ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3

นายจำเริญ อนันตธรรมรส

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2553
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

EFFECTS OF USING PHASE-METHOD COMBINATION MODEL IN ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES ON GEOMETRIC THOUGHT AND ABILITY IN WRITING PROOFS OF NINTH GRADE STUDENTS

Mr. Jamroen Anantathamros

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Education Program in Mathematics Education
Department of Curriculum, Instruction and Educational Technology
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2010

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อ ความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถใน การเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่3
โดย	นายจำเริญ อนันตธรรมรส
สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

..... คณบดีคณะครุศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย กาญจนวาสี)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร.สุพัตรา ผาติวิสันต์)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จำเริญ อนันตธรรมรส : ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3. (EFFECTS OF USING PHASE-METHOD COMBINATION MODEL IN ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES ON GEOMETRIC THOUGHT AND ABILITY IN WRITING PROOFS OF NINTH GRADE STUDENTS) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : รศ.ดร.อัมพร ม้าคนอง, 151 หน้า

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์คือ

1) ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

2) เปรียบเทียบความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3) เปรียบเทียบความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนวัดราชบพิธ จำนวน 80 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 40 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุมจำนวน 40 คน โดยนักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และนักเรียนกลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลคือแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตที่มีค่าความเที่ยง 0.7586 และแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ การวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ความถี่ ค่ามัชฌิมเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที (t-test)

ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับเป็นจำนวนมากที่สุด

2. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับ 3 กับ ระดับ 4 มากกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา ลายมือชื่อนิสิต จำเริญ อนันตธรรมรส

สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ปีการศึกษา 2553

5183314227 : MAJOR MATHEMATICS EDUCATION

KEYWORDS : PHASE-METHOD COMBINATION MODEL / GEOMETRIC THOUGHT / ABILITY IN WRITING PROOFS

JAMROEN ANANTATHAMROS : EFFECTS OF USING PHASE- METHOD COMBINATION MODEL IN ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES ON GEOMETRIC THOUGHT AND ABILITY IN WRITING PROOFS OF NINTH GRADE STUDENTS. ADVISOR : ASSOC. PROF. AUMPORN MAKANONG, Ph.D., 151 pp.

The purposes of this research were : 1) to study geometric thoughts of students between groups being taught by using phase-method combination model and by conventional approach 2) to compare geometric thoughts of students between groups being taught by using phase-method combination model and by conventional approach 3) to compare abilities in writing proof of students between groups being taught by using phase-method combination model and by conventional approach.

The sample consisted of 80 ninth grade students in the 2010 academic year of Wat Rajabopit School. They were divided into two groups: an experimental group with 40 students and a control group with 40 students. Students in the experimental group were taught by using phase-method combination model in organizing mathematics learning activities and those in the control group were taught by conventional approach. The research instruments were the test of geometric thought levels with the reliability of 0.7586 and the ability test for writing proof. The data were analyzed by using frequency, arithmetic mean, standard deviation, and t-test .

The results of the study revealed that :

1) After being taught by using phase-method combination model in organizing mathematics learning activities, most of students had two-level increase of geometric thoughts.

2) The number of students in the experimental group who had level three and level four of geometric thoughts after being taught by using phase-method combination model were more than that of students in conventional group.

3) The abilities in writing proof of the students in the experimental group after being taught by using phase-method combination model were higher than those of students in conventional group at the .05 level of significance.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department : Curriculum instruction and Educational Technology Student's Signature Jamroen.

Field of Study : Mathematics Education Advisor's Signature Aumporn Makanong.

Academic Year : 2010

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความอนุเคราะห์ทุนอุดหนุนในการทำวิจัยจากบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และความกรุณาอย่างยิ่งจากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก รองศาสตราจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง ซึ่งท่านได้สละเวลาให้คำปรึกษา คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ที่มีคุณค่ายิ่ง และตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่ จนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้เป็นอย่างสูง

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะอันเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยฉบับนี้ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้เสียสละเวลาให้ความช่วยเหลือ ให้คำแนะนำในการแก้ไขเครื่องมือในการวิจัย จนเป็นเครื่องมือที่สมบูรณ์ขอขอบพระคุณผู้บริหาร คณะครู นักเรียน โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย และโรงเรียนวัดราชบพิธที่ได้ให้ความร่วมมือในการทดลองใช้เครื่องมือและเก็บข้อมูลอย่างดียิ่ง

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ Mr. Emmanouil Nikoloudakis ผู้คิดค้นโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ที่ได้เสียสละเวลาในการตอบอีเมลแก่ผู้วิจัย ทำให้ผู้วิจัยมีความเข้าใจในโมเดลอันเป็นประโยชน์ในการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณแม่ ที่เป็นกำลังใจในการทำงานให้สำเร็จลุล่วงไปได้ ขอขอบคุณ พี่ เพื่อน น้อง ๆ ทุกคนที่ให้กำลังใจ ให้คำปรึกษา และมีส่วนช่วยให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ศูนย์บรรณสารสนเทศทางการศึกษา คณะครุศาสตร์ เจ้าหน้าที่บัณฑิตวิทยาลัยและทุกท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ตลอดจนให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยในระหว่างการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย..... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..... จ

กิตติกรรมประกาศ..... ฉ

สารบัญ..... ช

สารบัญตาราง..... ญ

สารบัญภาพ..... ฏ

บทที่ 1 บทนำ..... 1

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา..... 1

วัตถุประสงค์ของการวิจัย..... 5

สมมติฐานของการวิจัย..... 5

ขอบเขตของการวิจัย..... 6

คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย..... 7

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ..... 10

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... 11

1. โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน..... 12

1.1 ขั้นตอนการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน..... 12

1.2 เอกสารที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมตามโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน. 15

2. ความคิดทางเรขาคณิต 18

2.1 ระดับความคิดทางเรขาคณิต..... 18

2.2 การกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต..... 20

2.3 ลักษณะสำคัญของระดับความคิดทางเรขาคณิต..... 21

2.4 ขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต..... 22

2.5 การจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิต 23
อยู่ในแต่ละระดับ.....

2.6 ความสามารถของนักเรียนกับระดับความคิดทางเรขาคณิต 28

3. การพิสูจน์ทางเรขาคณิต..... 33

3.1 ความหมายของการพิสูจน์..... 33

3.2 ความสำคัญของการพิสูจน์..... 33

หน้า

3.3 ประเภทของการพิสูจน์ 34
3.4 กระบวนการพิสูจน์..... 34
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... 35
4.1 งานวิจัยต่างประเทศ..... 35
4.2 งานวิจัยในประเทศไทย..... 37
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย..... 39
1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... 39
2. การออกแบบการวิจัย..... 40
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง..... 40
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 42
4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง..... 42
4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล..... 44
5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล..... 51
5.1 ขั้นเตรียมการ..... 52
5.2 ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล..... 52
6. การวิเคราะห์ข้อมูล..... 53
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย 53
7.1 สถิติที่ใช้ตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือ..... 53
7.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล..... 54
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล..... 55
ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ..... 55
ผลการวิเคราะข้อมูลเชิงคุณภาพ..... 64
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ..... 70
สรุปผลการวิจัย..... 72
อภิปรายผลการวิจัย..... 73
ข้อเสนอแนะ..... 74
รายการอ้างอิง..... 75

หน้า

ภาคผนวก..... 78
ภาคผนวก ก รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย..... 79
ภาคผนวก ข หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิและขอความร่วมมือในการวิจัย..... 81
ภาคผนวก ค เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูล..... 90
ภาคผนวก ง เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง..... 130
ภาคผนวก จ ผลการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวน (F-test) และค่ามัชฌิมเลขคณิต (t-test) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนการทดลองของกลุ่มตัวอย่าง 149
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์..... 151

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	แสดงรูปแบบการวิจัย	40
2	กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	43
3	แสดงแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยม และวงกลม	44
4	ค่า Alpha if Item Deleted ของแบบความคิดทางเรขาคณิตระดับ0.....	47
5	เกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์.....	48
6	จำนวนและร้อยละของนักเรียนจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน.....	57
7	จำนวนและร้อยละของนักเรียนจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติ.....	59
8	จำนวน ร้อยละ และปริมาณการเปลี่ยนแปลงของนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตแต่ละระดับ ของนักเรียนกลุ่มทดลอง จำแนกตามการทดสอบก่อนและหลังได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน.....	60
9	จำนวน ร้อยละ และปริมาณการเปลี่ยนแปลงของนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตแต่ละระดับ ของนักเรียนกลุ่มควบคุม จำแนกตามการทดสอบก่อนและหลังได้รับการสอนโดยวิธีปกติ.....	61
10	จำนวน ร้อยละ และผลการเปรียบเทียบความคิดทางเรขาคณิตหลังการทดลองจำแนกตามกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	62
11	แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) และค่าที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนของนักเรียน ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ.....	63
12	พฤติกรรมผู้เรียนในแต่ละระดับความคิดทางเรขาคณิต.....	92
13	การวิเคราะห์ค่า Alpha if item Deleted ของแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต....	93

ตารางที่		หน้า
14	แสดงลักษณะของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน.....	109
15	แสดงค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ก่อนเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 1.....	110
16	ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ฉบับก่อนเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 2.....	110
17	แสดงลักษณะของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน.....	120
18	ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ หลังเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 1.....	121
19	ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ก่อนเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 2.....	121
20	ค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างในปีการศึกษา 2552 ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test)	150
21	ค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนของกลุ่มตัวอย่าง ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test).....	150

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	แสดงรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ ……..	12
2	แสดงความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ.....	13
3	แสดง RECOMPP ที่พัฒนาโดย Nikoloudakis ……	15
4	แสดงการทิศทางเติมข้อความลงไปในส่วนที่ 5 ของRECOMPP……..	17
5	แสดงการทิศทางเติมข้อความลงไปในส่วนที่ 5 ของRECOMPP……..	17
6	แสดงการใช้บัตรคำประกอบการจัดกิจกรรมบรรยายรูปโดยใช้สมบัติ……..	25
7	แสดงการใช้บัตรคำประกอบการจัดกิจกรรมศึกษาความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิต ……..	26
8	แสดงการใช้การ์ดและลูกศรประกอบการจัดกิจกรรม……	27
9	แสดงการใช้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประกอบการจัดกิจกรรม.....	27
10	แสดงการรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมภายในคือ $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ และ $\hat{d}$	31
11	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในกิจกรรมการระบุชื่อของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่างๆ……	65
12	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในกิจกรรมการเรียนรู้รูปเรขาคณิตที่มีความซับซ้อน.....	66
13	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในกิจกรรมเรียนรู้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน……	67
14	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองกิจกรรมเรียนรู้ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตประเภทต่างๆ……..	67
15	แสดงการใช้ RECOMPP ประกอบการฝึกเขียนพิสูจน์.....	69

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา, 2551: 1)

เรขาคณิตเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งซึ่งมีความสำคัญต่อการดำเนินชีวิตของมนุษย์มาอย่างยาวนาน จากหลักฐานในอดีตพบว่าเมื่อประมาณ 4000 ปีก่อนคริสตศักราช ชาวบาบิโลน ได้เริ่มนำเรขาคณิตมาใช้ให้เป็นประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตทั้งในด้านการวัดพื้นที่ต่าง ๆ และการหาพื้นที่รูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย ต่อมาจนถึงประมาณ 2900 ปีก่อนคริสตศักราช ในสมัยที่อียิปต์มีความเจริญทางเรขาคณิตซึ่งเห็นได้จากการสร้างพีระมิด(สมพร เรืองโชติวิทย์, 2523: 1 – 6) และในยุคปัจจุบันมนุษย์ก็ยังคงนำเรขาคณิตมาประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันอย่างมากมาย ดังเห็นได้จาก เรขาคณิตมีบทบาทสำคัญทั้งต่อวิทยาศาสตร์ในหลายสาขารวมทั้งทางด้านศิลปะด้วย (Mammana and Villiani, 1998 cited in Dimakos, 2007: 87) จึงเห็นได้ว่าตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันมนุษย์นำความรู้เกี่ยวเรขาคณิตมาประยุกต์ใช้กันอย่างมากมาย เรขาคณิตจึงมีความสำคัญต่อการดำรงชีวิตของมนุษย์

จากความสำคัญของเรขาคณิตดังกล่าวหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กรมวิชาการ, 2544: 5) จึงกำหนดให้เรขาคณิตเป็นสาระหนึ่งของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต จึงควรมุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถนำความรู้เรขาคณิตไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน นอกจากนี้แล้วสิ่งหนึ่งที่ต้องให้ความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตคือ การสอนเขียนพิสูจน์ เพราะการพิสูจน์ถือเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่สุดที่ใช้ในเรขาคณิต (Dimakos, 2007: 1) สอดคล้องกับที่เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533: 3) ได้กล่าวโดยสรุปว่า “สิ่งที่เป็นหัวใจของการเรียนเรขาคณิตคือการพิสูจน์ เพราะการพิสูจน์นั้นจะทำให้นักเรียนฝึกรู้จักการใช้เหตุผล รู้จักวิเคราะห์

แก้ไขปัญหาอย่างมีระบบ” อีกทั้งในการเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูงนักเรียนจะต้องมีความสามารถในด้านการพิสูจน์เห็นคุณค่าและตระหนักถึงความสำคัญของการพิสูจน์(ขวัญ เพียซ้าย, 2547:1)

แต่อย่างไรก็ตามนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นส่วนใหญ่มีปัญหาการพิสูจน์ ในเรื่อง นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถแยกแยะเหตุและผลของโจทย์ได้ นักเรียนเขียนรูปเรขาคณิตไม่ได้ หรือเขียนแล้วไม่ครอบคลุมตามที่ระบุในเหตุ เมื่อกำหนดเหตุมาให้นักเรียนบอกไม่ได้ว่าผลที่ตามมาคืออะไร หรือเมื่อกำหนดผลมาให้นักเรียนบอกไม่ได้ว่ามาจากเหตุใดบ้าง (กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี, 2535: 3) สอดคล้องกับงานวิจัยของ Chaiyasang (1987: 2137 – A) ที่พบว่านักเรียนนักเรียนส่วนใหญ่ ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใน 12 โรงเรียนทางภาคตะวันออกของประเทศไทย ไม่สามารถทำการพิสูจน์ได้อย่างสมบูรณ์ นอกจากนี้แล้ว เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533: 63) ได้เปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6 พบว่า นักเรียนโรงเรียนรัฐบาลผ่านเกณฑ์แบบทดสอบทั้งฉบับเพียงร้อยละ 10.26 ในขณะที่ นักเรียนโรงเรียนเอกชนผ่านเกณฑ์แบบทดสอบทั้งฉบับ เพียงร้อยละ 1.99 จากผลการวิจัยดังกล่าวสะท้อนให้เห็นถึงความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนไทยยังอยู่ในระดับไม่เป็นที่น่าพอใจ

สิ่งที่สามารถใช้อธิบายถึงสาเหตุที่นักเรียนส่วนใหญ่มีความยากลำบากและไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนเรขาคณิตคือ ความคิดทางเรขาคณิต (Usiskin, 1982: 89) จึงเห็นได้ว่าความคิดทางเรขาคณิตนั้นมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการเรียนเรขาคณิต ซึ่งความคิดทางเรขาคณิตนั้นแบ่งออกเป็น 5 ระดับ (Van Hiele, 1984 cited in Fuys, Geddes, and Tischler, 1988: 5) คือ

ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก ในระดับนี้นักเรียนสามารถระบุบอกชื่อ เปรียบเทียบ และวาดรูปเรขาคณิต เช่น รูปสามเหลี่ยม มุม เส้นตัด หรือ เส้นขนานตามรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิต

ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ ในระดับนี้นักเรียนสามารถวิเคราะห์รูปเรขาคณิตเกี่ยวกับส่วนประกอบและความสัมพันธ์ท่ามกลางส่วนประกอบและค้นพบสมบัติ / กฎของกลุ่มของรูปเรขาคณิตโดยอาศัยการสังเกต เช่น โดยการพับ การวัด การใช้ตารางสี่เหลี่ยมบนแผนที่หรือแผนผัง

ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน ในระดับนี้นักเรียนสามารถนำสมบัติหรือกฎที่ถูกค้นพบมาก่อน โดยการแสดงหรือการติดตามการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน มาสัมพันธ์ซึ่งกันและกันตามหลักเหตุผล

ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน ในระดับนี้นักเรียนสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท และสร้างความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของทฤษฎีบทได้

ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด ในระดับนี้นักเรียนสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทในระบบสัจพจน์ที่แตกต่างกัน และวิเคราะห์ / เปรียบเทียบระบบเหล่านี้ได้

ทั้งนี้ความคิดทางเรขาคณิตมีความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต เนื่องจาก ความคิดทางเรขาคณิต มีความสัมพันธ์กับผลการเรียนเรขาคณิต ดังงานวิจัยของ Usiskin (1982) , Han (1986), Bobango (1987) และ Corley (1990) และนอกจากนี้ระดับความคิดทางเรขาคณิต ยังมีความสัมพันธ์กับความสามารถในการพิสูจน์อีกด้วย ดังงานวิจัยของ พนิดา กองเกตุใหญ่ (2542)

จากการศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นในจังหวัดกาญจนบุรี ของพนิดา กองเกตุใหญ่ (2542: ง) พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 2 และ 3 มีความคิดทางเรขาคณิตกระจายอยู่ใน 3 ระดับแรก คือ ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก ระดับการวิเคราะห์ และระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีแนวโน้มที่จะมีความคิดทางเรขาคณิตในระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน นอกจากนี้แล้ว Chaiyasang (1987: 2137 – A) พบว่า นักเรียนส่วนมาก ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใน 12 โรงเรียนทางภาคตะวันออกของประเทศไทย มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับการวิเคราะห์ จากผลการวิจัยดังกล่าวจึงเห็นว่านักเรียนไทยยังมีความคิดทางเรขาคณิตใน 3 ระดับแรก ส่งผลทำให้นักเรียนยังไม่สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ทางเรขาคณิต

นอกจากนี้แล้วผลประเมินคุณภาพทางการศึกษาของสำนักทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ พบว่านักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานทั่วประเทศมีคะแนนการสอบในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในสาระที่ 3 เรขาคณิต ประจำปีการศึกษา 2551 เฉลี่ยร้อยละ 44.11 ซึ่งอยู่ในระดับต่ำกว่าเกณฑ์ร้อยละ 50 (สำนักทดสอบทางการศึกษา, 2552)

นอกจากนี้ความคิดทางเรขาคณิต และผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์มีความสัมพันธ์กันทางบวก (Senk, 1989: 319) ดังนั้นการสอนที่พัฒนาความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนจึงเป็นการสอนที่ทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิต

อนึ่งจากการศึกษาค้นคว้าของผู้วิจัยในการหาแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียน ผู้วิจัยมีความสนใจการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันของ

Dimakos และ Nikoloudakis แห่งมหาวิทยาลัยเอเธน ประเทศกรีก ซึ่งเป็นรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการเขียนพิสูจน์ โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 3 ขั้นตอน (Dimakos และ Nikoloudakis, 2008: 204-205) คือ

ขั้นที่ 1 การทบทวนความรู้เดิม (The Reminder Note)

ขั้นที่ 2 กระบวนการ (Process) ซึ่งแบ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ออกเป็น 5 ระยะ คือ

ระยะที่ 1 นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับรูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต

ระยะที่ 2 นักเรียนเรียนรู้สมบัติและทฤษฎีบททางเรขาคณิตโดยยังไม่มีการพิสูจน์

ระยะที่ 3 นักเรียนเรียนรู้การจำแนกรูปเรขาคณิต

ระยะที่ 4 นักเรียนเรียนรู้การเขียนพิสูจน์ประพจน์ทางเรขาคณิตที่ไม่ซับซ้อนและใช้ Reasoning Control Metrix for the Proving Process (RECOMPP) ประกอบในการสร้างการพิสูจน์

ระยะที่ 5 นักเรียนเรียนรู้การพิสูจน์ประพจน์ที่มีความซับซ้อนและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียนทั้งหมดโดยใช้ RECOMPP ประกอบในการสร้างการพิสูจน์

ขั้นที่ 3 การประเมิน (Assessment)

Nikoloudakis (2009: 21) ค้นพบว่า นักเรียนที่เรียนการเขียนพิสูจน์ผ่านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน มีความสามารถในการเขียนพิสูจน์เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และจากการที่ Senk (1989: 319) พบว่า ความคิดทางเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์มีความสัมพันธ์กันทางบวก จึงควรศึกษาด้วยว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน จะช่วยพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตหรือไม่

จากที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต และความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

2. เปรียบเทียบความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3. เปรียบเทียบความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

สมมติฐานของการวิจัย

กุลยา เหมวัสดุกิจ (2545: ง) พบว่าหลังจากจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ นักเรียนส่วนใหญ่มีความคิดทางเรขาคณิตในระดับเพิ่มขึ้นขึ้นคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับเป็นจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับ โดยนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 3 และ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น ส่วนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 และ 2 มีจำนวนลดลง

จากการงานวิจัยดังกล่าวจะเห็นได้ว่า เมื่อนักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่นักเรียนส่วนใหญ่จะมีระดับความคิดทางเรขาคณิต เพิ่มขึ้น โดยนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 3 และ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น ส่วนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 และ 2 มีจำนวนลดลง และจากที่การสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันเป็นโมเดลที่ใช้ในการสอนเรขาคณิตซึ่งได้แนวคิดมาจากการผสมผสานของกระบวนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดตามรูปแบบแวนฮีลี่ และวิธีการฝึกหัดทางปัญญา (Methods of Cognitive Apprenticeship) ด้วยเหตุดังกล่าวผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยในครั้งนี้ว่า

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันส่วนใหญ่จะมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น

Dimakos et al. (2007: 87-109) ได้ทำการศึกษาเพื่อพัฒนาเครื่องมือที่ช่วยในการเขียนพิสูจน์สำหรับนักเรียนที่เริ่มต้นเรียนเรขาคณิต โดยทดลองสอนเรขาคณิตให้นักเรียนในกลุ่มทดลองใช้ RECOMPP ประกอบการเรียนการพิสูจน์เป็นระยะเวลา 3 เดือน ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มควบคุมเรียนโดยวิธีปกติหลังการทดลองพบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ที่สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ในขณะที่นักเรียน

ในกลุ่มที่ได้รับการสอนตามวิธีปกติมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงขึ้นอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

Nikoloudakis (2009: 21) ได้ทดลองจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน แก่นักเรียนระดับมัธยมที่เริ่มต้นเรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบททางเรขาคณิต พบว่า หลังจากที่นักเรียนได้รับการสอนจะมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ที่สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มที่ได้รับการสอนตามวิธีปกติมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงขึ้นอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

Senk (1989: 319) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดทางเรขาคณิต และผลสัมฤทธิ์ในหารเขียนพิสูจน์ โดยศึกษาจากกลุ่มตัวอย่างที่เป็นนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาจำนวน 241 คน พบว่าความคิดทางเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ 0.5

ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานการวิจัยได้ดังนี้

2. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีความคิดทางเรขาคณิตทางเรขาคณิตในระดับ 3 และ 4 มากกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้ใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้คือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 1 สำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน กลุ่มตัวอย่าง ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็น นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดราชบพิธ ปีการศึกษา 2553 จำนวน 2 ห้องเรียน

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย เป็นส่วนหนึ่งของสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และ วงกลม

3. ตัวแปรที่ศึกษา

3.1 ตัวแปรต้น คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และวิธีการสอนแบบปกติ

3.2 ตัวแปรตาม คือ

3.2.1 ความคิดทางเรขาคณิต

3.2.2 ความสามารถในการเขียนพิสูจน์

คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. **โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน** คือโมเดลที่ใช้ในการสอนเรขาคณิตซึ่งได้แนวคิดมาจากการผสมผสานของกระบวนการสอนเพื่อพัฒนาความคิด(Phase of learning) ตามทฤษฎีแวนฮีลี่ และ วิธีการฝึกหัดทางปัญญา (Methods of Cognitive Apprenticeship) ของ Collons et al. โดยมี Structure Form Worksheet (SFW)เป็นเอกสารประกอบการจัดกิจกรรม ซึ่งมีลำดับขั้นตอนในการจัดกิจกรรม 3 ขั้นตอน (Nikoloudakis, 2009: 17 – 45) ดังนี้

1.1 ขั้นทบทวนความรู้เดิม (The Reminder Note) ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทที่จำเป็นบนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องที่จะเรียนมากยิ่งขึ้น

1.2 ขั้นกระบวนการ (Process) ครูจัดกิจกรรมที่นักเรียนจะต้องมีการค้นพบ การคาดคะเน การสังเกตสมบัติของรูปเรขาคณิต การอภิปราย และการแสดงความคิดเห็นถึงวิธีการแก้ปัญหาที่ครูเตรียมไว้ล่วงหน้า และเผชิญกับงานที่ซับซ้อน ในขั้นกระบวนการการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะแบ่งออกเป็น 5 ระยะ คือ

ระยะที่ 1 นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับรูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต นักเรียนจะต้องระบุบอกชื่อ เปรียบเทียบ และวาดรูปเรขาคณิต ต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้แล้วครู ยังมีบทบาทในการแสดงรูปเรขาคณิตที่มีความซับซ้อนเพิ่มขึ้นทีละเล็กทีละน้อย เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจในรูปเรขาคณิต และส่วนประกอบ พร้อมชื่อเรียก ที่มีความซับซ้อน มากยิ่งขึ้น

ระยะที่ 2 นักเรียนเรียนรู้สมบัติและทฤษฎีบทในเนื้อหาที่จะเรียนโดยที่ยังไม่มีการพิสูจน์ เช่น นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีบทโดยการทดลอง การวัดมุม โดยใช้อุปกรณ์วัดมุม การวัดความยาวของด้านหรือความยาวของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมมุมฉาก การพับกระดาษเป็นรูปเรขาคณิต และการใช้คอมพิวเตอร์

เป็นต้น ครูจะมีบทบาทในการเตรียมกิจกรรมที่มีความเหมาะสม ซึ่งสามารถสร้างความคุ้นเคยในเนื้อหาแก่นักเรียน โดยครูจะคอยส่งเสริมและให้ความช่วยเหลือนักเรียนในการทำกิจกรรม

ระยะที่ 3 นักเรียนเรียนรู้การจำแนกรูปเรขาคณิต เช่น จำแนกประเภทของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและขยายขอบเขตของสมบัติไปยังรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ โดยนักเรียนจะมีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันในเรื่องที่เรียน อันเป็นการส่งเสริมความมั่นใจให้แก่นักเรียน และครูจะมีบทบาทในการกระตุ้นและส่งเสริมให้นักเรียนใช้คำศัพท์ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมในการเปรียบเทียบรูปเรขาคณิตต่าง ๆ

ระยะที่ 4 นักเรียนทำการพิสูจน์ประพจน์ทางเรขาคณิตที่ไม่ซับซ้อนและใช้ RECOMPP ประกอบในการสร้างการพิสูจน์ ซึ่ง RECOMPP จะกระตุ้นให้นักเรียนนำสมบัติ ทฤษฎีบท สัจพจน์ และนิยาม ต่างๆ มาใช้ในการสร้างการพิสูจน์

ระยะที่ 5 นักเรียนเริ่มพิสูจน์ประพจน์ที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น และเรียนรู้การพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียนทั้งหมด โดยใช้ RECOMPP ประกอบการสร้างการพิสูจน์

1.3 ขั้นการประเมิน (Assessment) ครูจัดกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีการพูดคุยกับคนอื่น ๆ ถึงกิจกรรมที่ทำก่อนหน้านี้ เช่น อธิบายถึงวิธีการได้มาซึ่งความรู้ อธิบายถึงสิ่งที่ได้เรียนรู้ และมีการตั้งปัญหาจากสิ่งที่ได้เรียนรู้

2. Structure Form Worksheet **หรือ** SFW หมายถึง เอกสารประกอบการจัดกิจกรรมตามโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งประกอบด้วย 3 ส่วน (Nikoloudakis, 2009: 14-17) ดังนี้

ส่วนที่ 1 การทบทวนความรู้เดิม (The Reminder Note)

ส่วนที่ 2 กระบวนการ (Process)

ส่วนที่ 3 การประเมิน (Assessment)

ในส่วนกระบวนการ จะมีเมทริกซ์ควบคุมการให้เหตุผลสำหรับกระบวนการพิสูจน์ (Reasoning Control Matrix for the Proving Process หรือ RECOMPP) เป็นเครื่องมือที่ให้นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลสำหรับกระบวนการพิสูจน์ โดยนักเรียนจะเติมข้อความลงไปในส่วนต่างๆของเมทริกซ์ ซึ่งประกอบด้วย 6 ส่วนที่ไม่ต่อเนื่องกัน โดยแบ่งเป็น แถว สดมภ์ และช่อง ที่สามารถวาดรูปเรขาคณิต, เติมข้อความที่เป็น เหตุ (hypothesis) หรือ ผลสรุป (conclusion) และการพิสูจน์

3. **ความคิดทางเรขาคณิต** หมายถึง ลักษณะของความคิดเกี่ยวกับเรขาคณิต ตามแนวคิดของ Pierre van Hiele และ Dina van Hiele ซึ่งแบ่งความคิดทางเรขาคณิตจากระดับต่ำสุดไปสู่ระดับสูงสุดเป็น 5 ระดับ (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 2 – 3) ดังนี้

ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (Visualization)

ในระดับนี้นักเรียนรู้เพียงรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิต มีการแสดงความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตออกมาเป็นรูปธรรมภายนอกมากกว่าองค์ประกอบหรือลักษณะของรูป

ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ (Analysis)

ในระดับนี้นักเรียนเริ่มต้นการวิเคราะห์ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตผ่านการสังเกตและการทดลอง นักเรียนเริ่มเห็นลักษณะของรูปเรขาคณิต เห็นสมบัติของรูปเรขาคณิต แต่ไม่สามารถอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตที่เห็นกับรูปเรขาคณิตที่ยังมองไม่เห็นได้ ถึงอธิบายได้แต่ก็ไม่เข้าใจ

ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ในสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตได้ ทั้งสมบัติภายในของรูปเรขาคณิต และสมบัติท่ามกลางรูปเรขาคณิตต่าง ๆ สามารถสรุปอย่างไม่เป็นแบบแผนจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถสรุปโดยใช้อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทได้ ไม่สามารถให้เหตุผลในลักษณะที่เป็นโครงสร้างได้

ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน (Formal Deduction)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถสรุปเรขาคณิตภายใต้อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์และทฤษฎีบทได้ สามารถพิสูจน์โดยมีความเป็นไปได้ในการพัฒนาการพิสูจน์ได้หลายรูปแบบ มีความเข้าใจเงื่อนไขที่เพียงพอ ตลอดจนสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทได้

ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด (Rigor)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถทำเรขาคณิตในระบบสัจพจน์ที่หลากหลาย เข้าใจเรขาคณิตนอกแบบยุคลิด(non-Euclidean geometry) สามารถนำเรขาคณิตไปสัมพันธ์กับวิชาอื่น และมองเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นนามธรรมได้

4. **ความสามารถในการเขียนพิสูจน์** หมายถึง ความสามารถในการเขียนแสดงการพิสูจน์ปัญหาทางเรขาคณิตอย่างเป็นขั้นตอนและสมเหตุสมผล สื่อความหมายได้อย่างชัดเจนตามกระบวนการพิสูจน์ โดยอาศัยบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับเรขาคณิตเข้ามาช่วยแก้ปัญหา

5. **การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ** หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

6. **นักเรียน** หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 1 สำนักงานงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนให้สูงขึ้น

2. เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันเพื่อพัฒนาความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนให้สูงขึ้น

3. เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องเรขาคณิตโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่องผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าตำรา เอกสาร และงานวิจัย ที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยเรื่องนี้ และได้นำเสนอผลของการศึกษา ค้นคว้า ตามลำดับ ดังต่อไปนี้

1. โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน
    - 1.1 ขั้นตอนการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน
    - 1.2 เอกสารที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมตามโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน
2. ความคิดทางเรขาคณิต
    - 2.1 ระดับความคิดทางเรขาคณิต
    - 2.2 การกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต
    - 2.3 ลักษณะสำคัญของระดับความคิดทางเรขาคณิต
    - 2.4 ขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต
    - 2.5 การจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในแต่ละระดับ
    - 2.6 ความสามารถของนักเรียนกับระดับความคิดทางเรขาคณิต
3. การพิสูจน์ทางเรขาคณิต
    - 3.1 ความหมายของการพิสูจน์
    - 3.2 ความสำคัญของการพิสูจน์
    - 3.3 ประเภทของการพิสูจน์
    - 3.4 กระบวนการพิสูจน์
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    - 4.1 งานวิจัยต่างประเทศ
    - 4.2 งานวิจัยในประเทศไทย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน

ขั้นตอนการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน

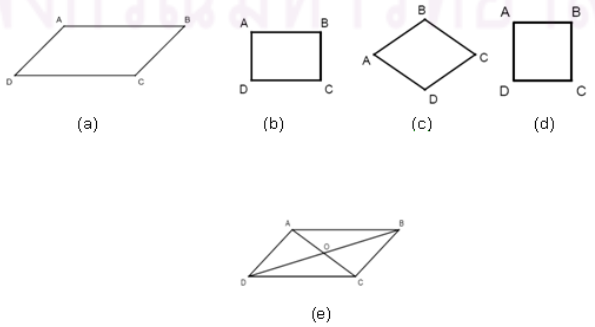
Nikoloudakis อาจารย์คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยเอเธน ประเทศกรีก ได้คิดค้นและพัฒนาโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน (Phase-Method Combination Model) เพื่อใช้สอนเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยได้แนวคิดมาจากการผสมผสานของกระบวนการสอนเพื่อพัฒนาความคิด (Phase of learning) ตามทฤษฎีแวนฮีลี่ และ วิธีการฝึกหัดทางปัญญา (Methods of Cognitive Apprenticeship) ของ Collins et al. โดยการจัดกิจกรรมจะมีการใช้ SFW เป็นเอกสารประกอบการจัดกิจกรรม ซึ่ง Nikoloudakis (2009: 17 – 45) แบ่งลำดับขั้นตอนในการจัดกิจกรรมเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

1.1 ขั้นทบทวนความรู้เดิม (The Reminder Note) ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทที่จำเป็นบนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องที่จะเรียนมากยิ่งขึ้น

1.2 ขั้นกระบวนการ (Process) ครูจัดกิจกรรมที่นักเรียนจะต้องมีการค้นพบ การคาดคะเน การสังเกตสมบัติของรูปเรขาคณิต การอภิปราย และการแสดงความคิดเห็นถึงวิธีการแก้ปัญหาที่ครูเตรียมไว้ล่วงหน้า และเผชิญกับงานที่ซับซ้อน

ในขั้นกระบวนการ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะแบ่งออกเป็น 5 ระยะ คือ

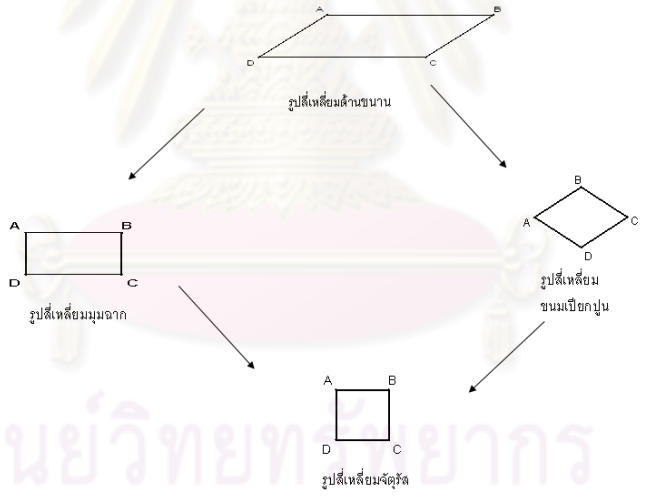
ระยะที่ 1 นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับรูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต นักเรียนจะต้องระบุบอกชื่อ เปรียบเทียบ และวาดรูปเรขาคณิตต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้ครูยังมีบทบาทในการแสดงรูปเรขาคณิตที่มีความซับซ้อนเพิ่มขึ้นทีละเล็กทีละน้อย เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจรูปเรขาคณิต และส่วนประกอบพร้อมชื่อเรียกที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น ครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้วาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ ตลอดจนให้นักเรียนได้เรียนรู้ส่วนประกอบของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังแสดงในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ

ระยะที่ 2 นักเรียนเรียนรู้สมบัติและทฤษฎีบทในเนื้อหาที่จะเรียนโดยที่ยังไม่มีการพิสูจน์ เช่น นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีบทโดยการทดลอง การวัดมุม โดยใช้อุปกรณ์วัดมุม การวัดความยาวของด้านหรือความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม มุมฉาก การพับกระดาษเป็นรูปเรขาคณิต หรือการใช้คอมพิวเตอร์ เป็นต้น ครูจะมีบทบาทในการเตรียมกิจกรรมที่มีความเหมาะสม ซึ่งสามารถสร้างความคุ้นเคยในเนื้อหาแก่นักเรียน โดยครูจะคอยส่งเสริมและให้ความช่วยเหลือนักเรียนในการทำกิจกรรม

ระยะที่ 3 นักเรียนเรียนรู้การจำแนกรูปเรขาคณิต เช่นจำแนกประเภทของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และขยายขอบเขตของสมบัติไปยังรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ โดยนักเรียนจะมีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันในเรื่องที่เรียน อันเป็นการส่งเสริมความมั่นใจให้แก่นักเรียน และครูจะมีบทบาทในการกระตุ้นและส่งเสริมให้นักเรียนใช้คำศัพท์ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมในการเปรียบเทียบรูปเรขาคณิตต่าง ๆ เช่นครูจัดกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่างๆ ดังแสดงในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ

ระยะที่ 4 นักเรียนทำการพิสูจน์ประพจน์ทางเรขาคณิตที่ไม่ซับซ้อนและใช้ RECOMPP ประกอบในการสร้างการพิสูจน์ ซึ่ง RECOMPP จะกระตุ้นให้นักเรียนนำสมบัติ ทฤษฎีบท สัจพจน์ และบทนิยาม ต่างๆ มาใช้อ้างเหตุผลในการพิสูจน์

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ระยะที่ 5 นักเรียนเริ่มพิสูจน์ประพจน์ทางเรขาคณิตที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น และเรียนรู้การพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียนทั้งหมด โดยใช้ RECOMPP ประกอบการสร้างการพิสูจน์

1.3 ขั้นการประเมิน (Assessment) ครูจัดกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีการพูดคุยกับคนอื่น ๆ ถึงกิจกรรมที่ทำก่อนหน้านี้ เช่น อธิบายถึงวิธีการได้มาซึ่งความรู้ อธิบายถึงสิ่งที่ได้เรียนรู้ และมีการตั้งปัญหาจากสิ่งที่ได้เรียนรู้

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นการทบทวนความรู้เดิม โดยในขั้นนี้ครูจะทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทที่จำเป็น บนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องที่จะเรียนมากยิ่งขึ้น 2) ขั้นกระบวนการ ครูจัดกิจกรรมที่นักเรียนจะต้อง มีการค้นพบ การคาดคะเน การสังเกตสมบัติของรูปเรขาคณิต การอภิปราย และการแสดงความคิดเห็นถึงวิธีการแก้ปัญหาที่ครูเตรียมไว้ล่วงหน้า และเผชิญกับงานที่ซับซ้อน โดยการจัดกิจกรรมแบ่งออกเป็น 5 ระยะ คือ 1. เรียนรู้รูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต 2. เรียนรู้สมบัติและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องของรูปเรขาคณิตโดยยังไม่มีการพิสูจน์ 3. เรียนรู้การจำแนกรูปเรขาคณิต 4. เรียนรู้การใช้ RECOMPPประกอบการเขียนพิสูจน์ประพจน์ทางเรขาคณิตที่ไม่ซับซ้อน 5. เรียนรู้การเขียนพิสูจน์ประพจน์ทางเรขาคณิตที่ซับซ้อน และการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต โดยใช้RECOMPPประกอบการเขียนพิสูจน์ 3) ขั้นการประเมิน ในขั้นนี้ครูจัดกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีการพูดคุยกับคนอื่น ๆ ถึงกิจกรรมที่ได้ทำก่อนหน้านี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เอกสารที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมตามโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน

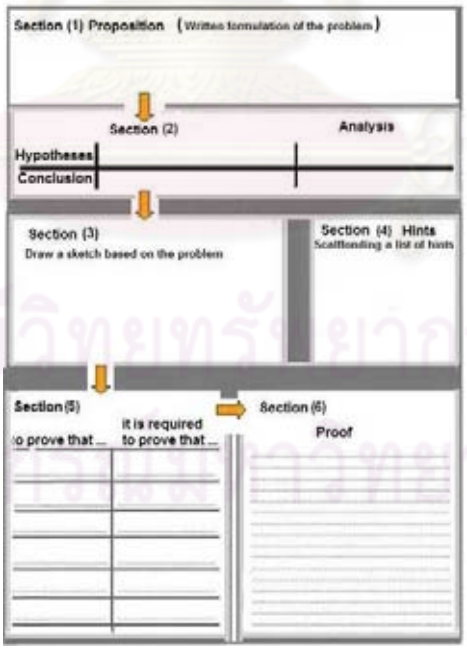
การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันจะมีการใช้ Structure Form Worksheet หรือ SFW ประกอบการจัดกิจกรรม ซึ่งประกอบด้วย 3 ส่วน (Nikoloudakis, 2009: 25 – 29) ดังนี้

ส่วนที่ 1 การทบทวนความรู้เดิม (The Reminder Note)

ส่วนที่ 2 กระบวนการ (Process)

ส่วนที่ 3 การประเมิน (Assessment)

ในส่วนกระบวนการ จะมีเมทริกซ์ควบคุมการให้เหตุผลสำหรับกระบวนการพิสูจน์ (Reasoning Control Matrix for the Proving Process หรือ RECOMPP) เป็นเครื่องมือที่ให้นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลสำหรับกระบวนการพิสูจน์ โดยนักเรียนจะเติมข้อความลงไปในส่วนต่างๆของเมทริกซ์ ซึ่งประกอบด้วย 6 ส่วนที่ไม่ต่อเนื่องกัน โดยแบ่งเป็น แถว สดมภ์ และช่อง ที่สามารถวาดรูปเรขาคณิต, เติมข้อความที่เป็น เหตุ (hypothesis) หรือ ผลสรุป (conclusion) และ การพิสูจน์ ลงไป โดยนักเรียนจะเติมข้อความลงใน RECOMPP ตามกฎเกณฑ์เกี่ยวกับทิศทางในการเติมข้อความ โดยจากภาพที่ 3 แสดงส่วนประกอบของ RECOMPP ซึ่งแต่ละส่วนมีรายละเอียด ดังนี้



ภาพที่ 3 แสดง RECOMPP ที่พัฒนาโดย Nikoloudakis

ส่วนที่ 1 เป็นส่วนที่จะต้องคิดวิธีแก้ปัญหาจากสิ่งที่กำหนดให้ ส่วนนี้นักเรียนจะต้องอ่านโจทย์ที่ครูเตรียมไว้ล่วงหน้า และเติมรายละเอียดของปัญหาก่อนที่จะถึงขั้นตอนการพิสูจน์

ส่วนที่ 2 ส่วนนี้นักเรียนจะต้องเติมข้อความที่เป็น เหตุ (hypothesis) และผลสรุป (conclusion) ลงไปในตารางแต่ละช่องตามลำดับ โดยนักเรียนจะต้องเริ่มต้นอ่านรายละเอียดของปัญหาที่พบในส่วนที่ 1 อย่างรอบคอบ ก่อนที่นักเรียนจะสามารถค้นหา แยกแยะ และบันทึกข้อความที่เป็น เหตุ และ ผลสรุป ลงไป

ส่วนที่ 3 เป็นส่วนที่นักเรียนจะต้องวาดภาพร่างของปัญหา ส่วนนี้จะมีข้อมูลมาจากรายละเอียดของปัญหาในส่วนที่ 1 ข้อความที่เป็นเหตุ และผลสรุป ในส่วนที่ 2 ถ้านักเรียนสามารถวาดภาพร่างของปัญหานักเรียนสามารถใช้เป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เห็นภาพชัดในการคิดวิธีการพิสูจน์

ส่วนที่ 4 เป็นส่วนที่ครูอาจจะให้คำแนะนำหลักแก่นักเรียน ส่วนนี้จะขึ้นอยู่กับบริบทของนักเรียน และ มีการช่วยเหลือเป็นบางครั้ง โดยครูจะเตรียมคำแนะนำแก่นักเรียนล่วงหน้า

ส่วนที่ 5 เป็นส่วนที่นักเรียนต้องให้เหตุผล และเขียนข้อความที่สัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบของภาพร่างที่วาดไว้ก่อนหน้านี้ ส่วนนี้จะมีตารางที่ประกอบด้วย 2 สดมภ์หลายแถว นักเรียนต้องเขียนข้อความเช่น “ข้อความ A” สำหรับสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ในตารางสดมภ์ที่ 1 ที่มีชื่อว่า “จะพิสูจน์ว่า” และเขียน “ข้อความ B” สำหรับสิ่งที่จำเป็นในการพิสูจน์ “ข้อความ A” ในสดมภ์ที่ 2 ที่มีชื่อว่า “ต้องพิสูจน์ว่า” นักเรียนต้องวางแผนการเติมข้อความจากซ้ายไปขวา ดังนี้สดมภ์ทางซ้ายจะต้องเป็นการให้เหตุผลของนักเรียนในลำดับแรก และสดมภ์ทางขวาจะเป็นการให้เหตุผลของนักเรียนในลำดับถัดมา

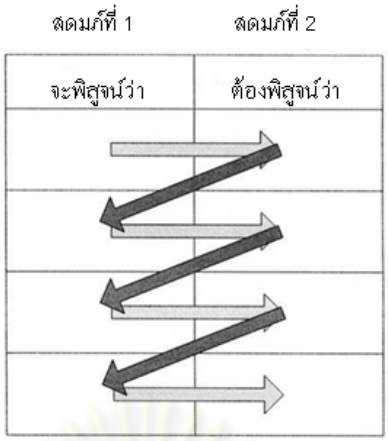
ลักษณะที่สำคัญของ RECOMPP ส่วนที่ 5

ส่วนที่ 5 ของ RECOMPP ต้องมีการเติมข้อความตามกฎ 3 ข้อดังนี้ (ดูภาพที่ 4)

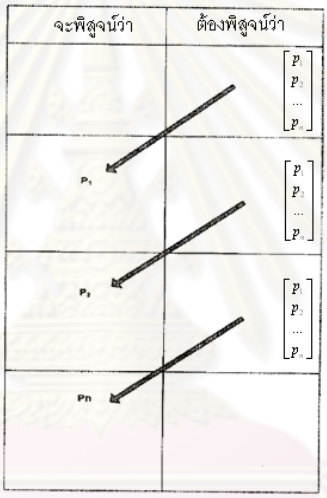
(a) การเติมข้อความในส่วนที่ 5 ต้องเติมจากซ้ายไปขวาจากบนลงล่างเสมอ

(b) การเติมข้อความแรกในสดมภ์ที่ 1 แถวที่ 1นักเรียนต้องเติมข้อความจากข้อสรุปจากส่วนที่ 2 ของ RECOPMPP เสมอ ซึ่งทำให้นักเรียนเห็นจุดเริ่มต้นของกระบวนการพิสูจน์

(c) ข้อความที่ปรากฏในสดมภ์ที่ 2 จะต้องนำมาเขียนซ้ำในสดมภ์ที่ 1 แถวถัดมาด้านล่าง



ภาพที่ 4 แสดงการทิศทางเติมข้อความลงไปในส่วนที่ 5 ของ RECOMPP



ภาพที่ 5 แสดงการทิศทางเติมข้อความลงไปในส่วนที่ 5 ของ RECOMPP

จากภาพที่ 5 พบว่าการเติมข้อความในสดมภ์ที่ 2 สามารถใส่ข้อความได้มากกว่า 1 ข้อความ ถ้ากำหนด p_i แทนข้อความที่ i และในบรรดาข้อความทั้งหมด นักเรียนต้องเลือกสิ่งที่เหมาะสมที่สุดมาเติมในแถวถัดมา โดยนักเรียนจะต้องให้ความสำคัญในการตัดสินใจเลือกข้อที่เหมาะสมที่สุดเป็นการเพิ่มโอกาสนักเรียนในการฝึกฝนซึ่งทำให้นักเรียนมีประสบการณ์มากขึ้น

ข้อกำหนดในทุกๆ ขั้นตอนของกระบวนการพิสูจน์

(a) จะต้องไม่มีการเขียนผลสรุปไว้ในหลักทางด้านขวา

(b) ตรวจสอบ Pi ในสดมภ์ที่ 2 เช่น ถ้า Pi ปรากฏในข้อความที่เป็นเหตุ กระบวนการพิสูจน์จะสิ้นสุดลง

(c) การเชื่อมโยง Pi กับข้อความที่เป็นเหตุจะอยู่ในรูปของการเลือก Pi ที่เหมาะสมที่สุด

ส่วนที่ 6 เป็นส่วนที่นักเรียนจะต้องเขียนการพิสูจน์ ในส่วนนี้นักเรียนต้องเขียนพิสูจน์อย่างสมบูรณ์ในตารางที่กำหนด

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันจะมีการใช้ SFW เป็นเอกสารประกอบการจัดกิจกรรมและ SFW มีส่วนประกอบ 3 ส่วน คือ 1) การทบทวนความรู้เดิม 2) กระบวนการ 3) การประเมิน นอกจากนี้แล้วในส่วนที่ 2 ของ SFW ยังประกอบด้วย RECOMPP ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่ใช้ฝึกการให้เหตุผลในกระบวนการพิสูจน์

ความคิดทางเรขาคณิต

ระดับความคิดทางเรขาคณิต

Pierre van Hiele และ Dina van Hiele แบ่งระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับต่ำสุดไปสู่ระดับสูงสุดเป็น 5 ระดับ (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 2 – 3) มีรายละเอียดในแต่ละระดับดังนี้

ระดับ 0 : ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (Visualization)

ในระดับนี้นักเรียนรู้เพียงรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิต มีการแสดงความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตออกมาเป็นรูปธรรมภายนอกมากกว่าองค์ประกอบหรือลักษณะของรูปเรขาคณิต เช่น ถ้ากำหนดรูปเรขาคณิตให้ นักเรียนบอกรูปร่างภายนอกได้ แต่บอกสมบัติของรูปไม่ได้ นักเรียนสามารถเรียนรู้ศัพท์ทางเรขาคณิต จำแนกรูปเรขาคณิต วาดรูปเรขาคณิต และจำลองรูปเรขาคณิต ตัวอย่างเช่น นักเรียนสามารถจำได้ว่า กลุ่ม a คือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และกลุ่ม b คือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยนักเรียนจำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้เพราะว่ามันดูเหมือนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและบอกได้ว่ารูปทั้งสองกลุ่มคล้ายกัน ยิ่งไปกว่านั้นเมื่อให้ geoboard หรือกระดาษ นักเรียนสามารถคัดลอกรูปเรขาคณิตได้ แต่นักเรียนจะไม่จำว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีมุมเป็นมุมฉากหรือมีด้านตรงข้ามขนานกัน

ระดับ 1 : ระดับการวิเคราะห์ (Analysis)

ในระดับนี้นักเรียนเริ่มต้นการวิเคราะห์ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตผ่านการสังเกตและการทดลอง นักเรียนเริ่มเห็นลักษณะของรูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต สามารถจำแนกรูปเรขาคณิตออกเป็นกลุ่ม ๆ ได้ เช่น เมื่อให้ดูรูปที่เป็นตารางของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน นักเรียนสามารถระบุมุมที่เท่ากัน หรือสามารถบอกได้ว่าด้านตรงข้ามของ

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน และถ้าให้ตัวอย่างที่หลากหลายนักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้

ระดับ 2 : ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ในสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตได้ทั้งสมบัติภายในของรูปเรขาคณิต เช่น ในรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน มุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน และสมบัติท่ามกลางรูปเรขาคณิตต่าง ๆ และสามารถจำแนกรูปเรขาคณิตออกเป็นกลุ่มตามสมบัติได้ บอกความหมายได้ สามารถสรุปอย่างไม่เป็นแบบแผนจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถสรุปโดยใช้อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทได้ ไม่สามารถให้เหตุผลในลักษณะที่เป็นโครงสร้างได้ ไม่สามารถพัฒนาการพิสูจน์ทฤษฎีบทได้

ระดับ 3 : ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน (Formal Deduction)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถสรุปเรขาคณิตภายใต้อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทได้ สามารถพิสูจน์และมีความเป็นไปได้ในการพัฒนาการพิสูจน์หลายรูปแบบ เข้าใจเงื่อนไขที่เพียงพอ สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทกลับได้

ระดับ 4 : ระดับการคิดสุดยอด (Rigor)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถทำเรขาคณิตในระบบสัจพจน์ที่หลากหลาย นั่นคือนักเรียนสามารถเรียนรู้เรขาคณิตนอกแบบยุคลิด (non-Euclidean geometry) สามารถนำเรขาคณิตไปสัมพันธ์กับวิชาอื่น สามารถมองเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นนามธรรม โดยปราศจากตัวอย่างที่เป็นรูปธรรม สามารถพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง และพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ได้

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่านักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตต่างกันจะมีความสามารถต่างกัน เช่น นักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 สามารถจำรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิตได้ นักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 สามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ นักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 2 สามารถบอกความสัมพันธ์ของสมบัติของรูปเรขาคณิตต่างๆได้ นักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 3 สามารถใช้อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท และสามารถพิสูจน์ตรงได้ และนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 สามารถพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง พิสูจน์แบบแย้งสลับที่ สามารถมองเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นนามธรรมได้

การกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต

การกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต แบ่งออกเป็น 3 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 เป็นแบบดั้งเดิมที่ van Hiele กำหนด ใช้หมายเลข 0 – 4 ในการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตทั้ง 5 ระดับ (Crowley, 1987: 2-3; Burger and Shaughnessy,1989: 31) ดังนี้

ระดับ 0 หมายถึง ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (Visualization / Recognition)

ระดับ 1 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์ (Analysis / Descriptive)

ระดับ 2 หมายถึง ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน (Informal deduction / Abstraction)

ระดับ 3 หมายถึง ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน (Deduction)

ระดับ 4 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (Rigor)

แบบที่ 2 ใช้หมายเลข 1 - 5 ในการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตทั้ง 5ระดับ (Hoffer, 1981: 13 – 14) ดังนี้

ระดับ 1 หมายถึง ระดับการจำแนกออก (Recognition) ซึ่งระดับนี้เหมือนกับระดับ 0 ในแบบที่ 1

ระดับ 2 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์ (Analysis)

ระดับ 3 หมายถึง ระดับการจัดอันดับ (Ordering)

ระดับ 4 หมายถึง ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน (Deduction)

ระดับ 5 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (Rigor)

แบบที่ 3 ใช้หมายเลข 0 – 5 ในการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตทั้ง 6 ระดับ (Clements and Battista, 1992b cited in Clements et al., 1999: 193 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545: 17) ดังนี้

ระดับ 0 หมายถึง ระดับก่อนการจำแนกออก (prerecognitive) ระดับนี้นักเรียนสังเกตเพียงลักษณะภายนอกของรูปเรขาคณิตที่มองเห็น แต่ไม่สามารถบอกความแตกต่างระหว่างรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนบอกความแตกต่างระหว่างรูปสามเหลี่ยมกับรูปสี่เหลี่ยมได้ แต่ไม่สามารถบอกความแตกต่างระหว่างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้

ระดับ 1 หมายถึง ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (Visualization)

ระดับ 2 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์ (Analysis)

ระดับ 3 หมายถึง ระดับการคิดแบบนามธรรม (Abstraction) ซึ่งระดับนี้เหมือนกับระดับ 2 ในแบบที่ 1

ระดับ 4 หมายถึง ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน (Deduction)

ระดับ 5 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (Rigor)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตแบ่งออกเป็น 3 แบบ คือ แบบที่ 1 ใช้หมายเลข 0 – 4 แบบที่ 2 ใช้หมายเลข 1 – 5 และแบบที่ 3 ใช้หมายเลข 0 – 5 ซึ่งแบบที่ 1 และแบบที่ 2 ใช้หมายเลขกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ระดับ แต่แบบที่ 3 ใช้หมายเลขกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต 6 ระดับ โดยมีระดับก่อนการจำแนกเพิ่มขึ้นมาอีก 1 ระดับ

ลักษณะสำคัญของระดับความคิดทางเรขาคณิต

ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี่มีลักษณะสำคัญดังนี้ (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 4)

1. การมีลำดับขั้น (Sequential)

ต้องดำเนินการโดยเรียงลำดับระดับความคิดทางเรขาคณิตทีละระดับ การจะมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับสูงได้จะต้องมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับต่ำกว่ามาก่อน

2. ความก้าวหน้า (Advancement)

ความก้าวหน้าจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีการสอนที่ได้รับมากกว่าขึ้นอยู่กับอายุ ไม่มีวิธีการสอนใดที่จะทำให้นักเรียนกระโดดข้ามระดับได้ต้องดำเนินการโดยเรียงลำดับระดับความคิดทางเรขาคณิตทีละระดับ

3. สิ่งที่ไม่ชัดแจ้งในระดับหนึ่งจะชัดแจ้งในระดับต่อไป(Intrinsic and Extrinsic)

ตัวอย่างเช่น นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 จะรู้เพียงรูปร่างของรูป แต่ไม่เข้าใจสมบัติของรูป จนกระทั่งมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 จึงเข้าใจองค์ประกอบและสมบัติของรูปเรขาคณิต

4. การมีภาษาประจำในแต่ละระดับ (Linguistics)

ในแต่ละระดับมีภาษาประจำระดับ และมีระบบของความสัมพันธ์ในการ

เชื่อมโยงภาษา ความคิดรวบยอดและภาษาในระดับที่ต่ำกว่าจะเป็นพื้นฐานของภาษาในระดับที่สูงกว่า

5. ความไม่เหมาะสมกับระดับ (Mismatch)

ถ้านักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับหนึ่ง แต่ครูสอนในระดับที่แตกต่างกันนักเรียนอาจจะไม่เข้าใจเนื้อหาที่ครูสอน โดยปกตินักเรียนจะพยายามจำเนื้อหา แต่นักเรียนไม่เข้าใจเนื้อหานั้นโดยแท้จริง ซึ่งนักเรียนอาจจะลืมเนื้อหาเหล่านั้นได้ง่าย ๆ หรือไม่สามารถที่จะประยุกต์เนื้อหาเหล่านั้นได้โดยเฉพาะในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า Pierre van Hiele และ Dina van Hiele กำหนดลักษณะสำคัญของระดับความคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 5 ข้อ คือ การมีลำดับขั้น ความก้าวหน้า สิ่งที่ไม่ชัดแจ้งในระดับหนึ่งจะชัดแจ้งในระดับต่อไป การมีภาษาประจำในแต่ละระดับ และความไม่เหมาะสมกับระดับ เพื่อให้สามารถนำระดับความคิดทางเรขาคณิตไปใช้เป็นแนวทางในการกำหนดเนื้อหาและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิต

ขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต

การพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งสามารถทำได้โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม ซึ่ง Pierre van Hiele และ Dina van Hiele ได้เสนอขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ขั้นตอน (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 5 – 6) ดังนี้

ขั้นที่ 1 การใช้คำถามเพื่อนำเข้าสู่บทเรียน (Inquiry / Information)

ครูและนักเรียนมีส่วนร่วมในการสนทนาและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของการเรียน โดยการสังเกต และใช้คำถาม เช่น ครูถามนักเรียนว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมเหล่านี้มีความคล้ายกันอย่างไร แตกต่างกันอย่างไร ทำไมถึงตอบอย่างนั้น จุดมุ่งหมายของกิจกรรมนี้มี 2 ข้อ คือ (1) ครูได้ทราบความรู้ดั้งเดิมของนักเรียนเกี่ยวกับหัวข้อนี้ และ (2) นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นแนวทางการศึกษาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 2 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation)

นักเรียนสำรวจหัวข้อที่จะเรียนผ่านสื่อที่ครูจัดให้เป็นลำดับ กิจกรรมนี้จะแสดงให้นักเรียนเห็นลักษณะโครงสร้างอย่างค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้นสื่อจะเป็นงานสั้น ๆ ที่ออกแบบมาเพื่อดึงคำตอบเฉพาะ เช่น ครูอาจจะถามนักเรียนโดยใช้กระดานตะปู(geoboard) เพื่อสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และสร้างรูปที่มีขนาดใหญ่ขึ้นหรือเล็กลง

ขั้นที่ 3 การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication)

สร้างจากประสบการณ์เดิมของนักเรียน โดยให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับสิ่งที่ได้จากการสังเกต จะช่วยให้นักเรียนใช้ภาษาที่ถูกต้องและเหมาะสม บทบาทของครูลดลง นักเรียนจะได้อภิปรายซึ่งกันและกัน และกับครู

ขั้นที่ 4 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation)

นักเรียนต้องเผชิญกับงานที่ยุ่งยากมากขึ้น เช่น งานที่มีหลายขั้นตอนงานที่สามารถทำให้สมบูรณ์ได้หลายวิธี และงานปลายเปิด นักเรียนจะได้ประสบการณ์ในการค้นพบวิธีแก้ปัญหาด้วยตัวเอง ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจสิ่งที่ศึกษามากขึ้น

ขั้นที่ 5 การสรุปรวม (Integration)

นักเรียนสรุปสิ่งที่ได้เรียนมาทั้งหมด โดยเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ในการทำกิจกรรมตั้งแต่เริ่มต้น เช่น สรุปสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทั้งหมด

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าขั้นตอนการสอนของ Pierre van Hiele และ Dina van Hiele แบ่งออกเป็น 5 ขั้น คือ 1) การใช้คำถามเพื่อนำเข้าสู่บทเรียน 2) การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง 3) การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น 4) การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ 5) การสรุปรวม โดยในแต่ละขั้นครูจะต้องเตรียมกิจกรรมที่เหมาะสมและเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอนซึ่งทำให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดทางเรขาคณิต

การจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในแต่ละระดับ

กิจกรรมสำหรับนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตต่างกันก็จะต่างกัน โดยการจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตต่ำกว่าระดับ 4 จะทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตไปสู่ระดับที่สูงกว่าได้ จนในที่สุดสามารถพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตไปสู่ระดับ 4 ซึ่งเป็นระดับสูงที่สุดได้ ซึ่งการจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 - 3 (Crowley, 1987: 7 – 13) มีดังนี้

ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก

ในระดับนี้ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในสิ่งต่อไปนี้

1. ระบายสี พับ และสร้างรูปเรขาคณิต
2. ระบุรูปร่างของรูปเรขาคณิต เช่น

2.1 ครูอาจจะให้นักเรียนวาดรูปเรขาคณิตง่าย ๆ

2.2 ครูอาจจะให้นักเรียนพลิกรูปเรขาคณิตกลับไปมา

2.3 ครูอาจจะให้นักเรียนบอกวัตถุที่เกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตนั้น ซึ่งอยู่ในห้องเรียน ที่บ้าน ในรูปถ่ายและอื่น ๆ

2.4 ครูอาจจะให้นักเรียนบอกชื่อรูปเรขาคณิตที่อยู่ในรูปเรขาคณิตชนิดอื่น เช่น มีเส้นขนานอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

3. สร้างรูปเรขาคณิต โดย

3.1 ครูให้นักเรียนคัดลอกรูปเรขาคณิตบนกระดาษจุด (dot paper) กระดาษตาราง (grid paper) หรือกระดาษลอกลาย (tracing paper)

3.2 ครูให้นักเรียนใช้กระดานตะปู (geoboards)

3.3 ครูให้นักเรียนวาดรูปเรขาคณิต

3.4 ครูให้นักเรียนใช้ไม้ หลอด ท่อ กระเบื้อง เป็นต้น

4. บรรยายรูปเรขาคณิตและใช้ภาษาที่เหมาะสมทั้งภาษาที่เป็นมาตรฐาน และภาษาที่ไม่เป็นมาตรฐาน เช่น ลูกบาศก์เหมือนกล่อง

5. แก้ปัญหาโดยการวัดและการนับ เช่น

5.1 ให้นักเรียนหาพื้นที่ของด้านบนของกล่อง โดยใช้การนับกระเบื้อง

5.2 ให้นักเรียนใช้รูปสามเหลี่ยม 2 รูปเพื่อสร้างรูปสี่เหลี่ยม

ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์

ในระดับนี้ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในสิ่งต่อไปนี้

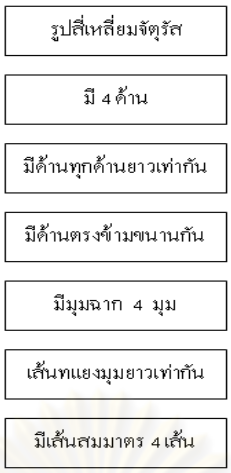
1. วัด ระบายสี พับ ตัด ใช้โมเดลและกระเบื้องเพื่อจะระบุสมบัติของรูปเรขาคณิต เช่น การพับรูปว่าวตามแนวเส้นทแยงมุมเพื่อตรวจสอบการสมมาตร

2. บรรยายรูปเรขาคณิตโดยใช้สมบัติ เช่น

2.1 ให้นักเรียนบรรยายรูปเรขาคณิตให้เพื่อนที่ไม่เห็นรูปเรขาคณิตนั้นได้ทราบ

2.2 ใช้บัตรคำ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาพที่ 6 แสดงการใช้บัตรคำประกอบการจัดกิจกรรมบรรยายรูปโดยใช้สมบัติ

3. เปรียบเทียบรูปเรขาคณิตตามสมบัติของรูปเหล่านั้น เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคล้ายกันอย่างไร และถ้ามองที่มุม รูปสี่เหลี่ยม 2 รูปนี้แตกต่างกันอย่างไร

4. คัดเลือกรูปเรขาคณิตโดยใช้ลักษณะเพียงอย่างเดียว เช่น ให้รูปสี่เหลี่ยมมาหลายชนิดและให้บอกสิ่งต่อไปนี้

4.1 จำนวนของรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน

4.2 จำนวนของรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมเป็นมุมฉาก

5. ระบุและวาดรูปโดยใช้การบอกปากเปล่าหรือการเขียนบรรยายสมบัติของรูปเรขาคณิต

5.1 ครูหรือนักเรียนบรรยายสมบัติของรูปเรขาคณิตและให้นักเรียนคนอื่นตอบว่ารูปเรขาคณิตที่เป็นไปได้ตามสมบัติที่บรรยายได้แก่รูปเรขาคณิตอะไรบ้าง

5.2 ให้นักเรียนเล่นเกมส์ “ฉันชื่ออะไร” โดยครูจะบอกสมบัติทีละสมบัติให้นักเรียนตอบหลังจากที่ครูบอกสมบัติจบทีละสมบัติ และครูจะบอกสมบัติไปจนกว่านักเรียนจะตอบถูกว่ารูปเรขาคณิตที่ให้นั้นชื่ออะไร

6. บอกชื่อรูปเรขาคณิตจากสิ่งที่มองเห็น โดยให้นักเรียนเห็นส่วนของรูปเรขาคณิตทีละนิดและนักเรียนตอบว่าเป็นรูปเรขาคณิตอะไร

7. สังเกต เช่น การนับจำนวนกระเบื้องเพื่อหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

8. บอกสมบัติซึ่งใช้แสดงลักษณะหรือเปรียบเทียบกลุ่มของรูปเรขาคณิตที่แตกต่างโดยครูให้นักเรียนสำรวจความสัมพันธ์ระหว่างเส้นทแยงมุมกับรูปเรขาคณิตโดยใช้กระดาษยาว 2 ชิ้น เพื่อแสดงให้เห็นว่า เส้นทแยงมุมของรูปเรขาคณิตที่ยาวเท่ากันแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และมุมที่จุดตัดของเส้นทแยงมุมเป็นมุมฉาก รูปเรขาคณิตดังกล่าวจะเป็น

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและเมื่อเปลี่ยนขนาดของมุมที่จุดตัดของเส้นทแยงมุมจะได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

9. ค้นหาสมบัติที่ไม่คุ้นเคย เช่น จากสิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และสรุปสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

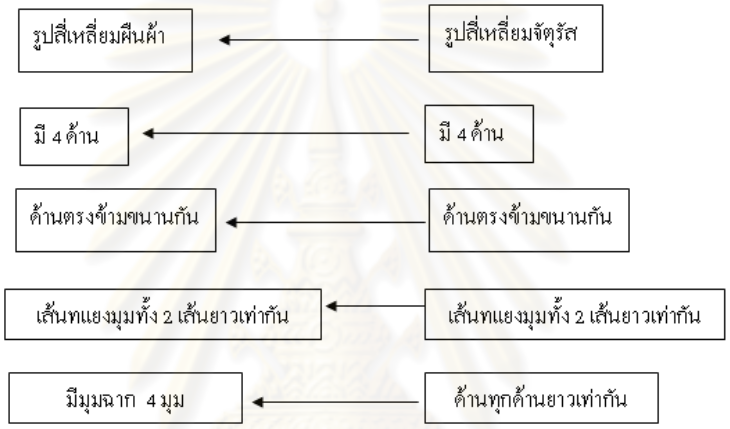
10. ใช้คำศัพท์และสัญลักษณ์อย่างเหมาะสม

ระดับ 2 (ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน)

ในระดับนี้ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในสิ่งต่อไปนี้

1. ศึกษาความสัมพันธ์ สรุปและประยุกต์ เช่น

1.1 ใช้บัตรคำ



ภาพที่ 7 แสดงการใช้บัตรคำประกอบการจัดกิจกรรมศึกษาความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิต

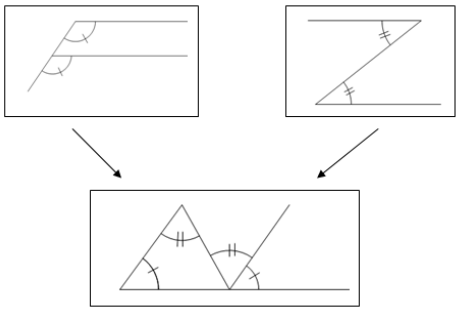
1.2 ใช้กระดานตะปู (geoboard) เพื่อเปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมคางหมูให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า…ในแต่ละการเปลี่ยนแปลงต้องการอะไร

2. ใช้สมบัติของรูปเรขาคณิตน้อยที่สุดเพื่อบรรยายรูปเรขาคณิต เช่น ครูถามนักเรียนว่านักเรียนจะบรรยายรูปเรขาคณิตให้คนอื่นทราบได้อย่างไร ใช้ขั้นตอนเพียง 2 – 3 ขั้นได้หรือไม่ ใช้ขั้นตอนที่แตกต่างกันหรือไม่

3. พัฒนาและใช้นิยาม เช่น ครูถามนักเรียนว่ารูปจัตุรัสคืออะไร

4. ติดตามการสรุปอย่างไม่เป็นทางการ

5. แสดงการสรุปอย่างไม่เป็นทางการโดยใช้แผนภาพ (diagrams) ชิ้นส่วนที่ตัดออกมา (cut – out) แผนภูมิขั้นตอนการดำเนินงาน (flow charts) หรือใช้แผนที่บรรพบุรุษ (ancestry mapping) เช่น ใช้การ์ดและลูกศรเพื่อแสดงว่ามุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น



ภาพที่ 8 แสดงการใช้การ์ดและลูกศรประกอบการจัดกิจกรรม

6. ติดตามการสรุปอย่างเป็นทางการ เช่น ครูให้นักเรียนหาขั้นตอนที่ขาดหายไป

7. หาวิธีการแก้ปัญหามากกว่า 1 วิธี เช่น ครูให้นักเรียนบอกนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมา 2 แบบ

8. อภิปรายข้อความและบทกลับของข้อความนั้น เช่น ครูให้นักเรียนเขียนบทกลับของข้อความ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่งแล้ว มุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180 องศา”

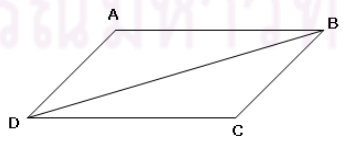
9. แก้ปัญหาเกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต

ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน

ในระดับนี้ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในสิ่งต่อไปนี้

1. บอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ เช่น ครูกำหนดประพจน์และให้นักเรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์

2. บอกข้อมูลที่ได้จากรูปเรขาคณิตและข้อมูลที่ให้มา เช่น ครูให้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD และให้นักเรียนอธิบายสิ่งที่นักเรียนรู้จากรูปนี้ และเขียนในรูปประโยคเงื่อนไข โดยใช้รูปที่กำหนดให้เป็นพื้นฐาน



ภาพที่ 9 แสดงการใช้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ประกอบการจัดกิจกรรม

3. แสดงความเข้าใจความหมายของอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท เช่น ครูกำหนดข้อความและถามว่าข้อความใดเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทเพราะเหตุใด

4. แสดงความเข้าใจเงื่อนไขที่เพียงพอ เช่น ครูให้นักเรียนเขียนบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

a) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าที่...

b) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่...

c) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่...

d) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่...

5. พิสูจน์

6. เปรียบเทียบการพิสูจน์ที่แตกต่างกัน

7. ใช้เทคนิคการพิสูจน์ที่หลากหลาย เช่น การสังเคราะห์ การแปลงเวกเตอร์

8. บอกขั้นตอนการพิสูจน์ เช่น ถ้าพิสูจน์เกี่ยวกับเส้นขนานให้พยายามใช้มุมแย้ง มุมภายนอกกับมุมภายใน หรือการหมุน 180 องศา

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่านักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตในแต่ละระดับจะมีการจัดกิจกรรมที่เหมาะสมแตกต่างกัน ซึ่งการจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 – 3 จะทำให้นักเรียนมีความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นจนทำให้นักเรียนมีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 ซึ่งเป็นระดับสูงที่สุด

ความสามารถของนักเรียนกับระดับความคิดทางเรขาคณิต

นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตต่างกันจะมีความสามารถต่างกัน ซึ่งความสามารถของนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 – 4 มีดังนี้ (Fuys, Gedess and Tischler, 1988: 58 – 71; Burger and Shaughnessy, 1986: 43 – 45)

ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก

ในระดับนี้นักเรียนสามารถทำสิ่งต่อไปนี้ได้

1. ระบุตัวอย่างของรูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากลักษณะของรูป

1.1 ในรูปวาดอย่างง่าย ในแผนภาพ หรือใน cut – outs เช่น นักเรียนสามารถบอกได้ว่าในแผนภาพที่ครูกำหนดให้มีรูปใดบ้างที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1.2 ในรูปถ่ายหรือบนวัตถุต่างๆ เช่น นักเรียนสามารถบอกได้ว่าบานประตูมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

1.3 ในรูปที่มีความซับซ้อน เช่น มุมในรูปสี่ด้าน หรือมุมที่เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

2. สร้าง วาด หรือคัดลอกรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนสามารถนำไม้มาสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือเส้นขนานได้

3. บอกชื่อของรูปเรขาคณิตทั้งชื่อที่เป็นมาตรฐาน และ / หรือไม่เป็นมาตรฐานได้อย่างเหมาะสม

4. เปรียบเทียบและจำแนกรูปเรขาคณิตตามลักษณะของรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนบอกได้ว่ารูปนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสส่วนรูปอื่น ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

5. บรรยายรูปเรขาคณิตได้โดยพิจารณาจากลักษณะของรูปเรขาคณิต เช่น นักเรียนบรรยายรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยบอกว่าเหมือนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเล็กน้อย

6. แก้ปัญหาได้โดยดูลักษณะของรูปเรขาคณิตมากกว่าใช้สมบัติ เช่น นักเรียนใช้การลองผิดลองถูกในการแก้ปัญหา tangram ซึ่งเป็นการประกอบรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจากรูปสามเหลี่ยมขนาดเล็ก 2 รูป

7. บอกส่วนประกอบของรูปเรขาคณิตได้ แต่ไม่สามารถทำสิ่งต่อไปนี้ได้

7.1 ไม่สามารถวิเคราะห์รูปเรขาคณิตโดยพิจารณาจากส่วนประกอบของรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนสามารถบอกได้ว่ารูปเรขาคณิตที่เห็นเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ไม่สามารถบอกได้ว่ามีด้านเท่ากันทุกด้านและมีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

7.2 ไม่สามารถใช้สมบัติของรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนสามารถวัดด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพื่อตรวจสอบว่าด้านทุกด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนั้นเท่ากันได้ แต่นักเรียนไม่สามารถบอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกรูปมีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

7.3 ไม่สามารถใช้ภาษาสื่อการระบุปริมาณได้

ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์

ในระดับนี้นักเรียนสามารถทำสิ่งต่อไปนี้ได้

1. ระบุและทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบของรูปเรขาคณิตได้ เช่นด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีมุมฉาก 4 มุม และด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน

2. ใช้คำศัพท์เกี่ยวกับส่วนประกอบของรูปได้อย่างเหมาะสม เช่น ด้านตรงข้าม เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

3. เปรียบเทียบรูปเรขาคณิต 2 รูปโดยพิจารณาจากส่วนประกอบของรูปเรขาคณิต เช่นนักเรียนสามารถบอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากเหมือนกัน แต่มีความยาวด้านแตกต่างกัน

4. จำแนกรูปเรขาคณิตได้โดยอาศัยสมบัติของรูปเรขาคณิต เช่น นักเรียนสามารถแยกรูปที่มีมุมฉาก มีด้านตรงข้ามขนานกัน 1 คู่ 2 คู่

5. ตีความและใช้การบรรยายสมบัติของรูปเรขาคณิตเพื่อวาดรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียน อ่านสมบัติซึ่งบอกว่า “มี 4 ด้าน” และ “ทุกด้านยาวเท่ากัน” แล้ววาดรูปเรขาคณิตตามสมบัติที่กำหนดให้โดยรูปเรขาคณิตที่วาดไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

6. ค้นพบสมบัติของรูปเรขาคณิตและนำสมบัติมาใช้ได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเท่ากันจำนวน 2 รูป ดังนั้นในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 1 รูปสามารถหาได้โดยการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและนำมาแบ่งครึ่ง

7. บรรยายรูปเรขาคณิตโดยใช้สมบัติของรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนสามารถบรรยายสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้เพื่อนฟังทางโทรศัพท์ได้

8. บอกสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ สามารถประยุกต์สมบัติของรูปเรขาคณิตนั้นไปสู่รูปเรขาคณิตอื่นได้และเปรียบเทียบรูปเรขาคณิตตามสมบัติเหล่านั้นได้ เช่น นักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ว่ามีด้านตรงข้ามขนานกัน และนักเรียนยังบอกเพิ่มเติมได้อีกว่าสมบัติข้อนี้เหมือนสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

9. ค้นพบสมบัติของรูปเรขาคณิตที่ไม่คุ้นเคย เช่น หลังจากที่นักเรียนเห็นตัวอย่างที่เป็นรูปว่าว (kite) และตัวอย่างที่ไม่ใช่รูปว่าวแล้วนักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปว่าวได้

10. แก้ปัญหาเรขาคณิตได้โดยใช้สมบัติของรูปเรขาคณิตที่รู้จัก เช่น นักเรียนสามารถหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้โดยการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

11. ใช้สมบัติได้ แต่ไม่สามารถทำสิ่งต่อไปนี้ได้

11.1 ไม่สามารถใช้นิยามอย่างเป็นทางการได้ เช่น นักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ แต่ไม่สามารถบอกสมบัติที่เพียงพอได้

11.2 ไม่สามารถบอกความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมได้ทุกชนิด แต่ไม่สามารถบอกความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมเหล่านั้นได้

11.3 ไม่สามารถพิสูจน์ และไม่สามารถใช้ภาษาที่แสดงความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เช่น ข้อความในรูปของประโยคเงื่อนไข

ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน

ในระดับนี้นักเรียนสามารถทำสิ่งต่อไปนี้ได้

1. ระบุกลุ่มของสมบัติที่แตกต่างกันของรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มที่แตกต่างกันได้ คือ 1) มี 4 ด้านและด้านตรงข้ามขนานกัน 2) มี 4 ด้านและด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน

2. ใช้สมบัติให้น้อยที่สุด เพื่อทำให้เข้าใจลักษณะของรูปเรขาคณิตนั้น เช่น ในการอธิบายรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้เพื่อน นักเรียนเลือกใช้สมบัติให้น้อยที่สุดในการอธิบายให้เพื่อนเข้าใจ และมั่นใจว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

3. ใช้นิยามของรูปเรขาคณิต ได้ เช่น นักเรียนใช้นิยามของรูปว่าว เพื่ออธิบายว่าทำไมบางรูปถึงเป็นรูปว่าว แต่บางรูปไม่ใช่รูปว่าว

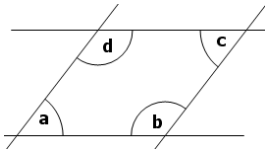
4. สรุปการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ได้

5. เชื่อมโยงรูปเรขาคณิตได้ เช่น นักเรียนสามารถตอบคำถาม “รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่” โดยตอบว่า “เป็น เพราะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทุกประการและมีสมบัติพิเศษ คือ มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก"

6. ค้นพบสมบัติใหม่โดยการหักลบ เช่น นักเรียนต้องการหาผลรวมของมุมแหลม 2 มุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสามารถทำได้โดยนำ 90 องศา (มุมฉาก) หักออกจาก 180 องศา (ผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม) หรือนักเรียนต้องการหาผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมสามารถทำได้โดยแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป และผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเท่ากับ 180 องศา ดังนั้น ผลรวมของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360 องศา

7. ติดตามการพิสูจน์ได้ เช่น นักเรียนสามารถให้เหตุผลในแต่ละขั้นของการพิสูจน์เรื่องผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศาได้

8. ให้ข้อสรุปได้ เช่น เมื่อครูให้ตารางรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและให้นักเรียนอธิบายเหตุผลว่าทำไมมุมที่อยู่ตรงข้ามจึงเท่ากัน นักเรียนไม่สามารถอธิบายได้ด้วยตนเอง แต่เมื่อครูอธิบายว่าทำไม $\hat{a} = \hat{c}$ แล้วนักเรียนสามารถสรุปคำอธิบายและใช้คำพูดของตนเองเพื่ออธิบายว่าทำไม $\hat{b} = \hat{d}$



ภาพที่ 10 แสดงรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มุมภายในคือ $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ และ $\hat{d}$

9. ให้คำอธิบายได้มากกว่า 1 วิธี เช่น นักเรียนสามารถให้คำอธิบายได้ว่าเหตุใดผลรวมของมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมจึงเป็น 540 องศา โดยวิธีที่ 1 แบ่งรูปห้าเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ 3 รูป ดังนั้นผลรวมของมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมเท่ากับ 3 x 180 องศา วิธีที่ 2 แบ่งรูปห้าเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 1 รูป และรูปสี่เหลี่ยม 1 รูป ดังนั้นผลรวมของมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมเท่ากับ 180 + 360 องศา

10. จำความแตกต่างระหว่างข้อความและบทกลับของข้อความนั้นอย่างไม่เป็นทางการได้

11. ระบุและใช้วิธีการหรือเหตุผลในการแก้ปัญหา

ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน

ในระดับนี้นักเรียนสามารถทำสิ่งต่อไปนี้ได้

1. จำอนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทได้ เช่น นักเรียนสามารถให้ตัวอย่างเกี่ยวกับ อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทของเรขาคณิตแบบยุคลิดได้ และบรรยายความสัมพันธ์ของอนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทได้

2. จำลักษณะของการนิยามอย่างเป็นทางการได้ เช่น บอกเงื่อนไขที่เพียงพอได้

3. พิสูจน์อย่างง่ายได้ และพิสูจน์ได้มากกว่า 1 วิธี

4. สร้างความสัมพันธ์ภายในเครือข่ายของทฤษฎีบท

5. วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อความต่าง ๆ โดยใช้การอนุมานจากเหตุไปสู่ผลได้

6. บอกความสัมพันธ์ของสิ่งที่กำหนดให้กับรูปอื่นได้ว่าจริงหรือเท็จ

7. ใช้อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทได้อย่างเข้าใจ

8. เข้าใจการพิสูจน์โดยสามารถบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้

9. เปรียบเทียบและบอกความแตกต่างของการพิสูจน์ เช่น นักเรียนสามารถพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน โดยใช้การพิสูจน์ของเรขาคณิตแบบยุคลิด และเรขาคณิตแบบเวกเตอร์ และเปรียบเทียบวิธีการพิสูจน์ทั้ง 2 วิธี

10. สร้างหลักเกณฑ์ทั่วไปซึ่งรวมหลายทฤษฎีบทที่แตกต่างกัน

ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด

ในระดับนี้นักเรียนสามารถทำสิ่งต่อไปนี้ได้

1. พิสูจน์แบบแย้งสลับที่ได้

2. พิสูจน์แบบข้อขัดแย้งได้

3. สร้างทฤษฎีในระบบสัจพจน์ที่แตกต่างกันได้

4. เปรียบเทียบระบบสัจพจน์ เช่น เรขาคณิตแบบยุคลิด และเรขาคณิตนอกแบบยุคลิด

5. ค้นหากรอบกว้าง ๆ ซึ่งทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์จะประยุกต์ไปได้

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่านักเรียนในแต่ละระดับความคิดทางเรขาคณิตจะมีความสามารถที่แตกต่างกัน โดยในแต่ละระดับความคิดทางเรขาคณิตนักเรียนจะมีความสามารถที่หลากหลาย และเมื่อนักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตสูงขึ้นนักเรียนก็จะมีความสามารถเพิ่มขึ้น

การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ความหมายของการพิสูจน์

กรรณิการ์ กวักเพชรย์ (2542: 35) กล่าวโดยสรุปว่าการพิสูจน์ (Proof) เป็นการให้เหตุผลเพื่อแสดงว่าข้อความเป็นจริง

Stylianides (2007: 291) ให้ความหมายของการพิสูจน์(Proof) ว่าเป็นการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มีความเชื่อมโยงข้อความตามลำดับของข้อความที่ใช้ยืนยัน หรือเป็นข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการพิสูจน์หมายถึงการอ้างเหตุผลเพื่อแสดงให้เห็นว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง

ความสำคัญของการพิสูจน์

เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533: 3) กล่าวโดยสรุปว่า การพิสูจน์ทำให้นักเรียนฝึกการใช้เหตุผล รู้จักวิเคราะห์แก้ไขปัญหาอย่างมีระบบ

พัฒนี อุดมกะวานิช (2541: 1) กล่าวโดยสรุปว่า การมีแนวคิดทฤษฎีใหม่ๆ ย่อมเป็นผลจากการศึกษาทฤษฎีบทที่มีอยู่ว่ามีแนวคิดมาอย่างไร และใช้การพิสูจน์ในการยืนยันความถูกต้อง

ขวัญ เพียซ้าย (2547: 1) กล่าวโดยสรุปว่า การเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงนักเรียนจะต้องมีความสามารถในด้านการพิสูจน์เห็นคุณค่าและตระหนักในความสำคัญของการพิสูจน์

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการพิสูจน์มีความสำคัญหลายประการ ทั้งความสำคัญต่อการศึกษาในระดับสูง เป็นเครื่องมือที่ช่วยให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะการให้เหตุผลตลอดจนเป็นเครื่องมือในการตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีบทต่างๆ

ประเภทของการพิสูจน์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548: 4) ระบุว่าการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นประโยคเงื่อนไข แบ่งเป็น 2 กรณีคือ

1) การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง เป็นการพิสูจน์ที่ต้องใช้เหตุผลเพื่อแสดงว่า เมื่อเหตุเป็นจริงแล้ว เหตุนั้นทำให้ผลเป็นจริงเสมอ โดยเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้แล้ว อาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงและสมบัติต่าง ๆ อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างประกอบกันมาให้เหตุผล เพื่อให้ได้ว่าผลที่ต้องการเป็นจริง

2) การพิสูจน์ว่าข้อความไม่จริง ทำได้โดยยกตัวอย่างที่เป็นจริงตามสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือเหตุ แต่ผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริงที่ต้องการ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการพิสูจน์แบ่งออกเป็น 2 กรณีคือ การพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ว่าเป็นจริง และพิสูจน์ว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ

กระบวนการพิสูจน์

ศิริจันทร์ เวสารัชศาต (2551: 32-35) กล่าวว่าการพิสูจน์ข้อความที่เป็นประโยคเงื่อนไขออกเป็น 2 วิธี ดังนี้

1) การพิสูจน์ตรง(Direc Proof) คือการพิสูจน์ที่เริ่มต้นพิสูจน์จากเหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้ จากนั้นอาศัยบทนิยาม กฎ ทฤษฎี สัจพจน์ หรือข้อความที่เคยได้พิสูจน์มาแล้วก่อนหน้ามาอ้างอิงจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

2) การพิสูจน์อ้อม (Indirecproof or proof by Contradiction) เป็นการพิสูจน์ที่ทำได้โดยการสมมติข้อความที่ต้องการพิสูจน์ให้เป็นเท็จ แล้วดำเนินการพิสูจน์ไปจนกระทั่งเกิดข้อขัดแย้งขึ้น

กรรณิการ์ กวักเพชูรย์ (2542: 52 – 58) กล่าวว่าการพิสูจน์ข้อความที่ในแบบ $p \to q$ สามารถทำได้ 3 วิธี คือ วิธีตรง (direct proof) วิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof) และ วิธีข้อขัดแย้ง (contradiction proof)

อีกทั้งยังสรุปการพิสูจน์ทั้ง 3 แบบไว้ดังนี้

1) วิธีตรง สมมติ p เป็นจริง
.
. (ส่วนของการพิสูจน์)
.
ดังนั้น q

2) วิธีการแย้งสลับที่ สมมติ ~q เป็นจริง
.
. (ส่วนของการพิสูจน์)
.
ดังนั้น ~p

3) วิธีข้อขัดแย้ง สมมติ p และ ~q เป็นจริง
.
. (ส่วนของการพิสูจน์)
.
ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าการพิสูจน์ทำได้ 3 วิธีคือ การพิสูจน์โดยวิธีตรง การพิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ และการพิสูจน์โดยวิธีข้อขัดแย้ง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการพิสูจน์ มีดังนี้

งานวิจัยต่างประเทศ

Chaiyasang (1987: 2137 – A) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียน ในประเทศไทย โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใน โรงเรียนทางภาคตะวันออกของประเทศไทยจำนวน 12 โรงเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 โดยนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 1 และ 2 ไม่สามารถทำการพิสูจน์ได้ แต่นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 3 สามารถพิสูจน์อย่างง่าย

ได้บางส่วน ส่วนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 สามารถพิสูจน์ได้อย่างสมบูรณ์ยกเว้นการพิสูจน์ที่ซับซ้อนมาก

Bobango (1987: 2566 - A) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ซึ่งเป็นผลจากการสอนโดยใช้รูปแบบของแวนฮีลี่ใช้เวลาทดลอง 20 วัน โดยใช้กลุ่มตัวอย่าง 72 คน มีการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตและระดับความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี่ก่อนและหลังการสอน โดยผลการวิจัยพบว่า การสอนโดยใช้รูปแบบแวนฮีลี่ทำให้ระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนเพิ่มขึ้น โดยเป็นการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับ 1 (ระดับการวิเคราะห์) ไปยัง ระดับ 2 (ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน) มากกว่าการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตในระดับอื่น ๆ

Dimakos et al. (2007: 87 – 106) ได้คิดค้นและทดลองใช้ เมทริกซ์ควบคุมการให้เหตุผลสำหรับกระบวนการพิสูจน์ (RECOMPP) โดยทำการทดลองกับนักเรียนมัธยมในช่วงอายุ 15 ปี ทำการสุ่มตัวอย่างโรงเรียนมา 2 โรงเรียน และทำการคัดเลือกนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 มาเป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยได้กลุ่มตัวอย่างสิ้น 89 คน โดยนักเรียนในกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนเขียนพิสูจน์โดยใช้ RECOMPP ประกอบการฝึกเขียนพิสูจน์มีจำนวน 44 คน และนักเรียนในกลุ่มควบคุมที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติ มีจำนวน 45 คน โดยใช้เวลาในการศึกษา 3 เดือน ผลการทดลองพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมีคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มควบคุมมีคะแนนระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

Nikoloudakis (2009: 17 – 45) ได้พัฒนาโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันซึ่งได้แนวคิดมาจากการผสมผสานของกระบวนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดตามทฤษฎีแวนฮีลี และวิธีการฝึกหัดทางปัญญาของColin et al. โดยทดลองใช้จัดกิจกรรมการสอนพิสูจน์เรขาคณิตกับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในช่วงอายุ 15 ปี ซึ่งยังไม่เคยเรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาก่อน ใช้กลุ่มตัวอย่างจำนวน 250 คน แบ่งออกเป็นกลุ่มทดลอง 138 คน และกลุ่มควบคุม 112 คน โดยใช้เวลาในการสอนเป็นระยะเวลา 2 เดือน ผลการทดลองพบว่า 1) คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ระหว่างก่อนและหลังเรียนของนักเรียนทั้งหมดไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนในกลุ่มควบคุมที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อด

คอมบิเนชันระหว่างก่อนและหลังเรียนมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้แล้วยังพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองจะสามารถทำแบบฝึกหัดการการพิสูจน์โจทย์ที่มีลักษณะต่อเนื่องกันได้ ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มควบคุมไม่สามารถทำได้

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องสามารถสรุปได้ดังนี้

1) มีการทดลองใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต แต่ยังไม่มีการทดลองใช้สอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต

2) การใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันยังไม่แพร่หลายมากนักเนื่องจากยังเป็นโมเดลใหม่

งานวิจัยในประเทศไทย

เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533: ง) ได้ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและเอกชน ผลการวิจัยพบว่า จำนวนนักเรียนโรงเรียนรัฐบาล ที่ผ่านเกณฑ์การผ่านแบบทดสอบทั้งฉบับคิดเป็นร้อยละ 10.26 ขณะที่จำนวนนักเรียนโรงเรียนเอกชน ที่ผ่านเกณฑ์การผ่านแบบทดสอบทั้งฉบับคิดเป็นร้อยละ 1.99

กุลยา เหมวัสดุกิจ (2545: ง) ทำการศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสตรีสมุทรปราการ ปีการศึกษา 2545 จำนวน 98 คน ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ เรื่องเส้นขนานและความคล้าย เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตผลการวิจัยพบว่า 1) หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับและเพิ่มขึ้น 2 ระดับตามลำดับ 2) หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 3 และ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น โดยนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุด ส่วนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 และ 2 มีจำนวนลดลง โดยนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด

ชนิศวรา ฉัตรแก้ว และ สิริพร ทิพย์คง (2549: 21 – 29) ได้พัฒนาหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตและลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พร้อมทั้งศึกษาลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี และศึกษาเจตคติและความคิดเห็นของนักเรียนหลังจากใช้หน่วยการเรียนรู้เรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 1 ห้องเรียน จำนวน 39 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มจากทั้งหมด 7 ห้องเรียน หน่วยการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นประกอบด้วย 3 หน่วยการเรียนรู้ คือ เส้นขนาน ความคล้าย และการสำรวจรูปเรขาคณิตที่ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปแบบพลวัตคือ The Geometer's Sketchpad (GSP) ในการเรียนการสอน และเน้นการเรียนรู้ตามรูปแบบแวนฮีลี ใช้เวลาสอนทั้งหมด 14 คาบ คาบละ 50 นาที เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วยแบบสัมภาษณ์ความคิดเห็นอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนมีลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีเพิ่มขึ้นมากที่สุดในขั้น 2 ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน 2) นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนเรขาคณิตโดยคะแนนเฉลี่ยหลังการเรียนและก่อนการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 3) นักเรียนส่วนใหญ่มีความคิดเห็นที่ดีต่อการจัดหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตและการใช้โปรแกรม GSP มีความเหมาะสมในการเรียนหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิต

จากการศึกษางานวิจัยในประเทศที่เกี่ยวข้องสามารถสรุปได้ดังนี้

1) ความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในประเทศไทยยังอยู่ในระดับต่ำ

2) งานวิจัยส่วนใหญ่จะมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต แต่ยังไม่มีงานวิจัยที่มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาความสามารถในการเขียนพิสูจน์และยังไม่มีงานวิจัยใดที่ใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยมีวิธีการดำเนินการวิจัยดังนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าความรู้จากเอกสาร ตำรา และงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยครั้งนี้ ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาเอกสาร ตำรา และงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์

2. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1–ม.3) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

3. ศึกษาเนื้อหาเรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และวงกลม จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 หนังสือคู่มือครู และหนังสืออ่านประกอบอื่นๆ เพื่อเป็นแนวทางในการจัดทำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

4. ศึกษาเอกสาร ตำรา และงานวิจัยเกี่ยวกับวิธีวิจัย การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย วิธีการวัดและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาทฤษฎี หลักการ วิธีสร้างแบบทดสอบวัดความคิดทางเรขาคณิต และแบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi Experimental Research) ซึ่งประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม โดยมีรูปแบบของการทดลองปรากฏดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 รูปแบบการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง	การทดสอบก่อนการทดลอง	ทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
E	- ความคิดทางเรขาคณิต - ความสามารถในการเขียนพิสูจน์	X	- ความคิดทางเรขาคณิต - ความสามารถในการเขียนพิสูจน์
C	- ความคิดทางเรขาคณิต - ความสามารถในการเขียนพิสูจน์	~X	- ความคิดทางเรขาคณิต - ความสามารถในการเขียนพิสูจน์

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

E แทน กลุ่มทดลอง

C แทน กลุ่มควบคุม

X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน

~X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 1สำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างด้วยเทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2

ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนวัดราชบพิธ จังหวัดกรุงเทพมหานคร สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 1 สำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน

โรงเรียนวัดราชบพิธ มีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 10 ห้องเรียน แบ่งเป็นห้องโครงการส่งเสริมผู้ที่มีความรู้ความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ 2 ห้อง และ ห้องปกติ 8 ห้อง ซึ่งในห้องเรียนปกติ 8 ห้องเรียน มี 5 ห้องเรียนที่ได้เรียนในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม โดยผู้วิจัยนำคะแนนรวม วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในปีการศึกษา 2552 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของนักเรียน 5 ห้องเรียน มาหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$)และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) แล้วผู้วิจัยพิจารณาเลือกห้อง ที่มีค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ใกล้เคียงกันมากที่สุด 2 ห้อง ได้แก่ ห้อง ม.3/7 และ ม.3/8 ซึ่งมีค่าค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) เท่ากับ 81.47 และ 82.03 ตามลำดับ นำมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่าความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนน ด้วยสถิติค่าที (t-test) เพื่อดูค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนรวมวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่ พบว่าคะแนนดังกล่าว ของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ใกล้เคียงกัน

หลังจากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 2 ห้อง ทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน ซึ่ง ห้อง ม.3/7 และ ม.3/8 มีค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$)ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน เท่ากับ 9.38 และ 9.93 ตามลำดับ จากนั้นนำคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน ของนักเรียนทั้ง 2 ห้อง ไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่าความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จึงทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนด้วยสถิติค่าที (t-test) พบว่า คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนใกล้เคียงกัน

จากนั้นผู้วิจัยได้จับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏว่านักเรียนห้อง ม.3/8 เป็นกลุ่มทดลอง ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และนักเรียนห้อง ม.3/7 เป็นกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบปกติ

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งเป็น 2 ชนิด คือ เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง และเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ซึ่งมีรายละเอียดการสร้างดังต่อไปนี้

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันสำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม ซึ่งครอบคลุมสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และ วงกลม จำนวน 7 แผน เป็นเวลา 6 สัปดาห์ ซึ่งมีรายละเอียดในการดำเนินการดังนี้

4.1.1 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี ที่เกี่ยวข้องกับแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จากเอกสารและตำราต่างๆ

4.1.2 ศึกษาหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนวัดราชบพิธที่อิงตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

4.1.3 ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง รายละเอียดของสาระการเรียนรู้กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล แล้วแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

4.1.4 เขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน สำหรับกลุ่มทดลอง และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม โดยแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบด้วย สาระสำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน และการวัดการประเมินผล ซึ่งแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ทั้งสองแบบมีความแตกต่างกันดังนี้ โดยกลุ่มทดลองได้ทำกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ส่วนกลุ่มควบคุมได้เรียนด้วยวิธีการตามแนวทางการจัดการเรียนการสอนที่แนะนำไว้ในคู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ซึ่งเป็นไปตามแนวการจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง สำหรับความแตกต่างระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน สำหรับกลุ่มทดลอง และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม ผู้วิจัยได้เสนอไว้ในตารางที่ 2 ต่อไปนี้

ตารางที่ 2 กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน)	**กลุ่มควบคุม** (กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ)
ขั้นการทบทวนความรู้เดิม ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทที่จำเป็นบนพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องที่จะเรียนมากยิ่งขึ้น **ขั้นกระบวนการ** ครูจัดกิจกรรมที่นักเรียนจะต้อง มีการค้นพบการคาดคะเน การสังเกตสมบัติของรูปเรขาคณิต การอภิปรายและการแสดงความคิดเห็นถึงวิธีการแก้ปัญหาที่ครูเตรียมไว้ล่วงหน้า และเผชิญกับงานที่ซับซ้อน โดยการจัดกิจกรรมแบ่งออกเป็น 5 ระยะ คือ 1) เรียนรู้รูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต 2) เรียนรู้สมบัติและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องของรูปเรขาคณิตโดยยังไม่มีการพิสูจน์ 3) เรียนรู้การจำแนกรูปเรขาคณิต 4) เรียนรู้การใช้ RECOMPPประกอบการเขียนพิสูจน์ประพจน์ที่ไม่ซับซ้อน 5) เรียนรู้การเขียนพิสูจน์ประพจน์ที่ซับซ้อน และการพิสูจน์ทฤษฎีบท โดยใช้RECOMPP ประกอบการเขียนพิสูจน์ **ขั้นการประเมิน** ครูจัดกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีการพูดคุยกับคนอื่น ๆ ถึงกิจกรรมที่ได้ทำก่อนหน้านี้ เช่น อธิบายถึงวิธีการได้มาซึ่งความรู้ อธิบายถึงสิ่งที่ได้เรียนรู้ และมีการตั้งปัญหาจากสิ่งที่ได้เรียนรู้	**ขั้นนำ** ครูสนทนากับนักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้ทราบข้อความรู้ ซึ่งเป็นการชี้แนะให้นักเรียนทราบในเรื่องที่จะสอน โดยการกล่าวถึงเรื่องต่างๆ ที่เกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียน **ขั้นสอน** ครูสอนตามคู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ระบุในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 โดยเน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางโดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ต้องลงมือปฏิบัติมีการอภิปรายแสดงความคิดเห็นเป็นต้น ตลอดจนครูใช้การอธิบายเนื้อหา และยกตัวอย่างในเรื่องที่จะสอนโดยบางตัวอย่างอาจใช้สาธิตให้นักเรียนดูและบางตัวอย่างอาจให้นักเรียนช่วยกันทำและใช้การถามตอบเพื่อให้นักเรียนได้ข้อความรู้ และเข้าใจในเรื่องที่เรียนอีกทั้งให้นักเรียนได้ทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนความเข้าใจในเรื่องที่เรียนมากขึ้น **ขั้นสรุป** ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปข้อความรู้ที่ได้และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมเพื่อเพิ่มความเข้าใจในเรื่องที่เรียน ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยในระหว่างทำแบบฝึกหัด

สำหรับรายละเอียดสาระการเรียนรู้ในแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยม และวงกลม จำนวน 7 แผน จำนวน 25 คาบ แสดงได้ดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยม และวงกลม

แผนการเรียนรู้ที่	คาบที่	สาระการเรียนรู้
1	1-2	ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
2	3-6	รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
3	7-11	รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
4	12-15	การสร้าง
5	16-19	วงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม และมุมในส่วนโค้งของวงกลม
6	20-22	คอร์ด
7	23-25	เส้นสัมผัสวงกลม

4.1.5 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความถูกต้องเหมาะสมของเนื้อหา และให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงแก้ไข ซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้ข้อเสนอแนะดังนี้

ก. การเขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ไม่จำเป็นต้องเขียนคำถามทุกคำถาม ให้เขียนแต่ประเด็นที่ถาม และจุดประสงค์ของการถามว่าเพื่อให้นักเรียนทำอะไรหรือเรียนรู้อะไร

ข. แบบฝึกหัดในใบกิจกรรมของนักเรียนไม่ควรมากจนเกินไป

4.1.6 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ตรวจสอบแล้วมาปรับปรุงแก้ไขพัฒนาให้ดีขึ้น และนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลครั้งนี้ ได้แก่

1) แบบวัดความคิดทางเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ใช้วัดความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนก่อนเรียน และ หลังเรียน

2) แบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน เรื่องความเท่ากัน

ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ใช้วัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนเพื่อเลือกนักเรียน 2 กลุ่มที่มีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ที่ใกล้เคียงกัน และใช้เป็นข้อมูลในการเลือกใช้สถิติ

3) แบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ใช้วัดเพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลขึ้นเองโดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.2.1 **แบบวัดความคิดทางเรขาคณิต** เรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม เป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนต่อไปนี้

1) ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความคิดทางเรขาคณิต

2) ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตจากตำรา เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3) สร้างตารางการเปรียบเทียบพฤติกรรมของผู้เรียนในแต่ละความคิดทางเรขาคณิต

4) สร้างแบบวัดความรู้พื้นฐานด้านความคิดทางเรขาคณิต จำนวน 1 ฉบับ ซึ่งเป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบมี 5 ตัวเลือก จำนวน 45 ข้อ โดยในแต่ละข้อมีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว ซึ่งแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตแบ่งออกเป็น 5 ระดับ ดังนี้

ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก จำนวน 9 ข้อ

ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ จำนวน 9 ข้อ

ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน จำนวน 9 ข้อ

ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน จำนวน 9 ข้อ

ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด จำนวน 9 ข้อ

โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนในแต่ละข้อดังนี้

ให้ 1 คะแนน ในกรณีที่ตอบถูก

ให้ 0 คะแนน ในกรณีที่ตอบผิด ไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 คำตอบ

5) นำแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบ และให้ข้อเสนอแนะ ผลการตรวจสอบของอาจารย์ที่ปรึกษาพบว่า แบบวัดที่สร้างขึ้นมีส่วนที่ต้องปรับปรุงแก้ไขดังนี้

5.1 แก้ไขการใช้สัญลักษณ์ทางเรขาคณิตให้มีความชัดเจนขึ้น เช่น $A\hat{E}B$ แก้เป็น $A\widehat{E}B$

5.2 ข้อสอบส่วนใหญ่มีทั้งคำถามและรูปควรจัดให้อยู่ในพื้นที่ที่กะทัดรัดและมีความชัดเจน เพื่อลดจำนวนหน้าของแบบวัด จะทำให้นักเรียนมีกำลังใจในการทำแบบวัดมากขึ้น

6) ปรับปรุงแก้ไขแบบวัดตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษา แล้วนำแบบวัดไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน (ภาคผนวก ก) ตรวจความตรงของเนื้อหาและความตรงเชิงโครงสร้าง พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัด ผลการตรวจสอบของผู้ทรงคุณวุฒิพบว่า แบบวัดที่สร้างขึ้นมีส่วนที่ต้องปรับปรุงแก้ไขดังนี้

6.1 แก้ไขการพิมพ์ข้อคำถามให้มีความชัดเจนขึ้น เช่น มีการพิมพ์ตัวหนา หรือขีดเส้นใต้คำว่า “ไม่เป็นจริง” ในข้อคำถาม

6.2 แก้ไขข้อความในคำถามให้มีความถูกต้อง เช่น

โจทย์เดิม “ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมคู่หนึ่งขนานกันแล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน”

แก้ไขเป็น “ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามขนานกันคู่หนึ่งแล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน”

6.3 ปรับปรุงแก้ไขตัวเลือกในบางข้อเนื่องจากมีข้อถูกมากกว่า 1 คำตอบ

6.4 แก้ไขคำให้ตรงตามราชบัณฑิตยสถาน เช่น คำว่า “รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว” แก้เป็น “รูปว่าว”

7) นำแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตไปปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิ แล้วนำไปทดลองใช้กับนักเรียนระดับชั้น ม.3 โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 50 คนแล้วนำมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนด

8) นำคะแนนจากข้อ 7 มาวิเคราะห์หาค่าความเที่ยงของแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตโดยใช้วิธีหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) โดยมีเกณฑ์ค่าความเที่ยงของแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตทั้งฉบับตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยงของแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตคือ 0.6251 และผลการวิเคราะห์แยกตามระดับความคิดทางเรขาคณิตได้ดังนี้

ค่าความเที่ยงระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก 0.2355
ค่าความเที่ยงระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ 0.6239
ค่าความเที่ยงระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน 0.5358
ค่าความเที่ยงระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน 0.3702
ค่าความเที่ยงระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด 0.4027

9) ตัดข้อในแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตในระดับต่าง ๆ โดยพิจารณาจากค่า Alpha if Item Deleted ซึ่งเป็นค่าความเที่ยงของแบบวัดที่เหลืออยู่เมื่อตัดข้อนั้นออกไป โดยเกณฑ์การตัดข้อ คือ ตัดข้อที่ทำให้แบบวัดมีค่าความเที่ยงสูงสุด หรือ ตัดข้อที่ทำให้แบบวัดมีค่าความเที่ยงลดลงน้อยที่สุดตัวอย่างเช่น แสดงในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ค่า Alpha if Item Deleted ของแบบความคิดทางเรขาคณิตระดับ 0

ข้อที่	Alpha if item Deleted
1	0.2427
2	0.2234
3	0.3115
4	0.1379
5	0.2253
6	0.2391
7	0.1692
8	0.1458
9	0.2109

ค่าความเที่ยงระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก 0.2355

จากตารางที่ 4 พบว่า ข้อที่ควรตัดออกเป็นข้อแรกคือ ข้อ 3 เนื่องจากเมื่อตัดข้อ 3 ทำให้ค่าความเที่ยงระดับ 0 สูงที่สุดเมื่อเทียบกับการตัดข้ออื่น ๆ ในแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับ 0 ใช้วิธีการเดียวกันนี้ในการตัดข้อสอบของแบบวัดทุกระดับ จนกระทั่งได้แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ระดับ ระดับละ 6 ข้อ รวม 30 ข้อ

10) นำแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตที่ได้จำนวน 30 ข้อ ไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสามเสนวิทยาลัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553

ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 50 คน ซึ่งได้ผลวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบคือมีค่าความเที่ยงของแบบวัดความคิดทั้งฉบับคือ 0.7586

11) นำแบบทดสอบวัดความคิดทางเรขาคณิตที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

4.2.2 แบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน เป็นแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนก่อนการทดลอง เพื่อเลือกนักเรียน 2 กลุ่มที่มีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ใกล้เคียงกัน ซึ่งแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนเป็นข้อสอบอัตนัยแบบเขียนตอบ จำนวน 6 ข้อมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1) ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

2) ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเขียนพิสูจน์เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัด

3) สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหา ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และกำหนดอัตราส่วนจำนวนข้อสอบในแต่ละเรื่องให้เหมาะสมกับจำนวนคาบสอน

4) สร้างแบบวัดความรู้พื้นฐานด้านความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน จำนวน 9 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบอัตนัยแบบเขียนตอบ

ใช้เกณฑ์การให้คะแนนของ Malone et al. (Senk, 1982: 7) ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

ตารางที่ 5 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์

ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
0	ไม่เขียนการพิสูจน์เลย หรือเขียนสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์
1	เขียนพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกอย่างน้อย 1 แห่งแต่ไม่สามารถทำจนสำเร็จ
2	เขียนพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผล เพียงพอที่ทำให้เห็นแนวทางในการพิสูจน์ที่ถูกต้องได้ แต่ยังคงพบข้อผิดพลาดหลายประการซึ่งทำให้การพิสูจน์ผิด
3	เขียนพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องเกือบทั้งหมด แต่มีข้อผิดพลาดเพียงเล็กน้อย มิฉะนั้นการพิสูจน์จะถูกต้องสมบูรณ์
4	เขียนพิสูจน์ถูกต้องทั้งหมด ไม่มีข้อผิดพลาดเลย

5) ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนและเกณฑ์การตรวจให้คะแนนเสนออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความเหมาะสม และให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้คำแนะนำดังนี้

5.1 ปรับปรุงในส่วนของช่องว่างที่จะให้นักเรียนเติมคำตอบให้มีความยาวที่เหมาะสมกับคำตอบ

5.2 ให้เพิ่มตัวอย่างการตอบในหน้าแรกของแบบทดสอบ

6) หลังจากนั้นผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบให้ข้อเสนอแนะ เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขผลการตรวจสอบของผู้ทรงคุณวุฒิ พบว่า แบบวัดที่สร้างขึ้นมีส่วนที่ต้องปรับปรุงแก้ไขดังนี้

6.1 เพิ่มเวลาในการทำแบบทดสอบ 9 ข้อ จาก 50 นาที เป็น 90 นาที

6.2 แก้ไขข้อความในแบบทดสอบให้ถูกต้องเช่น คำว่า “ด้านคู่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ” เป็น “ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ”

7) ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากข้อ 6 ไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสามเสนวิทยาลัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 56 คนแล้วนำมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนด

8) นำคะแนนที่ได้จากข้อ 7 มาหาค่าความเที่ยงของแบบวัดโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา(Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) โดยมีเกณฑ์ค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป ค่าความยากระหว่าง 0.2 – 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไป ซึ่งผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง	มีค่า	0.879
ค่าความยาก	มีค่า	0.48 – 0.67
ค่าอำนาจจำแนก	มีค่า	0.27 – 0.64

9) เลือกข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกตามเกณฑ์ จำนวน 6 ข้อ มาสร้างเป็นแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน

10) นำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนที่ได้จำนวน 6 ข้อ ไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสามเสนวิทยาลัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 50 คนซึ่งได้ผลวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง มีค่า 0.862

ค่าความยาก มีค่า 0.54 – 0.63

ค่าอำนาจจำแนก มีค่า 0.46 – 0.63

11) นำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไปใช้กับนักเรียนชั้น 3 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม

4.2.2 **แบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน** เป็นแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ เรื่อง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนหลังการทดลอง เป็นข้อสอบอัตนัยแบบเขียนตอบ จำนวน 6 ข้อมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1) ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาเรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

2) ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเขียนพิสูจน์เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัด

3) สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหา ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และกำหนดอัตราส่วนจำนวนข้อสอบในแต่ละเรื่องให้เหมาะสมกับจำนวนคาบสอน

4) สร้างแบบวัดความรู้พื้นฐานด้านความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน จำนวน 9 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบอัตนัยแบบเขียนตอบ

5) ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนเสนออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความเหมาะสมและให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้คำแนะนำดังนี้

5.1 ปรับปรุงในส่วนของช่องว่างที่จะให้นักเรียนเติมคำตอบให้มีความยาวที่เหมาะสมกับคำตอบ

5.2 ให้เพิ่มตัวอย่างการตอบในหน้าแรกของแบบทดสอบ

6) หลังจากนั้นผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบให้ข้อเสนอแนะ เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขผลการตรวจสอบของผู้ทรงคุณวุฒิพบว่าแบบวัดที่สร้างขึ้นมีส่วนที่ต้องปรับปรุงแก้ไขคือ เพิ่มเวลาในการทำแบบทดสอบ 9 ข้อ จาก 50 นาที เป็น 90 นาที

7) ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากข้อ 6 ไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสามเสนวิทยาลัยในภาคเรียนที่ 2

ปีการศึกษา 2553 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 55 คนแล้วนำมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนด

8) นำคะแนนที่ได้จากข้อ 7 มาหาค่าความเที่ยงของแบบวัดโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา(Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) โดยมีเกณฑ์ค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป ค่าความยากระหว่าง 0.2 – 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไป ซึ่งผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง	มีค่า	0.761
ค่าความยาก	มีค่า	0.30 – 0.77
ค่าอำนาจจำแนก	มีค่า	0.16 – 0.43

9) เลือกข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกตามเกณฑ์ จำนวน 6 ข้อ มาสร้างเป็นแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน

10) นำแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนที่ได้จำนวน 6 ข้อ ไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสามเสนวิทยาลัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 50 คนซึ่งได้ผลวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง	มีค่า	0.665
ค่าความยาก	มีค่า	0.30 – 0.75
ค่าอำนาจจำแนก	มีค่า	0.21 – 0.44

11) นำแบบวัดความรู้พื้นฐานด้านความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไปใช้กับนักเรียนชั้น 3 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม

5. การดำเนินการทดลองและการเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วยตนเอง โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการขั้นเตรียมการ และขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลดังนี้

5.1 ขั้นเตรียมการ

5.1.1 ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันสำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ คณิตศาสตร์แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม

5.1.2 ผู้วิจัยจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ เอกสารที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

5.1.3 ผู้วิจัยนำหนังสือขออนุญาตดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลจากบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถึงผู้อำนวยการโรงเรียนวัดราชบพิธ แขวงพระบรมมหาราชวัง จังหวัดกรุงเทพมหานคร

5.1.4 ผู้วิจัยทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์และความคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียนกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มโดยใช้แบบวัดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

5.1.5 ผู้วิจัยตรวจให้คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์และความคิดทางเรขาคณิตก่อนเรียน จากแบบทดสอบโดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

5.1.6 ผู้วิจัยสุ่มเลือกห้องเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

5.2 ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

5.2.1 ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มตามแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งสองชนิดที่เตรียมไว้

5.2.2 ผู้วิจัยทำการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 4 คาบต่อสัปดาห์ เป็นเวลาประมาณ 6 สัปดาห์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โดยสอนตามชั่วโมงปกติที่ทางโรงเรียนวัดราชบพิธจัดไว้สำหรับการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม โดยเริ่มสอนตั้งแต่วันที่ 13 มกราคม 2554 ถึงวันที่ 28 กุมภาพันธ์ 2554

5.2.3 เมื่อดำเนินการทดลองสอนตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครบ 25 คาบแล้ว ผู้วิจัยดำเนินทดสอบทันทีหลังจากสิ้นสุดการทดลอง โดยใช้แบบวัดความคิดทางเรขาคณิตและแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน กับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม แล้วนำคะแนนจากแบบวัดมาวิเคราะห์ข้อมูล

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

นำคะแนนที่ได้จากแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตของตัวอย่างประชากรมาวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตที่เปลี่ยนแปลงไปและคงที่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติเป็นรายบุคคล โดยคำนวณหาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่เปลี่ยนแปลงไปและคงที่

2. เปรียบเทียบความแตกต่างของความคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างกลุ่มได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3. เปรียบเทียบความแตกต่างของความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนหลังเรียน ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยใช้การทดสอบค่าที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05 แบบกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มเป็นอิสระต่อกัน

7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

สถิติที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วยสถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต และแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ รวมทั้งสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังรายละเอียดต่อไปนี้

7.1 สถิติที่ใช้ตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือ

1. สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพเครื่องมือ

1.1 แบบวัดความคิดทางเรขาคณิต และ ความสามารถในการเขียนพิสูจน์ หาคุณภาพของแบบวัดโดยคำนวณหาค่าความเที่ยง (Realiability) โดยใช้สูตรวิธีหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α-coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) โดยใช้สูตรดังนี้

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}{s_t^2}\right)$$

เมื่อ α แทน ค่าความเที่ยงของแบบสอบ

k แทน จำนวนข้อสอบของข้อสอบ

s_i^2 แทน ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ

s_t^2 แทน ความแปรปรวนของข้อสอบทั้งฉบับ

(พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2544: 128)

1.2 หาคุณภาพของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์โดยคำนวณค่าความยาก (Index of Difficulty) และหาอำนาจจำแนก (Index of Discrimination) โดยใช้สูตรของวิทเนย์และซาเบอร์ (Whitney and Sabers) ดังนี้

Index of Difficulty = $\frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{\min})}{n_t(X_{\max} - X_{\min})}$

Index of Discrimination = $\frac{S_h - S_l}{n_h(X_{\max} - X_{\min})}$

เมื่อ S_h แทน ผลรวม fx ของคะแนนกลุ่มสูง

S_l แทน ผลรวม fx ของคะแนนกลุ่มต่ำ

$X_{\max}$ แทน คะแนนสูงสุดที่ได้

$X_{\min}$ แทน คะแนนต่ำสุดที่ได้

n_t แทน จำนวนคนกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำรวมกัน

n_h แทน จำนวนคนในกลุ่มสูง

(พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2544: 147 - 148)

7.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การหาความถี่ ค่ามัชฌิมเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ความแปรปรวน และวิเคราะห์ค่าทีนั้น ผู้วิจัยคำนวณโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Sciences: SPSS)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ 2) เปรียบเทียบความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ 3) เปรียบเทียบความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1) ผลการศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยศึกษาความคิดทางเรขาคณิตที่เปลี่ยนแปลงไปและคงที่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติเป็นรายบุคคล โดยคำนวณหาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่เปลี่ยนแปลงไปและคงที่แสดงผลดังตาราง 6 – 9

2) ผลการเปรียบเทียบความแตกต่างของความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างกลุ่มได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ แสดงผลดังตาราง 10

3) ผลการเปรียบเทียบความแตกต่างของความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียน ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยใช้การทดสอบที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05 แบบกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มเป็นอิสระต่อกันแสดงผลดังตาราง 11

1) ผลการศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติโดยศึกษาความคิดทางเรขาคณิตที่เปลี่ยนแปลงไปและคงที่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติเป็นรายบุคคล โดยคำนวณหาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่เปลี่ยนแปลงไปและคงที่แสดงผลดังตารางที่ 6 - 9

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 6 จำนวนและร้อยละของนักเรียนจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน

การเปลี่ยนแปลงระดับความคิดทางเรขาคณิต	ระดับความคิดทางเรขาคณิต		จำนวน (คน)	ร้อยละ
	ก่อนได้รับการสอน	หลังได้รับการสอน		
ลดลง			**2**	**5.00**
ลดลง 1 ระดับ			**1**	**2.50**
	2	1	1	2.50
ลดลง 2 ระดับ			**0**	**0.00**
ลดลง 3 ระดับ			**1**	**2.50**
	3	0	1	2.50
คงที่			**15**	**37.50**
	0	0	3	7.50
	1	1	6	15.00
	2	2	4	10.00
	3	3	2	5.00
เพิ่มขึ้น			**23**	**57.50**
เพิ่มขึ้น 1 ระดับ			**9**	**22.50**
	1	2	4	10.00
	2	3	4	10.00
	3	4	1	2.50
เพิ่มขึ้น 2 ระดับ			**11**	**27.50**
	0	2	5	12.50
	1	3	6	15.00
เพิ่มขึ้น 3 ระดับ			**3**	**7.50**
	0	3	2	5.00
	1	4	1	2.50
	รวม		**40**	**100.00**

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากตารางที่ 6 พบว่าหลังได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน นักเรียนส่วนมากมีระดับความคิดเพิ่มขึ้น โดยคิดเป็นร้อยละ 57.50 ซึ่งจำนวนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับ มีจำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 27.50 โดยมีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตในระดับ 1 แล้วพัฒนาเป็นระดับ 3 จำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 15.00 รองลงมาคือระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับคิดเป็นร้อยละ 22.50 โดยมีนักเรียนที่มีความคิดอยู่ในระดับ 1 แล้วพัฒนาเป็นระดับ 2 และนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตในระดับ 2 แล้วพัฒนาเป็นระดับ 3 จำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 10.00 เท่ากัน และนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่ คิดเป็นร้อยละ 37.50 โดยมีนักเรียนที่มีระดับความคิดในระดับ 1 ทั้งก่อนและหลังการสอน คิดเป็นร้อยละ 15.00 แต่ไม่มีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 4 ระดับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 7 จำนวนและร้อยละของนักเรียนจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติ

การเปลี่ยนแปลงระดับความคิดทางเรขาคณิต	ระดับความคิดทางเรขาคณิต		จำนวน (คน)	ร้อยละ
	ก่อนได้รับการสอน	หลังได้รับการสอน		
ลดลง			**2**	**5.00**
ลดลง 1 ระดับ			**2**	**5.00**
	1	0	1	2.50
	2	1	1	2.50
คงที่			**17**	**42.50**
	0	0	5	12.50
	1	1	5	12.50
	2	2	6	15.00
	3	3	1	2.50
เพิ่มขึ้น			**21**	**52.50**
เพิ่มขึ้น 1 ระดับ			**14**	**35.00**
	0	1	10	25.00
	1	2	4	10.00
เพิ่มขึ้น 2 ระดับ			**6**	**15.00**
	0	2	3	7.50
	1	3	3	7.50
เพิ่มขึ้น 3 ระดับ			**1**	**2.50**
	0	3	1	2.50
	รวม		**40**	**100.00**

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากตารางที่ 7 พบว่าหลังได้รับการสอนโดยใช้วิธีปกติ นักเรียนส่วนมากมีระดับความคิดเพิ่มขึ้น โดยคิดเป็นร้อยละ 52.50 ซึ่งจำนวนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับ มีจำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 35.00 โดยมีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตในระดับ 0 แล้วพัฒนาเป็นระดับ 1 จำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 25.00 รองลงมาคือระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับคิดเป็นร้อยละ 15.00 โดยมีนักเรียนที่มีความคิดอยู่ในระดับ 0 แล้วพัฒนาเป็นระดับ 2 และนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตในระดับ 1 แล้วพัฒนาเป็นระดับ 3 จำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 10.00 เท่ากัน และนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่ คิดเป็นร้อยละ 42.50 โดยมีนักเรียนที่มีระดับความคิดในระดับ 2 ทั้งก่อนและหลังการสอนมีจำนวนมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 15.00 แต่ไม่มีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 4 ระดับ

ตารางที่ 8 จำนวน ร้อยละ และปริมาณการเปลี่ยนแปลงของนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตแต่ละระดับ ของนักเรียนกลุ่มทดลอง จำแนกตามการทดสอบก่อนและหลังได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน

การทดสอบวัดความคิดทางเรขาคณิต	ความคิดทางเรขาคณิต					รวม (ร้อยละ)
	ระดับ0 (ร้อยละ)	ระดับ1 (ร้อยละ)	ระดับ 2 (ร้อยละ)	ระดับ 3 (ร้อยละ)	ระดับ 4 (ร้อยละ)	
ก่อนได้รับการสอน	10 (25.00)	17 (42.50)	9 (22.50)	4 (10.00)	0 (0.00)	40 (100.00)
หลังได้รับการสอน	4 (10.00)	7 (40.00)	13 (32.50)	14 (35.00)	2 (5.00)	40 (100.00)
การเปลี่ยนแปลง	ลดลง 6 (15.00)	ลดลง 10 (25.00)	เพิ่มขึ้น 4 (10.00)	เพิ่มขึ้น 10 (25.00)	เพิ่มขึ้น 2 (5.00)	

จากตารางที่ 8 พบว่านักเรียนในกลุ่มทดลอง เมื่อดำเนินการทดสอบวัดความคิดทางเรขาคณิตก่อนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน มีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 42.50 และมีนักเรียนที่มีความคิดอยู่ในระดับ 4 น้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 0.00 แต่หลังได้รับการสอนโดยใช้

โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน มีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 3 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 35.00 และมีนักเรียนที่มีความคิดอยู่ในระดับ 4 น้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 5.00

ตารางที่ 9 จำนวน ร้อยละ และปริมาณการเปลี่ยนแปลงของนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตแต่ละระดับ ของนักเรียนกลุ่มควบคุม จำแนกตามการทดสอบก่อนและหลังได้รับการสอนโดยวิธีปกติ

การทดสอบวัดความคิดทางเรขาคณิต	ความคิดทางเรขาคณิต					รวม (ร้อยละ)
	ระดับ0 (ร้อยละ)	ระดับ1 (ร้อยละ)	ระดับ 2 (ร้อยละ)	ระดับ 3 (ร้อยละ)	ระดับ 4 (ร้อยละ)	
ก่อนได้รับการสอน	19 (47.50)	13 (32.50)	7 (17.50)	1 (2.50)	0 (0.00)	40 (100.00)
หลังได้รับการสอน	6 (15.00)	16 (40.00)	13 (32.50)	5 (12.50)	0 (0.00)	40 (100.00)
การเปลี่ยนแปลง	ลดลง 13 (32.50)	เพิ่มขึ้น 3 (7.50)	เพิ่มขึ้น 6 (15.00)	เพิ่มขึ้น 4 (10.00)	คงที่ (0.00)	

จากตารางที่ 9 พบว่า นักเรียนในกลุ่มควบคุม เมื่อดำเนินการทดสอบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตก่อนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยวิธีปกติ มีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 47.50 และมีนักเรียนที่มีความคิดอยู่ในระดับ 4 น้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 0.00 แต่หลังได้รับการสอนโดยวิธีปกติ มีนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 40.00 และมีนักเรียนที่มีความคิดอยู่ในระดับ 4 น้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 0.00

2. ผลการเปรียบเทียบความแตกต่างของความคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างกลุ่มได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติแสดงผลดังตารางที่10

ตารางที่ 10 จำนวน ร้อยละ และผลการเปรียบเทียบความคิดทางเรขาคณิตหลังการทดลอง จำแนกตามกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่ม	ความคิดทางเรขาคณิตหลังการทดลอง									
	ระดับ0		ระดับ1		ระดับ2		ระดับ3		ระดับ4	
	จำนวน	ร้อยละ	จำนวน	ร้อยละ	จำนวน	ร้อยละ	จำนวน	ร้อยละ	จำนวน	ร้อยละ
ทดลอง	4	10	7	17.50	13	32.50	14	35.00	2	5.00
ควบคุม	6	15	16	40.00	13	16.25	5	12.50	0	0.00

จากตารางที่ 10 พบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมีจำนวนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตหลังการเรียนในระดับ 3 และ 4 มากกว่ากลุ่มควบคุม โดยนักเรียนในกลุ่มทดลองมีจำนวนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตหลังการเรียนในระดับ 3 และ 4 คิดเป็นร้อยละ 35.00 และ 5.00 ตามลำดับ ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มควบคุมมีจำนวนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตหลังการเรียนในระดับ 3 และ 4 คิดเป็นร้อยละ 12.50 และ 0.00 ตามลำดับ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3) ผลการเปรียบเทียบความแตกต่างของความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนหลังเรียน ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ โดยใช้การทดสอบค่าที(t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05 แบบกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มเป็นอิสระต่อกันแสดงผลดังตาราง 11

ตารางที่ 11 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) และค่าที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนของนักเรียน ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

	Mean($\bar{x}$)	SD	t	Sig.
กลุ่มทดลอง	17.33	2.702	8.952	0.00*
กลุ่มควบคุม	12.45	2.136		

*p< .05

จากตารางที่ 11 ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ของคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนเท่ากับ 17.33 และ 12.45 ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t-test) พบว่านักเรียนกลุ่มทดลอง มีคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 2 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผลการศึกษาวิจัยมีดังนี้

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียนและนักเรียน
2. การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียนและนักเรียน

1.1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน

โรงเรียนที่ผู้วิจัยทำการทดลอง คือ โรงเรียนวัดราชบพิธ ซึ่งเป็นโรงเรียนมัธยมขนาดใหญ่ สังกัดสำนักงานสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ เปิดการสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 (ช่วงชั้นที่ 3 และ 4) มีห้องเรียนทั้งหมด 54 ห้องเรียน ซึ่งช่วงชั้นที่ 3 มีห้องเรียนระดับชั้นละ 10 ห้องเรียน ช่วงชั้นที่ 4 มีห้องเรียนระดับชั้นละ 8 ห้องเรียน ซึ่งระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีจำนวนนักเรียนเฉลี่ยห้องละ 42 คน โดยห้องเรียนที่ 7 และห้องเรียนที่ 8 เป็นห้องนักเรียนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับใกล้เคียงกัน และได้เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดราชบพิธในปีการศึกษา 2553 มีค่าเฉลี่ยของคะแนนแบบทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐานในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ร้อยละ 34.12 ซึ่งต่ำกว่าเกณฑ์มาตรฐานร้อยละ 50.00

1.2 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียน

ในปีการศึกษา 2553 โรงเรียนวัดราชบพิธมีจำนวนนักเรียนทั้งหมด 2,172 คน เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 419 คน นักเรียนกลุ่มทดลองมีจำนวน 40 คน และนักเรียนในกลุ่มควบคุมมีจำนวน 40 คน นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีผลการเรียนอยู่ในระดับปานกลาง มีความกระตือรือร้นในการเรียน ให้ความสนใจ และให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมเป็นอย่างดี นักเรียนส่วนใหญ่อาศัยอยู่กับบิดามารดา ผู้ปกครองของนักเรียนส่วนใหญ่ประกอบอาชีพ ค้าขาย รับจ้าง และรับราชการ

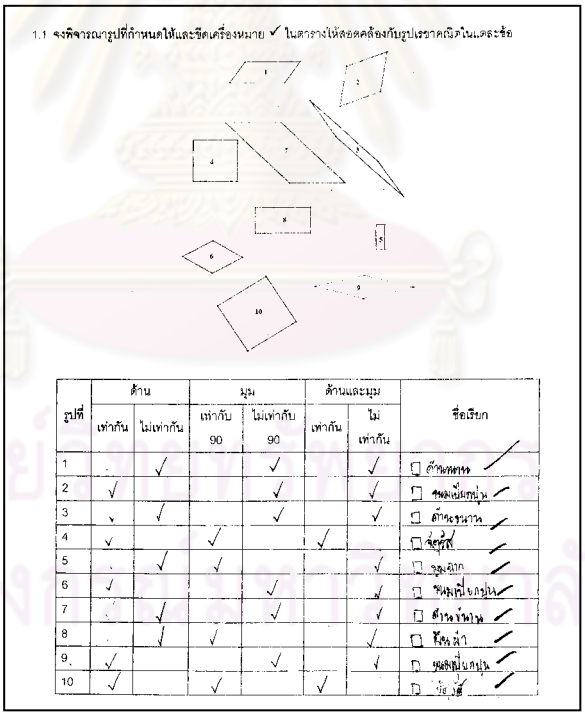
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. การรู้เรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

2.1 การพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

จากการศึกษาการพัฒนาระดับความคิดของนักเรียนระหว่างทำกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลโมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ในการทำกิจกรรมจะมีการใช้ Structured form worksheet ประกอบการจัดกิจกรรม พบว่านักเรียนมีการพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตซึ่งสังเกตได้จากการตอบคำถามใน Structured form worksheet ดังตัวอย่างต่อไปนี้

นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับรูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต เช่นจากกิจกรรมใน Structured form worksheet ข้อที่ 1.1 ครูให้นักเรียนระบุชื่อของสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่างๆ โดยพิจารณาจากความยาวของด้านและขนาดของมุม พบว่า นักเรียนส่วนมากตอบคำถามได้ถูกต้อง แต่ยังมีนักเรียนบางส่วนที่ยังสับสนเกี่ยวกับชื่อเรียกของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ ซึ่งจากการทำกิจกรรมนี้ครูได้เปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปราย และแสดงความคิดเห็นโดยครูคอยให้ความช่วยเหลือ ส่งผลให้นักเรียนสามารถระบุชื่อเรียกของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องมากขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 11

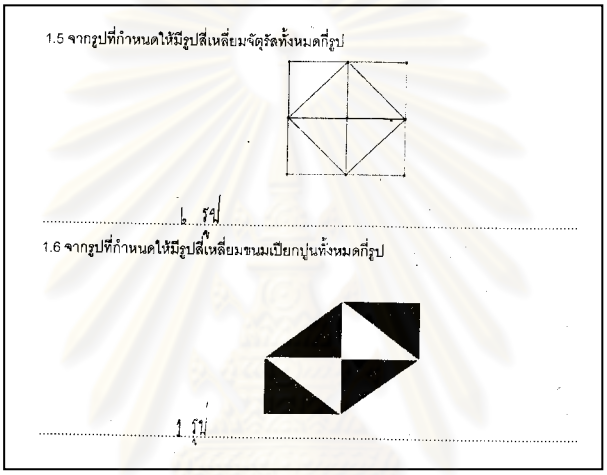

1.1 จงพิจารณารูปที่กำหนดให้และขีดเครื่องหมาย ✓ ในตารางให้สอดคล้องกับรูปเรขาคณิตในแต่ละข้อ

รูปที่	ด้าน		มุม		ด้านและมุม		ชื่อเรียก
	เท่ากัน	ไม่เท่ากัน	เท่ากับ 90	ไม่เท่ากับ 90	เท่ากัน	ไม่เท่ากัน	
1		✓		✓		✓	☐ สี่เหลี่ยมด้านขนาน
2	✓			✓		✓	☐ สี่เหลี่ยมจัตุรัส
3		✓		✓		✓	☐ สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
4	✓		✓		✓		☐ สี่เหลี่ยมผืนผ้า
5		✓	✓			✓	☐ รูปสามเหลี่ยม
6	✓			✓		✓	☐ สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
7		✓		✓		✓	☐ สี่เหลี่ยมด้านขนาน
8		✓	✓			✓	☐ สี่เหลี่ยมผืนผ้า
9	✓			✓		✓	☐ สี่เหลี่ยมจัตุรัส
10	✓		✓		✓		☐ รูปสามเหลี่ยม

ภาพที่ 11 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในกิจกรรมการระบุชื่อของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่างๆ

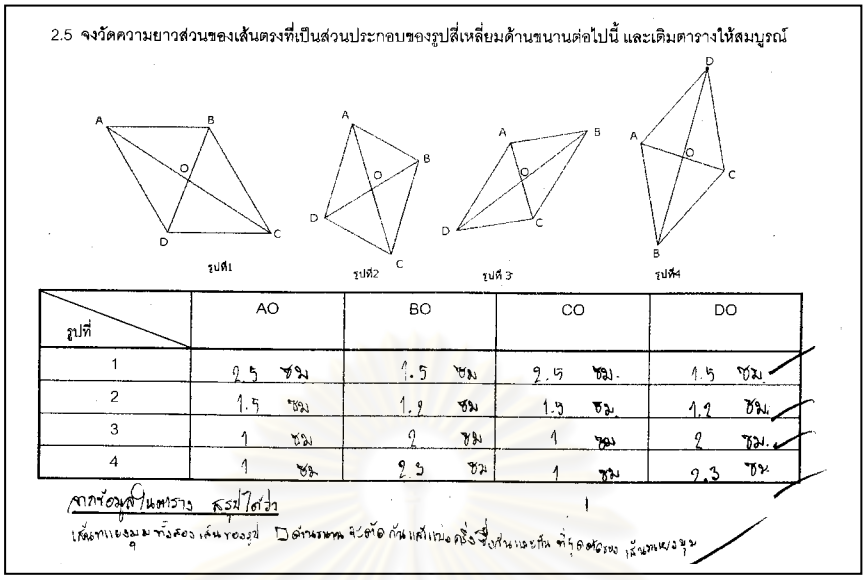
การจัดกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้รูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต นักเรียนจะได้เรียนรู้รูปเรขาคณิตจากการสังเกตรูปเรขาคณิตจากรูปเรขาคณิตง่ายๆ ไปยัง

รูปเรขาคณิตที่มีความซับซ้อน เช่นกิจกรรมใน Structured form worksheet ข้อ 1.5 และ 1.6 ครูให้นักเรียนระบุจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จากรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้ พบว่า นักเรียนส่วนมากจะระบุรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางส่วนได้แต่ไม่ครบ ซึ่งในการทำกิจกรรมครูได้แก้ปัญหาโดยให้นักเรียนที่ระบุจำนวนได้ครบออกมานำเสนอแนวคิดในการหาคำตอบโดยครูคอยให้ความช่วยเหลือในการอธิบาย ส่งผลให้หลังจากการทำกิจกรรมนักเรียนสามารถระบุจำนวนรูปสี่เหลี่ยมต่างๆจากรูปเรขาคณิตที่มีความซับซ้อนในข้ออื่นๆได้ถูกต้องมากขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 12



ภาพที่ 12 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในกิจกรรมการเรียนรู้รูปเรขาคณิตที่มีความซับซ้อน

นักเรียนจะได้เรียนรู้สมบัติของรูปเรขาคณิตจากการสังเกตและทดลองเช่นกิจกรรมใน Structured form worksheet ข้อ 2.5 ดังภาพที่ 13 ครูให้นักเรียนวัดความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเพื่อให้นักเรียนได้ข้อสรุปว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม พบว่า ในการทำกิจกรรมนี้ในการวัดความยาวของส่วนของเส้นตรงของนักเรียนบางกลุ่มมีความคลาดเคลื่อนเล็กน้อย ส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถสรุปข้อค้นพบได้ ครูจึงให้คำแนะนำว่าความยาวที่แตกต่างกันเล็กน้อยนั้น เกิดจากความผิดพลาดในการใช้เครื่องมือ และให้นักเรียนลองวัดความยาวอีกครั้งหนึ่งโดยให้วัดอย่างระมัดระวังเพื่อไม่ให้เกิดความคลาดเคลื่อน นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนส่วนมากจะยังไม่สามารถเขียนสรุปสมบัติเกี่ยวกับเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้อย่างถูกต้อง ครูจึงให้คำแนะนำเพิ่มเติมในการเขียนสรุป

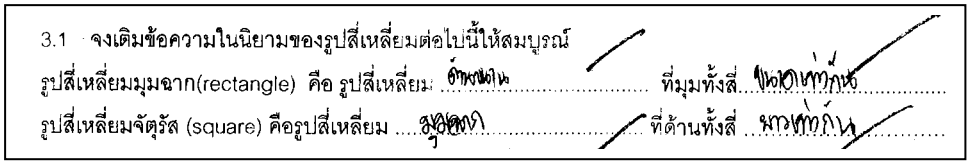

2.5 จงวัดความยาวส่วนของเส้นตรงที่เป็นส่วนประกอบของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต่อไปนี้ และเติมตารางให้สมบูรณ์

รูปที่1 รูปที่2 รูปที่3 รูปที่4

รูปที่	AO	BO	CO	DO
1	2.5 ซม	1.5 ซม	2.5 ซม.	1.5 ซม.
2	1.5 ซม	1.2 ซม	1.2 ซม.	1.2 ซม.
3	1 ซม	2 ซม	1 ซม	2 ซม.
4	1 ซม	2.5 ซม	1 ซม	2.3 ซม

ภาพที่ 13 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในกิจกรรมเรียนรู้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

การจัดกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตประเภทต่างๆ นักเรียนจะได้เรียนรู้จากการอภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน เช่นครูให้นักเรียนเติมบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานประเภทต่าง ๆ ใน Structured form worksheet ข้อ 3.1 ดังภาพที่ 14 พบว่า นักเรียนสามารถเติมบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง ในขณะที่ไม่สามารถเติมบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ถูกต้อง นักเรียนส่วนมากจะเติมว่า “รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน” ครูจึงให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากันเป็นรูปสี่เหลี่ยมอะไรได้บ้าง นักเรียนตอบว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน หรือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสก็ได้ ครูจึงกล่าวเสริมว่า ดังนั้นข้อความ “รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน” จึงไม่ใช่บทนิยามที่ถูกต้องของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากนั้นครูและนักเรียนก็ร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปถึงบทนิยามที่ถูกต้องของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส


3.1 จงเติมข้อความในนิยามของรูปสี่เหลี่ยมต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก(rectangle) คือ รูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน ที่มุมทั้งสี่ ขนาดเท่ากัน

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (square) คือรูปสี่เหลี่ยม สี่เหลี่ยม ที่ด้านทั้งสี่ ยาวเท่ากัน

ภาพที่ 14 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองกิจกรรมเรียนรู้ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตประเภทต่างๆ

2.2 ความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

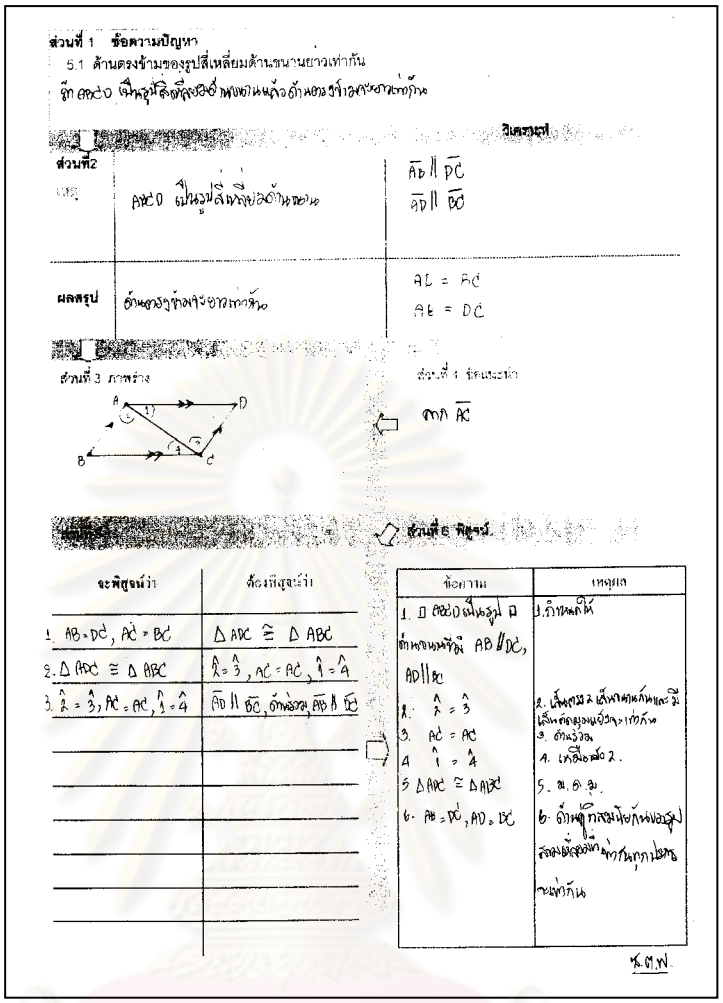
จากการศึกษาความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มทดลองหลังจากที่นักเรียนได้ทำ Structured form worksheet ในระยะที่ 1 ถึงระยะที่ 3 แล้ว พบว่า นักเรียนส่วนมากจะจดจำสมบัติต่างๆ ของรูปเรขาคณิตได้ และในการทำกิจกรรมในระยะที่ 4 และ 5 นักเรียนจะได้ฝึกการเขียนพิสูจน์โดยใช้ RECOMPP ประกอบการฝึกดังแสดงในภาพที่ 15 ซึ่งจากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนขณะทำกิจกรรมมีข้อค้นพบดังนี้

1) การเติม RECOMPP ในส่วนที่ 1 ในการจัดกิจกรรมช่วงแรกนักเรียนจะต้องลอกโจทย์ลงไป นักเรียนส่วนมากจะมีความเบื่อหน่าย ผู้วิจัยจึงปรับปรุงกิจกรรมด้วยการพิมพ์ข้อความโจทย์ลงไปใน RECOMPP ส่วนที่ 1 แต่เน้นย้ำนักเรียนว่าจะต้องอ่าน และทำความเข้าใจข้อความโจทย์ในส่วนที่ 1 อย่างระมัดระวัง นอกจากนี้ยังพบว่าถ้าข้อความโจทย์อยู่ในรูปของประโยคเงื่อนไข เช่น “ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้วมุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน” นักเรียนส่วนมากจะสามารถระบุเหตุและผลสรุปในส่วนที่ 2 ของ RECOMPP ได้อย่างถูกต้อง แต่ถ้าข้อความ ไม่ได้อยู่ในรูปประโยคเงื่อนไข เช่น “มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน” นักเรียนส่วนมากจะไม่สามารถระบุได้ ผู้วิจัยจึงให้นักเรียนฝึกเขียนข้อความจากโจทย์ในส่วนที่ 1 ให้อยู่ในรูปประโยคเงื่อนไขก่อนที่จะระบุเหตุและผลในส่วนที่ 2

2) RECOMPP ในส่วนที่ 4 จะเป็นส่วนที่ครูจะต้องให้คำแนะนำแก่นักเรียนพบว่าในช่วงแรก ครูจะต้องให้คำแนะนำแก่นักเรียนเป็นอย่างมากเนื่องจากนักเรียนยังไม่มีประสบการณ์ในการเขียนพิสูจน์มากนัก และเมื่อนักเรียนได้ฝึกฝนการเขียนพิสูจน์ได้สักระยะหนึ่งครูจึงค่อยๆ ลดบทบาทลงเพราะนักเรียนสามารถเขียนพิสูจน์ได้ดีขึ้น

3) การเติม RECOMPP ในส่วนที่ 5 พบว่าในช่วงแรกนักเรียนยังไม่สามารถเติมข้อความได้ถูกต้องครูจะต้องให้ความช่วยเหลือนักเรียน เช่น การเน้นย้ำว่าข้อความแรกที่เติมจะเป็นข้อความจากผลสรุปในส่วนที่ 2 นอกจากนี้แล้วครูอาจจะให้คำแนะนำแก่นักเรียนในการเติมข้อความ เช่นให้สังเกตจากรูปเรขาคณิตที่วาด ให้นักเรียนนึกถึงสมบัติของเส้นขนาน เป็นต้น

4) การเติมRECOMPP ในส่วนที่ 6 พบว่า หลังจากที่นักเรียนสามารถเติมข้อความในส่วนที่ 5 ได้ถูกต้องแล้วนักเรียนจะสามารถเขียนการพิสูจน์ในส่วนที่ 6 ได้ถูกต้อง แต่นักเรียนบางคนยังมีข้อบกพร่องในการใช้สัญลักษณ์ ครูจึงต้องมีการเน้นย้ำถึงความสำคัญของการใช้สัญลักษณ์ให้ถูกต้อง



ภาพที่ 15 แสดงการใช้ RECOMPP ประกอบการฝึกเขียนพิสูจน์

2.3 พฤติกรรมอื่น ๆ ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ในระยะแรกนักเรียนจะรู้สึกเบื่อหน่ายและท้อแท้ในการเขียนพิสูจน์ เนื่องจากนักเรียนรู้สึกว่าการเขียนพิสูจน์เป็นเรื่องยาก และนักเรียนไม่เห็นถึงความสำคัญ ผู้วิจัยจึงอธิบายถึงความสำคัญของการเขียนพิสูจน์ให้นักเรียนทราบเพื่อเป็นการเสริมแรงให้แก่นักเรียน พบว่านักเรียนให้ความสนใจในการฝึกเขียนพิสูจน์มากขึ้น

จากที่กล่าวมาข้างต้นจึงสรุปได้ว่า หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน นักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นอย่างเป็นลำดับจนสามารถเขียนพิสูจน์ได้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1) ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

2) เปรียบเทียบความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3) เปรียบเทียบความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

ประชากรในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 1 สำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน ผู้วิจัยสุ่มตัวอย่างประชากรโดยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนวัดราชบพิธ จังหวัดกรุงเทพมหานคร ซึ่งมีทั้งหมด 10 ห้อง แล้วเลือกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มา 2 ห้องที่มีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ปีการศึกษา 2552 ที่ใกล้เคียงกันมากที่สุด ได้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน ห้อง ม.3/7 และ ห้อง ม.3/8 มีจำนวนนักเรียนห้องละ 40 คน แล้วทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของนักเรียนทั้ง 2 ห้อง ด้วยการทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) พบว่าความแปรปรวนของนักเรียนทั้ง 2 ห้อง ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบค่าที (t-test) พบว่าค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2552 ของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 2 ห้องทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ก่อนเรียน โดยห้อง ม.3/7 และ ห้อง ม.3/8 มีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนเท่ากับ 9.38 และ 9.93 ตามลำดับ จากนั้นนำคะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ก่อนเรียนของนักเรียนทั้ง 2 ห้อง ไปทดสอบความ

แปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ก่อนเรียนด้วยค่าที (t-test) พบว่าค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตใกล้เคียงกัน

จากนั้นผู้วิจัยได้จับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏว่านักเรียนห้อง ม.3/8 เป็นกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และนักเรียนห้อง ม.3/7 เป็นกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบปกติ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองคือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 7 แผน โดยใช้เวลาในการสอนทั้งหมด 25 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ให้ครอบคลุมเนื้อหาเรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และวงกลม สาระการเรียนรู้คณิตศาตร์เพิ่มเติมในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากนั้นผู้วิจัยนำไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสมของเนื้อหา การลำดับเนื้อหา และความสอดคล้องขององค์ประกอบต่างๆ ในแผนการจัดการเรียนรู้ แล้วนำมาปรับปรุง และนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

2.1) เครื่องมือที่ใช้วัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม เป็นแบบทดสอบอัตนัยแบบเขียนตอบ จำนวน 6 ข้อ ใช้เวลา 60 นาที ซึ่งมีค่าความเที่ยงเป็น 0.862 ค่าความยากเป็น 0.54 - 0.63 และค่าอำนาจจำแนกเป็น 0.46 - 0.63

2.2) เครื่องมือที่ใช้วัดความสามารถในการพิสูจน์หลังเรียน คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม เป็นแบบทดสอบอัตนัยแบบเขียนตอบ จำนวน 6 ข้อ ใช้เวลา 60 นาที ซึ่งมีค่าความเที่ยงเป็น 0.665 ค่าความยากเป็น 0.30 - 0.75 และค่าอำนาจจำแนกเป็น 0.21 - 0.44

2.3) เครื่องมือที่ใช้ในการวัดความคิดทางเรขาคณิตก่อนและหลังเรียน คือแบบวัดความคิดทางเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมเป็นแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ใช้เวลา 60 นาที ซึ่งมีค่าความเที่ยงเป็น 0.7586

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ และวัดความคิดทางเรขาคณิตก่อนการทดลองของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม แล้วดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นสำหรับนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งกลุ่มทดลองใช้แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มควบคุมใช้แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ใช้เวลาสอนสัปดาห์ละ 4 คาบ เป็นเวลา 6 สัปดาห์ รวม 25 คาบ เมื่อดำเนินการสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่กำหนดแล้ว ผู้วิจัยวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ และวัดความคิดทางเรขาคณิตหลังการทดลองของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม หลังจากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสรุปผลการวิจัย

สรุปผลการวิจัย

1. ผลการศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง หลังได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน นักเรียนส่วนมากมีระดับความคิดเพิ่มขึ้น โดยคิดเป็นร้อยละ 57.50 ซึ่งจำนวนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับ มีจำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 27.50 รองลงมาคือจำนวนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับ คิดเป็นร้อยละ 22.50 ส่วนความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มควบคุมหลังได้รับการสอนโดยวิธีปกติ นักเรียนส่วนมากมีระดับความคิดเพิ่มขึ้น โดยคิดเป็นร้อยละ 52.50 ซึ่งจำนวนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับ มีจำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 35.00 รองลงมาคือจำนวนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับ คิดเป็นร้อยละ 15.00

2. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับ 3 กับ 4 มากกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4. หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน นักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นอย่างเป็นลำดับจนสามารถเขียนพิสูจน์ได้

อภิปรายผลการวิจัย

1) ผลการศึกษาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน และกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติสามารถอภิปรายได้ดังนี้ หลังได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน นักเรียนส่วนมากมีความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น โดยเพิ่มขึ้น 2 ระดับมีจำนวนมากที่สุด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ในขั้นกระบวนการการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะแบ่งออกเป็น 5 ระยะ ได้แก่ระยะที่ 1 นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับรูปธรรมภายนอกของรูปเรขาคณิต ระยะที่ 2 นักเรียนเรียนรู้สมบัติและทฤษฎีบททางเรขาคณิตโดยยังไม่มีการพิสูจน์ ระยะที่ 3 นักเรียนเรียนรู้การจำแนกรูปเรขาคณิต ระยะที่ 4 นักเรียนเรียนรู้การเขียนพิสูจน์ประพจน์ทางเรขาคณิตที่ไม่ซับซ้อนและใช้ RECOMPP ประกอบในการสร้างการพิสูจน์ ระยะที่ 5 นักเรียนเรียนรู้การพิสูจน์ประพจน์ที่มีความซับซ้อนและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียนทั้งหมดโดยใช้ RECOMPP ประกอบในการสร้างการพิสูจน์ ซึ่งการจัดกิจกรรมทั้ง 5 ระยะนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดทางเรขาคณิตในระดับที่สูงขึ้น ในขณะที่หลังได้รับการสอนโดยใช้วิธีปกติ นักเรียนส่วนมากมีความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น โดยเพิ่มขึ้น 1 ระดับ มีจำนวนมากที่สุด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยวิธีปกติไม่ได้ให้ความสำคัญกับการพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตมากนัก ส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่มีความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นเพียง 1 ระดับ

2) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีความคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนในระดับ 3 และ 4 สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะความสามารถของนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตในระดับ 3 คือ นักเรียนจะต้องสามารถดำเนินการพิสูจน์ได้ และความสามารถของนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตในระดับ 4 นักเรียนจะต้องสามารถดำเนินการพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้งและแย้งสลับที่ได้ ซึ่งรูปแบบการจัดกิจกรรมโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันจะมีการใช้ RECOMPP ประกอบการจัดกิจกรรมซึ่งจากงานวิจัยของ Dimakos et al. (2007: 87 – 106) พบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนเขียนพิสูจน์โดยใช้ RECOMPP ประกอบการฝึกเขียนพิสูจน์ จะมีคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ส่งผลให้นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันมีความคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนในระดับ 3 และ 4 สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันจะมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติทั้งนี้อาจเป็นเพราะการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันจะมีการใช้ RECOMPP ประกอบการจัดกิจกรรม ซึ่งจากงานวิจัยของ Dimakos et al. (2007: 87 – 106) พบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนเขียนพิสูจน์

โดยใช้ RECOMPP ประกอบการฝึกเขียนพิสูจน์ จะมีคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 อีกทั้ง Nikoloudakis (2009: 17 – 45) โดยผลการทดลองพบว่า การสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันทำให้นักเรียนมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4) หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน นักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นอย่างเป็นลำดับจนสามารถเขียนพิสูจน์ได้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในขั้นกระบวนการ จะมีการจัดกิจกรรม 5 ระยะ ซึ่งการจัดกิจกรรมใน 5 ระยะนี้จะส่งเสริมให้นักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตที่สูงขึ้นอย่างเป็นลำดับ จนนักเรียนสามารถเขียนพิสูจน์ได้ในที่สุด

ข้อเสนอแนะที่ได้จากการวิจัยในครั้งนี้

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ครูผู้สอนควรจัดกิจกรรมที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติเป็นกลุ่มเพื่อเป็นการส่งเสริมให้ผู้เรียนได้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน และมีกำลังใจในการทำกิจกรรม

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชัน ครูผู้สอนควรใช้สื่อการเรียนรู้ที่หลากหลายและมีประสิทธิภาพมาประกอบการจัดกิจกรรมเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนรู้ได้ดียิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะในการวิจัยในครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การเขียนพิสูจน์กับเนื้อหาใหม่ และในระดับชั้นอื่น ๆ

2. ควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันที่มีต่อตัวแปรอื่น เช่น ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการให้เหตุผล เป็นต้น

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

วิชาการ, กรม. สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและวัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.). 2542.

กรรณิการ์ กวักเพฑูรณ์. หลักคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2544.

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี. การสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา. วิทยานิพนธ์ปริญญานิพนธมหาบัณฑิต, วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร. 2535.

กุลยา เหมวัสดุกิจ. ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2545.

ขวัญ เพียซ้าย. การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร. 2547.

ชนิศวรา ฉัตรแก้ว และ สิริพร ทิพย์คง. การพัฒนาหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตและลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์ (มกราคม – เมษายน 2549): 21 – 32

พนิดา กองเกตุใหญ่. ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวนฮีลี่ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นในจังหวัดกาญจนบุรี. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ สุโขทัยธรรมาธิราช. 2542.

พัฒนี อุดมกะวานิช. หลักคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์. 2541.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. การวัดและประเมินการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2544.

เยาวเรศ สิงหนันท์. การเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่3 ในโรงเรียนรัฐบาลและเอกชนเขตการศึกษา 6. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2533.

สมพร เรืองโชติวิทย์. รากฐานเรขาคณิต. กรุงเทพมหานคร:ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน. 2523.

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพมหานคร: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย. 2551.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน.กระทรวงศึกษาธิการ. คู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 . กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว. 2548.

สำนักทดสอบทางการศึกษา. ผลการสอบวัดคุณภาพระดับชาติ ปี 2552 [ออนไลน์]. 2552. แหล่งที่มา: http://bet.obec.go.th/eqa/images/2009/news/report-nt51.pdf [2554, เมษายน 7]

ศิริจันทร์ เวสารัชศาสตร์. คณิตศาสตร์พื้นฐาน. กรุงเทพมหานคร: พิทักษ์การพิมพ์. 2551.

ภาษาอังกฤษ

Bobango, J. C. Van Hiele Levels of Geometric Thought and Student Achievement in Standard Content and Proof Writing: The Effect of Phase-Based Instruction. Doctoral dissertation, The Pennylvania State University, 1987. Dissertation Abstracts Insternational 48 (1988). 2566-A.

Burger, W. F., and Shaughnessy, J. M. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. Journal for Reseach in Mathematics Education 17 (January 1986): 31-48.

Chaiyasang, S. An Investigation into Level of Geometric Thinking and Ability to Construct Proof of Students in Thailand. Doctoral dissertation, The University of Iowa, 1987. Dissertation Abstracts International 49 (1988). 2137-A.

Corley, T. L. Students' levels of thinking as related to achievement in geometry. Doctoral dissertation, Arizona State University, 1990. Dissertation Abstracts International 51 (1991). 2301-A.

Crowley, M. L. The van Hiele model of the development of geometry thought. In M. M. Lindquist and A . Shulte (eds.) , Learning and teaching geometry, K- 12, pp. 1-16. Reston, Virginal: NCTM, 1987.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S., and Choustoulakis, E. Developing a Proof - Writing Tool for Novice Lyceum Geometry Students, The Teaching Of Mathematics 2 (2007): 87–106.

Dimakos, G. and Nikoloudakis, E. Teaching Euclidean Geometry using a synthesis by two well known theories: van Hiele's theory and Cognitive Apprenticeship, Far East Journal Math Education 2 (2008): 187–217.

Fuys, D., Geddes, D.,and Tischler, R. The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph number 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

Han, T.S. The Effects on Achievement and Attitude of a Standard Geometry Textbook and a Textbook Consistent with the Van Hiele Theory. Doctoral dissertation, The University of Iowa, 1986. Dissertation Abstracts International 47 (1987). 3690-A.

Hoffer, A. Geometry is more than proof. Mathematics teacher (January 1981): 11-18.

Nikoloudakis, E. A Proposed Model to Teach Geometry to First-Year Senior High School Students. International Journal for Mathematics in Education HMS I JME 2 (2009)

Senk, S. L. Achievement in Writing Geometry Proofs, [Online]. 1982. Available from: http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED218091.pdf [2011, April 28]

Senk, S. L. Van Hiele levels and achievement in writing Geometry proofs, Journal for Research in Mathematics Education 20 (1989): 309–321.

Stylianides, A.J. Proof and Proving in School Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education 20 (2009): 289 – 321.

Usiskin, Z. Van Hiele Levels and Achivment in Secondary School Geometry [Online]. 1982. Available from: http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED218091.pdf [2011, April 28]

ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

แบบทดสอบวัดความคิดทางเรขาคณิต

1. ผศ.ดร.นวลศรี ชำนาญกิจ	อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์
2. อาจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด	อาจารย์ประจำสาขาวิชาศึกษาศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. อาจารย์ชัยวัฒน์ ปิ่นทรัพย์ถาวร	อาจารย์ประจำสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม

แบบทดสอบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์

1. ผศ.ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน	อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ผศ.ดร. ชานนท์ จันทรา	อาจารย์ประจำสาขาวิชาศึกษาศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. อาจารย์ขอบใจ สาสิทธิ์	อาจารย์หมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิและขอความร่วมมือในการวิจัย

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**53-4245**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

9 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นวลศรี ชำนาญกิจ

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมีรองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-82 ต่อ 612

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**53-4246**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

9 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต

เรียน ดร.ทรงชัย อักษรคิด

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมีรองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-82 ต่อ 612

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร.82680-2 ต่อ 612

ที่ **ศธ 0512.6(2771)/53-4247** **วันที่** 9 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต

เรียน รองคณบดีและผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสเมที่อคคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญ อาจารย์ชัยวัฒน์ ปิ่นทรัพย์ถาวร เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ชัยวัฒน์ ปิ่นทรัพย์ถาวร เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร.82680-2 ต่อ 612

ที่ **ศธ 0512.6(2771)/53-4248** **วันที่** 9 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสแมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมีรองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**53-4249**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

9 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมีรองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-82 ต่อ 612

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**53-4250**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

9 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์

เรียน อาจารย์ขอบใจ สาสิทธิ์

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมีรองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-82 ต่อ 612

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**53-4500**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

22 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อคคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดความคิดทางเรขาคณิต และแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**53-4501**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

22 ธันวาคม 2553

เรื่อง ขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนวัดราชบพิธ

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายจำเริญ อนันตธรรมรส นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการใช้โมเดลเฟสเมท็อคคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3" โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องเก็บข้อมูลด้วยแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต และแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทำการเก็บข้อมูลวิจัยดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความคิดทางเรขาคณิต

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 12 พฤติกรรมผู้เรียนในแต่ละระดับความคิดทางเรขาคณิต

ระดับความคิดทางเรขาคณิต	พฤติกรรมในแต่ละระดับความคิดทางเรขาคณิต	จำนวนของข้อสอบ	
		ทดลองใช้	ใช้จริง
ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก	1.สามารถจำแนกรูปร่างของรูปที่มองเห็นในตำแหน่งที่แตกต่างกันได้ 2.สามารถจำแนกรูปร่างที่มองเห็นในรูปร่างที่ซับซ้อนได้	9	6
ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์	1.วิเคราะห์เพื่อระบุสมบัติของรูปที่กำหนดให้ได้ 2.ใช้สมบัติของรูปที่ให้มาได้	9	6
ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน	1.สามารถเชื่อมโยงสมบัติของรูปเรขาคณิตได้ 2.สามารถจำแนกรูปตามสมบัติทางเรขาคณิตได้	9	6
ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน	1.สามารถบอกความสัมพันธ์ของสิ่งที่กำหนดให้กับรูปอื่นได้ 2.สามารถใช้อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทได้ 3.เข้าใจการพิสูจน์ โดยสามารถบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้สามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างง่ายได้ 4.สามารถพิสูจน์ได้มากกว่า 1 วิธี	9	6
ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด	1.สามารถดำเนินการพิสูจน์แบบข้อขัดแย้งได้ 2.สามารถดำเนินการพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ได้	9	6
	รวม	45	30

ตารางที่ 13 การวิเคราะห์ค่า Alpha if item Deleted ของแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต

ระดับความคิดทางเรขาคณิต	ข้อที่	Alpha if item Deleted	วิเคราะห์ข้อสอบ
ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก	1	0.2427	**ตัดทิ้ง**
	2	0.2234	ใช้ได้
	3	0.3115	**ตัดทิ้ง**
	4	0.1379	ใช้ได้
	5	0.2253	ใช้ได้
	6	0.2391	**ตัดทิ้ง**
	7	0.1692	ใช้ได้
	8	0.1458	ใช้ได้
	9	0.2109	ใช้ได้
ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์	10	0.5697	ใช้ได้
	11	0.6448	**ตัดทิ้ง**
	12	0.5752	ใช้ได้
	13	0.6161	**ตัดทิ้ง**
	14	0.5676	ใช้ได้
	15	0.5768	ใช้ได้
	16	0.6395	**ตัดทิ้ง**
	17	0.5803	ใช้ได้
	18	0.5803	ใช้ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 13 การวิเคราะห์ค่า Alpha if item Deleted ของแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต(ต่อ)

ระดับความคิดทางเรขาคณิต	ข้อที่	Alpha if item Deleted	วิเคราะห์ข้อสอบ
ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน	19	0.6101	**ตัดทิ้ง**
	20	0.4414	ใช้ได้
	21	0.4219	ใช้ได้
	22	0.4344	ใช้ได้
	23	0.5356	**ตัดทิ้ง**
	24	0.4479	ใช้ได้
	25	0.5218	ใช้ได้
	26	0.5810	**ตัดทิ้ง**
	27	0.5002	ใช้ได้
ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน	28	0.2723	ใช้ได้
	29	0.4289	**ตัดทิ้ง**
	30	0.3064	ใช้ได้
	31	0.3219	ใช้ได้
	32	0.2552	ใช้ได้
	33	0.4234	**ตัดทิ้ง**
	34	0.4075	**ตัดทิ้ง**
	35	0.1909	ใช้ได้
	36	0.4017	ใช้ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 13 การวิเคราะห์ค่า Alpha if item Deleted ของแบบวัดความคิดทางเรขาคณิต (ต่อ)

ระดับความคิดทางเรขาคณิต	ข้อที่	Alpha if item Deleted	วิเคราะห์ข้อสอบ
ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด	37	0.4167	**ตัดทิ้ง**
	38	0.4018	ใช้ได้
	39	0.2772	ใช้ได้
	40	0.3577	ใช้ได้
	41	0.4067	**ตัดทิ้ง**
	42	0.3919	ใช้ได้
	43	0.3324	ใช้ได้
	44	0.3047	ใช้ได้
	45	0.4535	**ตัดทิ้ง**

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิต

คำชี้แจง

1. ให้นักเรียนอ่านคำถามอย่างรอบคอบทุกข้อ และกาเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในช่องที่ตรงกับตัวอักษร ก, ข, ค, ง หรือ จ ที่เห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ในกระดาษคำตอบที่แจกให้ เช่น นักเรียนเห็นว่าคำตอบในข้อ ก. เป็นคำตอบที่ถูกต้องให้กาเครื่องหมายกากบาท(X) ลงในช่องที่ตรงกับตัวอักษร ก. ในกระดาษคำตอบ ดังตัวอย่าง

กระดาษคำตอบ

ข้อที่	ก.	ข.	ค.	ง.	จ.
1.	X				

2.เมื่อนักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ ให้นักเรียนกาเครื่องหมาย — ในช่องที่ตรงกับตัวอักษรตัวเดิม แล้วกาเครื่องหมาย X ลงในช่องที่ตรงกับตัวอักษรใหม่ที่ต้องการ เช่น ต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ก. มาเป็นข้อ ข. ให้ทำดังนี้

กระดาษคำตอบ

ข้อที่	ก.	ข.	ค.	ง.	จ.
1.	~~X~~	X			

3. แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตฉบับนี้มีข้อสอบจำนวน 30 ข้อ ให้เวลาในการทำแบบวัด 60 นาที

4. ให้นักเรียนทุกคนทำแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตฉบับนี้ด้วยตนเอง และใช้ความคิดของตนเองอย่างเต็มความสามารถ

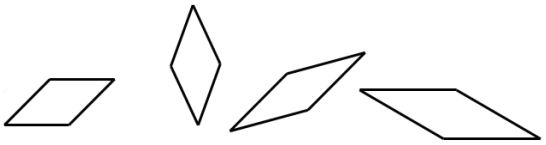
5.ห้ามขีดเขียนเครื่องหมายใดๆ ลงในแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตฉบับนี้

6. ขอให้นักเรียนเริ่มทำแบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตพร้อมกัน เมื่อผู้คุมสอบบอกหมดเวลานักเรียนต้องหยุดทำทันที แล้วส่งกระดาษคำตอบและกระดาษคำถาม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ระดับ 0 การมองเห็นรูปธรรมภายนอก

1. รูปเรขาคณิตใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



1 2 3 4

ก. ไม่มีรูปใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ข. (2) เท่านั้น

ค. (1) และ (2) เท่านั้น ง. (2) และ (4) เท่านั้น

จ. ทุกรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

2. จากรูปที่กำหนดให้ประกอบด้วยรูปเรขาคณิตใดบ้าง

ก. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, รูปสี่เหลี่ยมคางหมู, รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม และรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

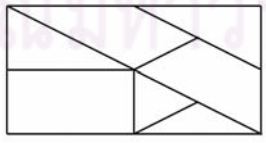
ข. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ค. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, รูปสี่เหลี่ยมคางหมู, รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ง. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก, รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

4. จากรูปที่กำหนด**ไม่ปรากฏ**รูปเรขาคณิตใด



ก. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

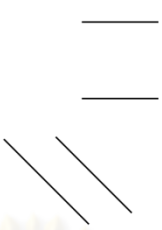
ค. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู และ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ง. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จ. รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม และ รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

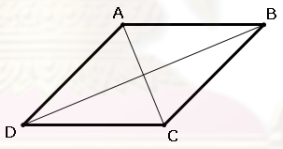
5. จากรูปที่กำหนดให้ ถ้ายืดส่วนของเส้นตรงทั้งสี่เส้นออกไปจนตัดกัน จะทำให้เกิดรูปเรขาคณิตใด



ก. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ข. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ค. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
ง. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์

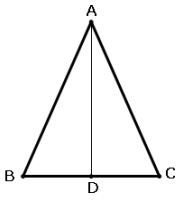
8. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ABCD ซึ่งมี $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุม จากตัวเลือก (ก) – (ง) ข้อใด**ไม่เป็นจริง**ในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



ก. เส้นทแยงมุมแต่ละเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
ข. เส้นทแยงมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน
ค. เส้นทแยงมุมทั้งสองยาวเท่ากัน
ง. ด้านทั้งสี่มีความยาวเท่ากัน
จ. ตัวเลือก (ก) – (ง) เป็นจริงในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

9. รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่ง AB = AC และ $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐานจาก ตัวเลือก (ก) – (ง) ข้อใด**เป็นจริง**ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

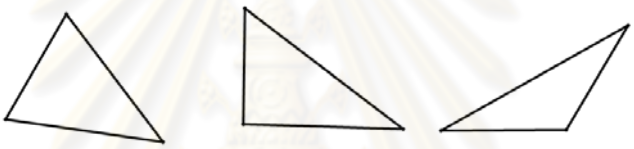


ก. มุมทั้งสามมีขนาดเท่ากัน ข. ด้านทั้งสามมีความยาวเท่ากัน

ค. $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ง. $\overline{AD}$ มีความยาวเป็นสองเท่าของ $\overline{BC}$

จ. ตัวเลือก (ก) – (ง) ไม่เป็นจริงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

11. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ดังรูป



ตัวเลือกในข้อใด**เป็นจริง**ในรูปสามเหลี่ยม ABC

ก. ประกอบด้วยมุมฉากอย่างน้อย 1 มุม

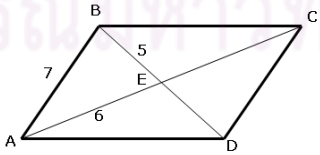
ข. ประกอบด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากันอย่างน้อย 2 มุม

ค. มุมทุกมุมเป็นมุมแหลม

ง. ประกอบด้วยมุมป้านอย่างน้อย 1 มุม

จ. ประกอบด้วยมุมแหลมอย่างน้อย 2 มุม

12. จากรูปที่กำหนดให้ ถ้ารูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด E ซึ่ง BE = 5 หน่วย ,BA = 7 หน่วย และ AE = 6 หน่วย แล้ว $\overline{BD}$ ยาวกี่หน่วย



ก. 10 ข. 11 ค. 12 ง. 14 จ. 15

ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน

13. พิจารณาสมบัติของรูปสี่เหลี่ยม A, B, C และ D จากตารางต่อไปนี้

สมบัติเกี่ยวกับเส้นทแยงมุม	**รูป A**	**รูป B**	**รูป C**	**รูป D**
เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน	✓	✓	✓	✓
เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน	✓	✓		
เส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน		✓		✓
เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งมุมของรูปสี่เหลี่ยม		✓		✓
เส้นทแยงมุมแต่ละเส้นแบ่งรูปสี่เหลี่ยมเป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป	✓	✓	✓	✓
เส้นทแยงมุมสองเส้นตัดกันแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ 4 รูป		✓		✓

จากสมบัติในตาราง ตัวเลือกในข้อใดคือรูปสี่เหลี่ยม A, B, C และ D ตามลำดับ

ก. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า, รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน, รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ข. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า, รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ค. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า, รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ง. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน, รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จ. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน, รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

14. สมบัติข้อใดเป็นจริงในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แต่**ไม่เป็นจริง**ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ก. ด้านตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน **ข. เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน**

ค. ด้านตรงข้ามขนานกัน **ง. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน** **จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง**

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1: รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

ข้อความที่ 2: รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

ตัวเลือกในข้อใดต่อไปนี้**เป็นจริง**

ก. ข้อความที่ 1 และ ข้อความที่ 2 ไม่สามารถเป็นจริงพร้อมกันได้

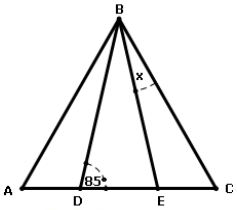
ข. ถ้าข้อความที่ 1 เป็นจริงแล้วข้อความที่ 2 ต้องเป็นจริงด้วย

ค. ถ้าข้อความที่ 2 เป็นจริงแล้วข้อความที่ 1 ต้องเป็นจริงด้วย

ง. ถ้าข้อความที่ 1 เป็นจริงแล้วข้อความที่ 2 อาจจะเป็นจริงหรือเท็จก็ได้

จ. ถ้าข้อความที่ 1 เป็นจริงแล้วข้อความที่ 2 ต้องเป็นเท็จ

17.จากรูปที่กำหนดให้ ถ้า Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และ Δ BDE เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้ว X มีค่ากี่องศา



ก. 25 ข. 30 ค. 35 ง. 15 จ. 45

ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน

19. จากข้อความต่อไปนี้

กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีจุด P, Q, R, S อยู่บนด้าน $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ตามลำดับ ถ้า จุด P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยม ABCD แล้ว รูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ตัวเลือกในข้อใดต่อไปนี้เป็นสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์

ก. “รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีจุด P, Q, R, S อยู่บนด้าน $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ตามลำดับ” เป็นสิ่งที่กำหนดให้
“ถ้า จุด P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยม ABCD แล้ว รูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน” เป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์

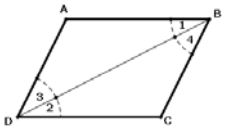
ข. “รูปสี่เหลี่ยม ABCD” เป็นสิ่งที่กำหนดให้
“จุด P, Q, R, S อยู่บนด้าน $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ตามลำดับถ้า จุด P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยม ABCD แล้ว รูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน” เป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์

ค. “รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีจุด P, Q, R, S อยู่บนด้าน $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ตามลำดับ ถ้า จุด P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยม ABCD” เป็นสิ่งที่กำหนดให้
“รูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน “ เป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์

ง. “ถ้า จุด P, Q, R, S เป็นจุดกึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยม ABCD”
“รูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน “เป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์

จ. “รูปสี่เหลี่ยม ABCD” เป็นสิ่งที่กำหนดให้
“รูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน” เป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์

20. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มี $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุม จะพิสูจน์ว่า $D\hat{A}B = B\hat{C}D$ และ $A\hat{D}C = A\hat{B}C$



พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. รูปสี่เหลี่ยม ABCDเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มี $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุม	1. กำหนดให้
2. AD = BC , AB = DC	2. ……a……
3. BD = BD	3. ด้านร่วม
4. $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	4. ……b……..
5. $D\hat{A}B = B\hat{C}D$	5. ……c ……
6. $\overline{AB} // \overline{CD}$	6. ……d……
7. $\hat{1} = \hat{2}$ และ $\hat{3} = \hat{4}$	7. .....e……
8. $\hat{1} + \hat{4} = \hat{2} + \hat{3}$	8. .....f.....
(หรือ $A\hat{D}C = A\hat{B}C$)	

ให้

1 แทนข้อความ ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน

2 แทนข้อความ ด.ด.ด.

