การยืดขยายและการแยกส่วนของเซมิริง

นายพรชัย ล่าตรวาหา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2532

ISBN 974-576-299-7

EXTENSIONS AND DECOMPOSITIONS OF SEMIRINGS

Mr. Pornchai Satravaha

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1989

ISBN 974-576-299-7

Thesis Title	Extensions and Decompositions of Semirings
By	Mr. Pornchai Satravaha
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya .... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit .... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Sidney S. Mitchell .... Thesis Advisor

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Wanida Hemakul .... Member

(Associate Professor Wanida Hemakul Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

พรชัย ลำตรวาหา : การยืดขยายและการแยกส่วนของเซมิริง (EXTENSIONS AND DECOMPOSITIONS OF SEMIRINGS) อ.ที่ปรึกษา : ดร.ซิดนีย์ เอส. มิทเชลล์, 82 หน้า.

เราจะเรียกเซมิริง $(S,+,\cdot)$ ว่า สกิวเรโชเซมิริง ถ้า $(S,\cdot)$ เป็นกรุป, สกิวเซมิฟิลด์ ถ้า $(S\setminus\{0\},\cdot)$ เป็นกรุป เมื่อ 0 เป็นศูนย์ภายใต้การคูณของ S, สกิวริง ถ้า $(S,+)$ เป็นกรุป เราจะเรียกสกิวเซมิฟิลด์ $(K,+,\cdot)$ ว่า สกิวเซมิฟิลด์ผลหารทางขวา [ซ้าย] ของเซมิริง S ซึ่งมีศูนย์ภายใต้การคูณ ถ้ามีโมโนมอร์ฟิซึม $i : K \to S$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ $x \in K$ จะมี $a \in S$ และ $b \in S\setminus\{0\}$ ซึ่ง $x = i(a)i(b)^{-1}[i(b)^{-1}i(a)]$ เราจะเรียกสกิวเรโชเซมิริง $(D,+,\cdot)$ ว่า สกิวเรโชเซมิริงผลหารทางขวา [ซ้าย] ของเซมิริง S ซึ่งไม่มีศูนย์ภายใต้การคูณ ถ้ามีโมโนมอร์ฟิซึม $i : D \to S$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ $x \in D$ จะมี $a,b \in S$ ซึ่ง $x = i(a)i(b)^{-1}[i(b)^{-1}i(a)]$ เราจะเรียกสกิวริง R ว่า สกิวริงผลต่างทางขวา [ซ้าย] ของเซมิริง S ถ้ามีโมโนมอร์ฟิซึม $i : R \to S$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะมี $a,b \in S$ ซึ่ง $x = i(a)-i(b)[-i(b)+i(a)]$ เราจะกล่าวว่าเซมิกรุป $(S,\cdot)$ มีเงื่อนไขออร์ทางขวา [ซ้าย] ถ้าสำหรับทุก ๆ $a,b \in S\setminus\{0\}$ มี $x,y \in S\setminus\{0\}$ ซึ่ง $ax = by[xa = yb]$

ทฤษฎีบท 1 สำหรับเซมิริง S ใด ๆ ซึ่งมีศูนย์ภายใต้การคูณและ $|S| > 1$ S จะมีสกิวเซมิฟิลด์ผลหารทางขวา [ซ้าย] ของ S เมื่อและต่อเมื่อ (1) S ตัดออกได้ภายใต้การคูณ และ (2) $(S,\cdot)$ มีเงื่อนไขออร์ทางขวา [ซ้าย]

ทฤษฎีบท 2 สำหรับเซมิริง S ใด ๆ ซึ่งไม่มีศูนย์ภายใต้การคูณ S จะมีสกิวเรโชเซมิริงผลหารทางขวา [ซ้าย] ของ S เมื่อและต่อเมื่อ (1) S ตัดออกได้ภายใต้การคูณ และ (2) $(S,\cdot)$ มีเงื่อนไขออร์ทางขวา [ซ้าย]

ทฤษฎีบท 3 สำหรับเซมิริง S ใด ๆ S จะมีสกิวริงผลต่างทางขวา [ซ้าย] ของ S เมื่อและต่อเมื่อ (1) S ตัดออกได้ภายใต้การบวก และ (2) $(S,+)$ มีเงื่อนไขออร์ทางขวา [ซ้าย]

เราจะกล่าวว่า นอร์มัลสับกรุป E ภายใต้การคูณของสกิวเรโชเซมิริง D เป็น พี-เซต ของ D ถ้ามี $\alpha \in D$ ซึ่ง (1) $\alpha x = x\alpha$ สำหรับทุก ๆ $x \in E$, (2) $(x+y)\alpha \in E$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in E$ และ (3) $(x+y)\alpha+z = x+(y+z)\alpha$ สำหรับทุก ๆ $x,y,z \in E$ และจะเรียก α ว่า สมาชิกที่ดีของ พี-เซต E เซตย่อย I ของสกิวริง R จะเรียกว่าเป็น ไอดีล ของ R ถ้า (1) I เป็นนอร์มัลสับกรุปภายใต้การบวกของ R และ (2) $ir, ri \in I$ สำหรับทุก ๆ $i \in I, r \in R$ เราจะกล่าวว่า สกิวเรโชเซมิริง D แยกส่วนได้ ถ้ามีสกิวเรโชเซมิริง D_1, D_2 ซึ่ง $|D_1| > 1, |D_2| > 1$ และ $D \cong D_1 \times D_2$ การแยกส่วนได้ของสกิวริง นิยามได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 4 สำหรับสกิวเรโชเซมิริง D ใด ๆ D แยกส่วนได้ เมื่อและต่อเมื่อ มี พี-เซต E,F ของ D ซึ่ง $|E| > 1$ และ $|F| > 1$ พร้อมด้วยสมาชิกที่ดีคือ α และ β ตามลำดับ ซึ่ง (1) $E \cap F = \{1\}$, (2) $D = EF$ และ (3) $ef+gh = (e+g)\alpha(f+h)\beta$ สำหรับทุก ๆ $e,g \in E$, $f,h \in F$

ทฤษฎีบท 5 สำหรับสกิวริง R ใด ๆ R แยกส่วนได้ เมื่อและต่อเมื่อ มีไอดีล I,J ของ R ที่ $|I| > 1$ และ $|J| > 1$ ซึ่ง (1) $I \cap J = \{0\}$ และ (2) $R = I+J$

ภาควิชา ภาควิชาคณิตศาสตร์

สาขาวิชา ภาควิชาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2531

ลายมือชื่อนิสิต พรชัย ลำตรวาหา

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

PORNCHAI SATRAVAHA : EXTENSIONS AND DECOMPOSITIONS OF SEMIRINGS. THESIS ADVISOR : DR. SIDNEY S. MITCHELL, Ph.D. 82 PP.

A semiring $(S,+,\cdot)$ is said to be a skew ratio semiring iff $(S,\cdot)$ is a group, skew semifield iff $(S\setminus\{0\},\cdot)$ is a group where 0 denotes a multiplicative zero of S, skew ring iff $(S,+)$ is a group. A skew semifield $(K,+,\cdot)$ is said to be a skew semifield of right [left] quotients of a semiring S with a multiplicative zero 0 iff there exist a monomorphism $i : S \to K$ such that for all $x \in K$ there exist $a \in S, b \in S\setminus\{0\}$ such that $x = i(a)i(b)^{-1}[i(b)^{-1}i(a)]$. A skew ratio semiring D is said to be a skew ratio semiring of right [left] quotients of a semiring S without a multiplicative zero iff there exist a monomorphism $i : S \to D$ such that for all $x \in D$ there exist $a,b \in S$ such that $x = i(a)i(b)^{-1}[x = i(b)^{-1}i(a)]$. A skew ring R is said to be a skew ring of right [left] differences of a semiring S iff there exist a monomorphism $i : S \to R$ such that for all $x \in R$ there exist $a,b \in S$ such that $x = i(a)-i(b)[x = -i(b)+i(a)]$. A semigroup $(S,\cdot)$ is said to satisfy the right [left] Ore condition iff for all $a,b \in S\setminus\{0\}$ there exist $x,y \in S\setminus\{0\}$ such that $ax = by$ $[xa = yb]$.

Theorem 1. Let S be a semiring with a multiplicative zero such that $|S| > 1$. Then a skew semifield of right [left] quotients of S exists iff (1) S is multiplicatively cancellative and (2) $(S,\cdot)$ satisfies the right [left] Ore condition.

Theorem 2. Let S be a semiring without a multiplicative zero. Then a skew ratio semiring of right [left] quotients of S exists iff (1) S is multiplicatively cancellative and (2) $(S,\cdot)$ satisfies the right [left] Ore condition.

Theorem 3. Let S be a semiring. Then a skew ring of right [left] differences of S exists iff (1) S is additively cancellative and (2) $(S,+)$ satisfies the right [left] Ore condition.

A multiplicative normal subgroup E of a skew ratio semiring D is said to be a P-set of D iff there exists an $\alpha \in D$ such that (1) $\alpha x = x\alpha$ for all $x \in E$, (2) $(x+y)\alpha \in E$ for all $x,y \in E$ and (3) $(x+y)\alpha+z = x+(y+z)\alpha$ for all $x,y,z \in E$. α is called a good element of the P-set E. A subset I of a skew ring R is said to be an ideal of R iff (1) I is an additively normal subgroup of R and (2) $ir, ri \in I$ for all $i \in I, r \in R$. A skew ratio semiring D is said to be decomposable iff there exist skew ratio semirings D_1, D_2 such that $|D_1| > 1, |D_2| > 1$ and $D \cong D_1 \times D_2$. A decomposable skew ring is defined similarly.

Theorem 4. Let $(D,+,\cdot)$ be a skew ratio semiring. Then D is decomposable iff there exist nontrivial P-sets E,F of D with good elements α and β, respectively, such that (1) $E \cap F = \{1\}$, (2) $D = EF$ and (3) $ef+gh = (e+g)\alpha(f+h)\beta$ for all $e,g \in E$, $f,h \in F$.

Theorem 5. Let R be a skew ring. Then R is decomposable iff there exist nontrivial ideals I,J of R such that (1) $I \cap J = \{0\}$ and (2) $R = I+J$.

ภาควิชา ภาควิชาคณิตศาสตร์

สาขาวิชา ภาควิชาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2531

ลายมือชื่อนิสิต พรชัย สาตรวาหา

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor, for the invaluable guidance considerately offered in the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, deep gratitude and appreciation are shown to my beloved father, mother and brothers for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS