บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าตัวคูณลดกำลังขององค์อาคารคอนกรีตเสริมเหล็ก จะใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องอยู่ 3 ทฤษฎีคือ

- ทฤษฎีของความน่าจะเป็น (Probability Theory)
- ทฤษฎีทางสถิติ (Statistical Theory)
- ทฤษฎีของความน่าเชื่อถือทางโครงสร้าง (Structural Reliability Theory)

2.1 ทฤษฎีของความน่าจะเป็น

2.1.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) และการกระจายของความน่าจะเป็น (Probability Distribution)

เหตุการณ์สุ่มคือเหตุการณ์ที่เราไม่สามารถทำนายได้ว่าจะเกิดขึ้นจริงหรือไม่ เราทำนายได้เพียงโอกาสหรือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์นั้นเท่านั้น เราสามารถจำลองเหตุการณ์สุ่มได้ด้วยตัวแปรสุ่มและการกระจายของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนั้น

การกระจายของความน่าจะเป็นอาจแทนได้ในเทอมของฟังก์ชันของการกระจายสะสม (Cumulative Distribution Function ,CDF.) ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันของการกระจายสะสมของ X ($F_X(x)$) คือ

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) \tag{2.1}$$

ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

ถ้า X เป็นค่าต่อเนื่อง การกระจายของความน่าจะเป็นของ X อาจแทนได้ในรูปของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density Function ,PDF.) เขียนเป็นสมการได้คือ

$$f_x(x)dx = P(x < X \leqslant x+dx) \qquad (2.2)$$

และ

$$f_x(x) = d\,F_x(x)/dx \qquad (2.3)$$

ดังนั้น

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx \qquad (2.4)$$

ถ้า X เป็นค่าไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของ X คือความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าเท่ากับ x_1 จะเขียนเป็นสมการได้คือ

$$P_x(x_1) = P(X = x_1) \qquad (2.5)$$

และฟังก์ชันของการกระจายสะสมของ X คือความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x_1 จะเขียนเป็นสมการได้คือ

$$F_x(x) = \sum_{x_1 \leqslant x} P_x(x_1) \qquad (2.6)$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าอยู่ระหว่าง a และ b เมื่อ X เป็นค่าต่อเนื่องคือ

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{b}^{a} f_x(x)dx \qquad (2.7)$$

และเมื่อ X เป็นค่าไม่ต่อเนื่อง

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \sum_{a \leqslant x_1 \leqslant b} P_x(x_1) \qquad (2.8)$$

หรือ $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_x(b) - F_x(a)$ (2.9)

โดยทั่วไปแล้วความน่าจะเป็นจะสามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันของการกระจายสะสมซึ่ง ฟังก์ชันของการกระจายสะสมของตัวแปรสุ่มใดๆจะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้คือ

สำหรับทุกค่าของ X ; $0 \leqslant F_x(x) \leqslant 1.0$

และ $F_x(x)$ จะต้องมีค่าไม่ลดลงเมื่อ X มีค่าเพิ่มขึ้น

2.1.2 MAIN DESCRIPTORS ของตัวแปรสุ่ม

การบอกลักษณะของตัวแปรสุ่มใดๆนั้น นอกจากจะใช้ฟังก์ชันของการกระจายสะสมแล้ว ยังสามารถอธิบายอย่างคร่าวๆได้ด้วย Main Descriptors เช่น ค่ากลาง (Central Value) และความเบี่ยงเบน (Dispersion) ของตัวแปรสุ่มนั้น โดยทั่วไปแล้ว Main Descriptors ก็คือ ค่าเฉลี่ย (Mean) และ ค่าเบี่ยงเบน (Variance)

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X ($\bar{X}$) เมื่อ X เป็นค่าต่อเนื่องสามารถหาได้ดังนี้

$$\bar{X} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)dx \qquad (2.10)$$

หรือเมื่อ X เป็นค่าไม่ต่อเนื่อง

$$\bar{X} = \sum_{\text{all } x_i} x_i\, P_x(x_i) \qquad (2.11)$$

ค่าเบี่ยงเบนของตัวแปรสุ่ม X (σ_x^2) เมื่อ X เป็นค่าต่อเนื่องคือ

$$\sigma_x^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2\, f_x(x)dx \qquad (2.12)$$

และเมื่อ X เป็นค่าไม่ต่อเนื่อง

$$\sigma_x^2 = \sum_{\text{all } x_i} (x_i - \bar{X})^2 P_x(x_i) \qquad (2.13)$$

นอกจากนี้การบอกความเบี่ยงเบนของ X ยังอาจบอกได้ด้วยค่ารากที่สองของค่าเบี่ยงเบน เรียกว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) และอัตราส่วนระหว่างค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่อค่าเฉลี่ย ($\sigma_x / \bar{X}$) เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน (Coefficient of Variation ,COV.)

2.1.3 <u>ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม (Function of Random Variables) และการกระจายของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม</u>

ในทางวิศวกรรมเรามักจะเกี่ยวข้องกับสมการที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว เช่น

$$Y = g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = g(X) \qquad (2.14)$$

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม เราอาจหาค่า Main Descriptors ของ Y ได้สองวิธีคือ วิธีทางคณิตศาสตร์ และวิธีสุ่มแบบมอนติ-คาร์โล (Monte-Carlo Simulation)

1. <u>วิธีทางคณิตศาสตร์ [6]</u>

ค่าเฉลี่ยของ Y คือ

$$\bar{Y} = E(Y) = E(g(X))$$

ซึ่งสามารถประมาณได้โดยการกระจาย g(X) ออกเป็นอนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุดค่ากลางของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$\begin{aligned} g(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n) + \sum_i (x_i - \bar{X}_i) \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ &+ 1/2 \sum_i \sum_j (x_i - \bar{X}_i)(x_j - \bar{X}_j) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ \ldots \end{aligned} \qquad (2.15)$$

การประมาณค่าจะใช้เฉพาะเทอมแรกเท่านั้น ดังนั้น

$$\bar{Y} = g(\bar{X}_1,\bar{X}_2,\ldots,\bar{X}_n) \tag{2.16}$$

ค่าเบี่ยงเบนของ Y เมื่อ X_i เป็นอิสระต่อกันเชิงสถิติ (Statistically Independent) หาค่าได้จาก

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2_{\bar{x}_i}\sigma_{x_i}^2 \tag{2.17}$$

โดยที่ $\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{\bar{x}_i}$ เป็นอนุพันธ์ย่อยของ g เทียบกับ X_i ที่จุด $\bar{X}_i$

2. <u>วิธีสุ่มแบบมอนติ-คาร์โล [7]</u>

เป็นวิธีการเลือกค่าของตัวแปรสุ่มโดยจำลองลักษณะของการเกิดเหตุการณ์สุ่ม ซึ่งแสดงวิธีการได้ดังรูปที่ 2.1 และ 2.2

ตัวเลขสุ่ม (Random Number) ค่าหนึ่งจะถูกสุ่มขึ้น มีค่าเท่ากับ n_1 ตัวเลขสุ่มนี้จะต้องสุ่มมาจากกลุ่มของตัวเลขที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 และมีการกระจายของความน่าจะเป็นเป็นแบบสม่ำเสมอ (Uniform Distribution) คือโอกาสที่จะสุ่มได้ตัวเลขแต่ละตัวจะเท่ากัน ดังนั้นค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวเลขสุ่มทุกตัวจะมีค่าเท่ากันและมีค่าเท่ากับ 1 และสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นได้ดังรูปที่ 2.1 จากนั้นก็คำนวณค่าการกระจายสะสมของตัวเลขสุ่ม $F_N(n_1)$ จะพบว่าถ้าตัวเลขสุ่ม (N) มีการกระจายแบบสม่ำเสมอจะได้ค่าฟังก์ชันของการกระจายสะสมเมื่อ $N = n_1$ มีค่าเท่ากับ n_1 ถ้าเราทราบฟังก์ชันการกระจายสะสมของตัวแปรสุ่ม X เราก็จะสามารถหาค่า x_1 ที่ทำให้ฟังก์ชันของการกระจายสะสมของ X ที่ $X = x_1$ มีค่าเท่ากับฟังก์ชันของการกระจายสะสมของ N ที่ $N = n_1$ ค่า x_1 ที่ได้ก็จะเป็นค่าของตัวแปรสุ่มที่เลือกได้

ถ้า Y เป็นฟังก์ชันของ $X_1,X_2,...,X_n$ และทราบฟังก์ชันของการกระจายสะสมของตัวแปร X เหล่านี้ เราก็จะทำการสุ่มค่าของตัวแปรต่างๆทุกตัว แล้วนำมาแทนค่าในฟังก์ชัน $g(X_1,X_2,...,X_n)$ ก็จะได้ค่าของ Y และเมื่อทำการสุ่มเช่นนี้หลายๆครั้งก็จะได้กลุ่มของค่า Y ดังนี้

$Y_1 \;= g_1(X_{1,1},X_{2,1},...,X_{n,1})$ จากการสุ่มครั้งที่ 1

$Y_2 \;= g_2(X_{1,2},X_{2,2},...,X_{n,2})$ จากการสุ่มครั้งที่ 2

$Y_m \;= g_m(X_{1,m},X_{2,m},...,X_{n,m})$ จากการสุ่มครั้งที่ m

แล้วนำกลุ่มของค่า Y ที่ได้ไปหาค่า $\bar{Y}$ และ σ_Y และการกระจายของ Y

2.2 ทฤษฎีทางสถิติ (Statistical Theory)

ทฤษฎีทางสถิติสามารถนำมาใช้ประโยชน์ในการหาฟังก์ชันของการกระจายสะสม และฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

2.2.1 การหาฟังก์ชันของการกระจายสะสมและฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

ฟังก์ชันทุกๆฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติตามข้อ 2.1.1 สามารถที่จะเป็นฟังก์ชันของการกระจายสะสมได้ แต่มีเพียงบางฟังก์ชันเท่านั้นที่มีความเหมาะสมและให้ลักษณะใกล้เคียงกับการกระจายที่เกิดขึ้นจริงของตัวแปรสุ่มหนึ่งๆ เนื่องจากการสร้างฟังก์ชันของการกระจายสะสมขึ้นเองนั้นมีความยุ่งยาก ในที่นี้จึงพยายามที่จะนำฟังก์ชันที่มีใช้อยู่ทั่วไปดังข้อ 2.2.2 มาเลือกใช้ให้เหมาะสมกับตัวแปรสุ่มนั้นๆ และทดสอบความเหมาะสมโดยใช้การทดสอบแบบไคสแควร์ (Chi-Square Test) [6] ซึ่งมีวิธีการดังนี้

พิจารณาข้อมูล n ตัว ที่จัดข้อมูลเป็นช่วงๆ k ช่วง มีความถี่ในแต่ละช่วง(จำนวนของข้อมูลที่มีค่าอยู่ในช่วงต่างๆที่แบ่งไว้) เป็น $n_1,n_2,n_3,...,n_k$ และค่าความถี่ที่ได้ตามฟังก์ชัน

ของการกระจายสะสมที่เลือกในแต่ละช่วงเป็น $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ นำมาหาค่า X^2 โดย

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - e_i)^2 / e_i \qquad (2.18)$$

ซึ่งมีการกระจายแบบไคสแควร์ โดยมีระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) $f = k-1$ อย่างไรก็ตาม ถ้ามีพารามีเตอร์บางตัวของฟังก์ชันของการกระจายสะสมที่ไม่สามารถหาค่าได้ และต้องประมาณจากข้อมูล จะต้องลดขั้นของความเป็นอิสระออกไปทีละ 1 สำหรับพารามีเตอร์แต่ละตัวที่ประมาณขึ้นมา

โดยหลักการนี้ถ้าฟังก์ชันขอการกระจายสะสมที่เลือกให้ค่า

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - e_i)^2 / e_i < C_{1-\alpha} \qquad (2.19)$$

โดยที่ $C_{1-\alpha}$ เป็นค่าที่เหมาะสมของการกระจายแบบไคสแควร์ ที่ความน่าจะเป็นสะสม $1-\alpha$ แล้ว การกระจายทางทฤษฎีที่เลือกจะเป็นแบบจำลองที่ยอมรับได้โดยมีระดับนัยสำคัญ (Significance Level) เท่ากับ

การใช้การทดสอบแบบไคสแควร์เพื่อทดสอบฟังก์ชัน การกระจายสะสมที่จะนำมาใช้กับข้อมูลนั้น โดยทั่วไปแล้วจะได้ผลเป็นที่น่าเชื่อถือเมื่อค่า $k > 5$ และค่า $e_i > 5$

2.2.2 <u>ฟังก์ชันของการกระจายสะสม</u>

1. การกระจายแบบปกติ (Normal Distribution)

เป็นรูปแบบของการกระจายที่เป็นที่รู้จักกันดี และใช้กันมาก เรียกอีกอย่างหนึ่งว่าการกระจายแบบเกาส์ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right] \qquad (2.20)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

โดยที่ x เป็นค่าตัวแปรสุ่ม

$\bar{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม

และ σ เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม

กราฟของฟังก์ชั่นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการกระจายแบบนี้จะเป็นดังรูปที่ 2.3

2. <u>การกระจายแบบปกติ-มาตรฐาน (Standard Normal Distribution)</u>

เป็นการกระจายแบบปกติที่มีค่า $\bar{X} = 0$ และ $\sigma = 1$ มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ

$$f_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) \qquad (-\infty < s < \infty) \tag{2.21}$$

โดยที่ $s = (x-\bar{X})/\sigma$

กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นจะมีลักษณะคล้ายกับการกระจายแบบปกติ เพียงแต่มีจุดสูงสุดที่ $x = 0$ ดังรูป 2.4

3. <u>การกระจายแบบล็อก-ปกติ (Log-Normal Distribution)</u>

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม และการกระจายของ ln(X) มีลักษณะเป็นการกระจายแบบปกติแล้ว ตัวแปรสุ่ม X จะมีการกระจายแบบล็อก-ปกติ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\xi x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2\right] \qquad (0 < x < \infty) \tag{2.22}$$

โดยที่ $\lambda = E(\ln(X))$

และ $\xi = Var(\ln(X))$

กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นจะมีลักษณะดังรูปที่ 2.5

ความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ของการกระจายแบบปกติและการกระจายแบบล็อก-ปกติ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\lambda = \ln(\bar{X}) - 0.5\zeta^2 \qquad (2.23)$$

และ

$$\zeta = \ln(1 + \delta^2) \qquad (2.24)$$

ถ้า $\delta = \sigma/\bar{X}$ มีค่า < 0.30 แล้ว $\ln(1 + \delta^2)$ มีค่าประมาณ

ดังนั้น ζ = สัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนมีค่าเท่ากับ $\delta = \sigma/\bar{X}$

2.3 ทฤษฎีของความน่าเชื่อถือทางโครงสร้าง

การวิเคราะห์หาค่าความน่าเชื่อถือทางโครงสร้างจะใช้หลักการทางสถิติ และความน่าจะเป็นมาใช้ประกอบ โดยถือว่าตัวประกอบต่างๆที่มีผลต่อกำลังขององค์อาคารเป็นตัวแปรสุ่มมีค่าไม่คงที่ มีการกระจาย ซึ่งสามารถหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและฟังก์ชันของการกระจายสะสมได้ การที่ตัวประกอบของกำลังเป็นตัวแปรสุ่ม ก็จะทำให้กำลังขององค์อาคารมีลักษณะเป็นตัวแปรสุ่มด้วย ในลักษณะเดียวกันการที่น้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อองค์อาคารมีค่าไม่คงที่ และจัดเป็นตัวแปรสุ่มก็จะทำให้แรงที่กระทำ เช่น โมเมนต์ แรงเฉือน ที่กระทำต่อองค์อาคารมีค่าไม่คงที่และมีลักษณะเป็นตัวแปรสุ่ม

การที่กำลังขององค์อาคาร และแรงที่กระทำมีลักษณะเป็นตัวแปรสุ่ม ทำให้มีโอกาสเกิดเหตุการณ์ที่กำลังขององค์อาคารน้อยกว่าแรงที่กระทำ อันจะทำให้เกิดความวิบัติขึ้นได้ ทฤษฎีของความน่าเชื่อถือทางโครงสร้างจึงถูกนำมาใช้เพื่อคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดความวิบัติ และคำนวณค่าตัวประกอบความปลอดภัยที่ทำให้ค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดความวิบัติเป็นที่ยอมรับได้

2.3.1 หลักการทั่วไป

ถ้ากำหนดให้ X เป็นกำลังขององค์อาคาร และ Y เป็นแรงที่กระทำต่อองค์อาคาร ถ้า X มีค่ามากกว่า Y คือองค์อาคารนั้นมีกำลังมากกว่าแรงที่กระทำ โครงสร้างนั้นจะยังคงใช้งานอยู่ได้ แต่ถ้า X น้อยกว่าหรือเท่ากับ Y คือองค์อาคารนั้นมีกำลังน้อยกว่าแรงที่กระทำ

หรือโครงสร้างไม่สามารถต้านทานแรงได้ จึงวิบัติและใช้งานไม่ได้

ให้ $P(X = x)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับ x

$P(X = y)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับ y

$P(X \leqslant y)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ X จะน้อยกว่า y

$$= \sum_{\text{ทุกค่า } X \leqslant y} P(X = y)$$

$P(Y = y)$ เป็นความน่าจะเป็นที่ Y จะเท่ากับ y

p_F เป็นความน่าจะเกิดการวิบัติ

$P(A)$ เป็นความน่าจะเกิดเหตุการณ์ A

เมื่อ X ,Y เป็นอิสระเชิงสถิติ (Statistically Independent) ความน่าจะเกิดการวิบัติจะเท่ากับ

$$P(X \leqslant Y) = \sum_{X \leqslant Y} P(X = x)P(Y = y) \qquad (2.25)$$

หรือ

$$P(X \leqslant Y) = \sum_{\text{all } y} P(X \leqslant y)P(Y = y) \qquad (2.26)$$

และถ้า $P(X = y)$ และ $P(Y = y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่

$$P(X = x) = f_X(x)$$

$$P(X = y) = f_X(y)$$

$$P(X \leqslant y) = F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)dx$$

$$P(Y = y) = f_Y(y)$$

จะได้

$$p_F = \int_{X \leqslant y} f_X(x)f_Y(y)dxdy \qquad (2.27)$$

หรือ $$p_F = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy \qquad (2.28)$$

ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 2.6

จากรูปที่ 2.6 พื้นที่ภายใต้ส่วนที่ซ้อนกันของกราฟ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ จะสามารถใช้เปรียบเทียบความน่าจะเกิดการวิบัติได้อย่างประมาณ ถ้าพื้นที่ใต้ส่วนที่ซ้อนกันมีค่ามาก ก็หมายความว่าความน่าจะเกิดความวิบัติมีมากด้วย เนื่องจากพื้นที่ของส่วนที่ซ้อนกันนี้เป็นตัวประกอบสำคัญที่มีผลต่อความน่าจะเกิดความวิบัติ

ดังนั้นถ้าค่าเฉลี่ยของ X และ Y ($\bar{X}$,$\bar{Y}$) ต่างกันมาก หรือการกระจายของ X และ Y มีน้อย (เส้นกราฟของ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ มีความโด่งมาก) ก็จะทำให้พื้นที่ใต้ส่วนที่ซ้อนกันมีค่าน้อย และโอกาสที่จะเกิดความวิบัติก็จะน้อยด้วย ในทำนองกลับกัน ถ้าการกระจายของ X หรือ Y มีมาก (เส้นกราฟของ $f_X(x)$ หรือ $f_Y(y)$ มีความโด่งน้อย) หรือเมื่อค่า $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$ ต่างกันน้อยจะทำให้พื้นที่ใต้ส่วนที่ซ้อนกันมีค่ามาก และโอกาสที่จะเกิดความวิบัติก็จะมากตาม ดังแสดงในรูปที่ 2.7 และ 2.8

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า โอกาสที่จะเกิดความวิบัติขึ้นอยู่กับ

1. อัตราส่วนของค่าเฉลี่ยของ X ต่อค่าเฉลี่ยของ Y
2. การกระจาย หรือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X และ Y

เนื่องจากการหาค่าความน่าจะเกิดการวิบัติ (p_F) ตามวิธีเบื้องต้นนี้มีความยุ่งยาก เพราะมักจะไม่ทราบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่แท้จริงของ X และ Y เนื่องจากข้อมูลมีไม่เพียงพอ หรือถึงแม้จะทราบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นก็ตามแต่ก็ต้องทำการอินทริเกรตฟังก์ชันที่ยุ่งยากซับซ้อน จึงไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในทางปฏิบัติ

โดยทั่วไปแล้วข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จะเพียงพอที่จะทำให้เราหาค่ากลาง และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลได้เท่านั้น ดังนั้นจึงควรหาวิธีในการวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือทางโครงสร้างโดยใช้ค่าทางสถิติเพียงสองตัวนี้ ซึ่งวิธีการวิเคราะห์ดังกล่าวมีสองวิธีคือ

- วิธีประมาณอันดับที่หนึ่ง (First Order)
- วิธีโมเมนต์ที่สองอันดับที่หนึ่ง (First-Order Second-Moment,FOSM.)

2.3.2 <u>วิธีประมาณอันดับที่หนึ่ง [8]</u>

ในสภาพการใช้งานจะต้องกำหนดฟังก์ชันการใช้งาน (Performance Function) ในรูปของ

$$Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{2.29}$$

เมื่อ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรที่มีผลต่อความน่าเชื่อถือทางโครงสร้าง เช่น กำลังขององค์อาคาร และ แรงที่กระทำต่อองค์อาคาร โดยในที่นี้จะกำหนดให้

$$Z = g(X,Y) \quad = \ln(X/Y) \leqslant z_o \tag{2.30}$$

โดยที่ z_o เป็นขอบเขตของการใช้งาน ซึ่งในกรณีนี้ z_o มีค่าเท่ากับ 0 หมายความว่า ถ้า z มากกว่า 0 โครงสร้างนั้นยังใช้งานได้ แต่ถ้า z มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 โครงสร้างนั้นจะเกิดการวิบัติ ดังนั้นความน่าจะเกิดการวิบัติจึงมีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นที่ z จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งเขียนเป็นสมการได้คือ

$$p_F \quad = P(z \leqslant 0) \tag{2.31}$$

ถ้าให้ X และ Y มีการกระจายเป็นแบบล็อก-ปกติ ค่า X/Y จะมีการกระจายเป็นแบบล็อก-ปกติด้วย และ z = ln(X/Y) จะมีการกระจายเป็นแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย λ_z เท่ากับ

$$\begin{aligned} \lambda_z &= \lambda_X - \lambda_Y \\ &= [\ln(\bar{X}) - 0.5\,\xi_X^2] - [\ln(\bar{Y}) - 0.5\,\xi_Y^2] \\ &= \ln(\bar{X}/\bar{Y}) - 0.5[\ln(1 - \Omega_X^2) - \ln(1 - \Omega_Y^2)] \end{aligned}$$

$$= \ln(\bar{X}/\bar{Y}) - \ln\sqrt{\frac{1-\Omega_X^2}{1-\Omega_Y^2}}$$

$$\lambda_z = \ln\left(\bar{X}/\bar{Y}\sqrt{\frac{1-\Omega_Y^2}{1-\Omega_X^2}}\right) \qquad (2.32)$$

และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ξ_z เท่ากับ

$$\xi_z^2 = \xi_X^2 + \xi_Y^2$$

$$= \ln(1+\Omega_X^2) + \ln(1+\Omega_Y^2)$$

$$\xi_z^2 = \ln[(1+\Omega_X^2)(1+\Omega_Y^2)] \qquad (2.33)$$

ซึ่งถ้า Ω_X และ Ω_Y มีค่าน้อยกว่า 0.3 จะได้ $\frac{1-\Omega_Y^2}{1-\Omega_X^2}$ มีค่าประมาณ 1 ทำให้

$$\lambda_z = \ln\left(\bar{X}/\bar{Y}\sqrt{\frac{1-\Omega_Y^2}{1-\Omega_X^2}}\right)$$

$$\lambda_z = \ln(\bar{X}/\bar{Y}) \qquad (2.34)$$

และ

$$\xi_z^2 = \ln(1+\Omega_X^2)(1+\Omega_Y^2)$$

$$= \Omega_X^2 + \Omega_Y^2 \qquad (2.35)$$

จากค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Z ที่ได้ จะสามารถหาความน่าจะเป็นที่ z จะมีค่าเท่ากับ 0 หรือความน่าจะเกิดการวิบัติได้คือ

$$p_F = \Phi\left(\frac{0-\lambda_z}{\xi_z}\right)$$

หรือ

$$p_F = 1 - \Phi(\lambda_z/\xi_z)$$

$$= 1 - \Phi(\beta) \qquad (2.36)$$

โดยที่

$\Phi(\beta)$ เป็นค่าฟังก์ชันของการกระจายสะสมของการกระจายแบบปกติมาตรฐาน ที่ $s = \beta$

β เป็นค่าดัชนีของความปลอดภัย (Safety Index)

ฟังก์ชันการใช้งานอาจกำหนดได้ในรูปของ

$$Z \quad = g(X,Y) \qquad = X - Y = 0 \tag{2.37}$$

โดยสมมติให้ X และ Y มีการกระจายเป็นแบบปกติ ดังนั้น Z = X - Y จึงมีการกระจายเป็นแบบปกติด้วย โดยมีค่าเฉลี่ย (Z) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ

$$\bar{Z} \quad = \bar{X} - \bar{Y} \tag{2.38}$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \tag{2.39}$$

และค่าความน่าจะเกิดการวิบัติจะเท่ากับความน่าจะเป็นที่ z จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0

$$p_F = \Phi(-\bar{Z}/\sigma_Z) = 1 - \Phi(\bar{Z}/\sigma_Z)$$
$$= 1 - \Phi(\beta)$$

วิธีดังกล่าวข้างต้นเป็นการวิเคราะห์หาค่าความน่าจะเกิดการวิบัติ หรือหาค่าดัชนีของความปลอดภัย ในทางกลับกัน เราก็จะสามารถหาค่าตัวประกอบความปลอดภัย ซึ่งในที่นี้คือตัวคูณลดกำลัง (ϕ_n) ได้โดยกำหนดค่าดัชนีความปลอดภัยก่อนแล้วจึงย้อนกลับไปหาค่าได้ โดยการออกแบบจะต้องทำให้

$$p_F < \Phi(-\beta) \tag{2.40}$$

ดังนั้น $\lambda_Z / \zeta_Z > \beta$

$$\ln(\bar{X}/\bar{Y}) > \beta\sqrt{\Omega_X^2 + \Omega_Y^2}$$

ที่ขอบเขตการใช้งาน

$$\ln(\bar{X}/\bar{Y}) = \beta\sqrt{\Omega_X^2 + \Omega_Y^2}$$

โดยการประมาณ จะได้

$$\sqrt{\Omega_X^2 + \Omega_Y^2} = 0.75(\Omega_X + \Omega_Y) \tag{2.41}$$

ดังนั้น

$$\ln(\bar{X}/\bar{Y}) = 0.75\beta(\Omega_X + \Omega_Y)$$

$$\bar{X}/\bar{Y} = \exp[0.75\beta(\Omega_X + \Omega_Y)]$$

$$\bar{X}\exp(-0.75\beta\Omega_X) = \bar{Y}\exp(0.75\beta\Omega_Y) \tag{2.42}$$

$$\bar{\phi}\bar{X} = \bar{\gamma}\bar{Y} \tag{2.43}$$

โดยที่ $\bar{\phi}$ และ $\bar{\gamma}$ เป็นตัวคูณลดกำลัง และตัวคูณสำหรับน้ำหนักบรรทุก โดยใช้คูณกับค่าเฉลี่ย $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$

แต่ในการออกแบบนั้น ค่ากำลังที่ออกแบบจะไม่เท่ากับค่ากำลังเฉลี่ย เราสามารถหาค่าตัวคูณลดกำลังเพื่อใช้คูณกับกำลังที่ออกแบบได้โดย

$$\bar{\phi}\bar{X} = \phi_n X_n$$

$$\phi_n = \bar{\phi}\bar{X}/X_n \tag{2.44}$$

จากการที่วิธีวิเคราะห์นี้ทำโดยการสมมติให้ X/Y มีการกระจายเป็นแบบล็อก-ปกติ ดังนั้นค่าความน่าจะเกิดการวิบัติที่ได้จึงอาจมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง โดยความคลาดเคลื่อนนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ p_F ถ้าค่า p_F มากกว่า 10^{-3} แล้ว การประมาณการกระจายของ X/Y จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยมาก แต่ถ้าค่า p_F มีค่าน้อยกว่า 10^{-5} การประมาณการกระจายของ X/Y จะทำให้ค่า p_F ที่คำนวณได้มีความคลาดเคลื่อนมาก อย่างไรก็ตาม ในการวิเคราะห์หาค่าตัวคูณลดกำลังสำหรับองค์อาคารชนิดต่างๆจะใช้ค่าดัชนีความปลอดภัยประมาณ 3.0 ถึง 3.5 ซึ่งให้ค่า p_F มีค่าอยู่ระหว่าง 10^{-4} ถึง 10^{-3} อันอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนไปบ้าง

2.3.3 วิธีโมเมนต์ที่สองอันดับที่หนึ่ง [7]

เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้หาค่าความน่าจะเกิดการวิบัติได้ โดยใช้กับตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบปกติ และยังใช้กับตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบอื่นได้ด้วยโดยทำให้เป็นการกระจายแบบปกติ-เทียบเท่าก่อน ค่าความน่าเชื่อถือหรือค่าความปลอดภัยที่วิเคราะห์ได้จะอยู่ในรูปของค่าดัชนีของความปลอดภัย (Safety Index) ใช้สัญญลักษณ์ β

ในสภาพการใช้งานจะต้องกำหนดฟังก์ชันการใช้งาน (Performance Function) ขึ้นในรูปของ

$$g(X) = g(X_1,X_2,\ldots,X_n) = 0 \tag{2.45}$$

เมื่อ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ เป็นตัวแปรที่มีผลต่อกำลังและแรงที่กระทำต่อองค์อาคาร

ฟังก์ชันนี้จะแบ่งส่วนที่ทำให้องค์อาคารใช้งานได้และส่วนที่ทำให้องค์อาคารเกิดการวิบัติ ถ้าฟังก์ชันการใช้งาน $g(X)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม 2 ตัวคือ X_1 และ X_2 กราฟของฟังก์ชันการใช้งานบนแกนของตัวแปร X_1 และ X_2 จะแสดงได้ดังรูปที่ 2.9

กำหนดให้ X_i' เป็นตัวแปรลดทอน (reduced variates) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{x_i - \overline{x}_i}{\sigma_{x_i}}$ ดังนั้นจะเปลี่ยนรูปฟังก์ชันจาก $g(X)$ ให้อยู่ในรูปของ $g(X')$ ได้คือ

$$g(X) = g(X') = g(X_1'\sigma_{x_i} + \overline{X}_1,\ldots,X_n'\sigma_{x_n} + \overline{X}_n) = 0 \tag{2.46}$$

รูปที่ 2.10 แสดงกราฟของฟังก์ชัน $g(X')$ บนแกนของตัวแปรลดทอน ,X_1' และ X_2' จะพบว่าถ้าเส้นกราฟหรือพื้นผิวของสมการ $g(X') = 0$ เลื่อนเข้าใกล้จุดกำเนิดมากขึ้นก็จะทำให้บริเวณของ $g(X')>0$ มีพื้นที่ลดลงความน่าจะเกิดการวิบัติก็จะเพิ่มขึ้น ดังนั้นตำแหน่งของพื้นผิวของสมการ $g(X') = 0$ จึงเป็นเครื่องเปรียบเทียบได้ถึงความปลอดภัยหรือความน่าเชื่อถือ

ของโครงสร้าง ตำแหน่งของพื้นผิวนี้แทนได้ด้วยระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดบนพื้นผิวไปยังจุดกำเนิด จุดบนพื้นผิวจุดนี้ถือเป็นจุดที่มีแนวโน้มจะเกิดการวิบัติสูงสุด (most probable failure point ,x_i^*) และระยะทางที่สั้นที่สุดนี้เรียกว่าดัชนีของความปลอดภัย β

จุดที่มีแนวโน้มจะเกิดการวิบัติสูงสุดนี้จะต้องเป็นจุดที่อยู่บนผิวของฟังก์ชันการใช้งานนั่นคือเป็นจุดที่ทำให้

$$g(X^*_1, X^*_2, \ldots, X^*_n) = 0 \qquad (2.47)$$

นอกจากนี้จะต้องเป็นจุดที่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด นั่นคือเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวที่จุดนี้จะต้องผ่านจุดกำเนิด ดังรูปที่ 2.10 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวที่จุดใดๆคือ

$$\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_1'}, \frac{\partial g}{\partial X_2'}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial X_n'}\right)}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)^2}} \qquad (2.48)$$

และโคไซน์ทิศทาง (direction cosine, α_i^*) ของแกน X_i' คือ $\dfrac{\frac{\partial g}{\partial X_i'}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)^2}}$

ดังนั้นในลักษณะนี้ $X_i'^* = -\alpha_i^* \beta$ (2.49)

การวิเคราะห์ตามวิธี FOSM. นี้จะให้ผลเหมือนกับสมการ 2.27 และ 2.28 โดยที่บริเวณที่ $X \leqslant Y$ จะแบ่งโดยฟังก์ชันการใช้งานที่เป็นสมการของเส้นตรงหรือระนาบ

ฟังก์ชันการใช้งานอาจอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น (Linear Equation) หรือสมการไร้เชิงเส้น (Nonlinear Equation) ดังรูป 2.11 ซึ่งให้ผลการวิเคราะห์ที่แตกต่างกัน

จากรูปที่ 2.11.ก นั้นฟังก์ชันการใช้งานเป็นสมการเชิงเส้น ทำให้การวิเคราะห์ตามวิธี FOSM. ให้คำตอบที่ถูกต้อง แต่ในรูปที่ 2.11.ข และ 2.11.ค นั้น ฟังก์ชันของการใช้งานไม่เป็นแบบเชิงเส้น ในการวิเคราะห์ตามวิธี FOSM. จะต้องแทนฟังก์ชันการใช้งานด้วยสมการเชิงเส้นหรือระนาบที่สัมผัสกับพื้นผิวเดิมที่จุดแนวโน้มที่จะเกิดการวิบัติสูงสุด ดังนั้นค่าความน่าจะ

เกิดการวิบัติที่ได้จึงเป็นค่าที่ไม่ถูกต้อง ในกรณีของรูปที่ 2.11.ข ที่เส้นกราฟหรือพื้นผิวโค้งนูนเข้าหาจุดกำเนิด จะได้ค่าความน่าจะเกิดการวิบัติมากกว่าที่เป็นจริง ทำให้การวิเคราะห์ได้ผลในทางปลอดภัย ส่วนในรูปที่ 2.11.ค ที่เส้นกราฟหรือพื้นผิวโค้งเว้าเข้าหาจุดกำเนิด จะทำให้ได้ค่าความน่าจะเกิดการวิบัติน้อยกว่าที่เป็นจริง การวิเคราะห์จึงได้ผลในทางไม่ปลอดภัย

วิธี FOSM. สามารถนำไปใช้หาค่าดัชนีของความปลอดภัยเมื่อกำหนดค่าตัวประกอบความปลอดภัยได้ และในทางกลับกันก็สามารถใช้หาค่าตัวประกอบความปลอดภัยเมื่อกำหนดค่าดัชนีของความปลอดภัยได้ด้วย

การหาค่าดัชนีของความปลอดภัยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. สมมุติจุดที่มีแนวโน้มจะเกิดการวิบัติสูงสุดขึ้น แล้วหาค่า $x_1'^*$ จาก

$$x_1'^* = \frac{x_i^* - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}} \qquad (2.50)$$

2. หาค่า $\left(\frac{\partial g}{\partial x_i'}\right)_*$ และ α_i^* ที่จุด $x_1'^*$
3. แทนค่า α_1^* ลงในสมการ

$$x_1'^* = -\alpha_1^*\beta = \frac{x_i^* - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}} \qquad (2.51)$$

จะได้

$$x_1^* = \bar{X}_1 - \alpha_i^*\beta\sigma_{x_i} \qquad (2.52)$$

4. แทนค่า x_1^* ลงในสมการฟังก์ชันการใช้งาน $g(X^*) = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า β
5. ใช้ค่า β ที่ได้จากข้อ 4. ไปหาค่า $x_1'^*$ จาก $x_1'^* = \alpha_1^*\beta$
6. ทำตามวิธีในข้อ 2.-5. จนกระทั่งค่า β ที่ได้จากการคำนวณสองครั้งหลังเท่ากัน

การหาค่าตัวประกอบความปลอดภัยมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าดัชนีความปลอดภัยที่ต้องการ
2. สมมุติจุดแนวโน้มจะเกิดการวิบัติสูงสุดขึ้น แล้วหาค่า $x_i'^*$ จากสมการที่ 2.50
3. หาค่า $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*$ และ α_i^* ที่จุด $x_i'^*$
4. แทนค่า α_i^* ลงในสมการ 2.51

   จะได้ $$x_i^* = \bar{X}_i - \alpha_i^* \beta \sigma_{X_i} \qquad (2.53)$$

5. ทำตามวิธีในข้อ 2.-4. จนกระทั่งค่า x_i^* ที่ได้จากการคำนวณสองครั้งมีค่าเท่ากัน
6. ค่าตัวประกอบความปลอดภัยสำหรับตัวแปรแต่ละตัวจะเท่ากับ x_i^* / x_i^n โดยที่ X_i^n เป็นค่าที่ใช้ในการออกแบบของ X_i

การเปลี่ยนการกระจายที่ไม่เป็นแบบปกติให้เป็นแบบปกติ-เทียบเท่ามีหลักการคือ

1. ให้ถือว่าความน่าจะเป็นสะสมของการกระจายที่ไม่เป็นแบบปกตินั้นเท่ากับความน่าจะเป็นสะสมของการกระจายแบบปกติที่จุดที่มีแนวโน้มจะเกิดการวิบัติสูงสุด ดังสมการ

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \bar{X}_i^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{X_i}(x_i^*) \qquad (2.54)$$

โดยที่

$\bar{X}_i^N, \sigma_{X_i}^N$ = ค่ากลางและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการกระจายแบบปกติ-เทียบเท่าของตัวแปรสุ่ม X_i

$F_{X_i}(x_i^*)$ = ค่าฟังก์ชันของการกระจายสะสมที่แท้จริงของ X_i ที่จุด x_i^*

$\Phi(-)$ = ความฟังก์ชันของการกระจานสะสมของการกระจายแบบปกติ-มาตรฐาน

ดังนั้นจะได้

$$\bar{X}_i^N = x_i^* - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i^*)\right] \qquad (2.55)$$

2. ค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการกระจายที่ไม่เป็นแบบปกติจะเท่ากับค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการกระจายแบบปกติที่จุดที่มีแนวโน้มจะเกิดการวิบัติสูงสุด ดังสมการ

$$\frac{1}{\sigma^N_{X_i}} \phi\left(\frac{x_i^* - \bar{X}_i^N}{\sigma^N_{X_i}}\right) = f_{X_i}(x_i^*) \tag{2.56}$$

โดยที่

$\phi(-)$ = ค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการกระจายแบบปกติ-มาตรฐาน

ดังนั้นจะได้

$$\sigma^N_{X_i} = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\}}{f_{X_i}(x_i^*)} \tag{2.57}$$

จากนั้นก็จะใช้ค่า $\bar{X}_i^N$ และ $\sigma^N_{X_i}$ ที่ได้นี้เป็นค่ากลางและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ตามวิธี FOSM.

ถ้าตัวแปรสุ่มมีการกระจายเป็นแบบล็อก-ปกติ

$$\bar{X}_i^N = x_i^*[1 - \ln(x_i^*) + \lambda_{X_i}] \tag{2.58}$$

$$\sigma^N_{X_i} = x_i^* \zeta_{X_i} \tag{2.59}$$