3. แทนข้อความ ด.ม.ด.

4. แทนข้อความ ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

5 แทนข้อความ ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

6 แทนข้อความ สมบัติของการเท่ากัน

7 แทนข้อความ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่

8 แทนข้อความ กำหนดให้

9 แทนข้อความ สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ข้อใดต่อไปนี้เรียงลำดับข้อความในช่องว่าง a, b, c, d, e และ f ได้ถูกต้อง

ก. 8, 2, 9, 7, 4, 6 ข. 7, 9, 5, 7, 4, 6 ค. 1, 2, 5, 7, 9, 8

ง. 1, 2, 9, 7, 4, 6 จ. 1, 2, 9, 8, 4, 6

22. พิจารณาประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้

> "ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีเส้นทแยงมุมทั้งสองตั้งฉากกัน
> แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน"

ตัวเลือกในข้อใดเป็นการยกตัวอย่างค้านข้อความข้างต้น

ก. รูปว่าว
ข. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
ค. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ง. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู
จ. รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

23. การพิสูจน์ในข้อใดที่ไม่สามารถสรุปได้ว่ารูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ก. พิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยม PQRS มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน 2 คู่

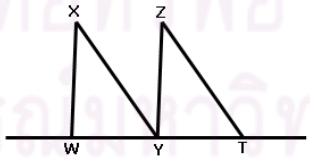
ข. พิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยม PQRS มีเส้นทแยงมุมทั้งสองยาวเท่ากัน

ค. พิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยม PQRS มีเส้นทแยงมุมทั้งสองแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม

ง. พิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยม PQRS มีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากัน 2 คู่

จ. พิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยม PQRS มีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

24. จากรูปที่กำหนดให้ ถ้า $\Delta WXY \cong \Delta YZT$ ข้อความในตัวเลือกใดที่**ไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นจริง**

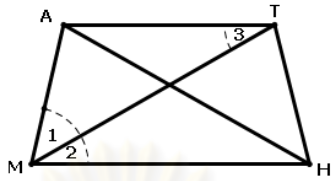


ก. $WY = \frac{1}{2}(WT)$
ข. $\overline{XW} \,//\, \overline{YZ}$
ค. ขนาดของ $X\hat{W}Y$ เป็นสองเท่าของ $Y\hat{Z}T$
ง. $\overline{XY} \,//\, \overline{ZT}$
จ. WX = YZ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ระดับ 4 ระดับการคิดสุดยอด

27. จากรูปกำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม MATH มีเส้นทแยงมุม $\overline{AH}$ และ $\overline{TM}$ ตัดกันที่จุด E ถ้า $MA \neq AT$ และ $\overline{MH} // \overline{AT}$ แล้ว $\hat{1} \neq \hat{2}$



พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. ถ้า $MA \neq AT$ และ $\overline{MH} // \overline{AT}$	1. กำหนดให้
2. $\hat{1}$ (.....a.....) $\hat{2}$	2. สมมติ
3. $\hat{2} = \hat{3}$	3. (.....b.....)
4. $\hat{1}$ (.....c.....) $\hat{3}$	4. สมบัติการเท่ากัน
5. MA = AT	5. (.....d.....)
6. $\hat{1} \neq \hat{2}$	6. (.....e.....)

ให้

1 แทนข้อความ เท่ากับ

2 แทนข้อความ ไม่เท่ากับ

3 แทนข้อความ เกิดข้อขัดแย้ง จากข้อ 2 และ 6

4 แทนข้อความ เกิดข้อขัดแย้ง จากข้อ 1 และ 5

5 แทนข้อความ เป็นด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันของรูปสามเหลี่ยม

6 แทนข้อความ เป็นมุมแย้งของเส้นขนาน

7 แทนข้อความ เป็นมุมตรงข้าม

ข้อใดต่อไปนี้เรียงลำดับข้อความในช่องว่าง a, b, c, d และ e ได้ถูกต้อง

ก. 2, 5, 2, 6, 4

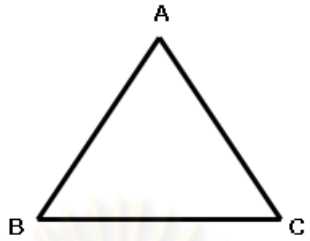
ข. 1, 6, 1, 5, 4

ค. 1, 7, 1, 5, 4

ง. 2, 6, 1, 5, 4

จ. 1, 6, 2, 5, 4

28. จากรูปกำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีมุม A เป็นมุมยอดแล้ว $\hat{B} = \hat{C}$



พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม A เป็นมุมยอด	1. กำหนดให้
2. $\hat{B}$ (.....a.....) $\hat{C}$	2. สมมติ
3. AB (.....b.....) AC	3. ด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะเท่ากัน
4. $\hat{B}$ (.....c.....) $\hat{C}$	4. มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านที่เท่ากันของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากัน
5. $\hat{B} = \hat{C}$	5. เกิดข้อขัดแย้งจากข้อ 2 และ 4

ข้อใดกล่าวถึงข้อความในช่องว่าง a, b และ c ได้ถูกต้อง

ก. a แทนข้อความ เท่ากับ, b แทนข้อความ เท่ากับ, c แทนข้อความ เท่ากับ

ข. a แทนข้อความ เท่ากับ, b แทนข้อความ ไม่เท่ากับ, c แทนข้อความ เท่ากับ

ค. a แทนข้อความ เท่ากับ, b แทนข้อความ เท่ากับ, c แทนข้อความ ไม่เท่ากับ

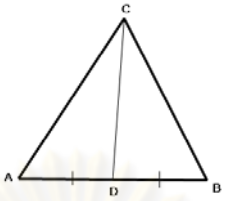
ง. a แทนข้อความ ไม่เท่ากับ, b แทนข้อความ เท่ากับ, c แทนข้อความ เท่ากับ

จ. a แทนข้อความ ไม่เท่ากับ, b แทนข้อความ ไม่เท่ากับ, c แทนข้อความ เท่ากับ

29. จะพิสูจน์ว่าเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าจะไม่ใช่ความสูงของรูปสามเหลี่ยม

กำหนดให้ รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ABC มีเส้นมัธยฐาน $\overline{CD}$

จะพิสูจน์ว่า $\overline{CD}$ ไม่เป็นความสูงของรูปสามเหลี่ยม



พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า	1. กำหนด
2. $\overline{CD}$ (……a……)	2. สมมติ
3. $C\hat{D}A, C\hat{D}B$ เป็นมุมฉาก	3. บทนิยามของความสูงของรูปสามเหลี่ยม
4. $C\hat{D}A = C\hat{D}B$	4. มุมฉากมีขนาดเท่ากัน
5. $\overline{CD}$ (……b……)	5. กำหนดให้
6. AD = BD	6. บทนิยามของเส้นมัธยฐาน
7. CD = CD	7. ด้านร่วม
8. $\Delta CDA \cong \Delta CDB$	8. ด.ม.ด.
9. CA = CB	9. สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
10. $\overline{CD}$ (……c……)	10. เกิดข้อขัดแย้งจากข้อ 1 และ 9

ให้

1 แทนข้อความ ไม่เป็นความสูงของรูปสามเหลี่ยม

2 แทนข้อความ เป็นความสูงของรูปสามเหลี่ยม

3 แทนข้อความ ไม่เป็นเส้นมัธยฐาน

4 แทนข้อความ เป็นเส้นมัธยฐาน

ข้อใดต่อไปนี้เรียงลำดับข้อความในช่องว่าง a, b, และ c ได้ถูกต้อง

ก. 3, 2, 1 ข. 2, 4, 1

ค. 2, 4, 2 ง. 1, 4, 2

จ. 2, 1, 1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

30. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ข้อความที่ 1 “ถ้าเป็นมุมตรงแล้วจะต้องมีขนาดเท่ากับ 180° ”

ข้อความที่ 2 “ ถ้าABC เป็นรูปสามเหลี่ยมแล้ว ABC จะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ข้อใดกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความที่ 1และ 2 โดยวิธีแย้งสลับที่ ได้ถูกต้อง

ก. พิสูจน์ข้อความที่ 1 โดยสมมติให้มุมมีขนาดไม่เท่ากับ180° แล้วแสดงให้เห็นว่าไม่เป็นมุมตรง

พิสูจน์ข้อความที่ 2 โดยสมมติให้ ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วแสดงให้เห็นว่า ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม

ข. พิสูจน์ข้อความที่ 1 โดยสมมติให้มุมมีขนาดไม่เท่ากับ180° แล้วแสดงให้เห็นว่าเป็นมุมตรง

พิสูจน์ข้อความที่ 2 โดยสมมติให้ ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วแสดงให้เห็นว่า ABC รูปสามเหลี่ยม

ค. พิสูจน์ข้อความที่ 1 โดยสมมติว่าเป็นมุมตรง แล้วแสดงให้เห็นว่ามีขนาดเท่ากับ 180°

พิสูจน์ข้อความที่ 2 โดยสมมติให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม แล้วแสดงให้เห็นว่า ABC รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ง. พิสูจน์ข้อความที่ 1 โดยสมมติว่าเป็นไม่เป็นมุมตรงและมีขนาดไม่เท่ากับ 180° แล้วหาข้อขัดแย้ง

พิสูจน์ข้อความที่ 2 โดยสมมติให้ ABC เป็นไม่รูปสามเหลี่ยม และ ABC ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วหาข้อขัดแย้ง

จ. พิสูจน์ข้อความที่ 1 โดยสมมติว่าเป็นมุมตรงและมีขนาดเท่ากับ 180° แล้วหาข้อขัดแย้ง

พิสูจน์ข้อความที่ 2 โดยสมมติให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม และ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วหาข้อขัดแย้ง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 14 แสดงลักษณะของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียน

เนื้อหา	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ทดลองใช้	ใช้จริง
ความเท่ากันทุกประการ	1. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ และนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์	3	2
	2. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม เท่ากันทุกประการ และนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม ไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์	3	2
	3. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน เท่ากันทุกประการและนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์	3	2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ ก่อนเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 1

ตารางที่ 15 แสดงค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ก่อนเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 1

เรื่องที่	ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	วิเคราะห์ข้อสอบ	หมายเหตุ
1	1	0.55	0.46	ใช้ได้	นำไปใช้
	2	0.67	0.27	ใช้ได้	**ตัดทิ้ง**
	3	0.57	0.64	ใช้ได้	นำไปใช้
2	4	0.63	0.55	ใช้ได้	นำไปใช้
	5	0.48	0.39	ใช้ได้	**ตัดทิ้ง**
	6	0.54	0.55	ใช้ได้	นำไปใช้
3	7	0.56	0.52	ใช้ได้	นำไปใช้
	8	0.59	0.39	ใช้ได้	**ตัดทิ้ง**
	9	0.60	0.48	ใช้ได้	นำไปใช้

ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ก่อนเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 2

ตารางที่ 16 ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ก่อนเรียนทดลองใช้ครั้งที่2

เรื่องที่	ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	วิเคราะห์ข้อสอบ	หมายเหตุ
1	1	0.56	0.46	ใช้ได้	นำไปทดลอง
	2	0.54	0.63	ใช้ได้	นำไปทดลอง
2	3	0.63	0.54	ใช้ได้	นำไปทดลอง
	4	0.57	0.60	ใช้ได้	นำไปทดลอง
3	5	0.55	0.52	ใช้ได้	นำไปทดลอง
	6	0.58	0.58	ใช้ได้	นำไปทดลอง

แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ฉบับก่อนเรียน

ชื่อ – นามสกุล ..... ระดับชั้น .....เลขที่ .....
โรงเรียน ..... วันที่ทดสอบ .....

คำอธิบาย

1. แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ฉบับก่อนเรียนประกอบด้วยข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ (8 หน้า) คะแนนเต็มข้อละ 4 คะแนน
2. ก่อนตอบคำถามให้นักเรียนเขียนชื่อ – นามสกุล ระดับชั้น เลขที่ โรงเรียน และวันที่ทดสอบ ในแบบทดสอบ

3.ในการตอบคำถามให้นักเรียนเติมข้อความที่ถูกต้องและสมเหตุสมผลตามหลักการพิสูจน์ดังตัวอย่างในหน้า 2 ของแบบทดสอบ ลงในช่องว่างที่เว้นไว้ในแบบทดสอบ

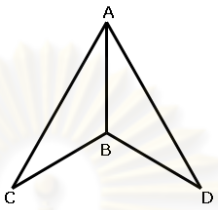
4.ในการตอบคำถามให้นักเรียนพยายามเติมข้อความที่ถูกต้องและสมเหตุสมผลตามหลักการพิสูจน์อย่างสุดความสามารถ ถึงแม้ว่านักเรียนจะไม่สามารถเติมข้อความได้สมบูรณ์ทั้งหมดก็ตาม

5.ห้ามนำแบบทดสอบออกจากห้องสอบ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ จากรูปที่กำหนดให้ “ถ้า BC = BD และ $A\hat{B}C = A\hat{B}D$ แล้ว AC = AD”



วิธีคิด

กำหนดให้

BC = BD และ $A\hat{B}C = A\hat{B}D$

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

AC = AD

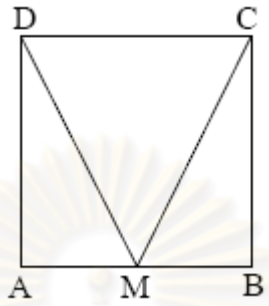
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. BC = BD	1. กำหนดให้
2. ..... $A\hat{B}C = A\hat{B}D$	.....
	2. กำหนดให้
3. AB = ... AB	3. ..... $\overline{AB}$ เป็นด้านร่วม .....
4. Δ ABC $\cong$ Δ ABD	4. ..... ด.ม.ด. .....
5. AC = AD	5. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
.....	.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1. จงพิสูจน์ข้อความ จากรูป “ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่ง จุด M เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน AB แล้ว $A\hat{D}M = B\hat{C}M$ ”



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

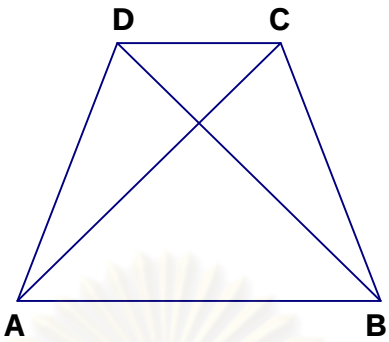
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. AD = BC	1. ....
2.....	2. ....
3. AM = BM	3. ....
4. Δ ADM $\cong$ Δ BCM	4..... .....
5. $A\hat{D}M = B\hat{C}M$	5..... .....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จงพิสูจน์ข้อความจากรูป “ถ้า AD =BC และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ แล้ว AC = BD”



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

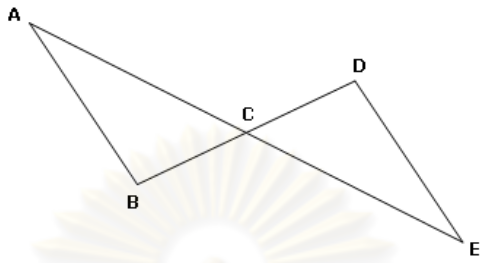
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. AD =BC และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$	1..... .....
2.	2..... .....
3.....	3. ....
4.....	4. ....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. จงพิสูจน์ข้อความจากรูป "ถ้า $\hat{A} = \hat{E}$ และ AC = CE แล้ว $\hat{B} = \hat{D}$"



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

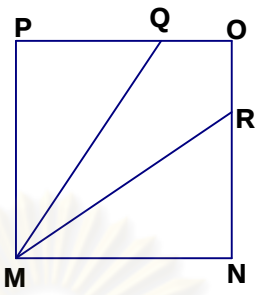
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A} = \hat{E}$ และ AC = CE	1. .....
2.	2. .....
3	3. .....
4.	4. .....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. จงพิสูจน์ข้อความจากรูป “ถ้า MNOP เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่ง $P\widehat{M}Q = N\widehat{M}R$ แล้ว MQ = MR “



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

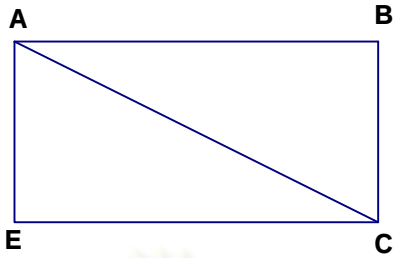
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $P\widehat{M}Q = N\widehat{M}R$	1. .....
2.	2. เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
3.	3.....
4.	4.....
5.....	5.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5.จงพิสูจน์ข้อความจากรูป “ถ้า AB = EC และ AE = BC แล้ว $A\hat{C}E = C\hat{A}B$



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

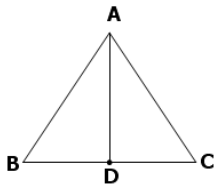
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. AB = EC และ AE = BC	1. กำหนด
2.....	2.....
3.	3. .....
	.....
4.....	4.....
	.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6. จงพิสูจน์ข้อความจากรูป "ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB = AC มีจุด D อยู่บนด้าน BC และ แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ แล้ว $A\hat{B}D = A\hat{C}D$ "



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. AB = AC	1..... .....
2. จุด D อยู่บนด้าน BC และแบ่งครึ่ง $\overline{BC}$	2..... .....
3.....	3..... .....
4.....	4..... .....
5.....	5..... .....
6.....	6. ....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 17 แสดงลักษณะของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียน

เนื้อหา	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ทดลองใช้	ใช้จริง
ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	1. นักเรียนสามารถพิสูจน์ข้อความทางเรขาคณิตที่กำหนดให้ได้	2	1
ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	2. นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม , สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ไปใช้ในการให้เหตุผลได้	4	3
การสร้าง	3.นักเรียนสามารถสร้างรูปเรขาคณิต ,รูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้	3	2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ หลังเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 1

ตารางที่18 ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ หลังเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 1

เรื่องที่	ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	วิเคราะห์ข้อสอบ	หมายเหตุ
1	1	0.69	0.16	ต้องปรับปรุง	**ตัดทิ้ง**
	2	0.77	0.21	ใช้ได้	นำไปใช้
2	3	0.77	0.36	ใช้ได้	นำไปใช้
	4	0.72	0.23	ใช้ได้	**ตัดทิ้ง**
	5	0.53	0.41	ใช้ได้	นำไปใช้
	6	0.61	0.32	ใช้ได้	นำไปใช้
3	7	0.48	0.43	ใช้ได้	นำไปใช้
	8	0.56	0.30	ใช้ได้	**ตัดทิ้ง**
	9	0.30	0.43	ใช้ได้	นำไปใช้

ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์หลังเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 2

ตารางที่ 19 ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์หลังเรียนทดลองใช้ครั้งที่ 2

เรื่องที่	ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	วิเคราะห์ข้อสอบ	หมายเหตุ
1	1	0.75	0.21	ใช้ได้	นำไปทดลอง
2	2	0.74	0.35	ใช้ได้	นำไปทดลอง
	3	0.51	0.44	ใช้ได้	นำไปทดลอง
	4	0.60	0.38	ใช้ได้	นำไปทดลอง
3	5	0.51	0.40	ใช้ได้	นำไปทดลอง
	6	0.30	0.44	ใช้ได้	นำไปทดลอง

แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ฉบับหลังเรียน

ชื่อ – นามสกุล .....ระดับชั้น .....เลขที่ .....
โรงเรียน .....วันที่ทดสอบ .....

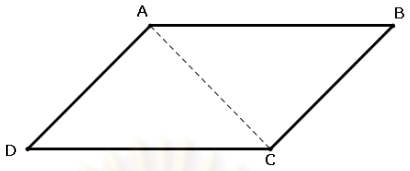
คำอธิบาย

1. แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ฉบับหลังเรียนประกอบด้วยข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ (8 หน้า) คะแนนเต็มข้อละ 4 คะแนน
2. ก่อนตอบคำถามให้นักเรียนเขียนชื่อ – นามสกุล ระดับชั้น เลขที่ โรงเรียน และวันที่ทดสอบ ในแบบทดสอบ
3. ในการตอบคำถามให้นักเรียนเติมข้อความที่ถูกต้องและสมเหตุสมผลตามหลักการพิสูจน์ ดังตัวอย่างในหน้า 2 ของแบบทดสอบ ลงในช่องว่างที่เว้นไว้ในแบบทดสอบ
4. ในการตอบคำถามให้นักเรียนพยายามเติมข้อความที่ถูกต้องและสมเหตุสมผลตามหลักการพิสูจน์ อย่างสุดความสามารถ ถึงแม้ว่านักเรียนจะไม่สามารถเติมข้อความได้สมบูรณ์ทั้งหมดก็ตาม
5. ห้ามนำแบบทดสอบออกจากห้องสอบ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ จากรูป " ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD มี AB =CD และ CB = AD แล้วรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



วิธีคิด

กำหนดให้

.....รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

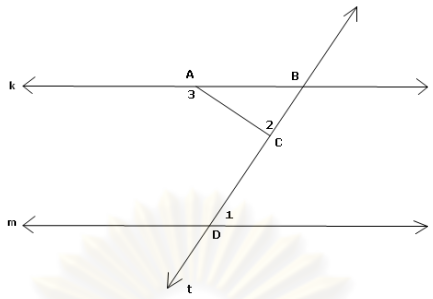
.....รูปสี่เหลี่ยม ABCD มี AB =CD และ CB = AD.....

การพิสูจน์

ลาก $\overline{AC}$

ข้อความ	เหตุผล
1. AB = CD, CB =AD	1. กำหนดให้
2. AC=AC	2. $\overline{AC}$ เป็นด้านร่วม
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	3. ด.ด.ด.
4. $B\hat{A}C \cong D\hat{C}A$ และ $A\hat{C}B = C\hat{A}D$	4. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะเท่ากัน
5. $\overline{AB} // \overline{CD}$ และ $\overline{BC} // \overline{AD}$	5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งแล้วทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน
6. รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	6. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันสองคู่

1. จงพิสูจน์ข้อความ “ จากรูป ถ้าให้ k // m แล้ว $\hat{3}=\hat{1}+\hat{2}$ ”



วิธีคิด

กำหนดให้.....

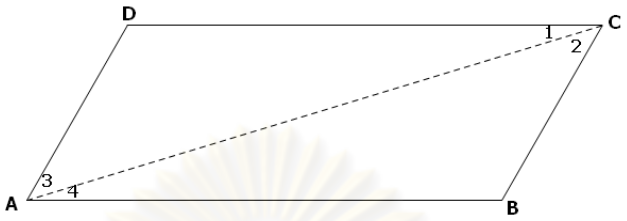
ต้องการพิสูจน์ว่า .....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. k // m	1. กำหนด
2. $\hat{1}=$.....	2. .....
	.....
3. $C\hat{B}A+\hat{2}+C\hat{A}B=$.....	3.....
	.....
4. $\hat{1}+\hat{2}+C\hat{A}B=$.....	4.....
	.....
5. $\hat{3}+C\hat{A}B=180^{\circ}$	5. .....
	.....
6.....	6.....
	.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท " เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นสองรูปที่เท่ากัน ทุกประการ"



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

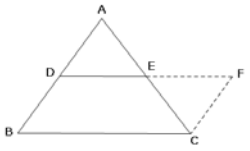
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และมี $\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุม	1. ....
2. $\overline{AD} // \overline{BC}$	2. ....
3. $\hat{2}$ = ...	3. ....
4.	4. ....
5.	5. ....
6. $\Delta ACD \cong \Delta CAB$	6..... .....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท “ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม”



วิธีคิด

กำหนดให้ .....

ต้องการพิสูจน์ว่า .....

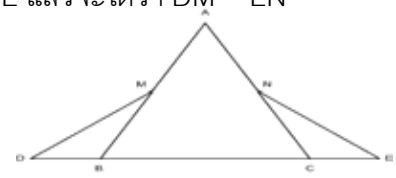
ต่อ $\overline{DE}$ ไปถึงจุด F โดยทำให้ EF = DE

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. รูปสามเหลี่ยมABCมีจุด D และ E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ตามลำดับ	1. กำหนดให้
2. AE = ……	2……...
	……
3. $A\hat{E}D =$ ……	3.. ……
	……
4. DE = ……....	4. จากการสร้าง
5. $DE = \frac{1}{2} \times$ ……	5. จากข้อ 4. และสมบัติการเท่ากัน
6. $\Delta ADE \cong$ ……....	6. ……
7. $A\hat{D}E =$ ……...	7. ……
	…….
8. $\overline{AD}$ // …….....	8. ……
	……
9. AD = ……	9. ……
10. AD = DB	10. ……
11. DB = CF	11……
12. DF = BC และ $\overline{DF}$ / / $\overline{BC}$	12……
13. $DE = \frac{1}{2} \times$ ……	13. จากข้อ 5, 12 และสมบัติการเท่ากัน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. จงพิสูจน์ข้อความ “ถ้ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ซึ่ง AB = AC มีจุด M และ จุด N เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ ถ้าต่อฐาน BC ข้างละเท่าๆกันด้วยส่วนของเส้นตรง BD และส่วนของเส้นตรง CE ซึ่ง BD = CE แล้วจะได้ว่า DM = EN



วิธีคิด

กำหนดให้ .....

ต้องการพิสูจน์ว่า .....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่ง AB = AC	1. กำหนดให้
2. M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ	2. กำหนดให้
3. $BM = \frac{1}{2}\times$ .....และ $CN = \frac{1}{2}\times$	3.....
4. BM = CN	4. .....
5. $A\hat{B}C$ = ...	5.....
6. $A\hat{B}C + M\hat{B}D =$ ..... $A\hat{C}B + N\hat{C}E =$	6. ....
7. $M\hat{B}D$ = ...	7.....
8. BD = ...	8. .....
9. $\Delta MDB \cong$	9.....
10. DM = ...	10. .....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5.จงพิสูจน์การสร้างต่อไปนี้ กำหนดจุด P อยู่ภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$ สร้าง $\overleftrightarrow{PR}$ ผ่านจุด P และขนาน $\overleftrightarrow{AB}$ ดังนี้

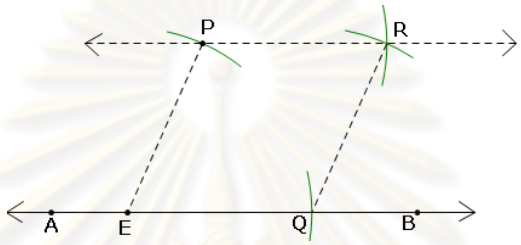
1) ลาก $\overline{EP}$ เชื่อมจุด P และจุด E ซึ่งเป็นจุดหนึ่งบน $\overleftrightarrow{AB}$

2) ใช้จุด E เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ EP เขียนส่วนโค้งตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด Q

3) ใช้จุด P และจุด Q เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ EP เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด R

4) ลาก $\overleftrightarrow{PR}$

จะได้ $\overleftrightarrow{PR}$ ผ่านจุด P และขนาน $\overleftrightarrow{AB}$



วิธีคิด

กำหนดให้ .....

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า .....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. EP = ... = ... = ...	1. .....
2. รูปสี่เหลี่ยม EPRQ เป็นรูปสี่เหลี่ยม	2. .....
3.	3. .....
4. $\overleftrightarrow{PR}$ ผ่านจุด P	4. จากการสร้าง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

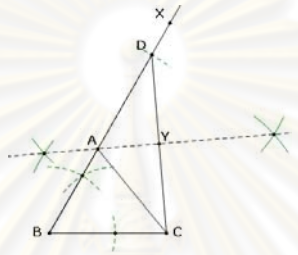
6. จงพิสูจน์การสร้างต่อไปนี้กำหนดส่วนของเส้นตรง a หน่วย และ b หน่วย จะสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ BC = a หน่วย $A\hat{B}C = 60^\circ$ และ AB + AC = b หน่วย

1. สร้าง BC = a หน่วย และสร้าง $A\hat{B}C = 60^\circ$ a หน่วย b หน่วย

2. ใช้จุด B เป็นจุดหมุนกางวงเวียนรัศมี b หน่วย ตัด $\overline{BX}$ ที่จุด D สร้างส่วนของเส้นตรง CD

3. สร้างเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง BD โดยตัด $\overline{BD}$ ที่จุด A และตัด $\overline{CD}$ ที่จุด Yสร้างส่วนของเส้นตรง AC

4. จะได้รูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมี BC = a หน่วย $A\hat{B}C = 60^\circ$ และ BA + AC = b หน่วย



วิธีคิด

กำหนดให้

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. BC = a หน่วย และ $A\hat{B}C = 60^\circ$	1. .....
2. $\overline{AY}$ เป็นเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม CAD และ ตั้งฉากกับฐาน DC	2. ....
3. ΔCAD เป็นรูปสามเหลี่ยม.....	3.....
4. AD = ...	4.....
5. BD = ...	5.....
6. BD = ...	6. .....
7. BD = b	7.....
8. BA + AC = b	8.....

ภาคผนวก ง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เรื่อง ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต จำนวน 2 คาบ

……

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบทที่ 1 ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถพิสูจน์ข้อความทางเรขาคณิตที่กำหนดให้ได้

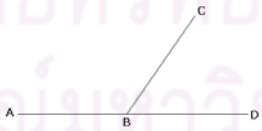
เนื้อหา

หลักการพิสูจน์

1. การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง ต้องใช้เหตุผลเพื่อแสดงว่าเมื่อเหตุเป็นจริงแล้ว เหตุนั้นจะทำให้ผลเป็นจริงเสมอ
2. การพิสูจน์ว่าข้อความไม่จริง ใช้วิธีการยกตัวอย่างค้าน คือยกตัวอย่างที่เป็นจริงตามสิ่งที่กำหนดให้หรือเหตุ แต่ผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริงตามที่ต้องการ

<u>ตัวอย่างของการพิสูจน์</u>

<u>ตัวอย่างที่1</u> : ให้ A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน โดยจุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด D ซึ่งจุด C เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AD ถ้า $D\hat{B}C = 30^\circ$ แล้ว $A\hat{B}C = 150^\circ$



วิธีคิด

กำหนดให้ A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน ,จุด B อยู่ระหว่างจุด A และ จุด D , จุด C เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AD และ $D\hat{B}C = 30^\circ$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C = 150^\circ$

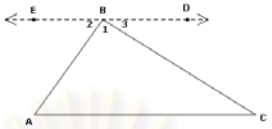
การพิสูจน์

1. $D\hat{B}C + A\hat{B}C = 180^\circ$ (เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก)
2. $D\hat{B}C = 30^\circ$ (กำหนดให้)

3. $30^\circ + A\hat{B}C = 180^\circ$ (จากข้อ 1, 2 และสมบัติของการเท่ากัน)

4. $A\hat{B}C = 150^\circ$ (จากข้อ 3 และสมบัติการเท่ากัน)ของ

ทฤษฎีบทที่ 1 ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา



วิธีคิด

กำหนดให้ รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมภายใน คือ $\hat{A}, \hat{1}, \hat{C}$ และ ED // AC

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{A} + \hat{1} + \hat{C} = 180^\circ$

การพิสูจน์

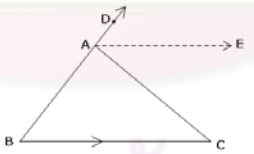
1. $\overleftrightarrow{ED} // \overline{AC}$ (จากการสร้าง)

2. $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ (เป็นมุมตรง)

3. $\hat{A} = \hat{2}, \hat{C} = \hat{3}$ (เส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)

4. $\hat{A} + \hat{1} + \hat{C} = 180^\circ$ (จากข้อ 2, 3 และ สมบัติของการเท่ากัน)

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น



กำหนดให้ รูปสามเหลี่ยม ABC ต่อด้าน $\overline{BA}$ ด้วย $\overrightarrow{BD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $D\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$

ลาก $\overrightarrow{AE}$ ให้ $\overrightarrow{AE}$ // $\overleftrightarrow{BC}$

การพิสูจน์

1. $\overrightarrow{AE}$ // $\overleftrightarrow{BC}$ (จากการสร้าง)

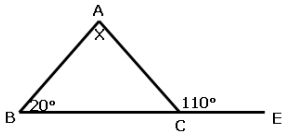
2. $D\hat{A}E = \hat{B}$ (เส้นตรงคู่หนึ่งขนานกันและมีเส้นตัด มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)

3. $E\hat{A}C = \hat{C}$ (เส้นตรงคู่หนึ่งขนานกันและมีเส้นตัด มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)

4. $D\hat{A}C = D\hat{A}E + E\hat{A}C$ (สัจพจน์ผลรวมของมุม)

5. $D\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$ (จากข้อ 2., 3.และสมบัติของการเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนดให้จงหาขนาดของ X

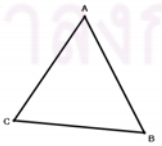


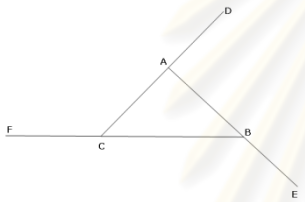
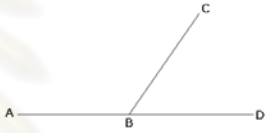
วิธีคิด

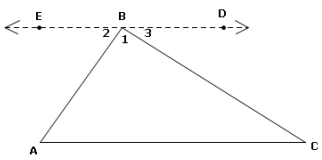
จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ $\hat{B}+\hat{A} = E\hat{C}A$

$20^\circ + x = 110^\circ$

ดังนั้น $x = 90^\circ$

กลุ่มทดลอง	**กลุ่มควบคุม**
กิจกรรมการเรียนการสอน	
ขั้นทบทวนความรู้เดิม ครูทบทวนความรู้เดิม โดยถามคำถามนักเรียนดังนี้ 1. มุมตรงมีขนาดเท่าไร (180 องศา) 2. ถ้าเส้นตรงคู่หนึ่งขนานกัน และมีเส้นตัดมุมแย้งจะมีขนาดเป็นอย่างไร (เท่ากัน) **ขั้นกระบวนการ** **ระยะที่ 1** 1.1 ครูแสดงรูปสามเหลี่ยม ABC ดังต่อไปนี้  หลังจากนั้นครูดำเนินกิจกรรมดังนี้ 1.1.1 ถามนักเรียนว่า รูปสามเหลี่ยม ABC ประกอบด้วยมุมภายในกี่มุม ได้แก่มุมใดบ้าง (3 มุมคือ มุม A มุม B และ มุม C)	**ขั้นนำ** 1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิตว่ามีความสำคัญอย่างไร บ้าง โดยให้นักเรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็น 2. ครูกล่าวนำว่าในคาบนี้จะเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยในคาบนี้จะมีการยกตัวอย่างการพิสูจน์เกี่ยวกับขนาดของผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม **ขั้นกิจกรรม** 1. ครูกล่าวนำว่าการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 อย่าง คือ 1.1 การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง ต้องใช้เหตุผลเพื่อแสดงว่าเมื่อเหตุเป็นจริงแล้ว เหตุนั้นจะทำให้ผลเป็นจริงเสมอ 1.2 การพิสูจน์ว่าข้อความไม่จริง ใช้วิธีการยกตัวอย่างค้าน คือยกตัวอย่างที่เป็นจริงตามสิ่งที่กำหนดให้หรือเหตุ แต่ผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริงตามที่ต้องการ

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
กิจกรรมการเรียนการสอน	
1.1.2 ครูแนะนำการเขียนสัญลักษณ์แสดงชื่อมุมดังนี้ มุม A เขียนแทนด้วย $\hat{A}$ หรือ $C\hat{A}B$ มุม B เขียนแทนด้วย $\hat{B}$ หรือ $A\hat{B}C$ มุม C เขียนแทนด้วย $\hat{C}$ หรือ $B\hat{C}A$ 1.2 ครูแสดงรูปสามเหลี่ยม ABC ดังต่อไปนี้  หลังจากนั้นครูให้นักเรียนทำกิจกรรมดังนี้ 1.2.1 ระบุชื่อมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC ใน structure form worksheet และร่วมกันอภิปรายถึงการเขียนสัญลักษณ์ที่ถูกต้อง (มุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC ได้แก่ $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ และ $B\hat{C}A$) 1.2.2 ระบุชื่อมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ใน structure form worksheet และร่วมกันอภิปรายถึงการเขียนสัญลักษณ์ที่ถูกต้อง (มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ได้แก่ $A\hat{C}F$, $C\hat{B}E$ และ $B\hat{A}D$)	2. ครูยกตัวอย่างที่1บนกระดานดังนี้ : ให้ A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน โดยจุด B อยู่ระหว่างจุด A และ จุด D ซึ่งจุด C เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AD ถ้า $D\hat{B}C = 30^\circ$ แล้ว $A\hat{B}C = 150^\circ$ หลังจากนั้นครูดำเนินกิจกรรมดังนี้  2.1 ครูถามนักเรียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร (A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน โดยจุด B อยู่ระหว่างจุด A และ จุด D ซึ่งจุด C เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AD ถ้า $D\hat{B}C = 30^\circ$) และสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์คือ ($A\hat{B}C = 150^\circ$) 2.2 ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าถ้าต้องการจะพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C = 150^\circ$ จะมีเงื่อนไขใดบ้างที่ทำให้สรุปได้เช่นนั้น ($A\hat{B}D = 180^\circ$, $D\hat{B}C = 30^\circ$) 2.3 ครูสาธิตการพิสูจน์ข้อความตัวอย่างที่ 1 บนกระดาน ดังนี้ <u>กำหนดให้</u> รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมภายใน คือ $\hat{A}, \hat{1}, \hat{C}$ และ ED // AC <u>ต้องการพิสูจน์ว่า</u> $\hat{A} + \hat{1} + \hat{C} = 180^\circ$

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
กิจกรรมการเรียนการสอน	
1.2.3 ครูให้นักเรียนระบุชื่อมุมประชิดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ใน Structure form Worksheet (มุมประชิดได้แก่ $C\hat{A}B$ ประชิดกับ $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$ ประชิดกับ $C\hat{B}E$ และ $B\hat{C}A$ ประชิดกับ $A\hat{C}F$) **ระยะที่ 2** 2.1 ครูให้นักเรียน วัดขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้โดยใช้อุปกรณ์วัดมุม หลังจากนั้นให้นักเรียนหาผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและบันทึกข้อมูลลงในตารางใน Structure form Worksheet (นักเรียนจะค้นพบว่าขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา) 	**การพิสูจน์** 1. $D\hat{B}C + A\hat{B}C = 180^\circ$ (เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก) 2. $D\hat{B}C = 30^\circ$ (กำหนดให้) 3. $30^\circ + A\hat{B}C = 180^\circ$ (จากข้อ 1, 2 และสมบัติของการเท่ากัน) 4. $A\hat{B}C = 150^\circ$ (จากข้อ 3 และสมบัติของการเท่ากัน) 3. ครูถามนักเรียนว่าขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ กี่องศา (180 องศา) หลังจากนั้นครูเขียนทฤษฎีบทที่ 1 บนกระดาน ดังนี้ ทฤษฎีบทที่ 1 ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา 4. ครูวาดรูปสามเหลี่ยม ABC ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 โดยครูแนะนำว่าเราจะสร้างเส้นตรง ED ให้ขนานกับด้าน AC และผ่านจุด D ดังนี้ 

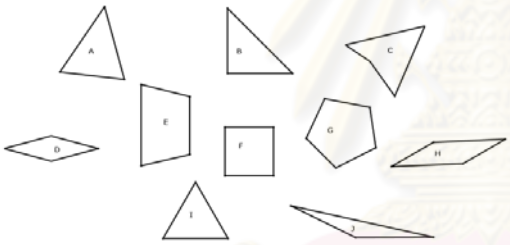
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<table>
<tr><th>กลุ่มทดลอง</th><th>กลุ่มควบคุม</th></tr>
<tr><td colspan="2">กิจกรรมการเรียนการสอน</td></tr>
<tr><td>

รูปสามเหลี่ยม	ขนาดของมุมที่ 1	ขนาดของมุมที่ 2	ขนาดของมุมที่ 3	ขนาดของผลรวมมุม
Δ BOY				
Δ CAT				
Δ MAN				

ระยะที่ 3

3.1 ครูกำหนดรูปเรขาคณิตดังต่อไปนี้



หลังจากนั้นครูถามนักเรียนว่ารูปใดบ้างที่มีขนาดของมุมภายในรวมกันเท่ากับ 180 องศา เหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น (รูปเรขาคณิต A, B, I และ J มีขนาดของมุมภายในรวมกันได้เท่ากับ 180 องศา เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยม แต่รูปเรขาคณิต C, D, E, F, G และ Hมีขนาดของมุมภายในรวมกันได้ไม่เท่ากับ 180 องศา เพราะไม่เป็นรูปสามเหลี่ยม)

ระยะที่ 4

4.1 ครูแสดงตัวอย่างที่ 1 ดังต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> : ให้ A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน โดยจุด B อยู่ระหว่างจุด A

</td><td>

หลังจากนั้นครูดำเนินกิจกรรมดังนี้

4.1 ครูถามนักเรียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร (รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมภายใน คือ $\hat{A},\hat{1},\hat{C}$ และ ED // AC) และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์คือ ($\hat{A}+\hat{1}+\hat{C}$=180 องศา)

4.2 ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าถ้าต้องการจะพิสูจน์ว่า $\hat{A}+\hat{1}+\hat{C}$=180 องศา จะมีเงื่อนไขใดบ้างที่ทำให้สรุปได้เช่นนั้น โดยครูแนะนำให้ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนาน ($\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}$=180 องศา และ $\hat{2}=\hat{C},\hat{3}=\hat{A}$)

4.3 ครูและนักเรียนร่วมกันเขียนการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 บนกระดาน ดังนี้

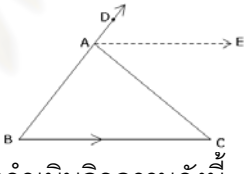
<u>กำหนดให้</u> รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุมภายในคือ $\hat{A},\hat{1},\hat{C}$ และ ED // AC

<u>ต้องการพิสูจน์ว่า</u> $\hat{A}+\hat{1}+\hat{C}=180^\circ$

<u>การพิสูจน์</u>

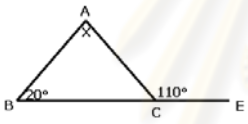
1. $\overleftrightarrow{ED}//\overline{AC}$ (จากการสร้าง)
2. $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=180^\circ$ (เป็นมุมตรง)
3. $\hat{A}=\hat{2},\hat{C}=\hat{3}$ (เส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)
4. $\hat{A}+\hat{1}+\hat{C}=180^\circ$ (จากข้อ 2, 3 และสมบัติของการเท่ากัน)

</td></tr>
</table>

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
กิจกรรมการเรียนการสอน	
และ จุด D ซึ่งจุด C เป็นจุดภายนอก $\overleftrightarrow{AD}$ ถ้า $D\hat{B}C = 30^\circ$ แล้ว $A\hat{B}C = 150^\circ$ หลังจากนั้นครูให้นักเรียนใช้ RECOMPP ประกอบการเขียนพิสูจน์ ดังนี้ ครูให้นักเรียนเติมข้อความจากตัวอย่างที่ 1 ลงในส่วนที่ 1 ของ RECOMPP 4.1.1 ครูถามนักเรียนว่าจากตัวอย่างที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง (A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน โดยจุด B อยู่ระหว่างจุด A และ จุด D ซึ่งจุด C เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AD และ $D\hat{B}C = 30^\circ$) และถามต่ออีกว่า ตัวอย่างที่ 1 ต้องการให้นักเรียนพิสูจน์อะไร ($A\hat{B}C = 150^\circ$) 4.1.2 ครูให้นักเรียนวาดรูปเรขาคณิตจากตัวอย่างที่ 1 ลง ในส่วนที่ 3 ของ RECOMPP 4.1.3 ครูให้คำแนะนำนักเรียนในส่วนที่ 4 ของ RECOMPP ว่ามุมประกอบสองมุมฉากจะมีขนาด 180 องศาและให้นักเรียนเติมข้อความลงไปในส่วนการวิเคราะห์ในส่วนที่ 2 ของ RECOMPP	5. ครูเขียนทฤษฎีบทที่ 2 บนกระดาน ดังนี้ <u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น 6. ครูให้นักเรียนวาดรูปสามเหลี่ยม ABC เพื่อประกอบการพิสูจน์ และโดยครูแนะนำว่าให้สร้างรังสี AE ให้ขนานกับด้าน BC (ดังรูป) เพื่อประกอบการพิสูจน์  หลังจากนั้นครูดำเนินกิจกรรมดังนี้ 6.1 ครูถามนักเรียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร (รูปสามเหลี่ยม ABC ต่อด้าน $\overline{BA}$ ด้วย $\overrightarrow{BD}$) และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์คือ ($D\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$) 6.2 ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าถ้าต้องการจะพิสูจน์ว่า $D\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$ จะมีเงื่อนไขใดบ้างที่ทำให้สรุปได้เช่นนั้น โดยครูแนะนำให้ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนาน ($D\hat{A}E = \hat{B}$ และ $E\hat{A}C = \hat{C}$)

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
กิจกรรมการเรียนการสอน	
4.1.4 ครูให้นักเรียนเติมข้อความลงในส่วนที่5 ของ RECOMPP ตามกฎเกณฑ์การเติมโดยเริ่มเติมข้อความจากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง โดยช่องแรกที่นักเรียนต้องเติมคือในสดมภ์ที่ 1 แถวบนสุดโดยนักเรียนจะต้องเติมสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ลงไป หลังจากนั้นนักเรียนจึงเติมข้อความลงไปในสดมภ์ที่ 2 โดยข้อความที่นักเรียนต้องเติมคือสิ่งที่นักเรียนต้องพิสูจน์ถ้าจะพิสูจน์ข้อความในสดมภ์ที่ 1 หลังจากนั้นให้นักเรียนเติมข้อความในสดมภ์ที่ 1 ในแถวถัดมาด้วยข้อความจากสดมภ์ที่ 2 ในแถวก่อนหน้า โดยนักเรียนจะมีการเติมข้อความไปเรื่อย ๆ จนกว่าข้อความที่นักเรียนเติมในสดมภ์ที่ 1 จะเป็นจริงจากสิ่งที่กำหนด 4.1.5 ครูให้นักเรียนเขียนการพิสูจน์ตัวอย่างที่ 1 อย่างสมบูรณ์ในส่วนที่ 6 ของ RECOMPP **ระยะที่** 5 5.1ครูให้นักเรียนพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 โดยครูให้คำแนะนำในส่วนที่ 4 <u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา 5.2ครูให้นักเรียนพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2 โดยครูให้คำแนะนำในส่วนที่ 4	6.3 ครูให้นักเรียนร่วมกันเขียนการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2 บนกระดาน ดังนี้ **กำหนดให้** รูปสามเหลี่ยม ABC ต่อด้าน $\overline{BA}$ ด้วย $\overrightarrow{BD}$ **ต้องการพิสูจน์ว่า** $D\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$ ลาก $\overrightarrow{AE}$ ให้ $\overrightarrow{AE}$ // $\overleftrightarrow{BC}$ **การพิสูจน์** 1. $\overrightarrow{AE}$ // $\overleftrightarrow{BC}$ (จากการสร้าง) 2. $D\hat{A}E = \hat{B}$ (เส้นตรงคู่หนึ่งขนานกันและมีเส้นตัด มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน) 3. $E\hat{A}C = \hat{C}$ (เส้นตรงคู่หนึ่งขนานกันและมีเส้นตัด มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน) 4. $D\hat{A}C = D\hat{A}E + E\hat{A}C$ (สัจพจน์ผลรวมของมุม) 5. $D\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$ (จากข้อ 2., 3.และสมบัติของการเท่ากัน)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
กิจกรรมการเรียนการสอน	
<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น **ขั้นการประเมิน** 1.ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ 2.ครูยกตัวอย่างที่ 2 และสุ่มให้นักเรียนออกมาอธิบายวิธีการแก้ปัญหาจากตัวอย่างที่ 2 **ตัวอย่างที่ 2** จากรูปที่กำหนดให้จงหาขนาดของ X  ซึ่งมีวิธีคิดดังนี้ จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ $\hat{B}+\hat{A}=E\hat{C}A$ $20^\circ + x = 110^\circ$ ดังนั้น $x = 90^\circ$ 3.ครูให้นักเรียนสร้างปัญหาจากสิ่งที่ได้เรียนรู้ในคาบนี้ และเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหา 4.ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 ในหนังสือเรียน	7. ครูยกตัวอย่างที่ 2 บนกระดานและให้นักเรียนร่วมกันฝึกพิสูจน์ในห้องเรียน **ขั้นสรุป** 1.ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ 2.ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมในหนังสือเรียนเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. Structure form Worksheet เรื่อง ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (สำหรับกลุ่มทดลอง)
2. เอกสารประกอบการเรียนเรื่อง ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (สำหรับกลุ่มทดลอง)
3. แบบฝึกหัดที่ 1 ในหนังสือเรียน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างเอกสารประกอบการเรียนกลุ่มทดลอง

Structured Form Worksheet 1

.....

ชื่อ…… ผู้สอน นายจำเริญ อนันตธรรมรส

ชั้น ม.3/…….. เลขที่ ……

วันที่ …….

หัวข้อ: **ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต**

.....

1. **ทบทวนความรู้เดิม** (Reminders notes)

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

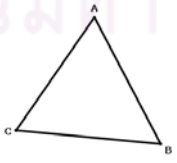
ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

2. **กระบวนการ**(Process)

<u>ระยะที่ 1</u>

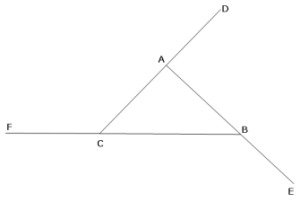
1.1 จากรูปที่กำหนดให้มีมุมภายในกี่มุม ได้แก่มุมใดบ้าง



.....

.....

1.2 จากรูปที่กำหนดให้จงตอบคำถามต่อไปนี้



1. จากรูปจงระบุชื่อมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม

.....

2. จากรูปจงระบุชื่อมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม

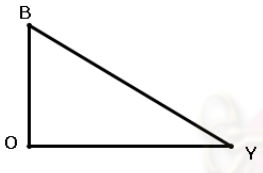
.....

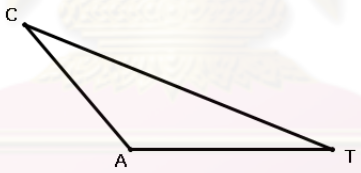
3. จากรูปจงระบุชื่อมุมประชิด

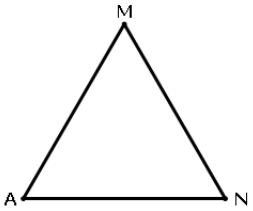
.....

<u>ระยะที่ 2</u>

2.1 จงวัดขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามและเติมข้อความลงในตารางให้สมบูรณ์







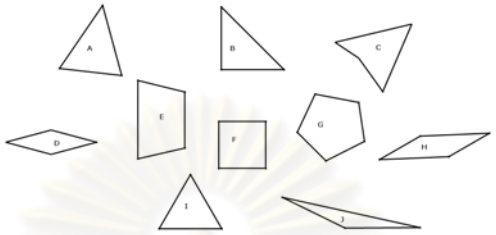
รูป สามเหลี่ยม	ขนาดของมุม ที่ 1	ขนาดของมุม ที่ 2	ขนาดของมุม ที่ 3	ขนาดของผลรวม มุม
Δ BOY				
Δ CAT				
Δ MAN				

สิ่งที่นักเรียนค้นพบจากการวัดขนาดมุมภายในคือ

.....

ระยะที่ 3

3.1 จากรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้รูปใดบ้างที่มีขนาดของมุมภายในรวมกันเท่ากับ 180 องศา เหตุใดจึงเป็นเช่นนั้น



.....

.....

ระยะที่ 4

จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

4.1 ให้ A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน โดยจุด B อยู่ระหว่างจุด A และ จุด D ซึ่งจุด C เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AD ถ้า $D\hat{B}C = 30^\circ$ แล้ว $A\hat{B}C = 150^\circ$

ระยะที่ 5

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

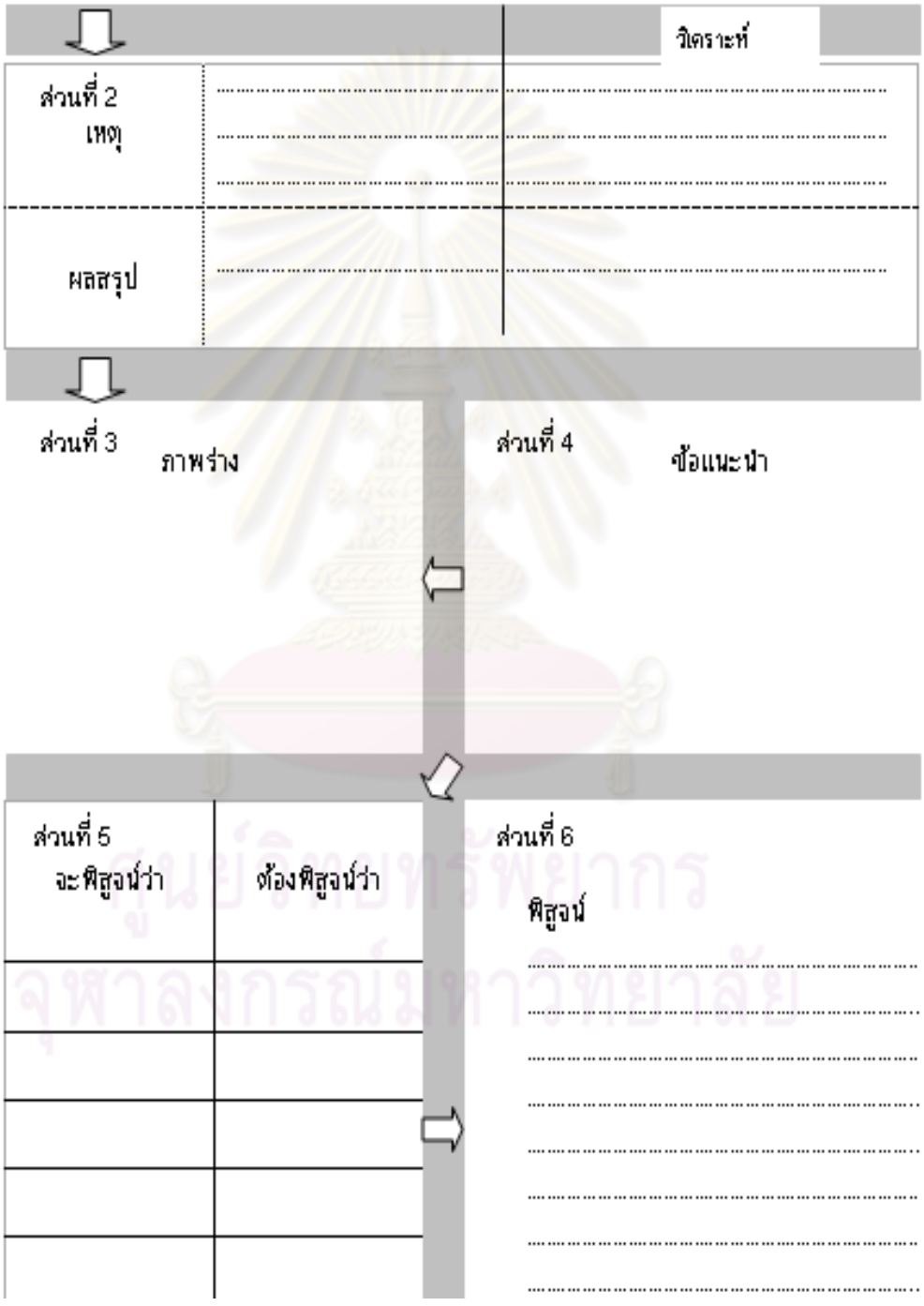
5.1 ทฤษฎีบทที่ 1 ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา

5.2 ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

ส่วนที่ 1

เขียนข้อความปัญหา

.....
.....
.....
.....



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. การประเมิน

3.1 จงอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้เรียนในคาบนี้

……

……

……

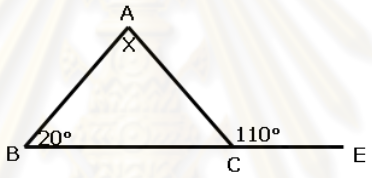
……

……

……

……

3.2 จากรูปที่กำหนดให้จงหาขนาดของ X



……

……

……

……

……

……

……

3.3 จงสร้างปัญหาจากสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้ในครั้งนี้พร้อมทั้งแสดงวิธีการแก้ปัญหา

……

……

……

……

……

ตัวอย่างเอกสารประกอบการเรียนกลุ่มควบคุม

เอกสารประกอบการเรียนรู้ที่ 1

.....

ชื่อ..... ผู้สอน นายจำเริญ อนันตธรรมรส

ชั้น ม.3/..... เลขที่ .....

วันที่ .....

หัวข้อ: **ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต**

.....

1. จงพิสูจน์ข้อความ “ให้ A, B และ D เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน โดยจุด B อยู่ระหว่างจุด A และ จุด D ซึ่งจุด C เป็นจุดภายนอกเส้นตรง AD ถ้า $D\hat{B}C = 30^\circ$ แล้ว $A\hat{B}C = 150^\circ$ ”

กำหนดให้

.....

ต้องการพิสูจน์ว่า

.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1.....	1..... .....
2.....	2. ....
3.	3..... .....
4.....	4. .....
5.....	5. .....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท “ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา”

รูปประกอบการพิสูจน์

กำหนดให้

.....

. .....

ต้องการพิสูจน์ว่า

.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1.	1..... .....
2.....	2..... .....
3.....	3..... .....
4.....	4. ....
5.....	5. ....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ “ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น”

กำหนดให้

.....

. .....

ต้องการพิสูจน์ว่า

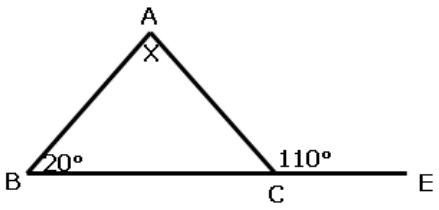
.....

การพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1.	1…….. ……
2.....	2..... ……
3.....	3..... ……
4.....	4. ..... ……
5.....	5. ..... ……

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. จากรูปที่กำหนดให้จงหาขนาดของ X



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก จ

ผลการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวน (F-test) และความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิต (t-test) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนการทดลองของกลุ่มตัวอย่าง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวน (F-test) และค่าความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิต (t-test) และความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของกลุ่มตัวอย่าง

ตารางที่ 20 ค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างในปีการศึกษา 2552 ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test)

	n	$\bar{x}$	s	F	t
กลุ่มทดลอง	40	81.47	7.452	0.273	0.319
กลุ่มควบคุม	40	82.03	7.937		

p> .05

ตารางที่ 21 ค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนวัดความสามารถในการเขียนพิสูจน์ก่อนเรียนของกลุ่มตัวอย่าง ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test)

	n	$\bar{x}$	s	F	t
กลุ่มทดลอง	40	9.38	3.341	0.281	0.598
กลุ่มควบคุม	40	9.93	3.737		

p > .05

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายจำเริญ อนันตธรรมรส เกิดเมื่อวันที่ 9 กุมภาพันธ์ พุทธศักราช 2525 ที่ อำเภอปากช่อง จังหวัดนครราชสีมา สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชามัธยมศึกษา วิชาเอกวิทยาศาสตร์ทั่วไป และ คณิตศาสตร์ จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2547 ปัจจุบัน รับราชการครูตำแหน่ง ครู คศ.1 โรงเรียนวัดราชบพิธ จังหวัดกรุงเทพมหานคร

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย