

คำเฉลยไฮเปอร์เพลนของฟังก์ชันซาร์มอนิกย่อยค่าสเกลาร์และค่าเวกเตอร์



นาย ไพโรจน์ สัตยธรรม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2530

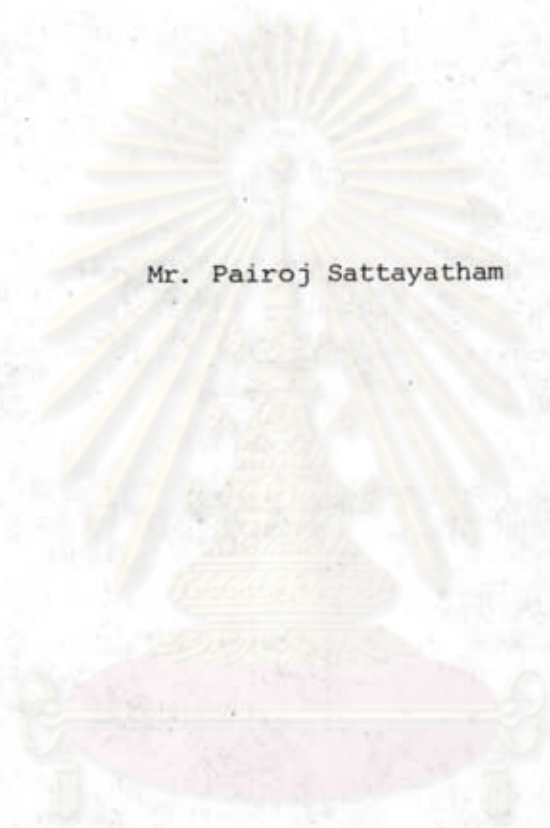
ISBN 974-567-420-6

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

012549

110295823

HYPERPLANE MEANS OF SCALAR AND VECTOR-VALUED SUBHARMONIC FUNCTIONS



Mr. Pairoj Sattayatham

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy

Department of Mathematics
Graduate School

Chulalongkorn University

1987

ISBN 974-567-420-6

Thesis Title Hyperplane Means of Scalar and Vector-Valued
 Subharmonic Functions
By Mr. Pairoj Sattayatham
Department Mathematics
Thesis Advisor Professor Winfried Kaballo, Ph.D.



Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in
Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of
Philosophy.

Thavorn Vajrabhaya

..... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya, Ph.D.)

Thesis Committee

Virool Boonyasombat

..... Chairman

(Associate Professor Virool Boonyasombat, Ph.D.)

W. Kaballo

..... Thesis Advisor

(Professor Winfried Kaballo, Ph.D.)

Yupaporn Kemprasit

..... Member

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit, Ph.D.)

Wanida Hemakul

..... Member

(Assistant Professor Wanida Hemakul, Ph.D.)

Yati Krisnangkura

..... Member

(Yati Krisnangkura, Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ค่าเฉลี่ยไฮเปอร์เพลนของฟังก์ชันฮาร์มอนิกย่อยค่าสเกลาร์และค่าเวกเตอร์
ชื่อนิสิต	นาย ไพโรจน์ สัตยธรรม
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร. W. Kabblo
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2529



บทคัดย่อ

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราศึกษาฟังก์ชันฮาร์มอนิกย่อยบนที่ปริภูมิแบบยุคลิด $(m+1)$ มิติ เราเริ่มต้นด้วยการพิสูจน์ว่า ถ้า u เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกย่อยค่าไม่เป็นลบใน $\mathbb{R}^m \times (0, +\infty)$ และค่าเฉลี่ยไฮเปอร์เพลน $M(u, y)$ ของมันมีขอบเขตเฉพาะที่ใน $(0, +\infty)$ แล้ว

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{M(u, y)}{y^{m+1}} = +\infty$$

ต่อจากนั้น เราสามารถหาลักษณะเฉพาะของฟังก์ชันซึ่งรักษาความเป็นฮาร์มอนิกในปริภูมิแบบยุคลิดได้ เราพิสูจน์ว่าถ้า $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ เป็น C^2 ฟังก์ชันซึ่งรักษาความเป็นฮาร์มอนิกแล้วมันจะคงรูปที่ทุกจุด $p \in \Omega$ ที่ทำให้ $\forall f_1(p) \neq 0$ เมื่อ f_1 หมายถึงฟังก์ชันประกอบที่หนึ่งของ f ในท้ายที่สุด เรานิยามแลตติสบานาคที่ถูกต้องแล้วด้วยการเติม $+\infty$ และ $-\infty$ ลงไป ต่อจากนั้นเราศึกษาทฤษฎีของฟังก์ชันฮาร์มอนิกย่อยที่พิสัยของมันถูกบรรจุอยู่ในแลตติสบานาคที่ถูกต้องแล้ว

ศูนย์วิทยุทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Thesis Title Hyperplane Means of Scalar and Vector-Valued
 Subharmonic Functions

Name Mr. Pairoj Sattayatham

Thesis Advisor Professor Winfried Kabbalo, Ph.D.

Department Mathematics

Academic Year 1986



ABSTRACT

In this thesis we study subharmonic functions, mainly related to half-space in the euclidean $(m+1)$ -dimensional space where $m \geq 1$. We begin by proving that if u is a non-negative subharmonic function in $\mathbb{R}^m \times (0, +\infty)$ and its hyperplane mean $M(u, y)$ is locally bounded in $(0, +\infty)$ then

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{M(u, y)}{y^{m+1}} = +\infty.$$

Moreover, we can characterize those functions which preserve harmonicity in the euclidean space. We prove that if a C^2 function $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ preserves harmonicity then it must be conformal at all point $p \in \Omega$ such that $\nabla f_1(p) \neq 0$ where f_1 is the first component of f . Finally, we define an extended Banach lattice by adjoining $+\infty$ and $-\infty$ to a Banach lattice E . Then we study the theory of subharmonic functions whose range are contained in an extended Banach lattice.



ACKNOWLEDGEMENT

I wish to express my sincere gratitude to Professor Dr. W. Kaballo for his constant guidance and help throughout the second part of my investigation.

Professor Dr. V. Boonyasombat, the head of the department of mathematics at Chulalongkorn University, gave me much helpful advice. Professor Dr. Y. Kemprasit, the coordinator while I was doing research at U.P. Diliman, was of great assistance in coordinating work at Chulalongkorn University and I am grateful for her kindness. I extend my thanks to all of my teachers for their previous lectures.

I must end on a rather sad note. This thesis was started by my teacher Professor Dr. S. Nualtaranee. His tragic death in 1985 made it impossible for him to finish the work. I hope it may serve as a memorial to a deeply conscientious and extremely charming person whom I still miss greatly.

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CONTENTS



	Page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	v
ACKNOWLEDGEMENT	vi
 CHAPTER	
I. INTRODUCTION	1
II. ON HYPERPLANE MEANS OF NON-NEGATIVE SUBHARMONIC FUNCTIONS	4
III. ON THE FUNCTIONS THAT PRESERVE HARMONICITY IN THE EUCLIDEAN SPACE	21
IV. VECTOR-VALUED SUBHARMONIC FUNCTIONS	31
REFERENCES	94
APPENDIX I	96
APPENDIX II	97
VITA	104

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย