left([K]-\omega_n^2[M]\right)=0 \tag{2.11}$$

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในสมการที่ (2.11) สามารถกระจายอยู่ในรูปของสมการพหุนาม (Polynomial equation) อันดับ N คือ $a_0(\omega^2)^N+a_1(\omega^2)^{N-1}+......a_N=0$ เราเรียกสมการดังกล่าวข้างต้นว่าเป็นสมการเฉพาะ (Characteristic equation) หรือสมการความถี่ (Frequency equation) ซึ่งจะให้ราก ($\omega_n^2$) ของสมการจำนวน N ค่าของรากเหล่านี้จะมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก เนื่องจากเมตริกซ์ของโครงสร้าง $[K]$ และ $[M]$ เป็นเมตริกซ์ที่สมมาตรและมีค่าเป็นบวกแน่นอน (Positive definite) รากของสมการนี้เรียกว่าค่าเฉพาะ (Eigenvalues,Characteristic values หรือ Normal values) หลังจากได้ $\omega_n^2$ เราสามารถหาเวคเตอร์รูปร่าง $\{\phi_n\}$ ที่สอดคล้องกับ $\omega_n^2$ ได้จากแทนค่า $\omega_n^2$ ลงในสมการที่ (2.10) แล้วทำการแก้สมการ ซึ่งเราจะได้ $\{\phi_n\}$ จำนวน N เวคเตอร์ เราเรียกเวคเตอร์นี้ว่าเวคเตอร์เจาะจง (Eigenvectors,Characteristic vector)

เวคเตอร์เจาะจง $\{\phi_n\}$ มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก (Orthogonality condition) เทียบกับเมตริกซ์ของมวล และสติฟเนสของโครงสร้างกล่าวคือ

$$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ >0 & i=j\end{cases} \tag{2.12}$$

$$\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ > 0 & i = j \end{cases} \quad (2.13)$$

## 2.3 **วิธีวิเคราะห์แบบรวมโหมด** ( Mode Superposition Method )

การวิเคราะห์แบบรวมโหมดเป็นวิธีการที่จะเปลี่ยนสมการพลศาสตร์ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นแก่กัน ( Coupled ) ให้อยู่ในรูปของสมการที่อิสระต่อกัน ( Uncoupled ) โดยที่แต่ละโหมดของการเคลื่อนที่ (Mode of vibration) แยกอิสระต่อกัน และอาจพิจารณาเพียงบางโหมดที่สำคัญ เช่น โหมดต่ำ ๆ (Lower modes) ซึ่งจะทำให้ประหยัดเวลา

หลักการสำคัญของวิธีวิเคราะห์แบบรวมโหมด คือการพิจารณาแปลงการเคลื่อนที่ใด ๆ ให้เป็นการประกอบเชิงเส้น (Linear conbination) ของโหมดต่าง ๆ ดังนี้

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\phi_i\}q_i(t) \quad (2.14)$$

เมื่อนำค่าดังกล่าวแทนลงในสมการการเคลื่อนที่ และคูณด้วย $\{\phi_i\}^T$ ข้างหน้าตลอดทั้งสมการ และใช้ประโยชน์จากคุณสมบัติเชิงตั้งฉากของมวลและสติฟเนส รวมทั้งสมมุติให้ความหน่วงมีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากคือ

$$\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ > 0 & i = j \end{cases} \quad (2.15)$$



จะสามารถแปลงสมการการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปของสมการการเคลื่อนที่ N สมการ ที่ไม่ขึ้นแก่กัน (Uncoupled equation) กล่าวคือ

$$M_i^* \ddot{q}_i(t) + C_i^* \dot{q}_i(t) + K_i^* q_i(t) = R_i^*(t)\,; i = 1,2,....,N \quad (2.16)$$

โดยที่

มวลประจำโหมด, $M_i^* = \{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}$

สติฟเนสประจำโหมด , $K_i^* = \{\phi_i\}^T [K]\{\phi_i\}$

ความหน่วงประจำโหมด , $C_i^* = \{\phi_i\}^T [C]\{\phi_i\}$

แรงเยเนอรัลไลซ์ , $R_i^* = \{\phi_i\}^T \{R(t)\}$

สมการที่ (2.16) จัดในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_1^* & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \\ & & & M_N^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \ddot{q}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^* & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \\ & & & C_N^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \dot{q}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1^* & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \\ & & & K_N^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ \bullet \\ \bullet \\ R_N^* \end{Bmatrix}$$

หรือ $$[\overline{M}]\{\ddot{q}\} + [\overline{C}]\{\dot{q}\} + [\overline{K}]\{q\} = \{\overline{R}\} \qquad (2.17)$$

โดยที่ $$\{\Phi\} = \{\phi_1\ \phi_2 \ldots\ldots \phi_N\} \qquad (2.18)$$

$$[\overline{M}] = \{\Phi\}^T [M]\{\Phi\} = \begin{bmatrix} M_1^* & & \\ & \bullet & \\ & & M_N^* \end{bmatrix} \qquad (2.19)$$

$$[\overline{C}] = \{\Phi\}^T [C]\{\Phi\} = \begin{bmatrix} C_1^* & & \\ & \bullet & \\ & & C_N^* \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

$$[\overline{K}] = \{\Phi\}^T [K]\{\Phi\} = \begin{bmatrix} K_1^* & & \\ & \bullet & \\ & & K_N^* \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

$$\{\overline{R}\} = \{\Phi\}^T \{R\} = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ \bullet \\ R_N^* \end{Bmatrix} \qquad (2.22)$$

คำตอบของสมการที่ (2.16) สามารถเขียนอยู่ในรูปดูฮาเมลอินทิกรัล (Duhamel integal) ดังนี้

$$q_i(t) = \frac{1}{M_i^* \omega_{D_i}} \int_0^t R_i^*(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{D_i}(t-\tau)\, d\tau \qquad (2.23)$$

โดยที่ $$\omega_{D_i} = \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^{\,2}} \qquad (2.24)$$

ในทางปฏิบัติแรงลมจะเป็นฟังก์ชันที่ยุ่งยากทำให้ไม่สามารถอินทิเกรตในรูปแบบสูตร (Closed form) ได้ ดังนั้นจึงต้องพึ่งการคำนวณโดยวิธีเชิงเลข (Numerical method) โดยทำการคำนวณพื้นที่ใต้กราฟในอินทิกรัลของสมการ (2.23) ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) หรือ กฎของซิมป์สัน (Simpson 's rule) เป็นต้น หรือวิธีอื่นที่เหมาะสม (ดูรายละเอียดใน Clough and Penzien,1993)

เมื่อคำนวณค่า $q_i(t)$ สำหรับโหมดต่างๆ แล้ว จะทำการรวมโหมดเหล่านั้นเพื่อหาการเคลื่อนที่ที่จุดต่างๆ ในทางปฏิบัติมักพิจารณาเฉพาะโหมดต่ำ ๆ ที่สัมพันธ์กับความถี่ต่ำ ๆ ดังนี้

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{M} \{\phi_i\} q_i(t) \quad , M < N \qquad (2.25)$$

## 2.4 การวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต
## ( Geometrically Nonlinear Analysis )

การวิเคราะห์ในทางปฏิบัติทั่วไปในปัจจุบันใช้วิธีวิเคราะห์แบบเชิงเส้นซึ่งมีสมมุติฐานมาจากความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำกับการเปลี่ยนตำแหน่งเป็นลักษณะเชิงเส้น ซึ่งวิธีดังกล่าวจะถูกต้องในกรณีของโครงสร้างชะลูดเฉพาะเมื่อแรงกระทำมีค่าน้อยเท่านั้น หากแรงที่กระทำมีค่าค่อนข้างมาก หรือในกรณีที่โครงสร้างมีความชะลูดมากควรศึกษาผลของความไม่เชิงเส้นด้วย การวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตจะพิจารณาผลคาบเกี่ยว (Coupling effect) ของแรงแนวแกนกับการเปลี่ยนรูปการด้านการดัด ซึ่งทำให้แรงในแนวแกนมีผลต่อสติฟเนสของโครงสร้าง (Structural stiffness),(CTF ROFF)

พิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งเพิ่ม $\delta v$ และ $\delta w$ ของชิ้นส่วน $\delta x$ ภายใต้แรงในแนวแกน $P$ (ซึ่งมีค่าเป็นบวกเมื่อเป็นแรงดึง) ผลของการเปลี่ยนตำแหน่งเพิ่มด้านข้าง $\delta v$ และ $\delta w$ ทำให้ความยาวชิ้นส่วนเปลี่ยนไปดังนี้

$$(\delta s)^2 = (\delta x)^2 + (\delta v)^2 + (\delta w)^2$$

หรือ
$$\delta s = \left(1 + \left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)^2\right)^{1/2} \delta x \qquad (2.26)$$

โดยที่ $\delta s$ คือ ความยาวใหม่ของ $\delta x$ เมื่อรับแรงแนวแกน

$\delta x$ คือ ความยาวเริ่มต้นของเอเลเมนต์

$\delta v$ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางแกน y ตามระยะ $\delta x$

$\delta w$ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางแกน w ตามระยะ $\delta x$

สำหรับ $\delta s$ เล็กมากๆ สามารถกระจายพจน์ด้านขวามือของสมการข้างต้นโดยทฤษฎีไบโนเมียล (Binomial theorem) ได้ ทำให้เขียนสมการที่ 2.26 ได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{ds}{dx} \cong \left(1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)\right) \qquad (2.27)$$

ในสมการข้างต้นนี้พจน์ที่มีอันดับสูงกว่า (Higher order term) ถูกตัดออกไป เนื่องจากมีค่าน้อยกว่าพจน์อื่นๆ มากจึงมีผลต่อความเครียดแนวแกนน้อยมาก ดังนั้นความเครียดตามแนวแกนที่เพิ่มขึ้น ($\delta\varepsilon_x$) คือ

$$\delta\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \qquad (2.28)$$



ความเครียดตามแนวแกนรวม ($\varepsilon_x$) ประกอบด้วยความเครียดโดยตรงในแนวแกนจากแรง $P$ รวมกับผล $\delta\varepsilon_x$ ดังกล่าวข้างต้น นั่นคือ

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \qquad (2.29)$$

และ
$$P = EA\frac{du}{dx} \qquad (2.30)$$

พลังงานความเครียด ($U_e$) ที่สะสมเนื่องจากหน่วยแรงตามแนวแกน (Axial stress, $\sigma_x$) และความเครียด $\varepsilon_x$ ที่เกิดขึ้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon_x^2 dV \qquad (2.31)$$

โดยที่ $E$ คือ โมดูลัสยืดหยุ่น และ $V$ เป็นปริมาตรของชิ้นส่วน

แทนสมการที่ (2.29) ลงในสมการที่ (2.31) และตัดพจน์ที่มีอันดับสูงกว่าออกไปจะได้

$$U_e \cong \frac{EA}{2}\int_0^L \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{du}{dx}\left( \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right) \right\} dx \qquad (2.32)$$

โดยที่ $A$ คือ พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

แทนสมการที่ (2.30) ลงในสมการที่ (2.32) จะได้

$$U_e \cong \frac{EA}{2}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{P}{2}\int_0^L \left( \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right) dx \qquad (2.33)$$

พิจารณาชิ้นส่วนรับแรงในแนวแกน ดังแสดงในรูปที่ 2.3 การเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วหรือดีกรีความอิสระที่พิจารณาคือ

$$\{r\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2\}^T \qquad (2.34)$$

โดยที่ $\{r\}$ คือ เวคเตอร์การ เปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้ว

การเปลี่ยนตำแหน่งที่ระยะ $x$ ใดๆ ในชิ้นส่วนมีความสัมพันธ์กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขั้วในทิศทางเดียวกัน โดยเป็นฟังก์ชันอินเทอโพเลชันเชิงเส้น (Linear interpolation function) และสามารถแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
u &= \{N_u\}\{r\} \\
v &= \{N_v\}\{r\} \\
w &= \{N_w\}\{r\}
\end{aligned}
\qquad (2.35)
$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
\{N_u\} &= \left\{\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad 0 \quad 0 \quad \left(\frac{x}{L}\right) \quad 0 \quad 0\right\} \\
\{N_v\} &= \left\{0 \quad \left(1-\frac{x}{L}\right) \quad 0 \quad 0 \quad \left(\frac{x}{L}\right) \quad 0\right\} \\
\{N_w\} &= \left\{0 \quad 0 \quad \left(1-\frac{x}{L}\right) \quad 0 \quad 0 \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right\}
\end{aligned}
\qquad (2.36)
$$

แทนสมการที่ (2.33) และสมการที่ (2.35) ลงสมการที่ (2.31) จะได้

$$
\begin{aligned}
U_e = {} & \frac{1}{2}EA\{r\}^T \int_0^L \{N_{u,x}\}^T \{N_{u,x}\} dx \{r\} \\
& + \frac{1}{2}P\{r\}^T \int_0^L \left(\{N_{v,x}\}^T \{N_{v,x}\} + \{N_{w,x}\}^T \{N_{w,x}\}\right) dx \{r\}
\end{aligned}
\qquad (2.37)
$$

โดยที่

$$
\{N_{u,x}\} = \frac{d\{N_u\}}{dx}, \qquad \{N_{v,x}\} = \frac{d\{N_v\}}{dx}, \qquad \{N_{w,x}\} = \frac{d\{N_w\}}{dx}
$$

จากหลักการค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม (Principle of mininium total potential energy) จะได้

$$
\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \qquad ; \mathrm{I}=1,2,\ldots..,n \qquad (2.38)
$$

โดยที่พลังงานศักดิ์รวม $\Pi = U - W$ ( 2.39 )

$U$ คือ พลังงานความเครียดสะสมในโครงสร้างซึ่งหาจากผลรวมของพลังงานความ-เครียดของชิ้นส่วน นั่นคือ

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_e \tag{2.40}$$

โดยที่ N คือ เป็นจำนวนชิ้นส่วน

และ $W$ คือ งานจากแรงภายนอก ซึ่งหาได้จาก

$$W = \{R\}^T \{u\} \tag{2.41}$$

แทนค่าสมการ (2.39) ลงในสมการที่ (2.38) จะได้

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial u_i}\right\} = \frac{\partial U}{\partial \{u\}} - \frac{\partial W}{\partial \{u\}} = 0 \tag{2.42}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial W}{\partial \{u\}} = \left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\{R\}^T \{u\}\right)\right\} = \{R\} = \frac{\partial U}{\partial \{u\}} \tag{2.43}$$

แทนสมการที่ (2.37) ลงในสมการที่ (2.43) จะได้

$$\frac{\partial U}{\partial \{u\}} = \left[EA\int_0^L \left\{N_{u,x}\right\}^T \left\{N_{u,x}\right\} dx + P\int_0^L \left(\left\{N_{v,x}\right\}^T \left\{N_{v,x}\right\} + \left\{N_{w,x}\right\}^T \left\{N_{w,x}\right\}\right) dx\right] \{u\} \tag{2.44}$$



จะได้
$$\{R\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\left[K_e\right] + \left[K_g\right]\right) \{u\} \tag{2.45}$$



โดยที่สติฟเนสของระบบได้จากการรวมสติฟเนสโดยตรง (Direct stiffness assembly) ของสติฟ - เนสทุกชิ้นส่วน สมการที่ (2.45) แสดงว่าสติฟเนสรวมของชิ้นส่วนประกอบด้วย 2 ส่วน คือ สติฟเนสอีลาสติก (Elastic stiffness, $K_e$) กับสติฟเนสเรขาคณิต (Geometric stiffness, $K_g$) โดยที่

$$\left[K_e\right] = EA\int_0^L \left\{N_{u,x}\right\}^T \left\{N_{u,x}\right\} dx \tag{2.46}$$

และ
$$\left[K_g\right] = P\int_0^L \left(\left\{N_{v,x}\right\}^T \left\{N_{v,x}\right\} + \left\{N_{w,x}\right\}^T \left\{N_{w,x}\right\}\right) dx \qquad (2.47)$$

สำหรับชิ้นส่วนที่มีหน้าตัดคงที่ เมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติกและเมตริกซ์สติฟเนสเรขาคณิตมีค่าดังนี้

$$\left[K_e\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \qquad (2.48)$$

$$\left[K_g\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{P}{L} \qquad (2.49)$$

โดยที่ $P$ คือ แรงในแนวแกนมีเครื่องหมายเป็นบวกเมื่อแรงเป็นแรงดึง (Tension)

$L$ คือ ความยาวของชิ้นส่วน

สังเกตว่า $\left[K_e\right]$ เป็นค่าคงที่ ส่วน $\left[K_g\right]$ ขึ้นอยู่กับค่าแรงในแนวแกน หากแรงในแนวแกนเป็นแรงอัด $\left[K_g\right]$ จะไปลดสติฟเนสเริ่มต้นของระบบ

ในการวิเคราะห์ทางสถิตย์ศาสตร์สมการสมดุลคือ

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\left[K_e\right] + \left[K_g\right]\right] \{u\} = \{R\} \qquad (2.50)$$

ในการวิเคราะห์ทางพลศาสตร์สมการสมดุลคือ

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\left[K_e\right]+\left[K_g\right]\right]\{u\}+[C]\left\{\dot{u}\right\}+[M]\left\{\ddot{u}\right\}=\{R\} \qquad (2.51)$$

การวิเคราะห์ผลไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตสามารถวิเคราะห์ได้หลายวิธี ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะวิธีที่โปรแกรม Sap 90 (1992) ใช้วิเคราะห์ คือวิธีทำซ้ำโดยตรง (Direct iteration method) ในวิธีนี้ จะทำการคำนวณสติฟเนสซีแคนต์ของโครงสร้าง (Secant stiffness matrix) $\left[K_s\right]_i$ สำหรับสถานะใด ๆ แล้วคำนวณระยะเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมด (Total displacement) จากสมการ

$$\left[K_s\right]_i\{u\}_{i+1}=\{R\} \qquad (2.52)$$

โดยที่ $\left[K_s\right]_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\left[K_e\right]_i+\left[K_g\right]_i\right)$

$\{u\}_{i+1}$ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างที่คำนวณจาก $\left[K_s\right]_i$

ขั้นตอนการคำนวณจะเริ่มต้นที่ $\{u\}_0=0$ หรือโครงสร้างยังไม่รับแรงจะใช้ค่าเมตริกซ์สติฟเนสอีลาสติก ซึ่งจะได้การเคลื่อนที่ $\{u\}_1$ และการเปลี่ยนตำแหน่งจะทำให้เมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างเปลี่ยนไปเป็น $\left[K_s\right]_1$ และจะคำนวณค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในรอบถัดไปดังแสดงในรูปที่ (2.4) และจะทำซ้ำจนกระทั่งสมการที่ (2.52) มีค่าเท่ากันทั้งสองข้างหรือใกล้เคียงกันภายใต้พิกัดที่กำหนด