

การปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยบางรูปแบบด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย



นางสาว เปรมรัตน์ ภู่อ้าย

สถาบันวิทยบริการ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์


คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1712-8

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ON COVERING SOME UNIT ARCS BY 30 DEGREE SECTOR WITH UNIT RADIUS



Miss Prameratana Pooklai

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-53-1712-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยบางรูปแบบด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมี  
หนึ่งหน่วย  
โดย นางสาว เปรมรัตน์ ภู่อ้าย  
สาขาวิชา คณิตศาสตร์  
อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร. วชิรินทร์ วิชิรมาลา  
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม อาจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิตินัน

---

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร. เปี่ยมศักดิ์ เมนะเศวต)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร. วณิดา เหมะกุล)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(อาจารย์ ดร. วชิรินทร์ วิชิรมาลา)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม  
(อาจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิตินัน)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อิมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์)

เปรมรัตน์ ภู่อลัย : การปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยบางรูปแบบด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย. (ON COVERING SOME UNIT ARCS BY 30 DEGREE SECTOR WITH UNIT RADIUS)

อ.ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร. วชิรินทร์ วิชิรมาลา, อ. ที่ปรึกษาร่วม : อาจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิตติสิน,

จำนวนหน้า 102 หน้า. ISBN 974-53-1712-8

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาและรวบรวมผลงานที่เกี่ยวข้องกับปัญหา "Moser's Worm Problem" ซึ่งกล่าวถึงการหาแผ่นปิดทับที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งความยาวตามที่กำหนดให้ ได้ทุกเส้น โดยแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อใหญ่ ๆ คือ ศึกษาเกี่ยวกับตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ศึกษาเกี่ยวกับตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น และ ศึกษาเกี่ยวกับการพยายามปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยบางรูปแบบด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา **คณิตศาสตร์**

ลายมือชื่อนิสิต.....

สาขาวิชา **คณิตศาสตร์**

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

ปีการศึกษา 2547

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

##4572389623 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORD: Moser / Worm / Cover / Unit arc / Convex arc

PRAMERATANA POOKLAI: THESIS TITLE.( ON COVERING SOME UNIT ARCS BY  
30 DEGREE SECTOR WITH UNIT RADIUS) THESIS ADVISOR : WACHARIN  
WICHIRAMALA, Ph.D., THESIS COADVISOR: NATTAPHAN KITISIN, Ph.D., 102 pp.  
ISBN 974-53-1712-8

This thesis surveys and collects the results about "The Moser's Worm Problem", which find the cover of least area that contains a congruent copy of every unit arc .We study by considering in 3 principals as follows : the smallest cover for any arc of length one, the smallest cover for any convex unit arc and the covering some unit arcs by 30 degree sector with unit radius.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department	<b>Mathematics</b>	Student's signature.....
Field of study	<b>Mathematics</b>	Advisor's signature.....
Academic year	<b>2004</b>	Co-advisor's signature.....

## กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากบุคคลหลายท่าน จึงขอแสดงความขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้ ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร. วชิรินทร์ วิชิรมาลา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และอาจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิตติสิน อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ได้กรุณาถ่ายทอดความรู้และให้คำปรึกษาที่มีประโยชน์ยิ่ง ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อิมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ ประธานกรรมการและ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะและความช่วยเหลือด้านต่าง ๆ ขอขอบคุณ Prof. John E. Wetzel ที่ได้กรุณาส่งเอกสารที่เป็นส่วนสำคัญในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ มาให้ข้าพเจ้า ขอขอบคุณทุนอุดหนุนการศึกษา ระดับบัณฑิตศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพื่อเฉลิมฉลองในวโรกาสที่พระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัวทรงเจริญพระชนมายุครบ 72 พรรษา ซึ่งทางบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ได้ให้ความอนุเคราะห์ให้ข้าพเจ้ามาตลอดระยะเวลาที่ข้าพเจ้าได้ศึกษาอยู่ที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจให้ข้าพเจ้ามาโดยตลอด ขอขอบคุณ พี่ ๆ เพื่อน ๆ และน้อง อาทิ เช่น นายชัชวาล ปานรักษา นางสาวบุญสิริ สุขพร้อมสรรพ นายบัญญัติ สร้อยแสง และ นางสาว พัชรี วงษาสนธิ์ สำหรับความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญ

บทที่	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย .....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .....	จ
กิตติกรรมประกาศ .....	ฉ
สารบัญ .....	ช
บทที่ 1 บทนำ.....	1
บทที่ 2 ความรู้เบื้องต้น.....	7
บทที่ 3 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น.....	21
บทที่ 4 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น .....	55
บทที่ 5 ข้อคาดการณ์ในปัญหา “Moser’s Worm Problem”.....	67
บทที่ 6 การปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยบางรูปแบบด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย.....	72
รายการอ้างอิง.....	95
ภาคผนวก.....	97
ประวัติผู้เขียน.....	102

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 1

## บทนำ

ในปี ค.ศ. 1966 Leo Moser [1] ได้ตั้งปัญหาปลายเปิดทางด้านเรขาคณิตขึ้นจำนวนทั้งสิ้น 50 ข้อด้วยกัน โดยให้ชื่อปัญหาเหล่านี้ว่า “Poorly formulated unsolved problem of combinatorial geometry” ซึ่งปัญหาส่วนใหญ่ยังไม่สามารถหาคำตอบได้ หนึ่งในจำนวนนั้นคือปัญหาข้อที่ 11 ที่กล่าวว่า “เมื่อกำหนดความยาว  $L$  ให้ รูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาว  $L$  หน่วยตามที่กำหนดให้ได้ทุกเส้นคือรูปใด” ปัญหานี้รู้จักกันในชื่อว่า “Moser’s Worm Problem” ซึ่งเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก และปัจจุบันความก้าวหน้าของคำตอบของปัญหานี้ยังมีไม่มากนัก ผู้สนใจหาคำตอบของปัญหานี้ทำได้เพียงหารูปที่เล็กลงเท่านั้น ยังไม่มีผู้ใดหาคำตอบของปัญหานี้ได้สำเร็จ เนื่องจากความยากในการหาคำตอบของปัญหา “Moser’s Worm Problem” ไม่ใช่เพียงแค่เราไม่ทราบว่าคุณสมบัติและรูปร่างของรูปที่นำมาปิดทับ ซึ่งเราจะเรียกว่า “ตัวปิดทับ” เป็นอย่างไรเท่านั้น หากแต่ว่าการหาวิธีในการวางตัวปิดทับ และการพิสูจน์ให้เห็นจริงยิ่งยากกว่า เพราะในความเป็นจริงแล้วถึงแม้ว่าเราจะทราบว่ารูปร่างของตัวปิดทับเป็นเช่นไร การพิจารณาหาวิธีในการปิดทับก็ยังไม่สามารถทำได้อยู่ดี จะเห็นได้จากปัญหาใกล้เคียงปัญหา “Moser’s Worm Problem” ที่กล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีลักษณะเป็นอย่างไร ซึ่งในปัจจุบันยังไม่มีผู้ใดหาคำตอบได้เช่นกัน

สำหรับการพิจารณาปัญหา “Moser’s Worm Problem” นั้น นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะสนใจศึกษาในตัวแปรหลัก 3 ตัวแปรด้วยกัน [2] ดังนี้

*ตัวแปรที่ 1* คือ วิธีในการปิดทับ เช่น

- อนุญาตให้เลื้อน และ/หรือพลิก และ/หรือหมุน ตัวปิดทับได้
- ไม่อนุญาตให้หมุนและพลิกตัวปิดทับทำได้แค่เลื้อนเพียงอย่างเดียว
- ไม่อนุญาตให้พลิกตัวปิดทับทำได้แค่หมุนและเลื้อนตัวปิดทับเท่านั้น

เป็นต้น

*ตัวแปรที่ 2* คือ รูปแบบของเส้นโค้งหรือเงื่อนไขต่าง ๆ ของเส้นโค้งที่จะนำมาพิจารณา เช่น อาจพิจารณาเฉพาะเส้นโค้งที่คอนเวกซ์ เส้นโค้งปิด เส้นโค้งที่เกิดจากการประกอบกันของส่วนของเส้นตรงจำนวนที่อนันต์ เป็นต้น และ

*ตัวแปรที่ 3* คือ รูปแบบของตัวปิดทับ เช่น พิจารณาเฉพาะตัวปิดทับที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หรือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เป็นต้น



ด้วยเหตุนี้จึงทำให้เกิดปัญหาที่ใกล้เคียงกับปัญหา “Moser's Worm Problem” ขึ้นมากมาย โดยปัญหาใกล้เคียงที่เกิดขึ้นนี้ส่วนใหญ่จะมุ่งพิจารณาในกรณีที่เส้นโค้งมีความยาวหนึ่งหน่วย คือพยายามหารูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ เนื่องจากมีความสะดวกในการพิสูจน์ และจากผลที่ได้จากการพิสูจน์ หากเราย่อหรือขยายรูปที่ได้ด้วยสเกล  $L$  เท่าเราก็จะได้รูปที่สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาว  $L$  หน่วยใด ๆ ได้ โดยมีตัวอย่างของปัญหาที่ใกล้เคียงกับปัญหา “Moser's Worm Problem” เช่น

-“รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด”

-“รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีลักษณะเป็นอย่างไร”

-“รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด”

-“รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งปิดที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด”

สำหรับแนวทางในการพัฒนาคำตอบของปัญหา “Moser's Worm Problem” นั้นส่วนใหญ่จะเป็นการพยายามตัดแต่งรูปที่ปิดทับได้ที่มีอยู่เดิมให้มีพื้นที่น้อยลง การศึกษาจากข้อคาดการณ์ที่มีผู้ตั้งไว้แล้ว และ การกำหนดเงื่อนไขของตัวปิดทับและเส้นโค้งเพื่อช่วยให้กลุ่มของตัวปิดทับและเส้นโค้งที่จะนำมาพิจารณามีขนาดเล็กลง เป็นต้น

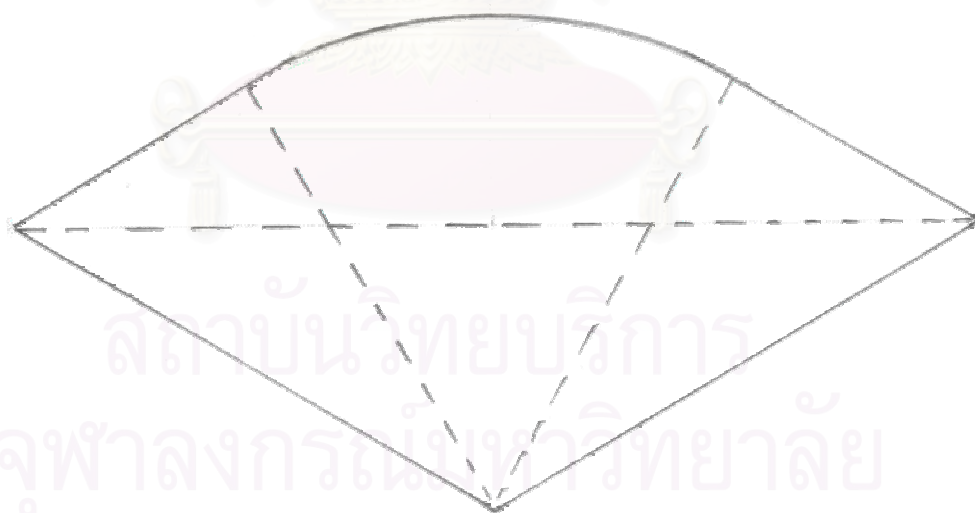
จากความยากของปัญหาดังได้กล่าวข้างต้นประกอบกับมีปัญหาที่ใกล้เคียงเกิดขึ้นมาก จึงทำให้คำตอบของปัญหานี้ถูกแยกออกเป็นส่วนย่อยและค่อนข้างกระจัดกระจาย เราจึงจะทำการศึกษาและรวบรวมงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาใกล้เคียงกับปัญหา “Moser's Worm Problem” โดยทฤษฎีบท บทแทรก และการพิสูจน์ต่าง ๆ ที่จะปรากฏในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ดัดแปลงมาจากบทความที่ศึกษาเดิมโดยมุ่งเน้นให้แต่ละทฤษฎีบทและการพิสูจน์นั้นพิจารณาเฉพาะกรณีที่เส้นโค้งมีความยาวหนึ่งหน่วย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะแยกออกเป็น 6 บทด้วยกันโดยมีบทนำเป็นบทที่ 1

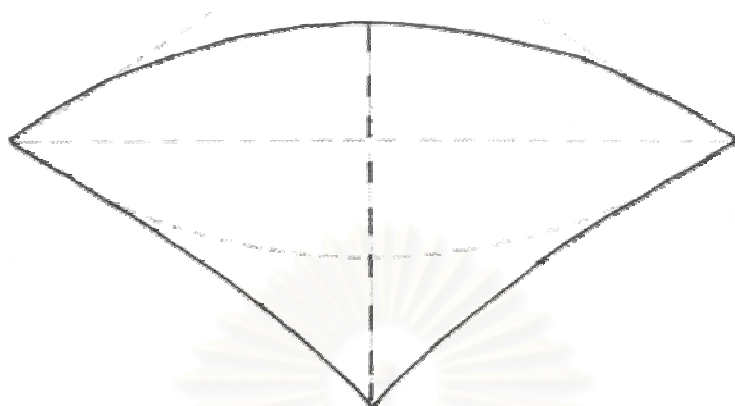
บทที่ 2 กำหนดบทนิยาม ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง และข้อตกลงต่าง ๆ ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และเสนอพัฒนาการของคำตอบของปัญหาที่ใกล้เคียงกับปัญหา “Moser's Worm Problem”

บทที่ 3 ศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่ใกล้เคียงกับปัญหา “Moser's Worm Problem” ที่กล่าวว่า “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด” ซึ่งในส่วน

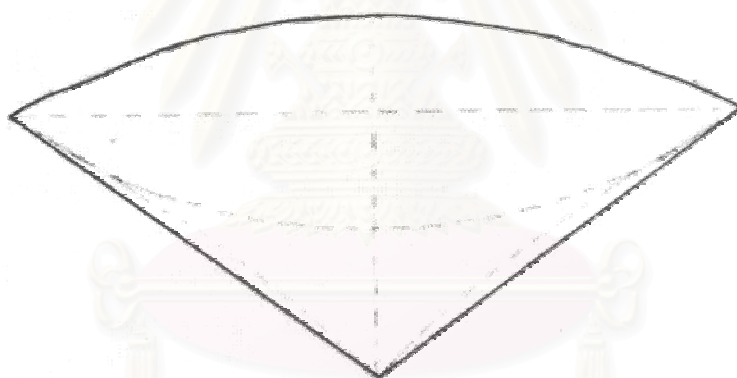
แรกจะเป็นการเสนอผลงานของ John Gerriets and George Poole [3],[4] ซึ่งพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีเส้นทแยงมุมหลักยาวหนึ่งหน่วยและเส้นทแยงมุมรองยาว  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  หน่วย (ที่มาของเซตที่มีพื้นที่น้อยที่สุดในช่วงปี ค.ศ.1992 ถึง ค.ศ. 2002) สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น และทฤษฎีบทที่แสดงแนวทางในการตัดเล็มรูปดังกล่าวให้มีพื้นที่น้อยลงจากนั้นจะเป็นการศึกษาค้นคว้าของ Rick Norwood, George Poole and Michale Laidacker [5] ซึ่งแสดงว่ารูปที่มีลักษณะดังรูปที่ 1.1 มีพื้นที่ประมาณ 0.27542 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น และรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันมีลักษณะดังรูปที่ 1.2 มีพื้นที่ประมาณ 0.260437 ตารางหน่วย ถูกค้นพบโดย Rick Norwood and George Poole [6] ในปี ค.ศ. 2003 นอกจากนี้ทั้งสองท่านยังได้เสนอรูปที่เป็นเซตคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยกว่ารูป 1.1 (เซตที่มีพื้นที่น้อยสุดตั้งแต่ปี ค.ศ.1992 ถึง ค.ศ. 2002) ไว้ด้วย โดยรูปใหม่นี้มีพื้นที่ประมาณ 0.2738086 ตารางหน่วย ลักษณะดังแสดงในรูปที่ 1.3 ซึ่งเราจะไม่นำเสนอวิธีการพิสูจน์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เนื่องจากการพิสูจน์มีแนวทางเช่นเดียวกับการพิสูจน์ว่า รูปซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 1.1 สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นซึ่งมีรายละเอียดของการพิสูจน์อยู่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว หากท่านผู้อ่านสนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [6]



รูปที่ 1.1 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในช่วงปี ค.ศ.1992–2002 ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น มีพื้นที่ประมาณ 0.27542 ตารางหน่วย



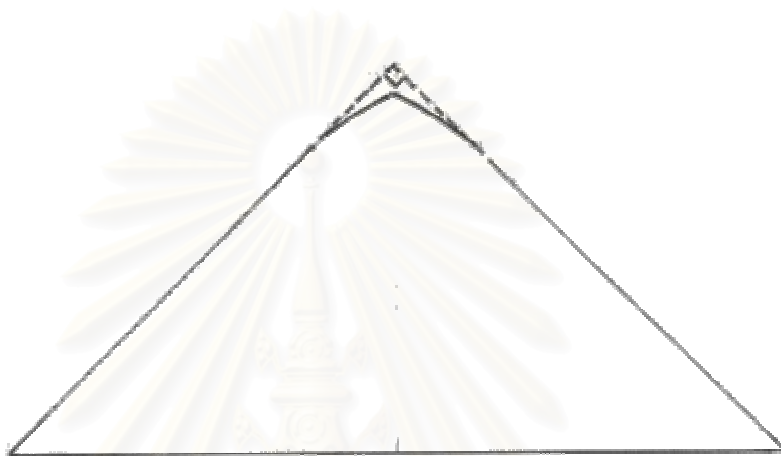
รูปที่ 1.2 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.260473 ตารางหน่วย



รูปที่ 1.3 รูปที่เป็นเซตคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.2738086 ตารางหน่วย

บทที่ 4 ศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่ใกล้เคียงกับปัญหา “Moser’s Worm Problem” ที่กล่าวว่า “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ได้ทุกเส้นคือรูปใด” ซึ่งรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันมีพื้นที่ประมาณ 0.24640 ตารางหน่วย ได้จากการตัดเล็มบางส่วนของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยออก ถูกค้นพบในปี ค.ศ.2002 [7], [8] โดย ดร. วชิรินทร์ วิจิรมาลา (ขณะนี้กำลังอยู่ในขั้นตอนการตีพิมพ์เผยแพร่)

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ส่วนแรกจะเป็นการแสดงให้เห็นว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยสามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น จากนั้นจะแสดงการพิสูจน์ว่ารูปซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 1.4 เป็นรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดเท่าที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ [9] (มีพื้นที่ประมาณ 0.2465481 ตารางหน่วย) สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น



รูปที่ 1.4[9] รูปที่มีพื้นที่น้อยสุด(เท่าที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่) ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น มีพื้นที่ประมาณ 0.2465481 ตารางหน่วย

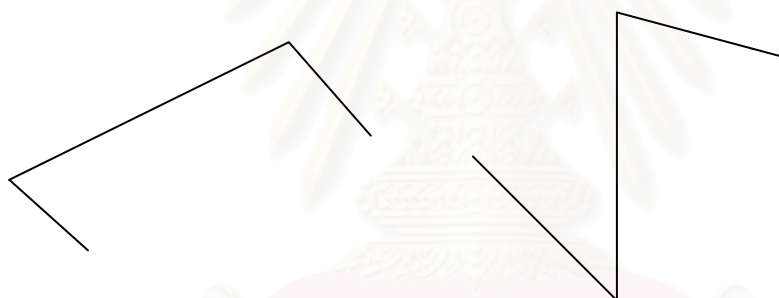
บทที่ 5 ศึกษาและรวบรวมข้อคาดการณ์ต่าง ๆ ซึ่งนักคณิตศาสตร์ที่สนใจศึกษาปัญหา “Moser’s Worm Problem” นี้ได้ตั้งขึ้นโดยจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนด้วยกัน ส่วนแรกจะเป็นการเสนอข้อคาดการณ์ซึ่งตั้งขึ้นและได้ถูกหักล้างไปแล้ว และในส่วนที่สองจะเป็นการเสนอข้อคาดการณ์ซึ่งในปัจจุบันยังไม่มีผู้ใดสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

และในบทที่ 6 ซึ่งเป็นบทสุดท้ายในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะศึกษาเกี่ยวกับการปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยบางรูปแบบด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย โดยจะเริ่มจากการศึกษาผลงานของ John E. Wetzel [10] เกี่ยวกับการปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยที่มีลักษณะ 2 ท่อน (ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.5) ด้วยรูปดังกล่าว จากนั้นจะเป็นการศึกษาผลงานของ Patrick Coulton [11] ซึ่งศึกษาปัญหา “Moser’s Worm Problem” ภายใต้อาณาเขตข้อคาดการณ์ที่ว่า “เซตคอนเวกซ์ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งแบบซิกแซก 3 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นจะสามารถปิดทับ

เส้นโค้งหนึ่งหน่วยใด ๆ “ได้” โดยเนื้อหาในส่วนี้จะประกอบไปด้วยการพิสูจน์ว่ารูปดังกล่าวสามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยที่มีลักษณะ 3 ท่อน (ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.6) และเส้นโค้งคอนเวกซ์ (ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.7) ได้ทุกเส้น



รูปที่ 1.5 แสดงตัวอย่างของเส้นโค้ง 2 ท่อน



รูปที่ 1.6 แสดงตัวอย่างของเส้นโค้ง 3 ท่อน



รูปที่ 1.7 แสดงตัวอย่างของเส้นโค้งคอนเวกซ์

## บทที่ 2

### ความรู้เบื้องต้น

จากที่ Leo Moser ได้ตั้งปัญหาปลายเปิดทางด้านเรขาคณิตขึ้นจำนวน 50 ข้อในปี ค.ศ. 1966 นั้น จนถึงปัจจุบันปัญหาที่ตั้งขึ้นนี้ส่วนใหญ่ยังไม่สามารถหาคำตอบได้ และหนึ่งในจำนวนนั้นคือปัญหา “Moser’s Worm Problem” ที่กล่าวว่า [1] “เมื่อกำหนดความยาว  $L$  ให้ รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งความยาว  $L$  หน่วยตามที่กำหนดให้ได้ทุกเส้นคือรูปใด” ซึ่งหลังจากที่มีการเผยแพร่ปัญหานี้ ได้มีนักคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมากให้ความสนใจและพยายามหาคำตอบของปัญหา แต่เนื่องจากปัญหา “Moser’s Worm Problem” มีความยากและเป็นปัญหาที่กว้าง นักคณิตศาสตร์ส่วนหนึ่งจึงเลี้ยวไปศึกษาปัญหาที่ใกล้เคียงแทนพร้อมกับเพิ่มเงื่อนไขบางประการ เพื่อให้สามารถศึกษาและหาคำตอบของปัญหาได้ง่ายขึ้น เช่น

- “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด” โดยไม่อนุญาตให้พลิกตัวปิดทับ ทำได้แค่เลื่อน และ/หรือหมุนเท่านั้น
- “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด” โดยอนุญาตให้เลื่อน และ/หรือหมุน และ/หรือพลิกตัวปิดทับได้
- “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด” โดยอนุญาตให้เลื่อน และ/หรือหมุน และ/หรือพลิกตัวปิดทับได้
- “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งปิดที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด” โดยอนุญาตให้เลื่อน และ/หรือหมุน และ/หรือพลิกตัวปิดทับได้

เป็นต้น

จากตัวอย่างของปัญหาใกล้เคียงข้างต้นจะเห็นว่าปัญหา “Moser’s Worm Problem” ถูกแยกย่อยลงไปมาก ประกอบกับมีผู้สนใจศึกษาในปัญหานี้เป็นจำนวนมาก จึงทำให้คำตอบของปัญหา “Moser’s Worm Problem” ค่อนข้างกระจัดกระจาย วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงจัดทำขึ้นเพื่อเป็นการรวบรวมคำตอบของปัญหา “Moser’s Worm Problem” โดยมุ่งสนใจคำตอบของปัญหาที่ใกล้เคียงกับปัญหา “Moser’s Worm Problem” ที่กล่าวว่า “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด” เมื่ออนุญาตให้เลื่อน และ/หรือหมุน และ/หรือพลิกตัวปิดทับได้

เนื่องจากการศึกษาเกี่ยวกับรูปที่นำมาปิดทับซึ่งเราจะเรียกว่า “ตัวปิดทับ” ที่มีลักษณะเป็นเซตไม่คอนเวกซ์ทำได้ยาก ประกอบกับเครื่องมือต่าง ๆ ที่ใช้ในการศึกษาไม่ค่อยมีปรากฏ และผลการค้นพบของ Jones, Scheaer และ Davies [12] ที่กล่าวว่า “มีเซตไม่คอนเวกซ์พื้นที่ประมาณ

0 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งที่เกิดจากการต่อกันของส่วนของเส้นตรง  $n$  ท่อน เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้” ส่งผลให้ผู้สนใจศึกษาปัญหา “Moser’s Worm Problem” หลีกเลี่ยง การศึกษาการปิดทับด้วยเซตไมคอนเวกซ์ ทำให้ตัวปิดทับที่พบส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นเซตคอนเวกซ์ มีเพียงผลงานของ Rick Norwood and George Poole [6] ซึ่งตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 2003 เท่านั้นที่กล่าวถึงการปิดทับด้วยเซตไมคอนเวกซ์ ซึ่งเราจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดการพิสูจน์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [6], [12] ดังนั้นตัวปิดทับที่เป็นคำตอบของปัญหาใกล้เคียงปัญหา “Moser’s Worm Problem” ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงมีลักษณะเป็นเซตคอนเวกซ์ทั้งสิ้น

สำหรับแนวทางที่สำคัญในการพัฒนาคำตอบของปัญหา “Moser’s Worm Problem” และปัญหาใกล้เคียง คือ การพยายามตัดแต่งตัวปิดทับที่มีอยู่เดิมให้เล็กลงโดยการตัดเล็มบางส่วนทิ้งไป ซึ่งรูปที่พัฒนาได้นี้จะต้องยังคงสามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวเท่าเดิมได้ทุกเส้น เช่น การพัฒนาเซตที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ได้ทุกเส้นซึ่งได้มาจากการตัดเล็มรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากัน และมีความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับหนึ่งหน่วย นอกจากนี้การพยายามพิสูจน์ข้อคาดการณ์ที่ได้มีผู้ตั้งไว้แล้ว และการจำกัดเงื่อนไขของตัวปิดทับและเส้นโค้งเพื่อช่วยให้กลุ่มของตัวปิดทับและเส้นโค้งที่จะนำมาพิจารณาเล็กลงก็ถือเป็นการพัฒนาคำตอบของปัญหาด้วยเช่นกัน

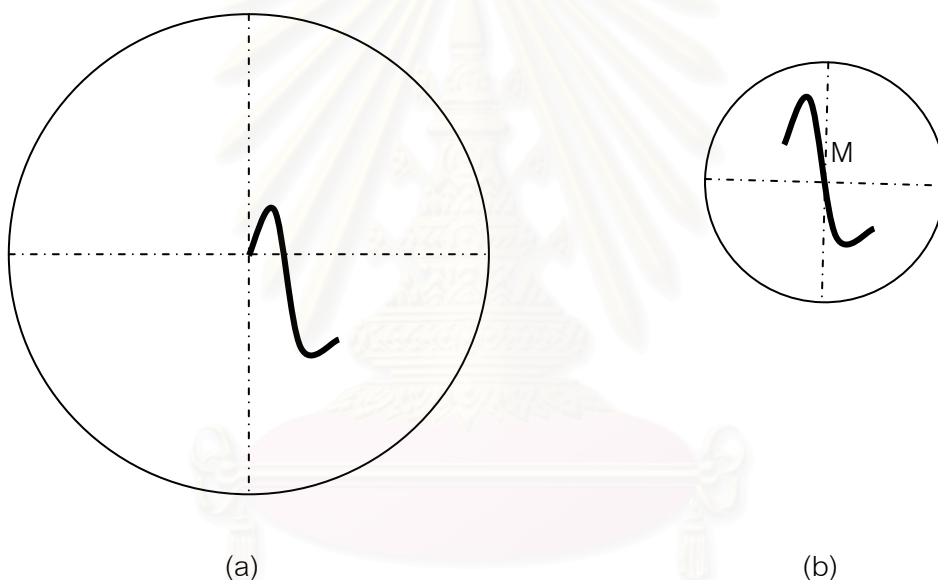
### คำตอบของปัญหาที่ใกล้เคียงกับปัญหา “Moser’s Worm Problem”

สำหรับคำตอบของปัญหาที่ใกล้เคียงที่กล่าวว่า “รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นคือรูปใด” โดยอนุญาตให้เลื้อน และ/หรือหมุน และ/หรือพลิกตัวปิดทับได้นั้น เมื่อพิจารณาตามลักษณะของเส้นโค้ง สามารถแยกออกเป็น 3 กลุ่มตามลักษณะของเส้นโค้ง ดังนี้

- (1) ตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น
- (2) ตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น
- (3) ตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งปิดที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

โดยตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งแต่ละกลุ่มได้นั้นมีรูปร่าง ขนาดของพื้นที่ และขอบเขตของพื้นที่แตกต่างกัน ดังจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

สำหรับพัฒนาการของคำตอบกลุ่มที่(1)ซึ่งพิจารณาตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นนั้น พบว่าตัวปิดทับรูปแรกที่นักคณิตศาสตร์สามารถพิสูจน์ได้ว่าสามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น คือ **“รูปวงกลมที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย”** [4], [5] พื้นที่ประมาณ 3.14 ตารางหน่วย มีวิธีการในการปิดทับคือ วางจุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยให้ตรงกับปลายด้านใดด้านหนึ่งของเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยนั้น (ดังแสดงในรูป 2.1 (a)) ซึ่งเมื่อพิจารณาให้ดีแล้วจะเห็นว่า **“รูปวงกลมที่มีรัศมีครึ่งหน่วย”** [4], [5] ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.78539 ตารางหน่วย ก็สามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นเช่นกัน โดยมีวิธีการปิดทับคือ วางจุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมีครึ่งหน่วยลงบนจุดกึ่งกลาง M ของเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วย (ดังแสดงในรูป 2.1 (b))



รูปที่ 2.1 (a) ตัวอย่างการปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยด้วยวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย

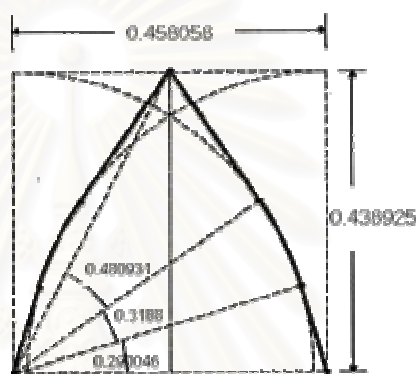
(b) ตัวอย่างการปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยด้วยวงกลมรัศมีครึ่งหน่วย

จากนั้นในปี 1968 Schaer [12] ค้นพบว่า มีเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยที่มีความกว้างได้มากที่สุด(เท่าที่จะเป็นไปได้) คือ มีความกว้างประมาณ 0.43893 หน่วย โดยเส้นโค้งดังกล่าวนี้มีชื่อว่า “The broadworm” เกิดจากการประกอบกันของส่วนของเส้นตรง 4 เส้น และเส้นโค้งอีก 2 เส้น (ลักษณะดังรูปที่ 2.2) ซึ่งจากการค้นพบนี้ทำให้การหาคำตอบของปัญหา “Moser’s Worm



Problem” ได้รับการพัฒนาขึ้นมาอีกระดับหนึ่ง นั่นคือช่วยในการพิจารณาเบื้องต้นสำหรับรูปที่จะนำมาปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วย โดยรูปใดก็ตามที่สามารถปิดทับเส้นโค้ง “The broadworm” ได้จะมีความเป็นไปได้ที่จะเป็นตัวปิดทับของเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ มากกว่ารูปที่ไม่สามารถปิดทับ “The broadworm” ได้ นอกจากนี้ยังช่วยให้เราสามารถบอกได้ว่ารูปที่เป็นเซตคอนเวกซ์ที่จะมาเป็นคำตอบของปัญหานี้จะต้องมีพื้นที่อย่างน้อย

$$\frac{0.43893}{2} \approx 0.21946 \text{ ตารางหน่วย [12], [13]}$$



รูปที่ 2.2[12] เส้นโค้ง “The broadworm”

ต่อมาในปี ค.ศ. 1970 [4], [5], [13] A. Meir สามารถแสดงได้ว่ารูปครึ่งวงกลม รัศมีครึ่งหน่วย ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.3927 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 1971 [4], [5], [13] Wetzel ได้พิสูจน์ว่า เซกเตอร์มุม  $2\theta$  ที่มีรัศมี  $r$  หน่วย โดยที่  $r < \frac{1}{2} \operatorname{cosec}(\theta)$  สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ทั้งนี้เมื่อ

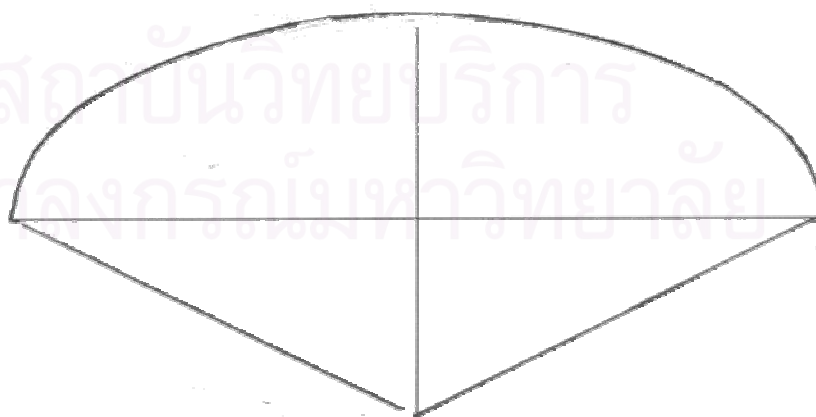
$$\theta \approx 1.16556 \text{ เรเดียน เซกเตอร์จะมีพื้นที่น้อยสุดคือมีพื้นที่น้อยกว่า 0.34501 ตารางหน่วย}$$

นอกจากนี้ยังพบว่าหากเราตัดเล็มบริเวณจุดยอดของเซกเตอร์ซึ่งมีคุณสมบัติข้างต้นออก ให้เหลือรูปซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 2.3 (เส้นทึบ) จะได้ว่าเซกเตอร์ที่ถูกตัดเล็มนี้จะมีพื้นที่น้อยสุดเมื่อ  $\theta \approx 1.14687$  เรเดียน โดยมีพื้นที่น้อยกว่า 0.34423 ตารางหน่วย และยังคงสามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น



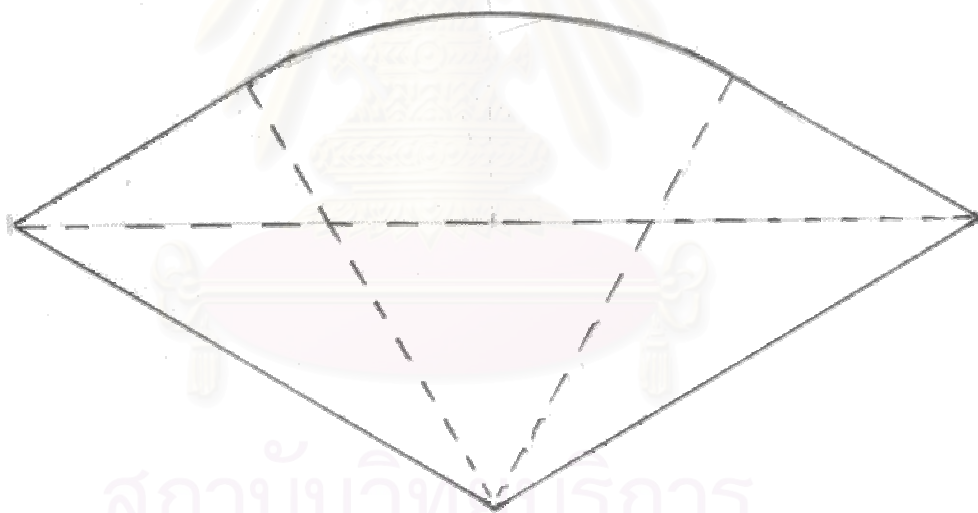
รูปที่ 2.3 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปี ค.ศ. 1971 ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.34423 ตารางหน่วย

ในปี ค.ศ. 1972 [5] Gerriets ได้พิสูจน์ว่า รูปที่เกิดจากการประกอบกันของรูปครึ่งวงรีที่มีแกนเอกยาว 1 หน่วย และแกนโทยาว  $\frac{1}{2}$  หน่วยกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีฐานยาว 1 หน่วย สูง  $\frac{1}{4}$  หน่วย (ลักษณะดังรูปที่ 2.4) มีพื้นที่น้อยกว่า 0.32140 ตารางหน่วยสามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น



รูปที่ 2.4 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปี ค.ศ. 1972 ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.32140 ตารางหน่วย

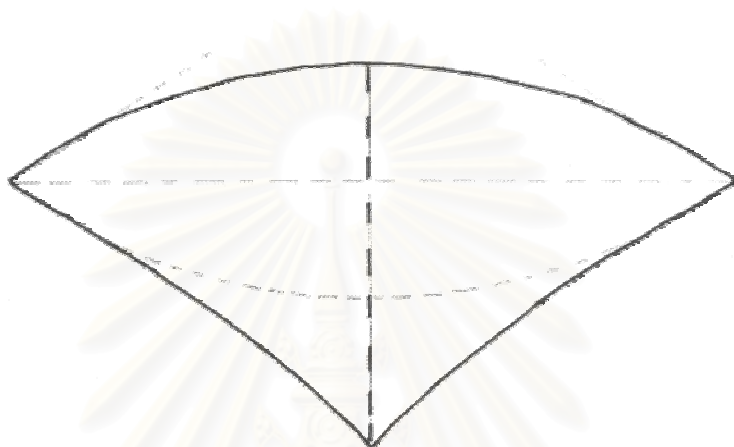
ต่อมา ในปี ค.ศ. 1974 [3], [4] John Gerriets และ George Poole สามารถพิสูจน์ได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีเส้นทแยงมุมหลักยาวหนึ่งหน่วย และเส้นทแยงมุมรองยาว  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  หน่วยซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.28870 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น นอกจากนี้ยังได้เสนอวิธีการพัฒนารูปดังกล่าวให้มีพื้นที่น้อยลงไว้ด้วย ซึ่งจากงานดังกล่าวส่งผลให้ในปี ค.ศ. 1992 [5] Rick Norwood George Poole และ Michale Laidacker พิสูจน์ได้ว่ารูปที่ได้จากการตัดเต็มรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนซึ่งมีเส้นทแยงมุมหลักยาวหนึ่งหน่วย และเส้นทแยงมุมรองยาว  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  หน่วย ให้มีลักษณะดังรูปที่ 2.5 สามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น โดยรูปที่ได้นี้ถือเป็นรูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดยาวนานถึง 10 ปีคือ ในช่วงปี ค.ศ. 1992 - 2002 โดยมีพื้นที่ประมาณ 0.27542 ตารางหน่วย ซึ่งสำหรับวิธีการพิสูจน์ และรายละเอียดต่าง ๆ เกี่ยวกับตัวปิดทับนี้จะกล่าวอย่างละเอียดในบทที่ 3



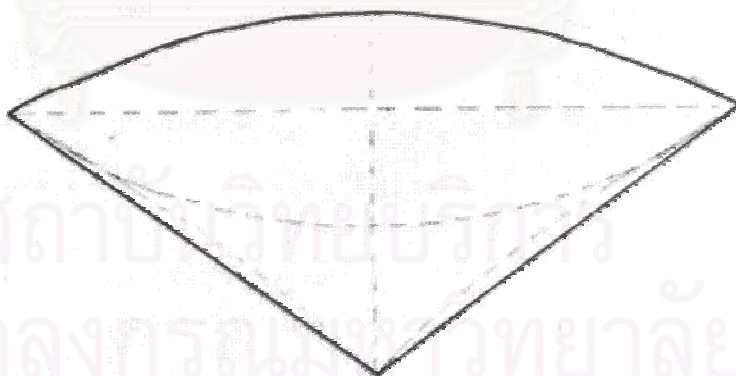
รูปที่ 2.5 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในช่วงปี ค.ศ. 1992 – 2002 ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.27542 ตารางหน่วย

ในปัจจุบันรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีลักษณะเป็นเซตไม่คอนเวกซ์ (ลักษณะดังรูปที่ 2.6) มีพื้นที่ประมาณ 0.26044 ตารางหน่วยถูกค้นพบโดย Rick Norwood และ George Poole [6] ในปี ค.ศ. 2003 นอกจากนี้ทั้งสองท่านยังได้เสนอวิธีการปรับปรุงรูปดังกล่าวให้เป็นเซตคอนเวกซ์และมีพื้นที่น้อยกว่ารูปที่ 2.5 (ลักษณะดังรูปที่

2.7) ไข่อีกด้วย โดยรูปที่ปรับปรุงนี้มีพื้นที่ประมาณ 0.27381 ตารางหน่วย แต่เนื่องจากการพิสูจน์มีลักษณะคล้ายคลึงกับการพิสูจน์ว่า รูปที่ 2.5 สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ดังนั้นเราจะไม่ให้รายละเอียดการพิสูจน์ว่าตัวปิดทับที่มีลักษณะดังรูปที่ 2.6 และ 2.7 สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้สนใจสามารถศึกษาได้จาก [6]

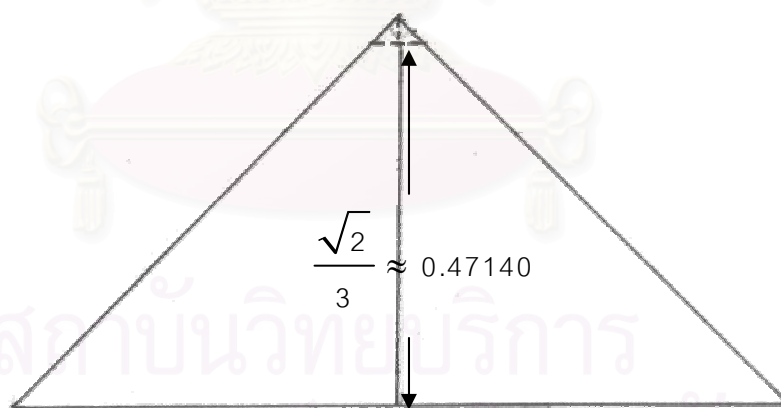


รูปที่ 2.6 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.260473 ตารางหน่วย



รูปที่ 2.7 รูปที่เป็นเซตคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.2738086 ตารางหน่วย

สำหรับพัฒนาการของการหาคำตอบของกลุ่ม(2) ซึ่งพิจารณาตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นนั้น เริ่มในปี ค.ศ.1965 [14] Besicovitch ได้ตั้งข้อสังเกตว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านหนึ่งหน่วย มีพื้นที่  $\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433013$  ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 1970 [9], [12] John E. Wetzel ได้พิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.25 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์อีกว่าหากตัดเต็มบริเวณมุมฉากของรูปดังกล่าวออกด้วยความสูง  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.0286$  หน่วย จะได้รูปใหม่ซึ่งมีความสูง  $\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47140$  และยังคงปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นเช่นเดิม โดยรูปใหม่ที่ได้นี้มีพื้นที่ประมาณ 0.24918 ตารางหน่วย (ลักษณะดังรูปที่ 2.7)



รูปที่ 2.7

จากนั้น Joseph A. Johnson, George D. Poole และ John E. Wetzel [9], [12] ก็พิสูจน์ได้ว่ารูปที่มีพื้นที่น้อยกว่า 0.2465481 ตารางหน่วย (ลักษณะดังรูปที่ 2.8) สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น โดยผลงานดังกล่าวได้รับการตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 2004 ซึ่งเราจะเสนอรายละเอียดเกี่ยวกับการพิสูจน์ต่าง ๆ ในบทที่ 4 ต่อไป

สำหรับรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันมีพื้นที่ประมาณ 0.2464 ตารางหน่วย ถูกค้นพบโดย ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา ในปี ค.ศ.2002 [7], [8] รูปใหม่ที่ได้นี้ได้จากการตัดเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยเช่นกัน ซึ่งขณะนั้นบทความกำลังอยู่ในขั้นตอนการตีพิมพ์เผยแพร่



รูปที่ 2.8[9] รูปที่มีพื้นที่น้อยสุด(เท่าที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่) ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น มีพื้นที่ประมาณ 0.2465481 ตารางหน่วย

สำหรับพัฒนาการของคำตอบของกลุ่มสุดท้ายซึ่งพิจารณาตัวปิดทับที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งปิดความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น เริ่มขึ้นในปี ค.ศ. 1970 [12] จากผลงานของ Eggleston และ John E. Wetzel ซึ่งทำให้สามารถสรุปได้ว่า “รูปสามเหลี่ยมใดก็ตามจะสามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งปิดความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ก็ต่อเมื่อ สามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมแนบในวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวหนึ่งหน่วย” โดยสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่น้อยที่สุด

ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งปิดได้ทุกเส้นคือ สามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน  $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$  หน่วย มี

พื้นที่ประมาณ 0.13162 ตารางหน่วย จากนั้นในปี ค.ศ. 1972 [12] Schaer และ Wetzel ก็พิสูจน์ได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งปิดความยาวหนึ่ง

หน่วยได้ทุกเส้นคือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้าง  $\frac{1}{\pi}$  หน่วย และความยาว  $\frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{2\pi}$

หน่วย ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.12274 ตารางหน่วย ซึ่งจากผลงานดังกล่าวส่งผลให้ในปี ค.ศ. 1973 [12] สามารถสรุปขอบเขตของพื้นที่  $\mu$  ตารางหน่วยได้ว่า  $0.09633 \leq \mu \leq 0.12274$  เมื่อ  $\mu$  เป็นขนาดของพื้นที่ของรูปที่เป็นเซตคอนเวกซ์ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งปิดที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้

ทุกเส้น หลังจากนั้น Füredi และ Wetzel [15] ก็สามารถปรับปรุงขอบเขตของพื้นที่  $\mu$  ตารางหน่วยให้แคบลงได้ โดยขอบเขตใหม่ที่ได้นี้ คือ  $0.09667 \leq \mu \leq 0.12254$

จากที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น จะเห็นว่าปัญหา “Moser's Worm Problem” นับเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่องจากนักคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก ซึ่งการพยายามค้นหาคำตอบของนักคณิตศาสตร์ทั้งหลายก่อให้เกิดข้อคาดการณ์ที่น่าสนใจขึ้นมาหลาย โดยข้อคาดการณ์ที่ได้รับความสนใจและเชื่อกันว่าน่าจะเป็นจริงจะได้รวบรวมไว้ในบทที่ 5 ของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ในปัจจุบันพบว่าคำตอบของปัญหา “Moser's Worm Problem” นี้ มีความก้าวหน้าบางประการเกิดขึ้น นั่นคือในปี ค.ศ. 2003 John E. Wetzel [10] พิสูจน์ได้ว่าสามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยที่มีลักษณะ 2 ท่อนด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย มีพื้นที่ประมาณ 0.26175 ตารางหน่วยซึ่งน้อยกว่ารูปคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบัน นอกจากนี้ Patrick Coulton [11] สามารถพิสูจน์ได้ว่า เซกเตอร์ดังกล่าวสามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยแบบคอนเวกซ์ 3 ท่อนได้ แต่ในกรณีของเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยแบบซิกแซก 3 ท่อนยังไม่เป็นผลสำเร็จ ซึ่งเราจะนำเสนอรายละเอียดในส่วนนี้ในบทที่ 6 ต่อไป

ในลำดับต่อไปเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ตรงกันสำหรับผู้ที่ต้องการจะศึกษาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะเสนอบทนิยาม ทฤษฎีบท และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตที่จำเป็นต้องใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

### บทนิยาม 2.1

เซต  $C$  ของจุดหรือเวกเตอร์ใด ๆ จะเรียกว่าเซตคอนเวกซ์ (convex set) ถ้าทุก ๆ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง 2 จุดใด ๆ ในเซตยังคงอยู่ในเซต หรือ อาจกล่าวได้ว่า  $C$  จะเป็นเซตคอนเวกซ์ (convex set) ก็ต่อเมื่อ

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in C \text{ และ } 0 \leq \alpha \leq 1$$

ถ้า  $A$  เป็นเซตของจุดหรือเวกเตอร์ใด ๆ จะเรียก  $C$  ว่า คอนเวกซ์ฮัลล์ของ

$A$  (convex hull of  $A$ ) ใช้สัญลักษณ์  $\text{conv}(A)$  ก็ต่อเมื่อ  $C$  เป็นเซต

คอนเวกซ์ (convex set) ที่มีขนาดเล็กที่สุดซึ่ง  $A \subseteq C$

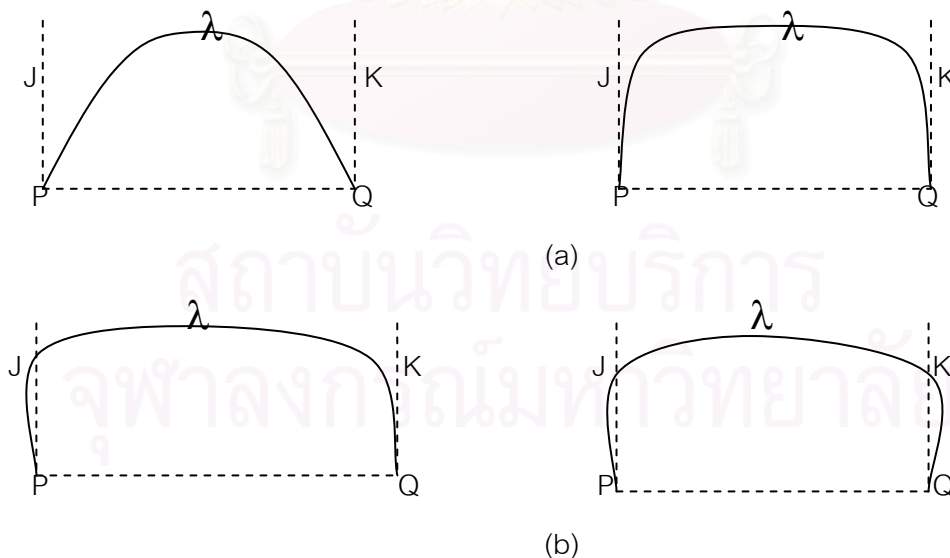
### บทนิยาม 2.2

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง จุด  $A$  และ  $B$  คือ

$$\{x \mid x = \alpha A + (1 - \alpha)B \text{ เมื่อ } 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

เราใช้สัญลักษณ์  $AB$  แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด  $A$  และจุด  $B$

- บทนิยาม 2.3** ถ้า  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}^2$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจะเรียก  $\lambda$  ว่า เส้นโค้ง (arc) และจะใช้สัญลักษณ์  $\ell(\lambda)$  แทนความยาวของเส้นโค้ง  $\lambda$  ซึ่งหาก  $\ell(\lambda) = 1$  เราจะเรียก  $\lambda$  ว่าเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วย (unit arc) โดยในทางปฏิบัติเมื่อเรากล่าวถึงเส้นโค้ง  $\lambda$  เราจะหมายถึง  $\lambda([0, 1])$
- บทนิยาม 2.4** เราจะเรียกเส้นโค้ง  $\lambda$  ว่า เส้นโค้งคอนเวกซ์ (convex arc) ถ้า  $\lambda$  อยู่บนขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์ของ  $\lambda$  ( $\text{conv}(\lambda)$ )
- บทนิยาม 2.5** ถ้าจุดปลายทั้งสองของเส้นโค้ง  $\lambda$  เป็นจุดเดียวกัน เราจะเรียก  $\lambda$  ว่า เส้นโค้งปิด (closed arc)
- บทนิยาม 2.6** เราจะเรียกเส้นโค้ง  $\lambda$  ว่า เส้นโค้งเดรป (drape) ถ้า  $\lambda$  เป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่ไม่ใช่เส้นโค้งปิด นั่นคือมีจุดปลาย  $P$  และ  $Q$  ซึ่ง  $P \neq Q$  โดยเมื่อลากเส้นตรง  $J, K$  ให้ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง  $PQ$  ที่จุดปลาย  $P$  และ  $Q$  ตามลำดับแล้วไม่มีส่วนของ  $\lambda$  ตัดกับเส้นตั้งฉากทั้งสองนั้น (ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.5)



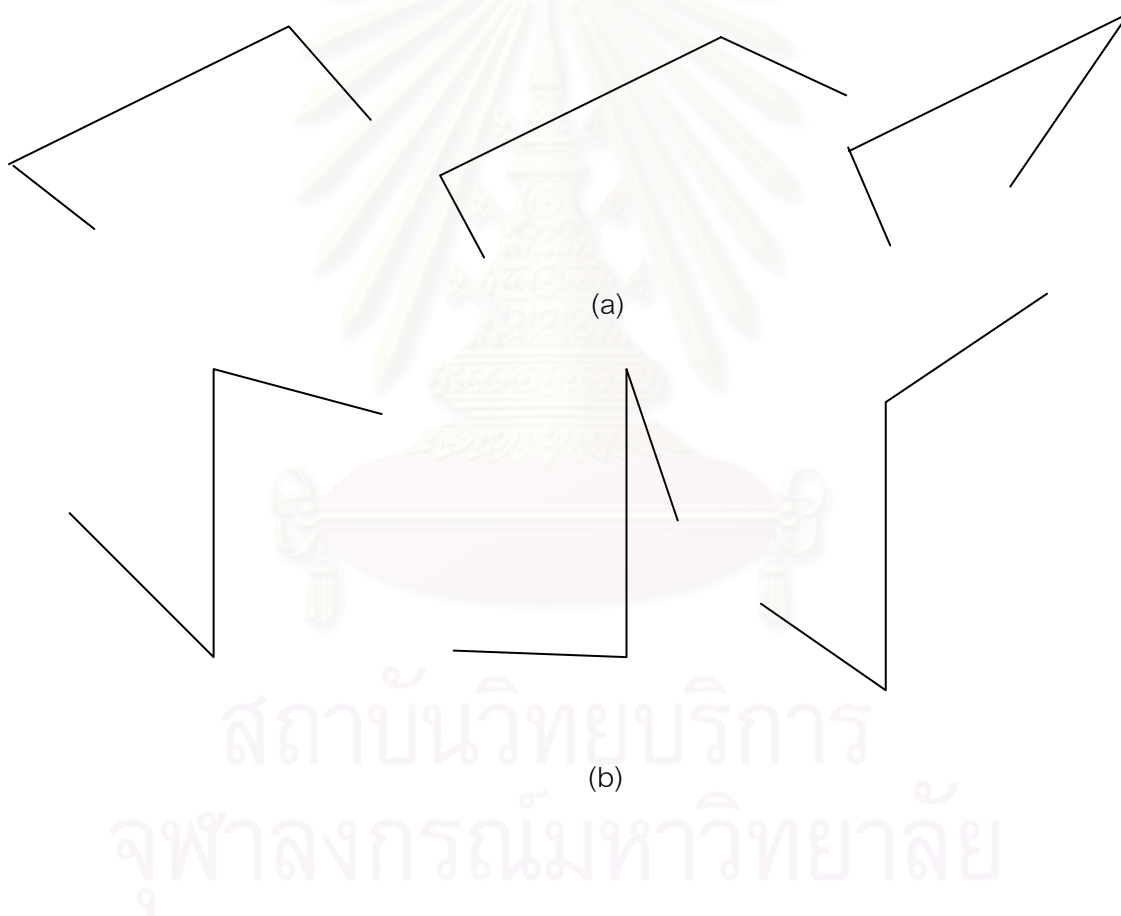
รูปที่ 2.5 (a) ตัวอย่างของเส้นโค้งที่เป็นเส้นโค้งเดรป (drape)

(b) ตัวอย่างของเส้นโค้งที่ไม่ใช่เส้นโค้งเดรป (drape)



**บทนิยาม 2.7**

เราจะเรียกเส้นโค้ง  $\lambda$  ว่า เส้นโค้ง 2 ท่อน ถ้า  $\lambda$  เกิดจากส่วนของเส้นตรง 2 เส้นมาต่อกัน และจะเรียกเส้นโค้ง  $\lambda$  ว่า เส้นโค้ง  $n$  ท่อน ถ้า  $\lambda$  เกิดจากส่วนของเส้นตรง  $n$  เส้นมาต่อกัน โดยจะเรียก  $\lambda$  ว่า เส้นโค้ง 3 ท่อนที่คอนเวกซ์ ถ้า  $\lambda$  เป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์และเป็นเส้นโค้ง 3 ท่อน (ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.6(a)) และจะเรียก  $\lambda$  ว่า เส้นโค้งซิกแซก ถ้า  $\lambda$  เป็นเส้นโค้ง 3 ท่อนที่ไม่คอนเวกซ์ (ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.6(b))



รูปที่ 2.6 (a) เส้นโค้ง 3 - ท่อนที่คอนเวกซ์

(b) เส้นโค้งที่เป็นเส้นโค้งซิกแซก

**บทนิยาม 2.8** จะเรียกเซตของจุดใด ๆ ในระนาบ  $C$  ว่าเป็น “ตัวปิดทับ” (covers) ของเส้นโค้ง  $\lambda$  ถ้า  $\lambda \subseteq C$  และหาก  $C$  เป็นเซตคอนเวกซ์ จะเรียก  $C$  ว่า ตัวปิดทับที่คอนเวกซ์ และหาก  $C$  ไม่ใช่เซตคอนเวกซ์ จะเรียก  $C$  ว่า ตัวปิดทับที่ไม่คอนเวกซ์

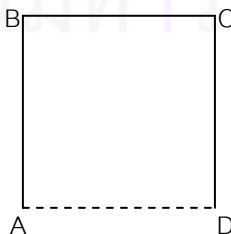
**ทฤษฎีบท 2.9[16]** สำหรับแต่ละเส้นโค้งปิด  $\lambda$  ถ้า  $l(\lambda) = L$  จะได้ว่า  $l(\text{conv}(\lambda)) \leq L$

**บทนิยามที่ 2.10** เส้นโค้ง “The Besicovitch Z” คือเส้นโค้ง 3 ท่อน ABCD (ลักษณะดังรูปที่ 2.8) โดยมี  $AB = BC = CD = \sqrt{\frac{3}{28}}$  หน่วย มีด้าน AB ขนานกับด้าน CD และ  $\angle CAB = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{28}}) \approx 10.9^\circ$



รูปที่ 2.8 เส้นโค้ง “The Besicovitch Z”

**บทนิยามที่ 2.11** เส้นโค้งสเตเปิล (staple) คือ เส้นโค้งคอนเวกซ์ 3 ท่อน ABCD (ลักษณะดังรูปที่ 2.9) ที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวด้าน  $\frac{1}{3}$  หน่วย



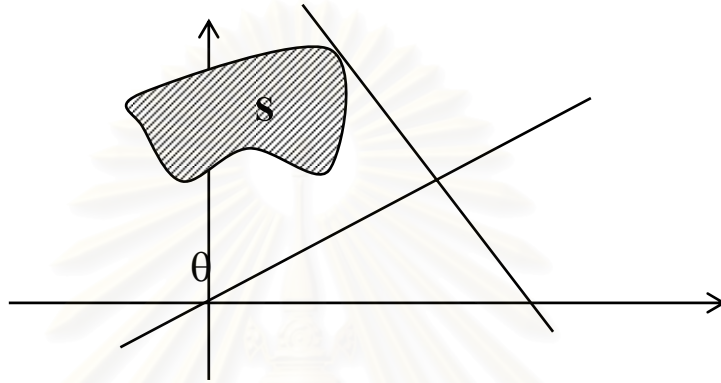
รูปที่ 2.9 เส้นโค้งสเตเปิล (staple)

บทนิยามที่ 2.12

เส้นค้ำจุน (Support line) ของเซต  $S$  จากทิศทาง  $\theta$  หมายถึง เส้นตรงที่ทำ

มุม  $\theta + \frac{\pi}{3}$  และสัมผัสกับเซต  $S$  หลังจากเลื่อนเข้ามาจากทิศทาง  $\theta$

(ลักษณะดังรูปที่ 2.10)



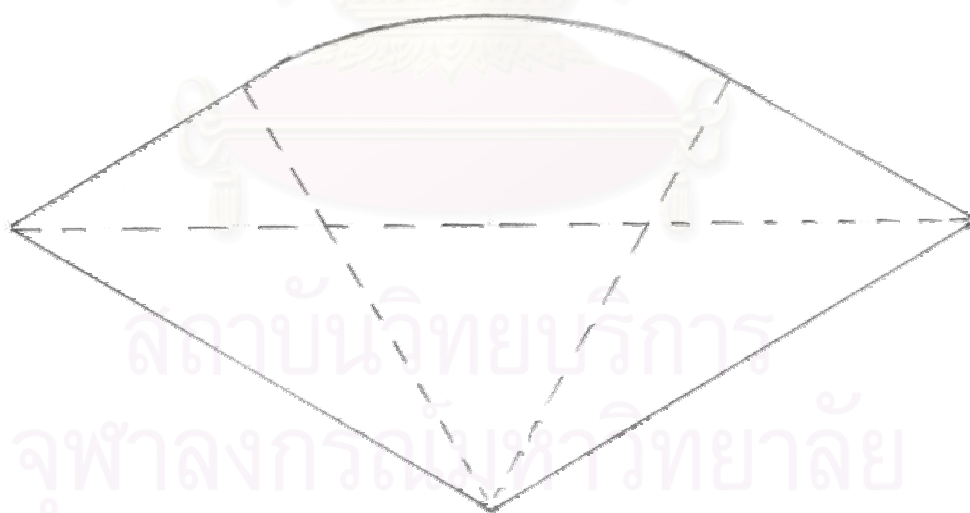
รูปที่ 2.10 แสดงเส้นค้ำจุนของเซต  $S$  จากทิศทาง  $\theta$

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### บทที่ 3

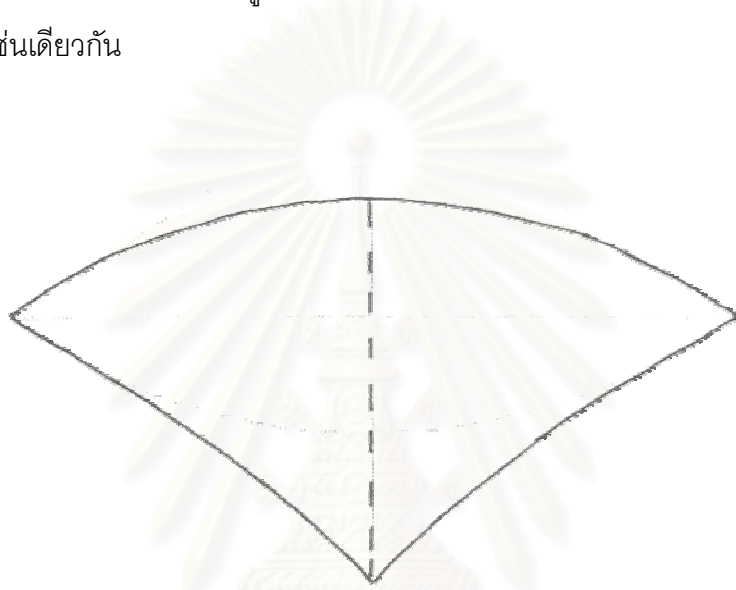
## รูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดที่สามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาการพิสูจน์ว่า รูปที่มีพื้นที่น้อยที่สุดในช่วงปี ค.ศ. 1992 – 2002 สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น โดยในทฤษฎีบทที่ 3.1 จะเป็นการเสนอผลงานของ John Gerriets และ George Poole [3],[4] ที่ได้พิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีเส้นทแยงมุมหลักยาว 1 หน่วย และเส้นทแยงมุมรองยาว  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  หน่วย ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.288675 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น จากนั้นในทฤษฎีบทที่ 3.2 จะเป็นการแสดงว่ารูปดังกล่าวสามารถตัดเติมให้มีพื้นที่ลดลง โดยมีพื้นที่น้อยกว่า 0.28610 ตารางหน่วย และยังคงสามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น โดยในส่วนของท้ายของบทจะเป็นการศึกษาผลงานของ Rick Norwood, George Poole และ Michale Laidacker [5] ที่แสดงให้เห็นว่ารูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในช่วงปี ค.ศ. 1992 – 2002 (ดังรูปที่ 3.1) ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.27524 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

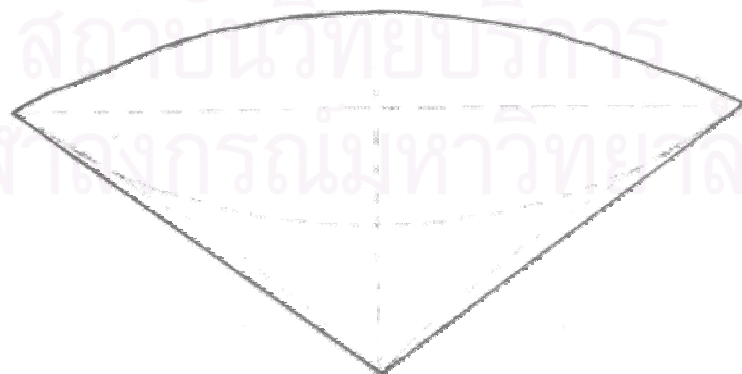


รูปที่ 3.1 รูปคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยสุดในช่วงปี ค.ศ. 1992 – 2002 ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

สำหรับรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วย ได้ทุกเส้นมีลักษณะดังรูปที่ 3.2 มีพื้นที่ประมาณ 0.26044 ตารางหน่วย ซึ่ง Rick Norwood และ George Poole [6] เป็นผู้ค้นพบในปี ค.ศ. 2003 โดยมีวิธีในการพิสูจน์คล้ายคลึงกับการพิสูจน์ว่า รูป 3.1 สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น และหากพิจารณาเฉพาะตัวปิดทับที่มีลักษณะเป็นเซตคอนเวกซ์ รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันจะมีลักษณะดังรูปที่ 3.3 มีพื้นที่ประมาณ 0.27381 ตารางหน่วย ถูกค้นพบในปี ค.ศ. 2003 โดย Rick Norwood และ George Poole [6] เช่นเดียวกัน



รูปที่ 3.2 รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบัน (ไม่คอนเวกซ์) ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

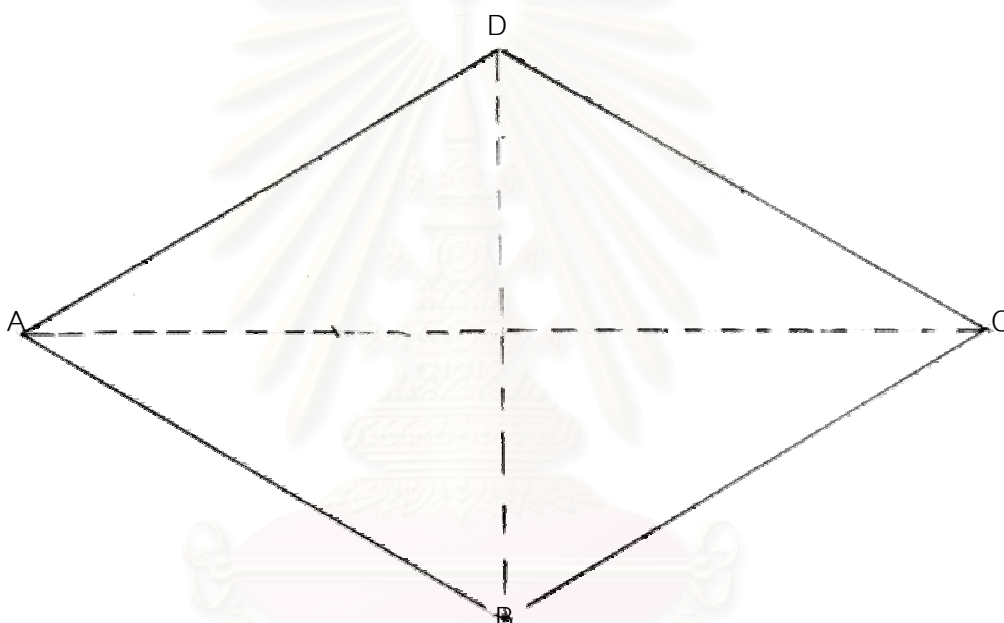


รูปที่ 3.3 รูปคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่สามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

และเพื่อความเข้าใจที่ตรงกันผู้จัดทำขอกำหนดสัญลักษณ์ที่จะใช้ในบทที่ 3 ดังต่อไปนี้

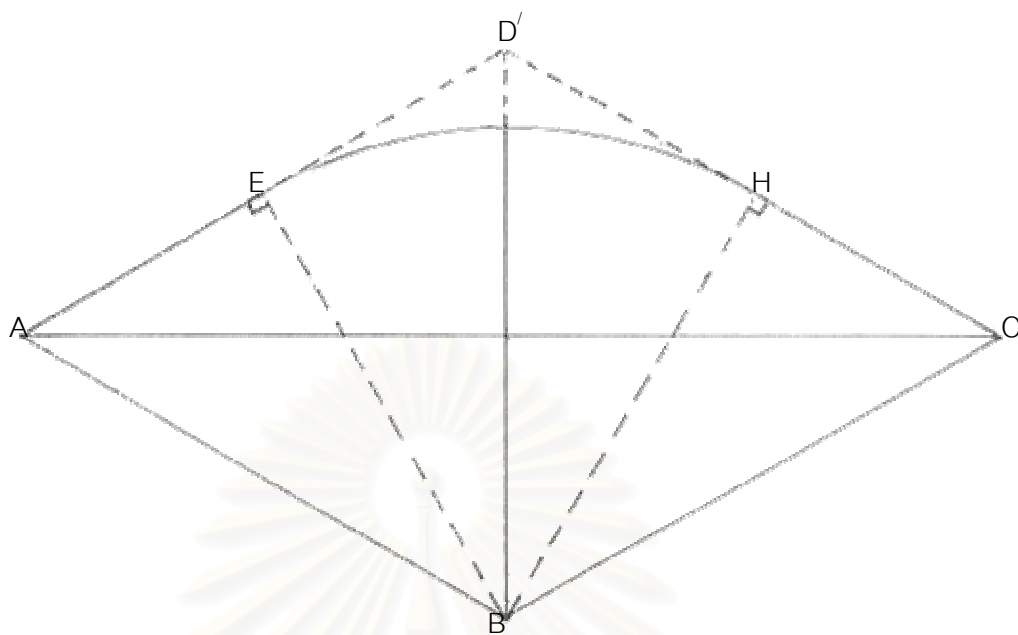
กำหนดให้  $\Lambda$  เป็นเซตของเป็นเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยทั้งหมด

$\Omega$  แทนรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ABCD ที่เกิดจากการประกอบกันของสามเหลี่ยมด้านเท่า ABD และ DBC ที่มีความยาวด้าน  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  หน่วย ลักษณะดังรูปที่ 3.4 โดยรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่เกิดขึ้นนี้มีเส้นทแยงมุมหลัก AC ยาว 1 หน่วยและเส้นทแยงมุมรอง BD ยาว  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  หน่วย โดย  $\angle ADC = \angle ABC = 120^\circ$  และ  $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$



รูปที่ 3.4 แสดงรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ABCD หรือ  $\Omega$

$\Omega'$  แทนรูป ABCHE ซึ่งเกิดจากการตัดเติมรูป  $\Omega$  โดย  $\Omega'$  เป็นการประกอบกันของรูปสามเหลี่ยม ABE และ CBH ที่มีมุมภายใน  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  และ  $90^\circ$  มีความสูง  $\frac{1}{2}$  หน่วย และเซกเตอร์ EBH ที่มีมุมยอด  $60^\circ$  องศาและมีรัศมี  $\frac{1}{2}$  หน่วย ลักษณะดังแสดงในรูปที่ 3.5 โดย  $\Omega'$  เป็นรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในช่วงปี ค.ศ. 1992 - 2002

รูปที่ 3.5 แสดงรูป ABCHE หรือ  $\Omega'$ 

ทฤษฎีบทที่ 3.1 แต่ละ  $\alpha \in \Lambda$  สามารถปิดทับได้ด้วย  $\Omega$

#### บทพิสูจน์

กำหนดให้  $\alpha \in \Lambda$  และ  $O$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\alpha$

วาง  $\alpha$  บน  $\Omega$  โดยให้จุด  $O$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $BD$  ของ  $\Omega$  จากนั้นเลื่อนและหมุน  $\alpha$  ตามแนวของ  $BD$  จนกระทั่ง  $\alpha$  สัมผัสกับแขนของมุม  $ABC$  ของ  $\Omega$

ให้  $\beta$  และ  $\gamma$  เป็นเส้นโค้งย่อยของ  $\alpha$  ที่เกิดจากการแบ่ง  $\alpha$  ด้วยจุด  $O$  ดังนั้นทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  มีความยาว  $\frac{1}{2}$  หน่วย

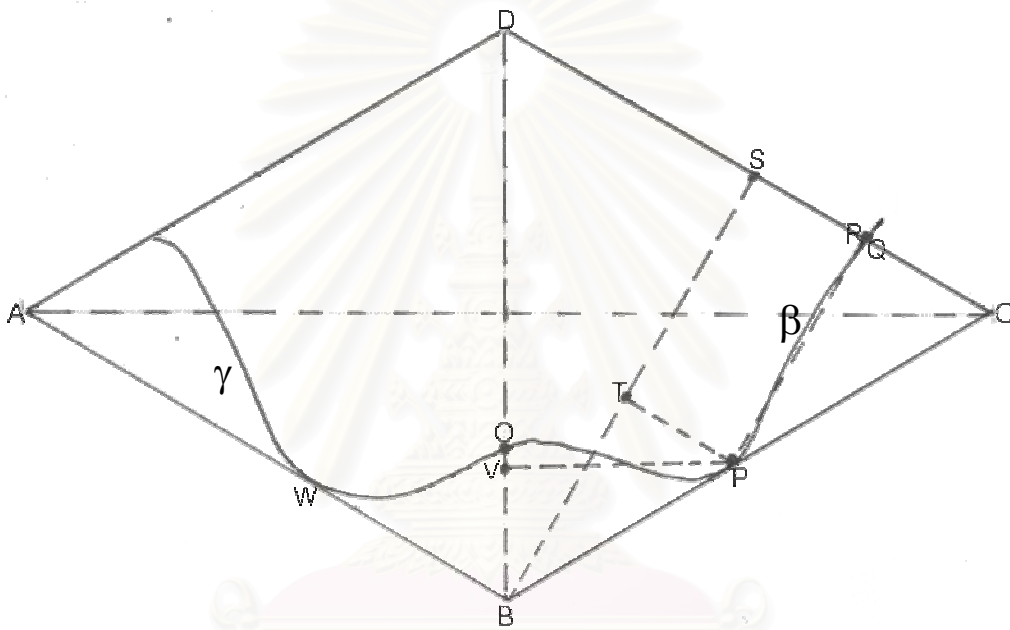
จะแสดงว่า  $\Omega$  ปิดทับ  $\alpha$  ได้ (โดยจะแสดงว่าไม่มีส่วนของ  $\alpha$  อยู่นอกบริเวณของ  $\Omega$  หรือ อีกนัยหนึ่งคือไม่มีส่วนของ  $\alpha$  ตัดกับแขนของมุม  $ADC$  ของ  $\Omega$  ซึ่งการพิสูจน์จะทำโดยวิธีขัดแย้ง)

**กรณีที่ 1** สมมุติมีการหมุนของ  $\alpha$  บน BD รอบจุด O ซึ่งทำให้ทั้ง  $\gamma$  และ  $\beta$  ตัดกับ  
 แขนงของมุม ABC ที่จุด W และจุด P ตามลำดับ

จะแสดงว่า ไม่มีส่วนของ  $\alpha$  ตัดกับแขนของมุม ADC

พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\beta$  ของ  $\alpha$  สมมุติ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม ADC ที่จุด Q

ถ้า P อยู่ระหว่าง O และ Q สร้าง PR และ BS ตั้งฉากกับ DC ที่จุด R และ S ตามลำดับ  
 จากนั้น สร้าง PV ตั้งฉากกับ BD ที่จุด V และ PT ตั้งฉากกับ BS ที่จุด T (ดังแสดงในรูป 3.6)

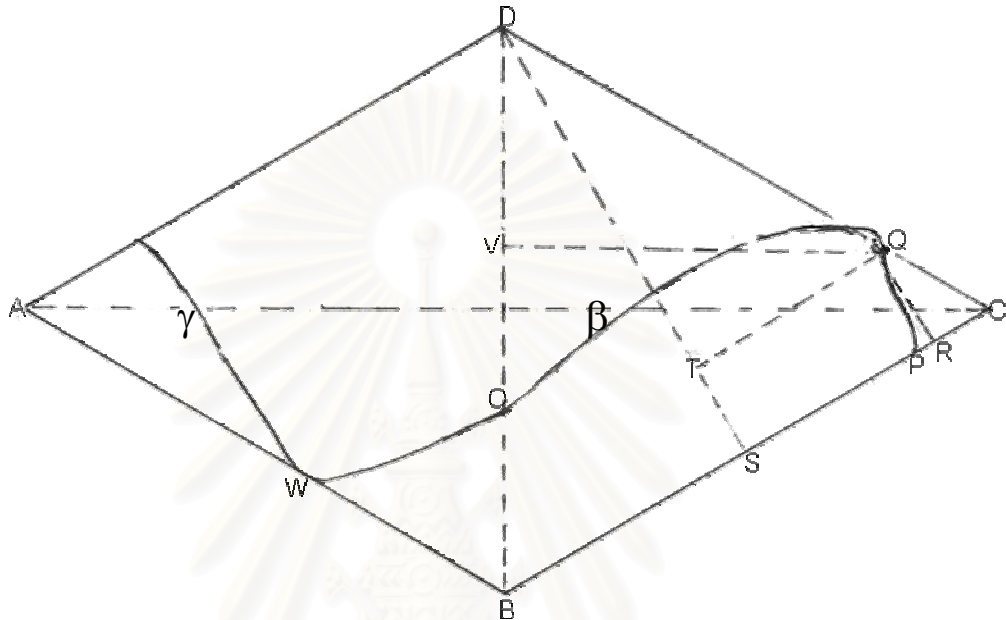


รูปที่ 3.6

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า } \beta &> l(OP) + l(PQ) \\
 &\geq OP + PQ \\
 &\geq VP + PR \text{ (ระยะตั้งฉากมีความยาวน้อยสุด)} \\
 &= BT + TS \text{ (เพราะว่า } \triangle VPB \cong \triangle TBP \text{ และ } TS = PR) \\
 &= BS \\
 &= \frac{1}{2} \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}
 \end{aligned}$$



ถ้า Q อยู่ระหว่าง O และ P สร้าง QR และ DS ตั้งฉากกับ BC ที่จุด R และ S ตามลำดับ จากนั้นสร้าง QV ตั้งฉากกับ BD ที่จุด V และ QT ตั้งฉากกับ DS ที่จุด T (ดังแสดงในรูป 3.7)



รูปที่ 3.7

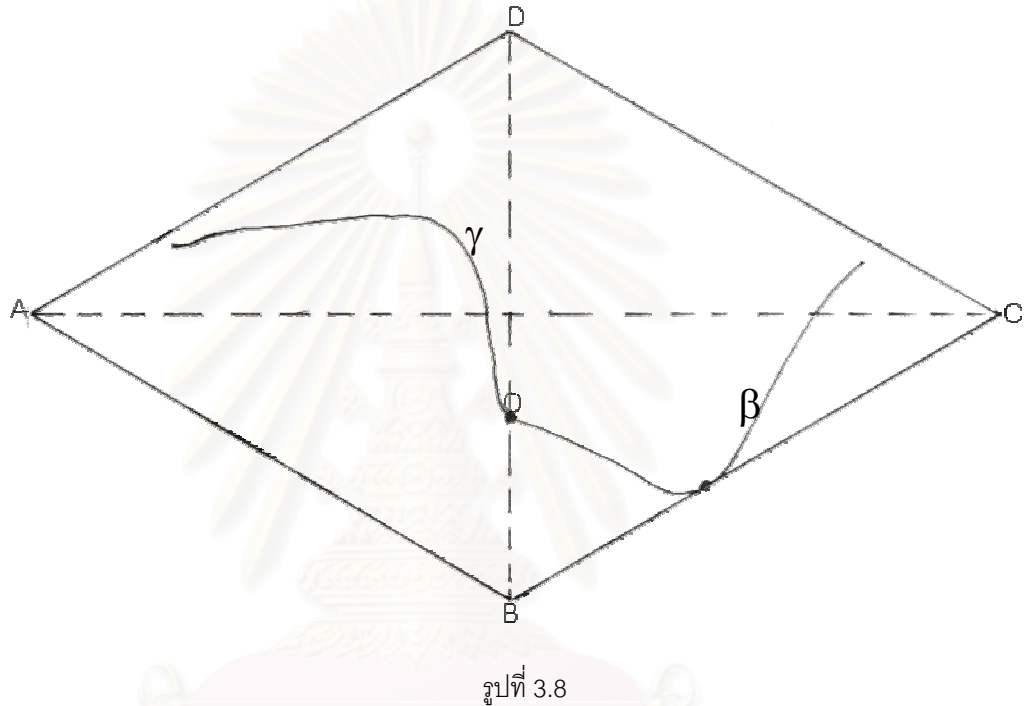
$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า } \beta &= l(OQ) + l(QP) \\
 &> OQ + QP \\
 &\geq VQ + QR \text{ (ระยะตั้งฉากมีความยาวน้อยสุด)} \\
 &= DT + TS \text{ (เพราะว่า } \triangle DQV \cong \triangle QDT \text{ และ } TS = QR.) \\
 &= DS \\
 &= \frac{1}{2} \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า ไม่มีส่วนใดของ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม ADC

พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\gamma$  ของ  $\alpha$  โดยวิธีการพิสูจน์เช่นเดียวกับกรณีที่พิจารณา  $\beta$  จะได้ว่า ไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม ADC

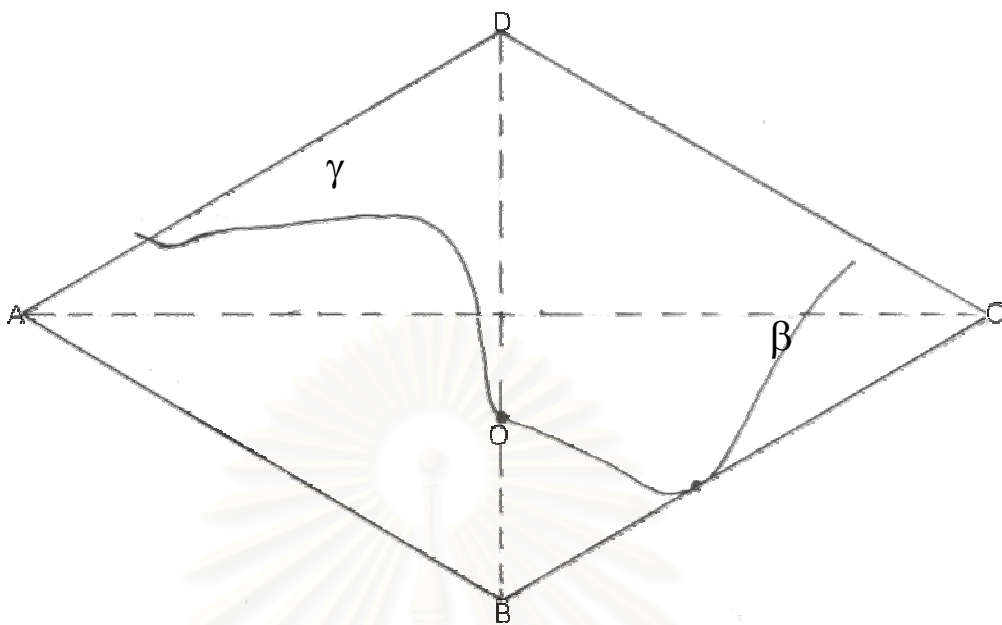
ดังนั้นสรุปได้ว่า ถ้ามีการหมุนซึ่งทำให้ทั้ง  $\gamma$  และ  $\beta$  แตะกับแขนของมุม ABC แล้ว  $\alpha$  จะถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega$

**กรณีที 2** สมมติว่าการหมุนใด ๆ ของ  $\alpha$  บน BD รอบจุด O ทำให้  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) ตัดกับ  
 แขนของมุม ABC แต่ไม่มีส่วนของ  $\gamma$  (หรือ  $\beta$ ) ตัดกับแขนของมุม ABC เนื่องจาก BD เป็น  
 แกนสมมาตรของ  $\Omega$  โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม ABC แต่ไม่มีส่วนใด  
 ของ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม ABC (ลักษณะดังรูปที่ 3.8)



พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\beta$  ของ  $\alpha$  โดยการพิสูจน์เช่นเดียวกับในกรณีที่ 1 จะได้ว่าไม่มี  
 ส่วนใดของ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม ADC

พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\gamma$  ของ  $\alpha$  สมมติ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม ADC (ดังแสดงในรูปที่ 3.9)



รูปที่ 3.9

พิจารณาลำดับการแตะระหว่าง  $\gamma$  และ  $\beta$  กับแกนของมุม ABC

เนื่องจาก AC เป็นแกนสมมาตรของรูป  $\Omega$  จะได้ว่า มีการหมุนและเลื่อนซึ่งทำให้  $\gamma$  แตะกับแกนของมุม ABC ก่อนที่  $\beta$  จะแตะ แต่เนื่องจากที่สมมุติให้  $\beta$  แตะแกนของมุม ABC ประกอบกับการหมุนและเลื่อนเป็นการกระทำที่ต่อเนื่อง ดังนั้นหากเราหมุนและเลื่อน  $\Omega$  ไปเรื่อย ๆ จะพบว่า เป็นไปไม่ได้ที่เราจะหมุนและเลื่อนให้แกนของมุม ABC แตะกับ  $\gamma$  โดยไม่ผ่านการแตะกับแกนของมุม ABC พร้อมกันของ  $\gamma$  และ  $\beta$  นั่นคือ ก่อนที่จะมีการหมุนและเลื่อนให้  $\gamma$  แตะกับแกนของมุม ABC นั้น จะมีการหมุนและเลื่อนแบบหนึ่งที่ทำให้ทั้ง  $\gamma$  และ  $\beta$  แตะกับแกนของมุม ABC พร้อมกันได้ (จุดแตะอาจไม่ใช่จุดเดิม) ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมุติ

ดังนั้น ไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  ตัดกับแกนของมุม ADC

สรุปได้ว่า ถ้าการหมุนใด ๆ ของ  $\alpha$  บน BD รอบจุด O ทำให้  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) แตะกับแกนของมุม ABC แต่ไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  (หรือ  $\beta$ ) แตะกับแกนของมุม ABC แล้ว  $\alpha$  จะถูกปิดทับด้วย  $\Omega$

จากทั้งสองกรณีได้ว่า  $\Omega$  สามารถปิดทับทุก ๆ  $\alpha \in \Lambda$

□

**ทฤษฎีบทที่ 3.2**  $\Omega$  สามารถถูกตัดเต็มให้มีพื้นที่น้อยกว่า 0.28610 ตารางหน่วย และยังคงปิดทับทุก ๆ  $\alpha \in \Lambda$  ได้

**บทพิสูจน์**

สร้าง EH และ FG ตั้งฉากกับ BD ที่จุด R และ S ตามลำดับ ซึ่งทำให้

$$DR = SB = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)}{2} \approx 0.07735 \text{ หน่วย} \quad RS = \frac{1}{2} \text{ หน่วย} \text{ และพื้นที่ของ}$$

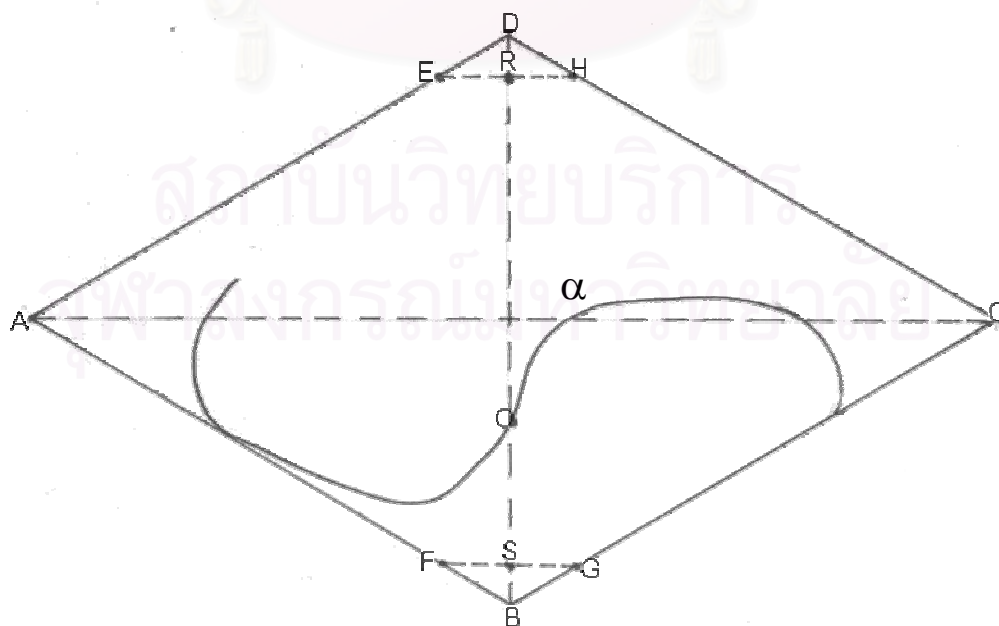
$$\triangle DEH = \triangle BFG = 0.00259081 \text{ ตารางหน่วย}$$

กำหนดให้  $\alpha \in \Lambda$  และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\alpha$  พิจารณาการวาง  $\alpha$  ใน  $\Omega$  เช่นเดียวกับในทฤษฎีบทที่ 3.1 นั่นคือ วาง  $\alpha$  บน  $\Omega$  โดยให้จุด O อยู่บนส่วนของเส้นตรง BD ของ  $\Omega$  จากนั้นเลื่อนและหมุน  $\alpha$  ตามแนวของ BD จนกระทั่ง  $\alpha$  สัมผัสกับแขนของมุม ABC ของ  $\Omega$

ให้  $\beta$  และ  $\gamma$  เป็นเส้นโค้งย่อยของ  $\alpha$  ที่เกิดจากการแบ่ง  $\alpha$  ด้วยจุด O ดังนั้นทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  มีความยาว  $\frac{1}{2}$  หน่วย

จากทฤษฎีบทที่ 3.1 จะได้ว่า  $\alpha \in \Omega$  พิจารณาตำแหน่งของ  $\alpha$  ใน  $\Omega$  ดังนี้

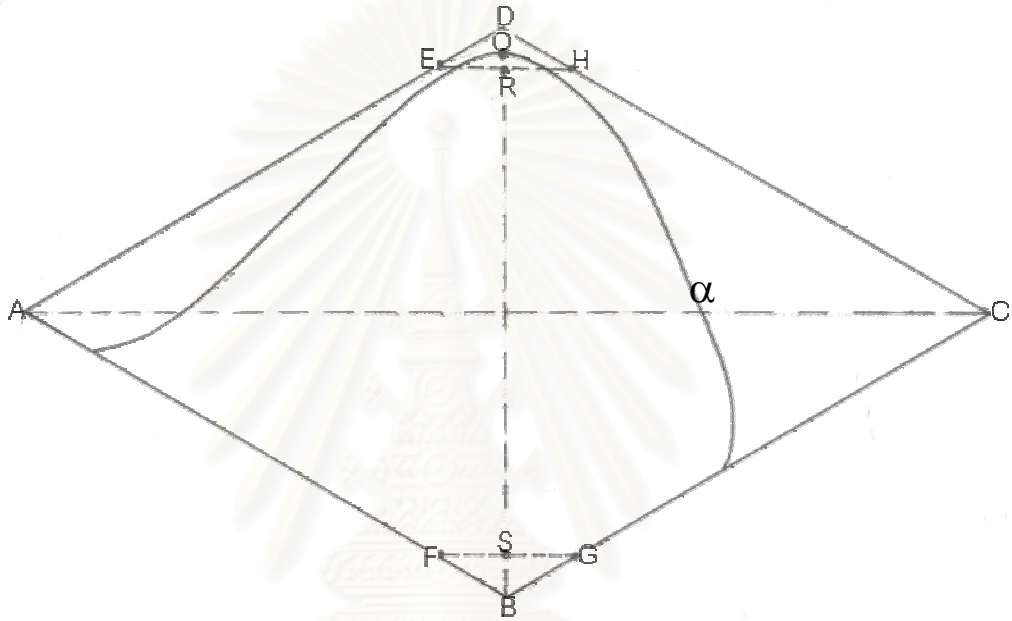
**กรณีที่ 1** ไม่มีส่วนใดของ  $\alpha$  อยู่ในบริเวณของ  $\triangle DEH$  และ  $\triangle BFG$  ของ  $\Omega$  จะได้ว่าเราสามารถตัดเต็มทั้งบริเวณ  $\triangle BFG$  และ  $\triangle DEH$  ของ  $\Omega$  ออกได้ (ดังแสดงในรูปที่ 3.10) ทำให้บริเวณที่เหลือมีพื้นที่ประมาณ 0.28349338 ตารางหน่วย และยังคงสามารถปิดทับ  $\alpha$  ได้



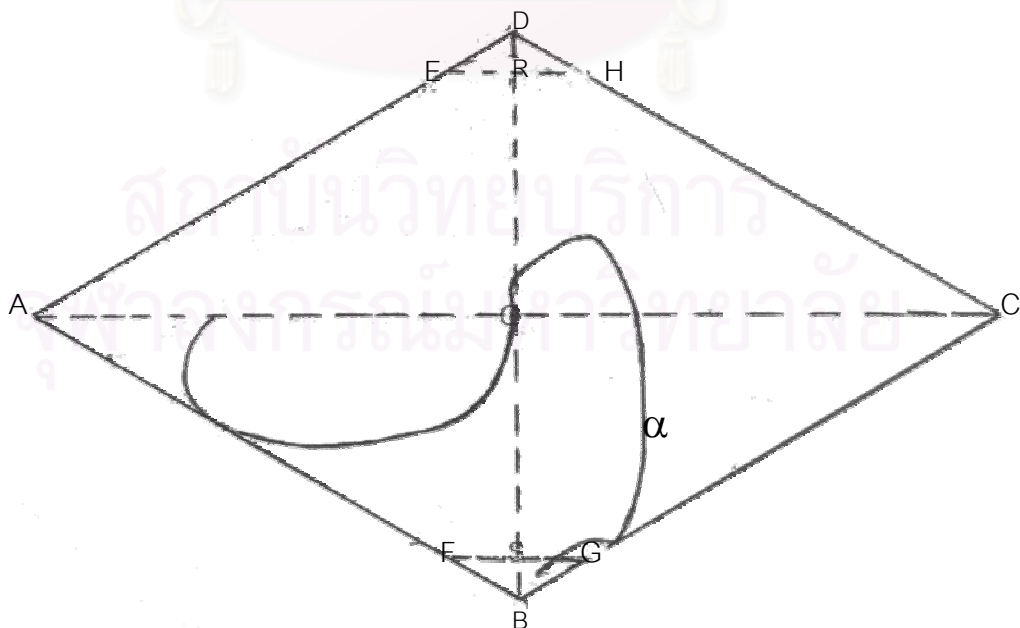
รูปที่ 3.10

**กรณีที่ 2** มีบางส่วนของ  $\alpha$  อยู่ในบริเวณของ  $\triangle DEH$  หรือ  $\triangle BFG$  ของ  $\Omega$

**กรณีที่ 2.1**  $\alpha$  อยู่ในบริเวณของ  $\triangle DEH$  (หรือ  $\triangle BFG$ ) แต่ไม่มีส่วนใดของ  $\alpha$  อยู่ในบริเวณ  $\triangle BFG$  (หรือ  $\triangle DEH$ ) ดังตัวอย่างเส้นโค้งในรูปที่ 3.11 (หรือ เส้นโค้งในรูปที่ 3.12) จะได้ว่าเราสามารถตัดเติม บริเวณ  $\triangle BFG$  (หรือ  $\triangle DEH$ ) ของ  $\Omega$  ออกได้ ซึ่งทำให้บริเวณที่เหลือมีพื้นที่ประมาณ 0.28608419 ตารางหน่วย และยังคงสามารถปิดทับ  $\alpha$  ได้



รูปที่ 3.11

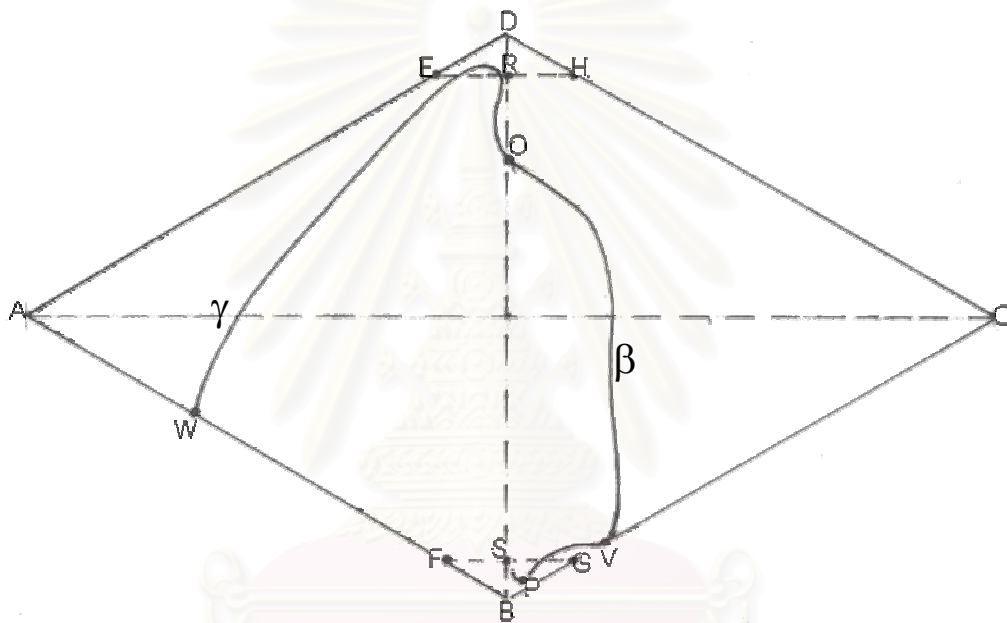


รูปที่ 3.12

กรณีนี้ที่ 2.2  $\alpha$  อยู่ทั้งในบริเวณของ  $\Delta BFG$  และ  $\Delta DEH$  ของ  $\Omega$

เนื่องจาก  $RS = l(\beta) = l(\gamma) = \frac{1}{2}$  หน่วย จะได้ว่า ถ้ามีบางส่วนของ  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) อยู่ในบริเวณ  $\Delta BFG$  (หรือ  $\Delta DEH$ ) ของ  $\Omega$  แล้วจะไม่มีส่วนใดของ  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) อยู่ในบริเวณ  $\Delta DEH$  (หรือ  $\Delta BFG$ ) ของ  $\Omega$  ดังนั้นโดยไม่เสียภัยทั่วไป สมมติให้  $\beta$  อยู่ในบริเวณ  $\Delta BFG$  และ  $\gamma$  อยู่ในบริเวณ  $\Delta DEH$

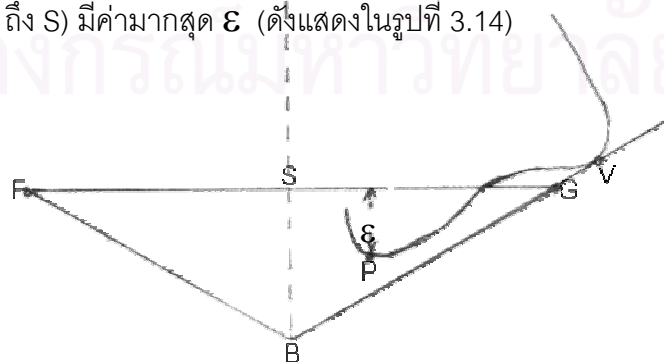
กรณีนี้ที่ 2.2.1 สมมติว่า ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  ตัดกับบริเวณแขนของมุม  $ABC$  ที่จุด  $V$  และ  $W$  ตามลำดับ (ดังแสดงในรูปที่ 3.13)



รูปที่ 3.13

พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\beta$  ของ  $\alpha$

ให้  $P$  เป็นจุดบน  $\beta$  ซึ่งอยู่ในบริเวณ  $\Delta BFG$  โดยที่  $V_{PS}$  (เมื่อ  $V_{PS}$  เป็นระยะทางตามแนวตั้งจาก  $P$  ถึง  $S$ ) มีค่ามากที่สุด  $\epsilon$  (ดังแสดงในรูปที่ 3.14)



รูปที่ 3.14

ให้ M เป็นจุดบน BD ซึ่งทำให้  $RM = \epsilon$

**บทแทรกที่ 3.2.1 :** ไม่มีส่วนของ  $\beta$  ตัดกับส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด M และขนานกับส่วนของเส้นตรง AC และ CD

**บทพิสูจน์** สร้าง IM และ JM ขนานกับ AC และ CD ตามลำดับ

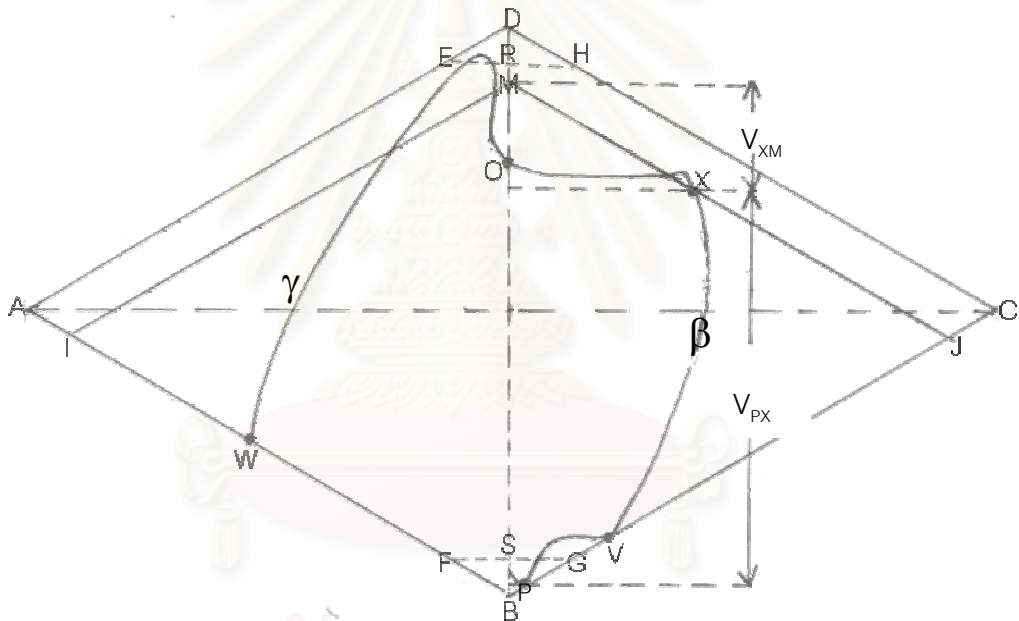
จะแสดงว่าไม่มีส่วนของ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม IMJ

สมมุติ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม IMJ ที่จุด X

กรณีที่ 1 X อยู่บนส่วนของเส้นตรง JM พิจารณาลำดับของจุด O, X

และ P บนเส้นโค้ง  $\beta$  ดังนี้

ถ้า X อยู่ระหว่างจุด O และจุด P ดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15

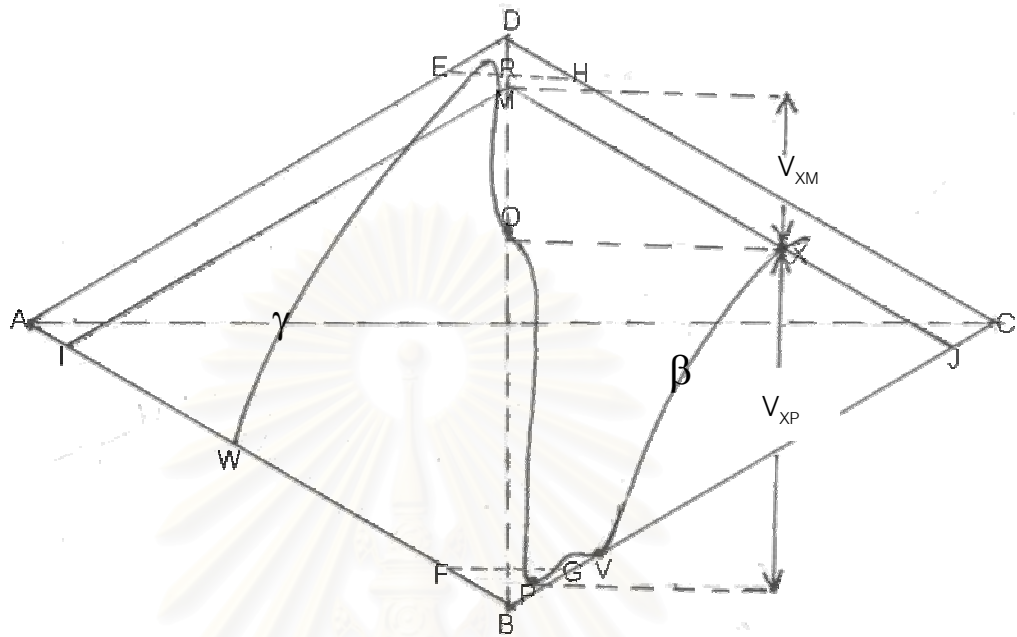
จะได้ว่า  $l(PX) > V_{PX}$  (เมื่อ  $V_{PX}$  คือ ระยะตามแนวตั้ง จาก P ถึง X)

และ  $XO > V_{XM}$  (เมื่อ  $V_{XM}$  คือ ระยะตามแนวตั้งจาก X ถึง M)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \beta &> l(OX) + l(XP) \\ &\geq OX + XP \\ &> V_{XM} + V_{XP} \\ &= SR = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

เกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า P อยู่ระหว่างจุด O และจุด X ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16

จะได้ว่า  $OD \leq OB$  (เนื่องจาก  $\gamma$  อยู่ทั้งในบริเวณของ  $\Delta DEH$  ของ  $\Omega$  และแตะกับแกนของมุม  $ABC$ ) ซึ่งทำให้ได้ว่า  $OS \geq OR$  และเนื่องจาก  $RS = \frac{1}{2}$

ดังนั้น  $OP > OS \geq \frac{1}{4}$

และ  $PX > V_{PX} > OS > \frac{1}{4}$  (เมื่อ  $V_{PX}$  คือ ระยะทางตามแนวตั้งจาก P ถึง X)

ทำให้ได้ว่า  $\beta > l(OP) + l(PX)$

$$\geq OP + PX$$

$$> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 2 X อยู่บนส่วนของเส้นตรง IM (พิสูจน์เช่นเดียวกับกรณีที่ 1)

จากทั้ง 2 กรณีได้ว่า ไม่มีส่วนของ  $\beta$  ตัดกับแกนของมุม  $IMJ$

ดังนั้น บทแทรกที่ 1 เป็นจริง □



พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\gamma$  ของ  $\alpha$

สร้างเส้นค้ำจุน  $\zeta_1$  ของ  $\alpha$  ซึ่งขนานกับ CD

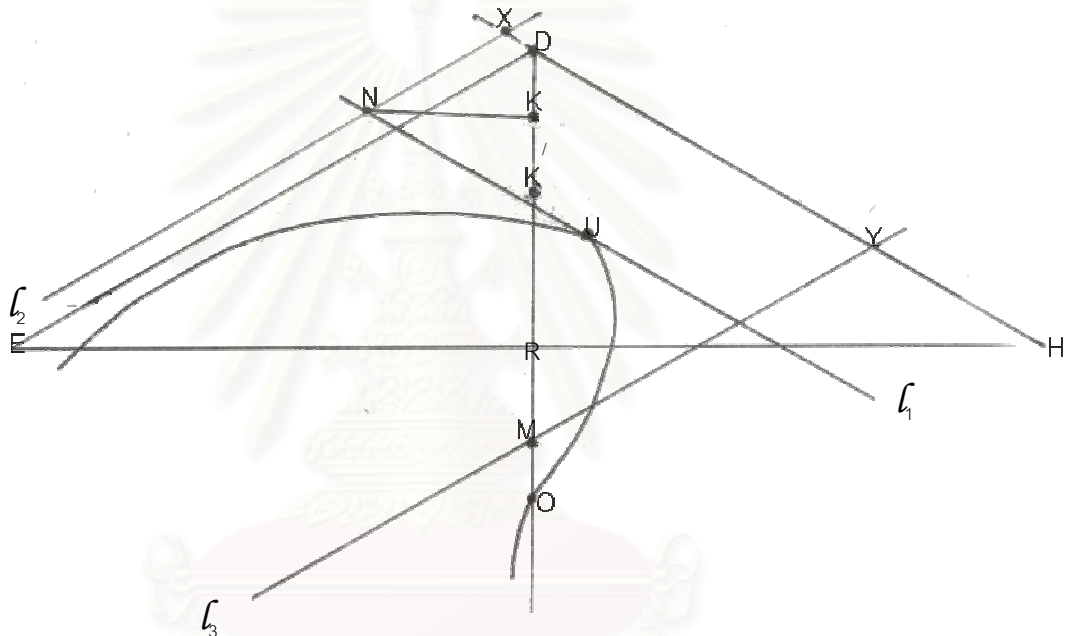
ให้ K และ K' อยู่บน DB ซึ่งทำให้  $DK = \varepsilon$  และ  $DK' = 2\varepsilon$

ให้ N เป็นจุดบน  $\zeta_1$  ซึ่งทำให้ NK ตั้งฉากกับ DK ที่จุด K

สร้างเส้นค้ำจุน  $\zeta_2$  ของ  $\alpha$  ผ่านจุด N ขนานกับ AD และตัดกับ CD ที่จุด X

สร้าง  $\zeta_3$  เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด M ขนานกับ AD และตัดกับ CD ที่จุด Y

ถ้า  $\zeta_1$  อยู่ต่ำกว่าจุด K' (ดังแสดงในรูปที่ 3.17)



รูปที่ 3.17

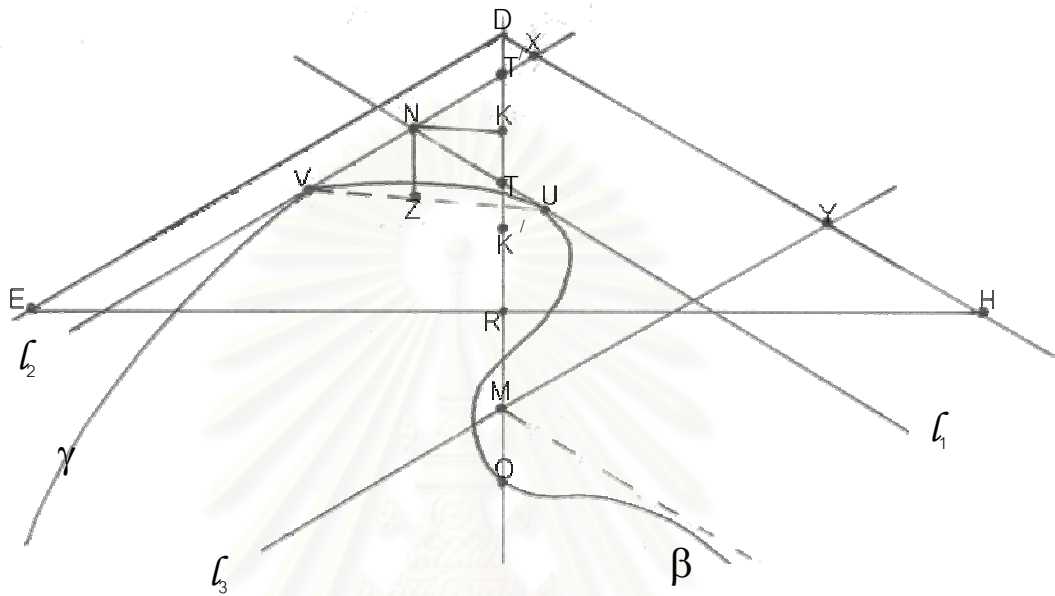
จะได้ว่าโดยการเลื่อน  $\alpha$  ตามแนว NX จะทำให้  $\alpha$  อยู่ในรูปคอนเวกซ์ AFGCD ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.283494 ตารางหน่วย ดังนั้นสมมุติว่า  $\zeta_1$  อยู่เหนือจุด K'

ถ้า  $\zeta_1$  อยู่ต่ำกว่าจุด M จะได้ว่าโดยการเลื่อน  $\alpha$  ผ่านเวกเตอร์ MY ด้วยระยะ

$\frac{DM}{2} = \frac{(\varepsilon + DR)}{2} \geq \varepsilon$  จะทำให้  $\alpha$  สามารถปิดทับได้ด้วยรูปคอนเวกซ์ AFGCD ซึ่งมีพื้นที่

ประมาณ 0.28608419 ตารางหน่วย ดังนั้น สมมุติ  $\zeta_1$  อยู่เหนือจุด M

จากบทแทรกที่ 3.2.1 จะได้ว่าไม่มีส่วนใดของ  $\beta$  ต่ะกับเส้นตรง  $\ell_1$  แต่เนื่องจาก  $\ell_1$  เป็นเส้นค้ำจุนของ  $\alpha$  ทำให้ได้ว่ามีบางส่วนของ  $\gamma$  ต่ะกับเส้นตรง  $\ell_1$  ดังนั้น ให้  $U$  เป็นจุดที่  $\gamma$  ต่ะกับเส้นตรง  $\ell_1$  (ดังแสดงในรูปที่ 3.18)



รูปที่ 3.18

จะแสดงว่าไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  อยู่เหนือเส้นตรง  $\ell_2$

สมมุติ  $V$  เป็นจุดบน  $\gamma$  ซึ่งอยู่บนเส้นตรง  $\ell_2$

ให้  $Z$  เป็นจุดบน  $UV$  ซึ่งทำให้  $NZ$  ขนานกับ  $BD$

พิจารณาลำดับของจุด  $O, U, V$  และ  $W$  บน  $\gamma$  เริ่มที่จุด  $O$  ดังนี้

ถ้าลำดับของจุดต่าง ๆ บน  $\gamma$  เริ่มที่จุด  $O$  คือ  $O, U, V$  และ  $W$  ตามลำดับ (ดังแสดงในรูปที่ 3.18) เห็นชัดว่า  $U$  และ  $V$  อยู่ต่ำกว่าจุด  $N$  ดังนั้น  $Z$  อยู่ระหว่าง  $U$  และ  $V$

- |          |       |                                   |
|----------|-------|-----------------------------------|
| กำหนดให้ | $d_0$ | เป็นระยะจากจุด $O$ ถึง $\ell_2$   |
|          | $d_1$ | เป็นระยะจาก $\ell_2$ ถึง $\ell_3$ |
|          | $d_2$ | เป็นระยะจาก $AB$ ถึง $\ell_1$ และ |
|          | $d_3$ | เป็นระยะจาก $K'$ ถึง $\ell_2$     |

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } ZU + UO &\geq VO \\
&\geq d_0 \text{ (เพราะว่าระยะทางตั้งฉากมีค่าน้อยสุดและ } V \text{ อยู่บน } \mathcal{L}_2) \\
&\geq d_1
\end{aligned}$$

และ เนื่องจาก  $W$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AB$  และ  $U$  อยู่บน  $\mathcal{L}_1$  ได้ว่า

$$\begin{aligned}
WV + VZ &\geq WU \\
&\geq d_2
\end{aligned}$$

ถ้า  $T$  เป็นจุดตัดระหว่าง  $\mathcal{L}_1$  กับ  $DB$  และ  $T'$  เป็นจุดตัดระหว่าง  $\mathcal{L}_2$  กับ  $DB$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
DT &= DK + KT \\
&= \varepsilon + KT && \text{(เพราะว่า } DK = \varepsilon) \\
&= \varepsilon + KT' && \text{(เพราะว่า } NT = NT') \\
&= K'K + K'T' && \text{(เพราะว่า } K'K = \varepsilon) \\
&= K'T'
\end{aligned}$$

ซึ่งส่งผลให้  $d_3 \leq d_1$  ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\gamma &\geq WV + VZ + ZU + UO \\
&\geq d_2 + d_1 \\
&\geq d_2 + d_3 && \text{(เพราะว่า } d_1 \geq d_3) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

จะได้ว่าไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  อยู่เหนือ  $\mathcal{L}_2$  (นั่นคือ  $\gamma$  อาจอยู่ต่ำกว่า  $\mathcal{L}_2$  หรืออยู่บน  $\mathcal{L}_2$ )

และเนื่องจาก  $\mathcal{L}_2$  อยู่เหนือจุด  $M$  จากบทแทรกที่ 1 ได้ว่า  $\beta$  อยู่ต่ำกว่า  $\mathcal{L}_2$  ดังนั้น  $\alpha$  ถูกปิดทับด้วยรูปคอนเวกซ์ AFGCD (มีพื้นที่ประมาณ 0.283494 ตารางหน่วย) เมื่อเลื่อน  $\alpha$  ไปตามเวกเตอร์  $NX + NQ$

สำหรับกรณีที่ลำดับของจุดต่าง ๆ บน  $\gamma$  เริ่มที่จุด  $O$  คือ  $O, U, W$  และ  $V$  ตามลำดับ

สำหรับกรณีที่ลำดับของจุดต่าง ๆ บน  $\gamma$  เริ่มที่จุด  $O$  คือ  $O, V, U$  และ  $W$  ตามลำดับ

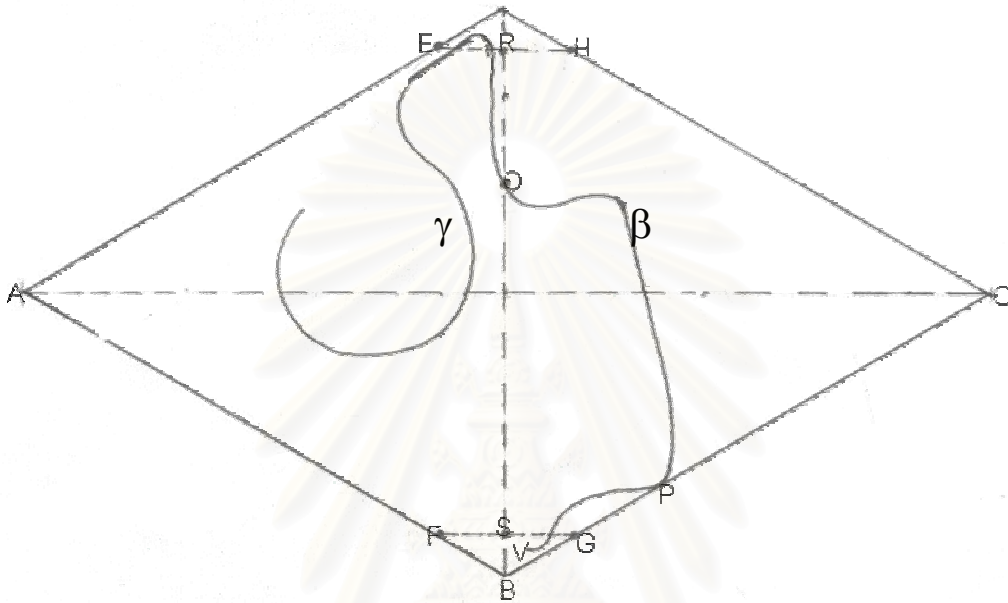
สำหรับกรณีที่ลำดับของจุดต่าง ๆ บน  $\gamma$  เริ่มที่จุด  $O$  คือ  $O, V, W$  และ  $U$  ตามลำดับ

สำหรับกรณีที่ลำดับของจุดต่าง ๆ บน  $\gamma$  เริ่มที่จุด  $O$  คือ  $O, W, V$  และ  $U$  ตามลำดับ

สำหรับกรณีที่ลำดับของจุดต่าง ๆ บน  $\gamma$  เริ่มที่จุด  $O$  คือ  $O, W, U$  และ  $V$  ตามลำดับ

ด้วยการพิสูจน์เช่นเดียวกับกรณีข้างต้นได้ว่า  $\alpha$  ถูกปิดทับด้วยรูปคอนเวกซ์ AFGCD ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.28608419 ตารางหน่วย

กรณีที่ 2.2.2 สมมติว่า  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) ตัดกับแขนของมุม ABC แต่ไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  (หรือ  $\beta$ ) ตัดกับแขนของมุม ABC เนื่องจาก BD เป็นแกนสมมาตรของ  $\Omega$  โดยไม่เสียศูนย์ทั่วไป สมมติให้  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม ABC ที่จุด P แต่ไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม ABC (ดังแสดงในรูปที่ 3.19)



รูปที่ 3.19

โดยทฤษฎีบทที่ 3.1 กรณีที่ 2 ได้ว่า สำหรับทุก ๆ การหมุนซึ่งทำให้  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) ตัดกับแขนของมุม ABC แต่ไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  (หรือ  $\beta$ ) ตัดกับแขนของมุม ABC นั้น  $\alpha$  จะถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega$  ดังนั้น เราจึงสามารถเลือกการหมุนซึ่งทำให้จุดปลายของ  $\beta$  อยู่บน BD ได้

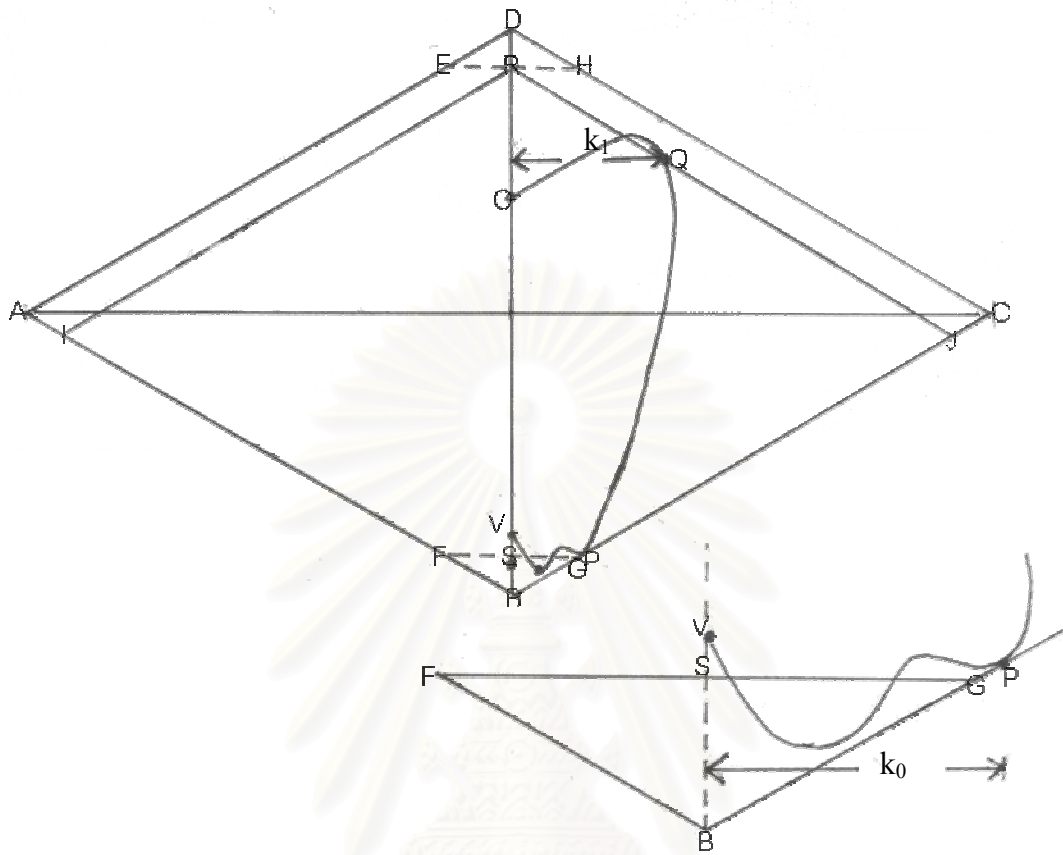
ให้ IR และ JR แทนส่วนของเส้นตรงซึ่งขนานกับ AD และ CD ตามลำดับ

จะแสดงว่าไม่มีส่วนใดของ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม IRJ

พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\beta$  ของ  $\alpha$  สมมติ Q เป็นจุดของ  $\beta$  ที่อยู่บนแขนของมุม IRJ

ให้  $k_0$  เป็นระยะจากจุด P ไปยังส่วนของเส้นตรง BD

$k_1$  เป็นระยะจากจุด Q ไปยังส่วนของเส้นตรง BD (ดังแสดงในรูปที่ 3.20)



รูปที่ 3.20

จะได้ว่า (1)  $l(PQ) \geq V_{PQ}$

(2)  $k_0 > V_{PB}$  ( เพราะว่า คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก )

(3)  $k_1 > V_{QR}$  ( เพราะว่า คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก )

ดังนั้น  $\beta \geq OQ + QP$

$$\geq k_1 + PQ + k_0$$

$$> V_{QR} + V_{PQ} + V_{PB}$$

$$> SR = \frac{1}{2} \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

นั่นคือ ไม่มีจุดใดบน  $\beta$  อยู่บนแกนของมุม IRJ

**พิจารณาเส้นโค้งย่อย  $\gamma$  ของ  $\alpha$**  สมมุติ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม IRJ เนื่องจาก IRJ เป็น  
แกนสมมาตรของรูปคอนเวกซ์ IBJR ประกอบกับ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม ABC และการกระทำที่  
ต่อเนื่อง จะได้ว่ามีการหมุนและเลื่อนซึ่งทำให้ทั้ง  $\gamma$  และ  $\beta$  ตัดกับแขนของมุม IBJ ซึ่งขัดแย้งกับที่  
สมมุติ ดังนั้น สรุปได้ว่าไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม IRJ

จะได้ว่ามีการหมุนซึ่งทำให้  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม ABC ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมุติ ดังนั้น ได้ว่า  
ไม่มีส่วนใดของ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม IRJ

เพราะฉะนั้น  $\alpha$  สามารถปิดทับได้ด้วยรูปคอนเวกซ์ ซึ่งมีพื้นที่น้อยกว่า 0.28610 ตาราง  
หน่วย □

ในลำดับต่อไปจะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับพิสูจน์ว่ารูป  $\Omega'$  (ABCHE) ซึ่งเป็นรูปที่มีพื้นที่  
น้อยสุดในช่วงปี ค.ศ. 1992 – 2002 (พื้นที่น้อยกว่า 0.27524 ตารางหน่วย) สามารถปิดทับทุก ๆ  
 $\alpha \in \Lambda$  ได้ ซึ่งก่อนที่เราจะศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีบทและบทแทรกที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ดังกล่าว  
จำเป็นที่จะต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องใช้ดังต่อไปนี้ โดยผู้จัดทำจะใช้ตัว  
แปรเหล่านี้จนกระทั่งจบบทที่ 3

สำหรับแต่ละ  $\alpha \in \Lambda$  ให้  $O$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\alpha$

ให้  $b$  เป็นจุดใน  $\alpha$  ซึ่งมีระยะห่างจากจุด  $O$  มากที่สุด โดยจะเรียกส่วนครึ่งของ  $\alpha$  ที่มีจุด  
 $b$  ว่า  $\beta$

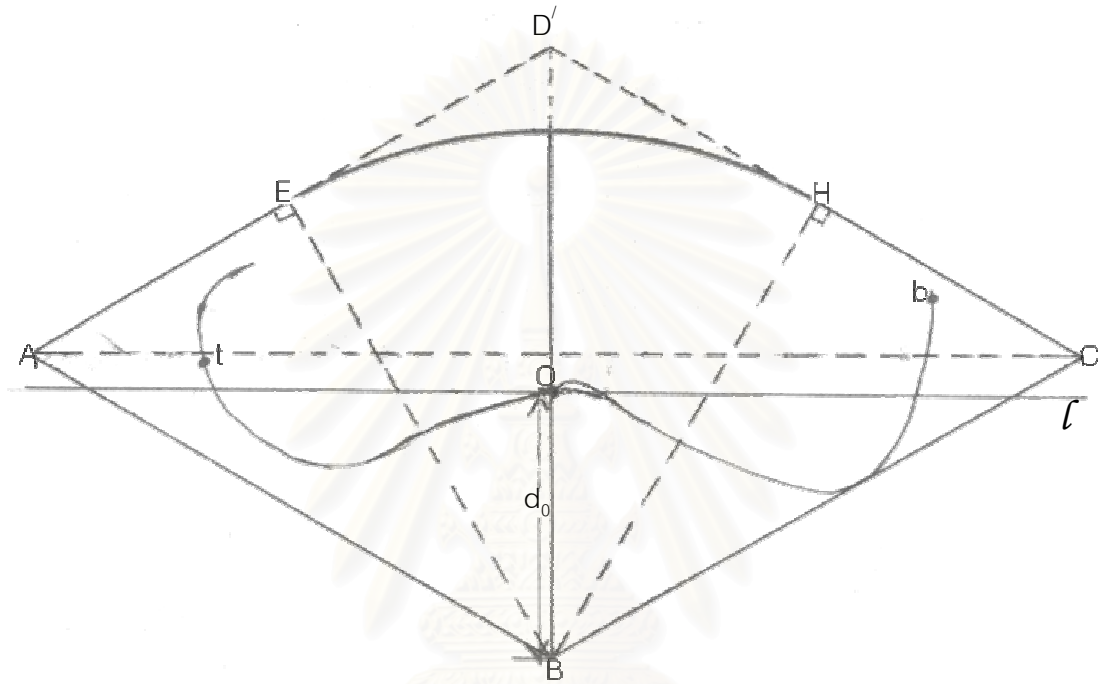
ให้  $t$  เป็นจุดใน  $\alpha$  ซึ่งไม่อยู่ใน  $\beta$  และมีระยะห่างจากจุด  $O$  มากที่สุด โดยจะเรียกส่วนครึ่ง  
ของ  $\alpha$  ส่วนนี้ว่า  $\gamma$

วาง  $\alpha$  บน  $\Omega'$  โดยให้จุด  $O$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $BD'$  ของ  $\Omega'$  จากนั้นเลื่อนและหมุน  
 $\alpha$  ตามแนวของ  $BD'$  จนกระทั่ง  $\alpha$  สัมผัสกับแขนของมุม ABC ของ  $\Omega'$   
ดังนั้น จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งจุดของ  $\alpha$  ตัดกับแขนของมุม ABC จากการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่  
3.1 และ 3.2 เราได้ว่า

1.  $\alpha$  อยู่ในบริเวณรูปเหลี่ยม  $ABCD'$
2.  $\alpha$  อยู่ไม่เกินแขนของมุม ABC

ให้  $d_0$  เป็นระยะจากจุด  $O$  ถึงจุด  $B$

ให้  $l$  เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ  $BD'$  ที่จุด  $O$  โดยจะเรียก จุด  $X$  ใด ๆ ที่อยู่ด้านเดียวกับจุด  $B$  เมื่อมี  $l$  เป็นเส้นแบ่งว่า จุด  $X$  อยู่ล่าง  $l$  และเรียกจุด  $X$  ใด ๆ ที่อยู่คนละด้านกับจุด  $B$  เมื่อมี  $l$  เป็นเส้นแบ่งว่า จุด  $X$  อยู่เหนือ  $l$

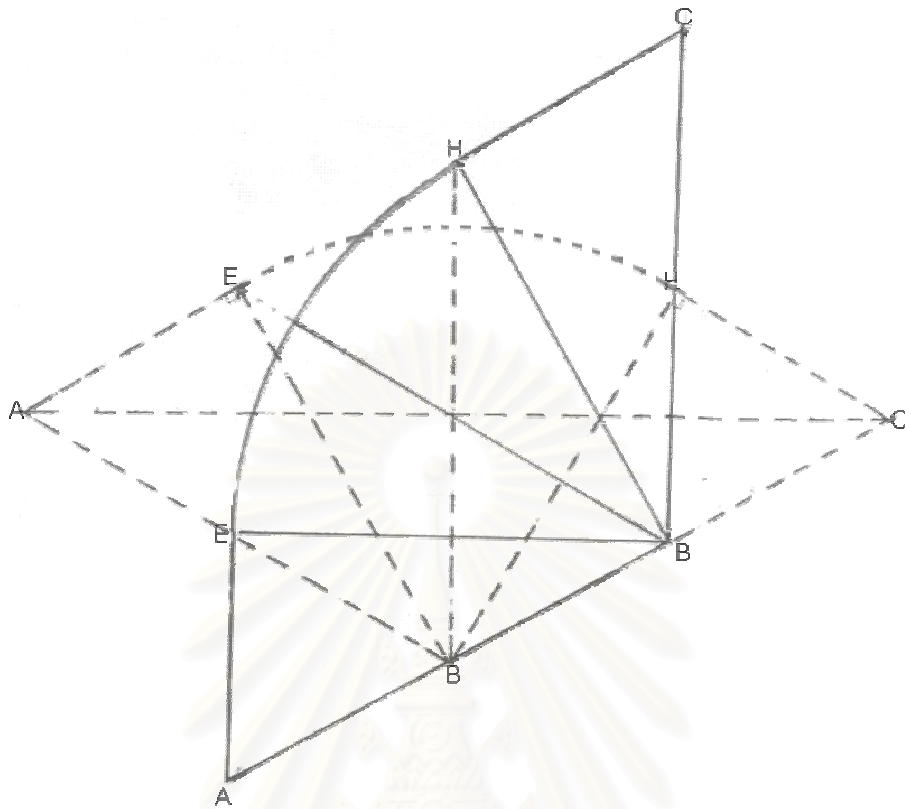


รูปที่ 3.21

ในการพิสูจน์ที่จะกล่าวต่อไปนี้ อนุญาตให้มีการหมุน 3 แบบที่แตกต่างกัน คือ

1. อนุญาตให้หมุนและเลื่อน  $\alpha$  โดยที่  $\Omega'$  อยู่กับที่ ซึ่งระหว่างการหมุน  $O$  จะต้องอยู่บน  $BD'$  และ  $\alpha$  จะต้องอยู่ภายในแขนของมุม  $ABC$  เสมอ ดังนั้นระยะ  $BO$  อาจเปลี่ยนแปลงได้
2. อนุญาตให้หมุนและเลื่อน  $\Omega'$  โดยที่  $\alpha$  อยู่กับที่ ซึ่งระหว่างการหมุน  $O$  จะต้องอยู่บน  $BD'$  และแขนของมุม  $ABC$  ต้องแตะ  $\alpha$  เสมอ ดังนั้นระยะ  $BO$  อาจเปลี่ยนแปลงได้
3. อนุญาตให้ทั้ง  $\alpha$  และ  $\Omega'$  หมุนแต่ระยะ  $BO$  จะต้องเท่าเดิม

และจะกล่าวว่า  $\Omega'$  อยู่ที่ 6 นาฬิกา ถ้า  $\Omega'$  อยู่ในลักษณะดังรูปที่ 3.22 (เส้นประ) และจะกล่าวว่า  $\Omega'$  อยู่ที่ 4 นาฬิกา ถ้า  $\Omega'$  อยู่ในลักษณะดังรูปที่ 3.22 (เส้นทึบ) สำหรับตำแหน่งอื่น ๆ ให้พิจารณาตาม  $ABC$  ของ  $\Omega'$  เป็นปลายเข็มนาฬิกาแล้วหมุนไปยังตำแหน่งที่ต้องการ



รูปที่ 3.22 แสดง  $\Omega'$  อยู่ที่ 4 นาฬิกา และ 6 นาฬิกา

ต่อไปจะเป็นการศึกษาบทแทรกที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ว่า  $\Omega'$  สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

**บทแทรกที่ 3.3.1:** ถ้า  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ )แตะกับแขนของมุม  $ABC$  และ  $d_0 \leq \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  แล้ว  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ )

จะสามารถปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$

#### บทพิสูจน์

ให้  $\beta$ แตะกับแขนของมุม  $ABC$  ที่จุด  $X$

ถ้า  $d_0 = 0$  นั่นคือ จุด  $O$  อยู่บนจุด  $B$  จะได้ว่า  $\beta$  อยู่ในวงกลมซึ่งมีศูนย์กลางที่จุด  $B$  รัศมี  $\frac{1}{2}$  หน่วย และเนื่องจากจุด  $b$  อยู่ห่างจาก  $O$  ไม่เกิน  $\frac{1}{2}$  หน่วย ประกอบกับ  $b$  เป็นจุดที่ห่างจากจุด  $O$  มากสุด และโดยการวาง  $\alpha$  ดังกล่าวข้างต้น จะได้ว่า  $\beta$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$



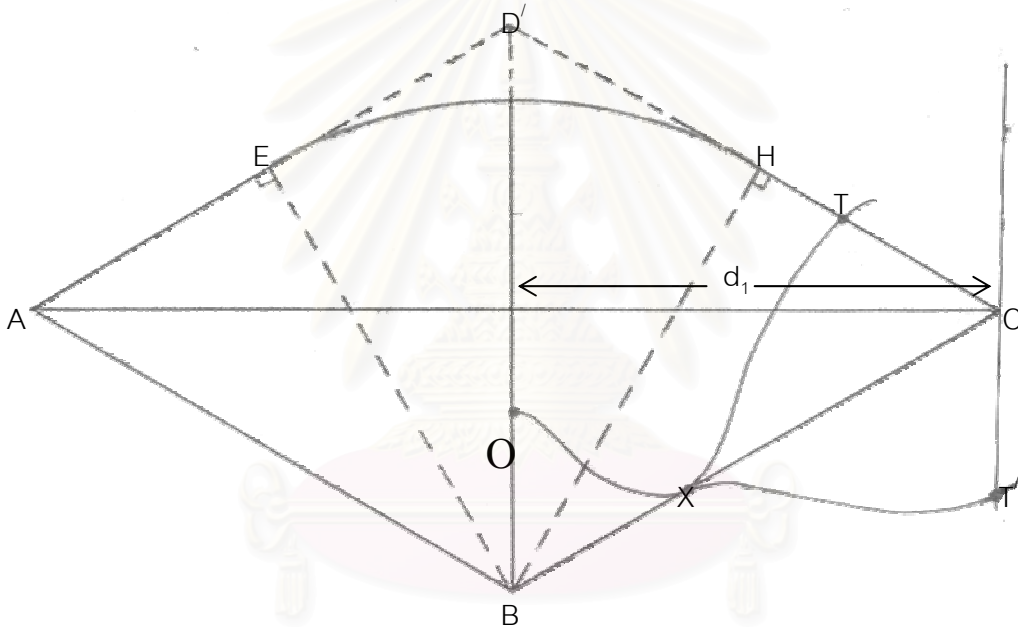
$$\text{สมมุติ } d_0 < \frac{(2\sqrt{3})}{9}$$

จะแสดงว่าไม่มีส่วนของ  $\beta$  ตัดกับเส้นโค้ง  $CA = AE \cup EH \cup HC$

สมมุติ  $\beta$  ตัดกับส่วนของเส้นโค้ง  $CA$

กรณีที่ 1  $\beta$  ตัดกับส่วนของเส้นตรง  $HC$  ที่จุด  $T$

ถ้าลำดับของจุดบน  $\beta$  เริ่มจากจุด  $O$  คือ  $O, X, T$  สะท้อนส่วนของเส้นตรง  $TC$  โดยมีส่วนของเส้นตรง  $BC$  เป็นแกนสะท้อน ให้  $T'$  เป็นจุดที่เกิดจากการสะท้อนจุด  $T$  (ดังรูปที่ 3.23) และ  $d_1$  เป็นระยะระหว่างส่วนของเส้นตรง  $BD'$  และ  $CT'$

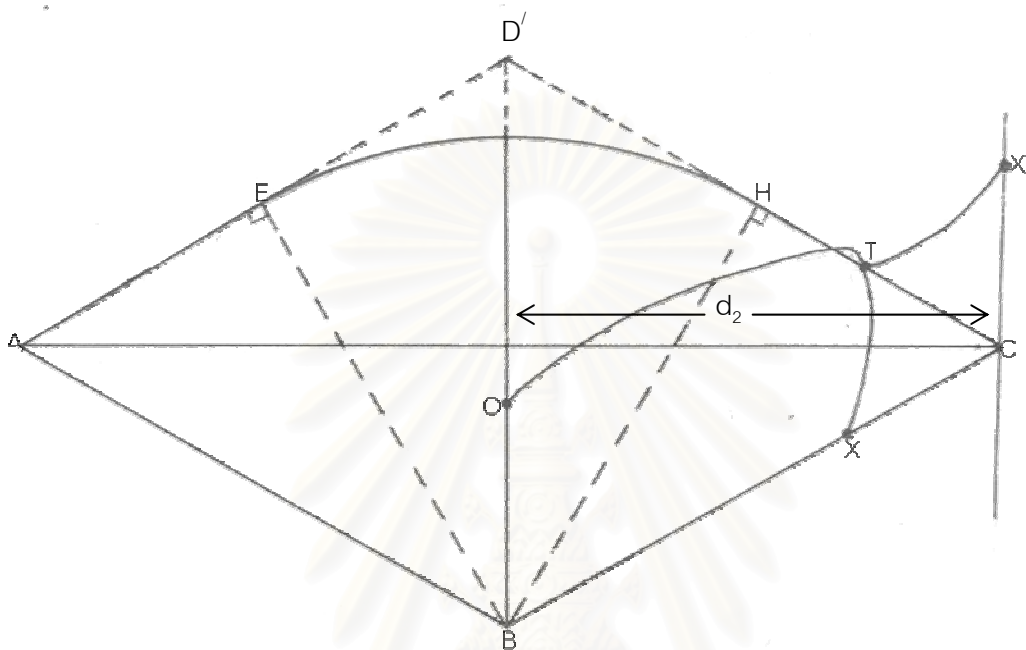


รูปที่ 3.23

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \beta &> l(OX) + l(XT) \\ &= l(OX) + l(XT') \\ &\geq OT' \\ &> d_1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

เกิดข้อขัดแย้ง

ถ้าลำดับของจุดบน  $\beta$  เริ่มจากจุด  $O$  คือ  $O, T, X$  สะท้อนส่วนของเส้นตรง  $XC$  โดยใช้ส่วนของเส้นตรง  $CD'$  เป็นแกนสะท้อน ให้  $X'$  เป็นจุดที่เกิดจากการสะท้อนจุด  $X$  (ดังรูปที่ 3.24) ให้  $d_2$  เป็นระยะระหว่างส่วนของเส้นตรง  $BD'$  และ  $CX'$



รูปที่ 3.24

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า} \quad \beta &= l(OT) + l(TX) \\
 &= l(OT) + l(TX') \\
 &\geq OX' \\
 &> d_2 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ไม่มีส่วนของ  $\beta$  ตัดกับส่วนของเส้นตรง  $CH$

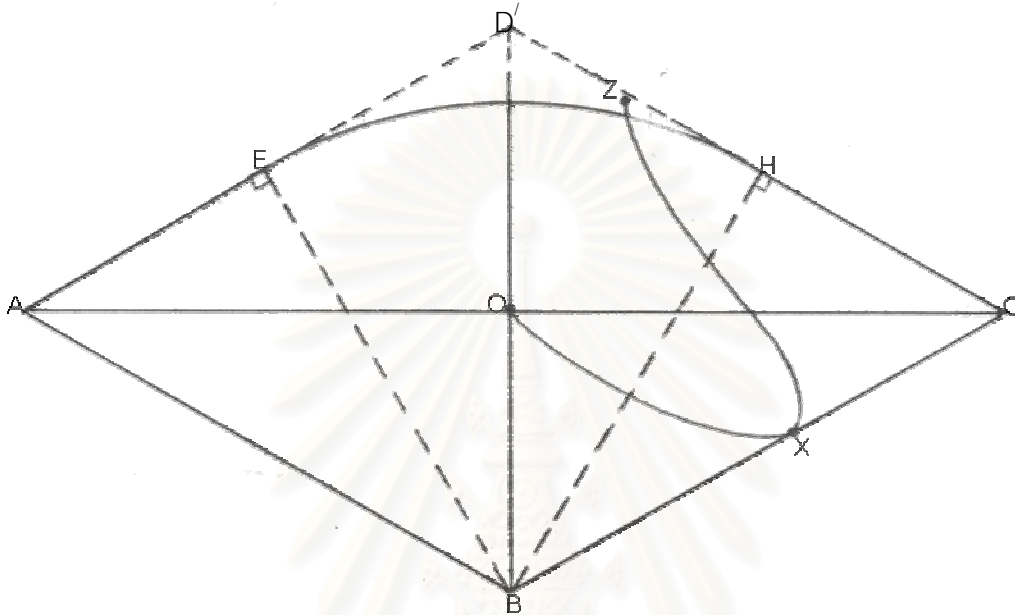
กรณีที่ 2  $\beta$  ตัดกับส่วนของเส้นตรง  $EA$  ที่จุด  $K$

โดยการพิสูจน์เช่นเดียวกับกรณีที่ 1 จะได้ว่าไม่มีส่วนของ  $\beta$  ตัดกับส่วนของเส้นตรง  $EA$

กรณีที่ 3  $\beta$  ตัดกับส่วนของเส้นโค้ง EH ที่จุด Z

เห็นได้ชัดว่า สำหรับแต่ละ Z ที่อยู่บนเส้นโค้ง EH จะได้ว่า  $XZ > XH$

ถ้าลำดับของจุดบน  $\beta$  เริ่มจากจุด O คือ O, X, Z (ดังรูปที่ 3.25)



รูปที่ 3.25

$$\text{จะได้ว่า } \beta > l(OX) + l(XZ)$$

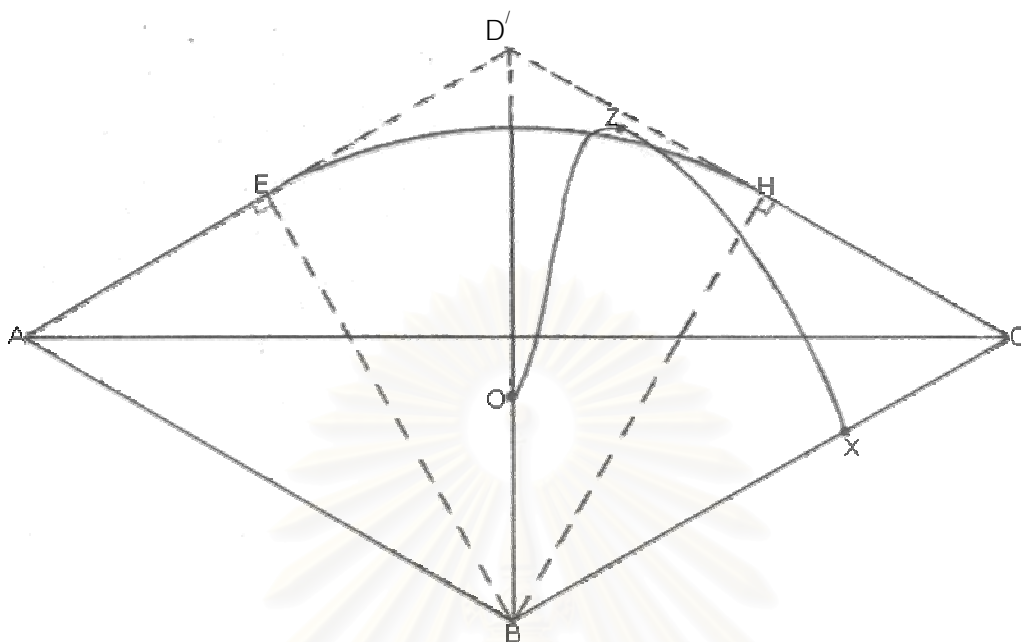
$$\geq OX + XZ$$

$$> \frac{1}{2}$$

เกิดข้อขัดแย้ง

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถ้าลำดับของจุดบน  $\beta$  เริ่มจากจุด  $O$  คือ  $O, Z, X$  (ดังรูปที่ 3.26)



รูปที่ 3.26

จะได้ว่า

$$\beta = l(OZ) + l(ZX)$$

$$\geq OZ + XZ$$

$$> \frac{1}{2}$$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ไม่มีส่วนใดของ  $\beta$  ต่อกับส่วนของเส้นโค้ง FE  
เพราะฉะนั้น บทแทรกที่ 3.3.1 เป็นจริง □

**บทแทรกที่ 3.3.2** ถ้า  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) ต่อกับส่วนของเส้นตรง BA หรือ BC และมีจุดบน  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) ที่มีระยะห่างจากจุด  $O$  มากที่สุด อยู่บน  $l$  หรือเหนือ  $l$  แล้ว  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) จะสามารถปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$

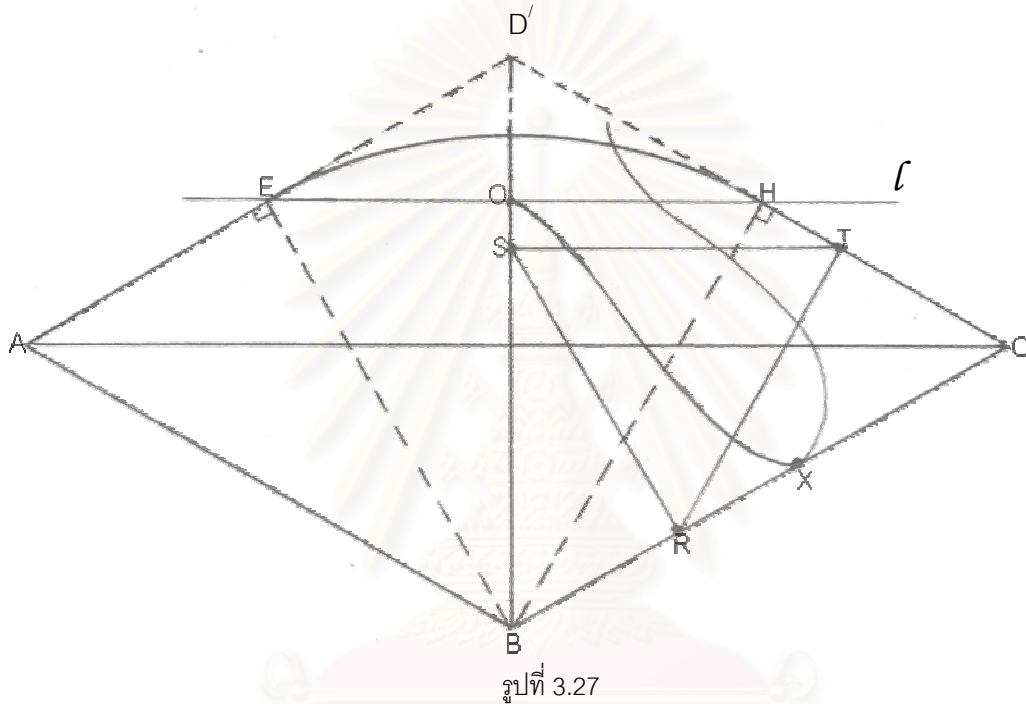
#### **บทพิสูจน์**

ให้  $\beta$  ต่อกับส่วนของเส้นตรง BA หรือ BC และมีจุดบน  $\beta$  (หรือ  $\gamma$ ) อยู่บน  $l$  หรือเหนือ  $l$  โดยไม่เสียหาย ให้  $\beta$  ต่อกับส่วนของเส้นตรง BC ที่จุด X

พิจารณารูปที่ 3.27 ประกอบการพิสูจน์

เนื่องจากบริเวณ  $BCD'$  ของรูป  $\Omega$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังนั้นเราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  $RST$  ซึ่ง  $TS$  ตั้งฉากกับ  $BD'$  ที่จุด  $S$   $SR$  ตั้งฉาก  $BC$  ที่จุด  $R$  และ  $RT$  ตั้งฉากกับ  $CD'$  ที่จุด  $T$  โดย  $SR = ST = TR = \frac{1}{3}$  หน่วย บรรจุในบริเวณ  $BCD'$  นั้นได้

จะได้ว่า  $BS = \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  หน่วย



รูปที่ 3.27

โดยผลของบทแทรกที่ 3.3.1 เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า  $OB \leq \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  หน่วย

สมมติ  $OB > \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  นั่นคือจุด  $O$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $SD'$  โดยที่  $O \neq S$

เนื่องจากทุก ๆ จุดที่อยู่บน  $\beta$  และอยู่เหนือ  $l$  จะมีระยะห่างจาก  $O$  ไม่เกิน  $\frac{1}{3}$  หน่วย แต่  $OX \geq SR = \frac{1}{3}$  หน่วย ดังนั้น จุดที่อยู่บน  $\beta$  ซึ่งมีระยะห่างจาก  $O$  มากสุดจะต้องอยู่ต่ำกว่า  $l$

เพราะฉะนั้น  $O$  ต้องอยู่บนส่วนของเส้นตรง  $BS$  ซึ่งยาวเท่ากับ  $\frac{(2\sqrt{3})}{9}$  หน่วย นั่นคือ

$OB \leq \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  หน่วย โดยบทแทรกที่ 3.3.1 สรุปได้ว่า  $\beta$  สามารถปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$  □

ทฤษฎีบทที่ 3.3  $\Omega'$  สามารถปิดทับ แต่ละ  $\alpha \in \Lambda$

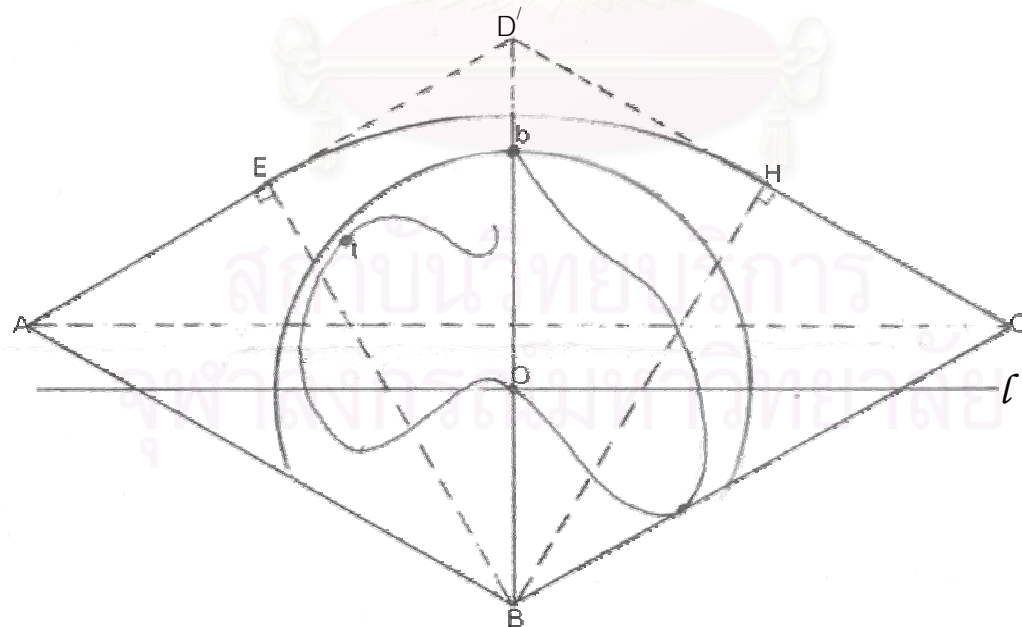
**บทพิสูจน์**

พิจารณาตำแหน่งของ  $\alpha$  ใน  $\Omega'$

**กรณีที่ 1** สมมุติทุก ๆ การหมุนมีเพียงครั้งเดียวของ  $\alpha$  และกับแกนของมุม ABC ของ  $\Omega'$  หมุน  $\alpha$  รอบจุด O จนกระทั่ง b อยู่ในแนวเดียวกับจุด O ตามแนวนอน สังเกตว่า เมื่อหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  มาที่ตำแหน่ง 4 นาฬิกา ครั้งที่แต่ละต้องเป็นครั้ง  $\beta$  เนื่องจากเมื่อหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  มาที่ตำแหน่ง 4 นาฬิกา จะได้ว่าจุดบน  $\alpha$  ที่แตะกับแกนของมุม ABC จุดแรกคือจุด b ซึ่งอยู่บน  $\beta$

หมุนทั้ง  $\Omega'$  และ  $\alpha$  จนกระทั่ง จุด b อยู่เหนือ จุด O และอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันตามแนวตั้ง

พิจารณาตำแหน่งของ  $\Omega'$  ที่ 6 นาฬิกา จะได้ว่า จุด b อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $BD'$  ของ  $\Omega'$  โดยทฤษฎีบทที่ 3.1 จะได้ว่าไม่มีส่วนของ  $\beta$  ตัดกับแกนของมุม ABC ของ  $\Omega'$  และจากข้อสังเกตข้างต้นไม่มีส่วนของ  $\gamma$ แตะกับแกนของมุม ABC ดังนั้นจะได้ว่าเมื่อ  $\Omega'$  อยู่ที่ตำแหน่ง 6 นาฬิกา  $\beta$ แตะกับแกนของมุม ABC ของ  $\Omega'$  และ จุด b อยู่เหนือเส้นตรง  $l$  ดังแสดงในรูปที่ 3.28



รูปที่ 3.28

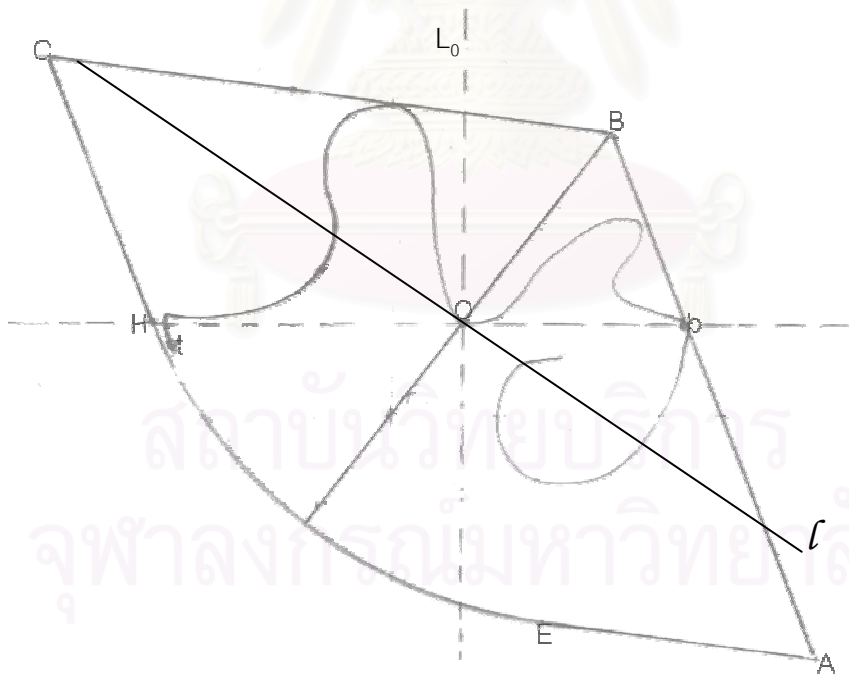
โดยบทแทรกที่ 3.3.2 จะได้ว่า  $\beta$  ถูกปิดทับด้วย  $\Omega'$  และวงกลมจุดศูนย์กลางที่  $O$  รัศมี  $Ob$  อยู่ต่ำกว่าเส้นโค้ง  $EH$  ของ  $\Omega'$

เนื่องจาก  $b$  เป็นจุดที่ห่างจากจุด  $O$  มากสุดแล้วยังถูกปิดทับด้วย  $\Omega'$  ดังนั้นทุก ๆ จุดบน  $\alpha$  ย่อมถูกปิดทับด้วย  $\Omega'$

**กรณีที่ 2** สมมุติให้มีการหมุนซึ่งทำให้ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  แตะกับแกนของมุม  $ABC$  ของ  $\Omega'$

ถ้า  $\beta$  และ  $\gamma$  แตะกับแกนของมุม  $ABC$  ไม่พร้อมกัน สมมุติว่าเมื่อหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  ไป ณ ตำแหน่งหนึ่ง  $\beta$  แตะกับแกนของมุม  $ABC$  ก่อน ซึ่งเมื่อหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  ไปอีก ณ ตำแหน่งหนึ่ง  $\gamma$  จะแตะกับแกนของมุม  $ABC$  ก่อน ด้วยการหมุนและเลื่อนที่ทำอย่างต่อเนื่อง จะได้ว่า จะมีตำแหน่งหนึ่งที่ ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  แตะกับแกนของมุม  $ABC$  พร้อมกัน

ดังนั้น สมมุติให้มีการหมุน  $\Omega'$  ไปยังตำแหน่งดังรูปที่ 3.29 แล้วทำให้ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  แตะกับแกนของมุม  $ABC$  หมุนทั้ง  $\Omega'$  และ  $\alpha$  จนกระทั่งจุด  $O$  และ  $b$  อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันตามแนวนอน โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้  $b$  อยู่ทางขวาของ  $O$

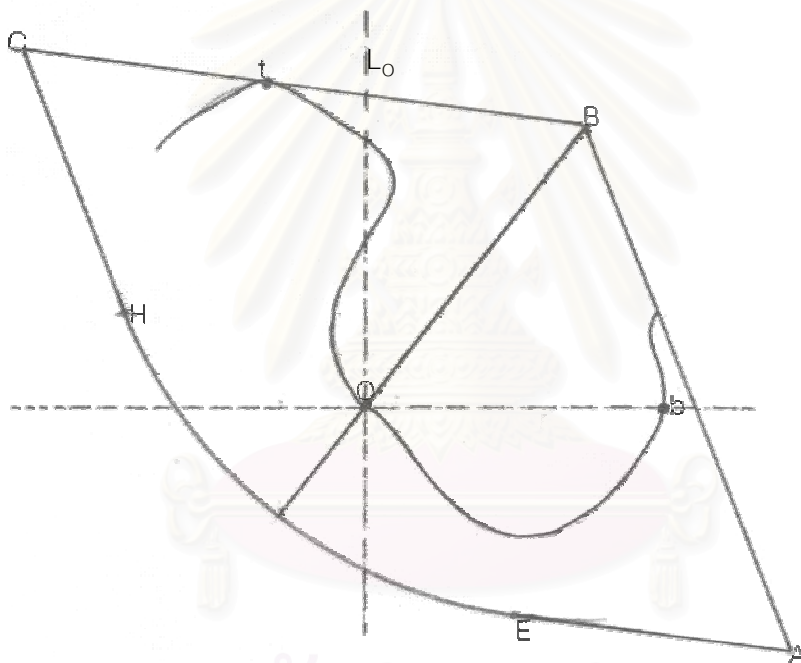


รูปที่ 3.29

ถ้า  $t$  อยู่ต่ำกว่าเส้น  $Ob$  ดังแสดงในรูปที่ 3.29 จะได้ว่ามีการหมุนซึ่งทำให้  $t$  อยู่เหนือเส้นตรง  $L$  หรือ  $b$  อยู่เหนือเส้นตรง  $L$  (อย่างใดอย่างหนึ่ง) ดังนั้นโดยบทแทรกที่ 3.3.2 จะได้ว่า ระยะ  $BO \leq \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  และโดยบทแทรกที่ 3.3.1 จะได้ว่า  $\alpha$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$  ดังนั้นสมมติให้  $t$  อยู่เหนือเส้น  $L$

สร้างเส้นตรง  $L_0$  ตั้งฉากกับเส้นตรง  $Ob$  ที่จุด  $O$  พิจารณาตำแหน่งของจุด  $t$  เทียบกับเส้นตรง  $L_0$  ดังนี้

**กรณีที่ 2.1** จุด  $t$  อยู่บน  $L_0$  หรืออยู่ทางซ้ายของเส้นตรง  $L_0$  ดังแสดงในรูปที่ 3.30



รูปที่ 3.30

ถ้า  $BO \leq \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  โดยบทแทรกที่ 3.3.1 จะได้ว่า  $\alpha$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$

ถ้า  $OB > \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  จะได้ว่าทั้งจุด  $b$  และจุด  $t$  อยู่นอกวงกลมจุดศูนย์กลางที่  $O$  รัศมี  $\frac{1}{3}$

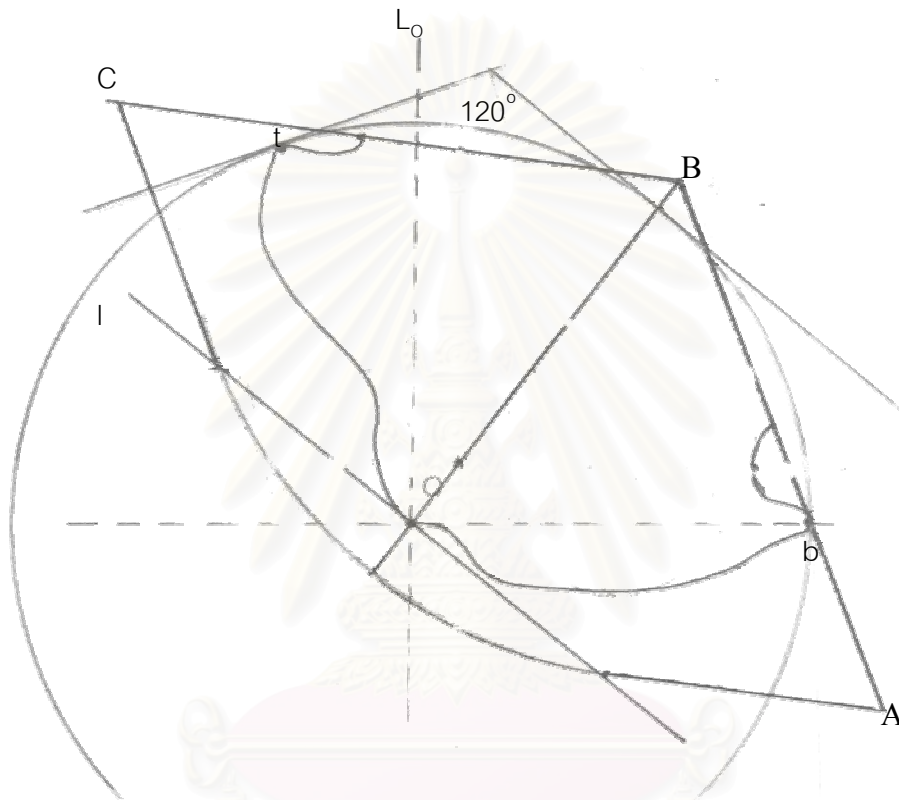
หน่วย และ ถ้ามีบางจุดบน  $\beta$  อยู่ทางซ้ายของ  $L_0$  และอยู่นอกวงกลมจุดศูนย์กลางที่  $O$  รัศมี  $\frac{1}{3}$

หน่วยแล้ว จะได้ว่าจุดเหล่านั้นมีระยะห่างจากจุด  $O$  มากกว่า  $\frac{(1+\sqrt{2})}{3}$  หน่วย ซึ่งขัดแย้งกับ



ความจริงที่ทุกจุดบน  $\beta$  มีระยะห่างจาก  $O$  ไม่เกิน  $\frac{1}{2}$  หน่วย ดังนั้นได้ว่า ทุกจุดที่อยู่บน  $\beta$  และอยู่ทางซ้ายของ  $I$  จะต้องอยู่ในวงกลมศูนย์กลางที่  $O$  รัศมี  $\frac{1}{3}$  หน่วย

สร้างวงกลมศูนย์กลางที่  $O$  รัศมี  $Ot$  จากนั้นสร้างเส้นสัมผัสวงกลมเส้นที่ 1 โดยให้สัมผัสวงกลมนี้ที่จุด  $t$  แล้วสร้างเส้นสัมผัสวงกลมเส้นที่ 2 โดยให้ทำมุมกับเส้นแรก  $120^\circ$  องศา ดังแสดงในรูปที่ 3.31

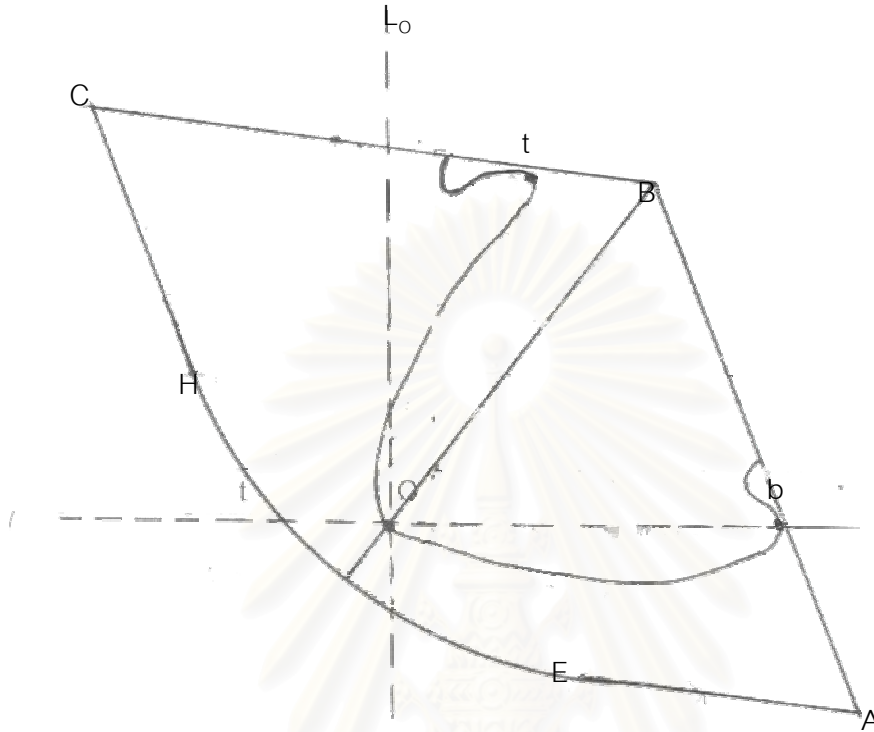


รูปที่ 3.31

จากที่สมมุติว่า จุด  $b$  และจุด  $t$  อยู่คนละฝั่งของเส้นตรง  $L_0$  ดังนั้นเราสามารถหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  ที่ตำแหน่งระหว่าง 9 นาฬิกาถึง 11 นาฬิกา ซึ่งทำให้  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม  $ABC$  ที่จุด  $t$  และจากข้อสังเกตในการพิสูจน์ กรณีที่ 1 ข้างต้นได้ว่า เมื่อหมุน  $\Omega'$  ไปที่ตำแหน่ง 4 นาฬิกา  $\beta$  จะตัดกับแขนของมุม  $ABC$  ดังนั้นจะได้ว่าเราสามารถหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ระหว่างตำแหน่งที่ 11 นาฬิกาถึง 4 นาฬิกาที่ทำให้ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  ตัดกับแขนของมุม  $ABC$  ซึ่งสำหรับแต่ละการหมุน  $\Omega'$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ระหว่างตำแหน่งที่ 11 นาฬิกาถึง 4 นาฬิกา จะทำให้จุด  $b$  (หรือ จุด  $t$ ) อยู่เหนือเส้นตรง  $I$  และโดยบทแทรกที่ 3.3.2 จะได้ว่า ระยะ

$$BO \leq \frac{(2\sqrt{3})}{9} \text{ หน่วย} \quad \text{ดังนั้น โดยบทแทรกที่ 3.3.1 } \alpha \text{ ถูกปิดทับด้วย } \Omega'$$

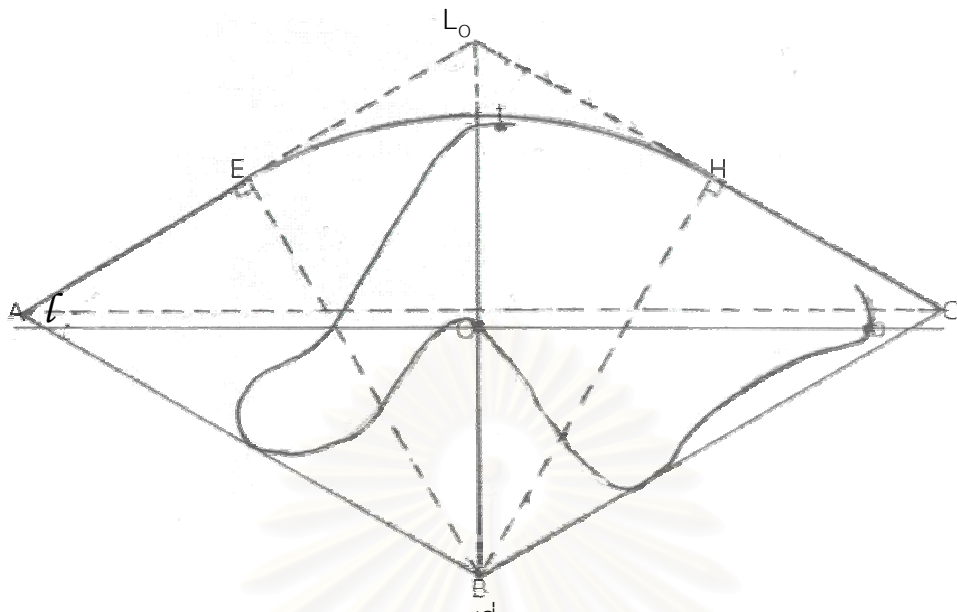
กรณีที 2.2 จุด  $t$  อยู่ทางขวาของเส้นตรง  $L_0$  (นั่นคือจุด  $t$  อยู่ด้านเดียวกับจุด  $b$  เมื่อมี  $L_0$  เป็นเส้นแบ่ง) ดังแสดงในรูปที่ 3.32



รูปที่ 3.32

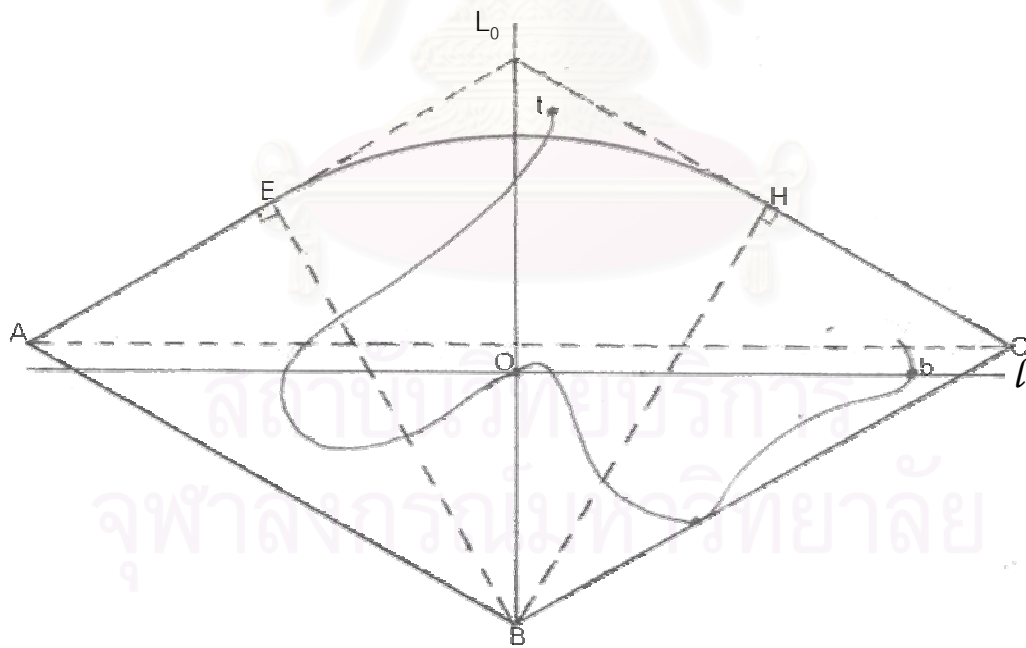
เนื่องจากที่สมมุติ  $\Omega'$  ไม่ได้อยู่ ณ ตำแหน่ง 6 นาฬิกา เมื่อพิจารณาตำแหน่งของ  $\Omega'$  ที่ 6 นาฬิกา ได้ว่า

กรณีที่ 2.2.1 ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  ต่ะกับบริเวณแขนของมุม  $ABC$  (ดังแสดงในรูปที่ 3.33)  
 จากที่สมมุติจะได้ว่า จุด  $b$  อยู่บนเส้นตรง  $L$  และจุด  $t$  อยู่เหนือเส้นตรง  $L$  ดังนั้น โดย  
 บทแทรกที่ 3.3.2  $\alpha$  ถูกปิดทับด้วย  $\Omega'$



รูปที่ 3.33

กรณีที่ 2.2.2  $\beta$  ตัดกับบริเวณแขนของมุม  $ABC$  (ดังแสดงในรูป 3.34)



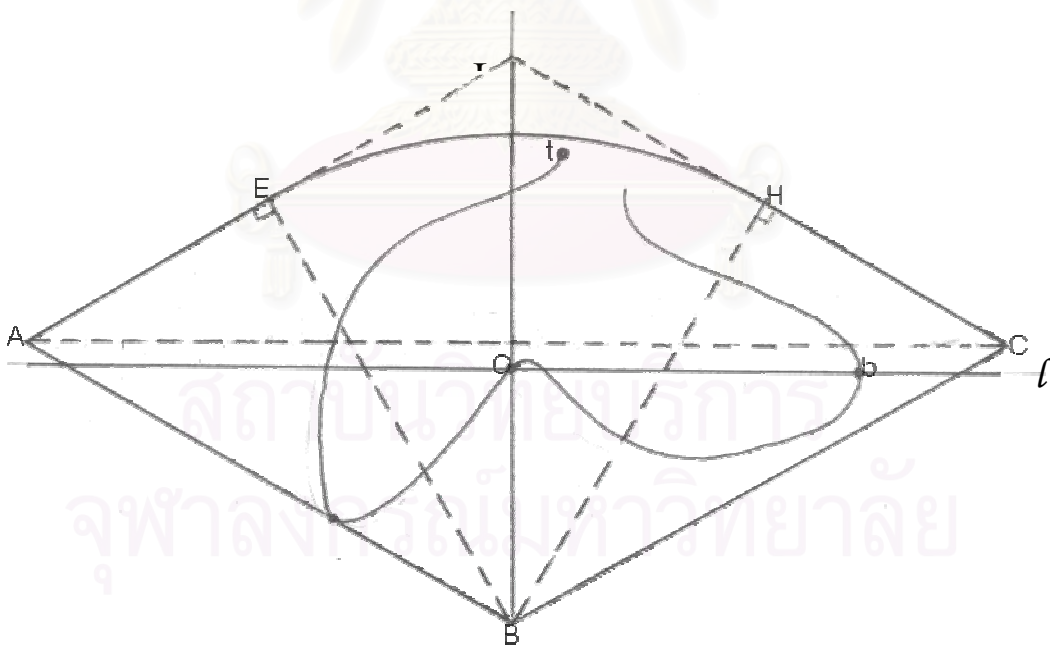
รูปที่ 3.34

จากที่สมมติไว้ว่าจุด  $b$  อยู่บนเส้นตรง  $\ell$  ดังนั้นโดยบทแทรกที่ 3.3.2  $\beta$  ถูกปิดทับด้วย  $\Omega'$  ถ้า  $\gamma$  ไม่ถูกปิดทับด้วย  $\Omega'$  จะได้ว่ามีบางส่วนของ  $\gamma$  ตัดกับเส้นโค้ง  $AC$  ของ  $\Omega'$  ดังนั้นมีการหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  ระหว่างตำแหน่งที่ 10 นาฬิกา ถึง 12 นาฬิกาซึ่งทำให้  $\gamma$  แตะกับแขนของมุม  $ABC$  และเนื่องจากที่ตำแหน่ง 6 นาฬิกา  $\beta$  แตะกับแขนของมุม  $ABC$  ดังนั้นได้ว่าการหมุน  $\Omega'$  ในทิศตามเข็มนาฬิการะหว่างตำแหน่งที่ 6 นาฬิกา ถึง 12 นาฬิกาที่ทำให้ ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  แตะกับบริเวณแขนของมุม  $ABC$  ซึ่งสำหรับแต่ละการหมุน  $\Omega'$  ในตำแหน่งข้างต้นได้ว่า จุด  $b$  จะอยู่เหนือเส้นตรง  $\ell$  ดังนั้นโดยบทแทรกที่ 3.3.2 ได้ว่าระยะ  $BO \leq \frac{(2\sqrt{3})}{9}$  เพราะฉะนั้นโดยบทแทรกที่

3.3.1  $\alpha$  จะถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$

กรณีที่ 2.2.3  $\gamma$  แตะกับบริเวณแขนของมุม  $ABC$  (ดังแสดงในรูปที่ 3.35)

พิจารณาการหมุน  $\Omega'$  ในทิศตามเข็มนาฬิกาได้ว่าระหว่งการหมุน  $\Omega'$  จากตำแหน่งที่ 6 นาฬิกา ถึง 12 นาฬิกา  $\beta$  อาจจะไม่แตะกับบริเวณแขนของมุม  $ABC$  หรือไม่ก็ได้



รูปที่ 3.35

ถ้ามีการหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  ระหว่างตำแหน่งที่ 6 นาฬิกาถึง 12 นาฬิกาซึ่ง  $\beta$  และกับ  
 แขนของมุม ABC และจะได้ว่า ทั้ง  $\beta$  และ  $\gamma$  และกับบริเวณแขนของมุม ABC โดยบทแทรกที่  
 3.3.1 และ 3.3.2 ดังนั้น  $\alpha$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$

สำหรับแต่ละการหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  ระหว่างตำแหน่งที่ 6 นาฬิกาถึง 12 นาฬิกา ไม่มีการ  
 หมุนใดที่ทำให้  $\beta$  และกับแขนของมุม ABC ดังนั้นจึงได้ว่าส่วนของเส้นโค้ง  $\alpha$  ที่แตะกับแขนของ  
 มุม ABC มีเพียงด้าน  $\gamma$  เท่านั้น จากนั้นหมุนและเลื่อน  $\Omega'$  จนกระทั่งจุด  $t$  อยู่บนเส้นตรง  $\mathcal{L}$  แล้ว  
 หมุนและเลื่อนทั้ง  $\Omega'$  และ  $\gamma$  ให้  $\Omega'$  อยู่ ณ ตำแหน่ง 6 นาฬิกา โดยจุด  $t$  ยังคงอยู่บนเส้นตรง  $\mathcal{L}$   
 เหมือนเดิม โดยการพิสูจน์เช่นเดียวกับในกรณีที่ 2.2.2 (มองจุด  $t$  และ  $\gamma$  เป็นจุด  $b$  และ  $\beta$   
 ตามลำดับ) จะได้ว่า  $\alpha$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $\Omega'$

ดังนั้นได้ว่า  $\Omega'$  สามารถปิดทับทุก ๆ  $\alpha \in \Lambda$

□

สถาบันวิทยบริการ  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 4

### รูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถนำมาปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์

#### ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

ในบทนี้จะเป็นการศึกษางานของ Joseph A. Johnson, George D. Poole และ John E. Wetzel [9] ที่แสดงให้เห็นว่ารูปที่มีพื้นที่น้อยสุด(เท่าที่ได้ผลเป็นที่รับทราบ)ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นซึ่งรูปดังกล่าวมีพื้นที่ประมาณ 0.2465481 ตารางหน่วย (มีลักษณะดังรูปที่ 4.1) โดยในส่วนของบทจะเป็นการพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยสามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ได้ทุกเส้น จากนั้นจะเป็นการพิจารณาการตัดเล็กรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวให้มีลักษณะดังรูปที่ 4.1 พร้อมกับพิสูจน์ให้เห็นจริงว่ารูปที่ได้ใหม่นี้สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น และในที่สุดท้ายของบทนี้จะเป็นการเสนอข้อคาดการณ์ซึ่งเกี่ยวข้องกับการปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์

เพื่อความเข้าใจที่ตรงกันเราจะกำหนดสัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่จะใช้ในบทที่ 4 ดังต่อไปนี้

- ให้  $C$  คือ เซตของเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยทั้งหมด
- $D$  คือ เซตของเส้นโค้งเดรป(drape)ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยทั้งหมด
- $T_0$  คือ สามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วย
- $T_1$  คือ รูปซึ่งเกิดจากการตัดเล็ม  $T_0$  มีลักษณะดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1[9] T, รูปที่มีพื้นที่น้อยสุด (เท่าที่ทราบกันอยู่ในปัจจุบัน) ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

บทแทรกที่ 4.1 [9] สำหรับแต่ละ  $\gamma \in \mathcal{C}$  จะมี  $\delta \in \mathcal{D}$  ซึ่งทำให้  $\gamma \subseteq \text{conv}(\delta)$

### บทพิสูจน์

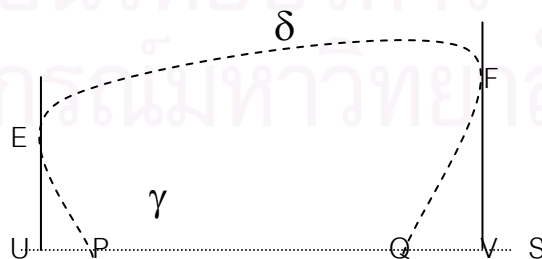
ให้  $\gamma \in \mathcal{C}$  เป็นเส้นโค้งซึ่งมี P และ Q เป็นจุดปลายทั้งสองด้าน

ให้ S แทนส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q

กรณีที่ 1  $P \neq Q$

สร้างเส้นค้ำจุนให้ตั้งฉากกับ S ที่จุด U และ V และ  $\gamma$  ที่จุด E และ F

ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2

กำหนดให้  $\delta'$  คือเส้นโค้ง UEFV

$$l(\delta') = UE + l(EF) + FV \leq l(PE) + l(EF) + l(FQ) = l(\gamma) = 1$$

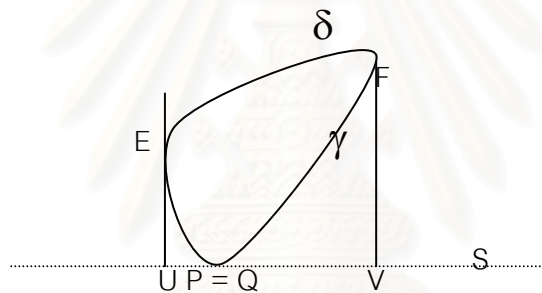
ให้  $\delta$  เป็นเส้นโค้งที่ได้จากการขยาย  $\delta'$  ให้มีความยาวหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $\delta \in \mathcal{D}$

จะได้ว่า  $\gamma \subseteq \text{conv}(\delta') \subseteq \text{conv}(\delta)$

**กรณีที่ 2**  $P = Q$

หมุมจุด  $P = Q$  ให้อยู่ในระดับแนวอนที่ต่ำสุดของเส้นโค้ง  $\gamma$

สร้างส่วนของเส้นตรง  $S$  ผ่านจุด  $P = Q$  ตามแนวอน จากนั้นสร้างเส้นค้ำจุนให้ตั้งฉากกับ  $S$  ที่จุด  $U$  และ  $V$  และ  $\gamma$  ที่จุด  $E$  และ  $F$  ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3

กำหนดให้  $\delta'$  เป็นเส้นโค้ง UEFV

$$l(\delta') = UE + l(EF) + FV \leq l(PE) + l(EF) + l(FP) = l(\gamma) = 1$$

ให้  $\delta$  เป็นเส้นโค้งที่ได้จากการขยาย  $\delta'$  ให้มีความยาวหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $\delta \in \mathcal{D}$

จะได้ว่า  $\gamma \subseteq \text{conv}(\delta') \subseteq \text{conv}(\delta)$

จากทั้ง 2 กรณีสรุปได้ว่า บทแทรกที่ 4.1 เป็นจริง □

ในลำดับต่อไปจะเป็นบทแทรกที่แสดงให้เห็นว่ารูปที่เป็นเซตคอนเวกซ์  $T_0$  สามารถปิดทับเส้นโค้งเดรป (drape) ได้ทุกรูปแบบ

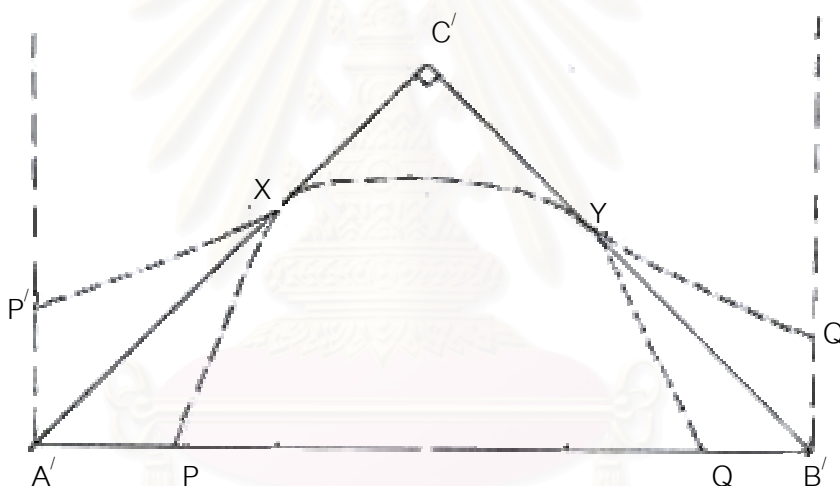


บทแทรกที่ 4.2 [9]  $T_0$  สามารถปิดทับทุก ๆ  $\delta \in \mathcal{D}$

### บทพิสูจน์

กำหนดให้  $\delta \in \mathcal{D}$

สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $T' = A'B'C'$  โดยให้ด้าน  $A'B'$  ผ่านจุด  $P$  และ  $Q$  เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของ  $T'$  ให้  $A'C'$  ทำมุม 45 องศา กับ  $A'B'$  สัมผัสกับ  $\delta$  ที่จุด  $X$  และ  $B'C'$  ทำมุม 45 องศา กับ  $A'B'$  สัมผัสกับ  $\delta$  ที่จุด  $Y$  จากนั้นสะท้อนส่วนของเส้นโค้ง  $XP$  และ  $YQ$  โดยใช้ส่วนของเส้นตรง  $A'C'$  และ  $B'C'$  เป็นแกนสะท้อน ได้ส่วนของเส้นโค้ง  $X'P'$  และ  $Y'Q'$  ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4

จะแสดงว่า  $A'B' \leq 1$

$$\begin{aligned} A'B' &\leq P'Q' \leq l(P'Q') = l(P'X) + l(XY) + l(YQ') \\ &= l(PX) + l(XY) + l(YQ) \\ &= l(\delta) = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า  $A'B' \leq 1$

และเนื่องจาก  $T'$  กับ  $T_0$  เป็นสามเหลี่ยมคล้ายกัน ประกอบกับ  $A'B' \leq 1$  จึงได้ว่า  $T_0$  สามารถปิดทับ  $T'$  ได้ โดยการวางให้  $AB$  ของ  $T_0$  บน  $A'B'$  ของ  $T'$  ดังนั้น แต่ละ  $\delta \in \mathcal{D}$  สามารถปิดทับได้ด้วย  $T_0$  โดยวางให้จุด  $P$  และ  $Q$  อยู่บนด้าน  $AB$  ของ  $T_0$   $\square$

ในลำดับต่อไปจะเป็นการแสดงว่า การปิดทับเส้นโค้งเดรป (drape) ในบทแทรกที่ 4.2 นั้น มีวิธีในการวางตัวปิดทับอย่างไรจึงจะช่วยให้เราสามารถตัดเต็มรูป  $T_0$  ให้กลายเป็นรูป  $T_1$  ซึ่งมีพื้นที่น้อยกว่าเดิมได้

**บทแทรกที่ 4.3** [9] แต่ละ  $\delta \in \mathcal{D}$  สามารถปิดทับได้ด้วย  $T_0$  โดยวางจุดกึ่งกลาง  $R$  ของ  $\delta$  อยู่บนเส้นมัธยฐานของรูป  $T_0$

### บทพิสูจน์

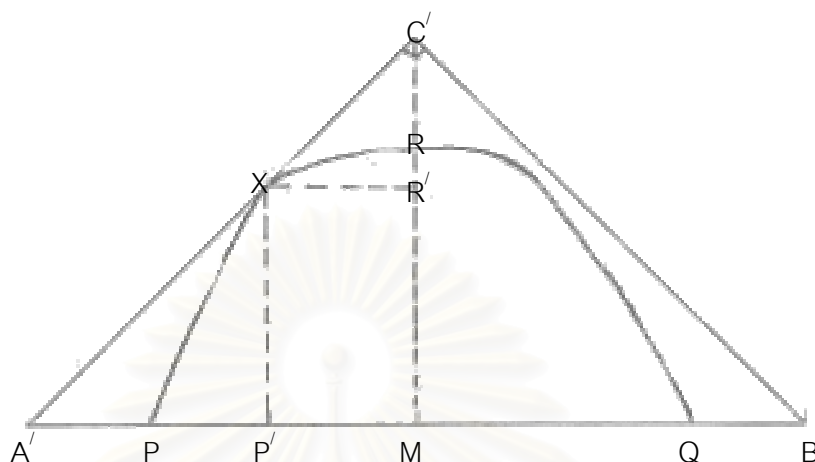
กำหนดให้  $\delta \in \mathcal{D}$  ซึ่งมี  $R$  เป็นจุดกึ่งกลาง โดยมี  $P$  และ  $Q$  เป็นจุดปลายทั้งสอง

ให้  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นส่วนของเส้นโค้งย่อย  $PR$  และ  $RQ$  ของ  $\delta$  ตามลำดับ สร้าง  $RM$  ให้ตั้งฉากส่วนของเส้นตรง  $PQ$  ที่จุด  $M$  จากนั้นสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $T' = A'B'C'$  คลุมเส้นโค้ง  $\delta$  โดยให้  $A'C' = B'C'$  ด้าน  $A'B'$  เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากอยู่บนส่วนของเส้นตรง  $PQ$  และ  $C'$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $RM$  และเนื่องจาก  $T'$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วดังนั้น  $C'M$  เป็นเส้นมัธยฐานของ  $T'$  หากไม่มีส่วนของ  $\delta$  ต่อกับแขนของมุม  $A'B'C'$  จะได้ว่า  $\delta$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $T'$  และมี  $R$  อยู่บนเส้นมัธยฐานของ  $T'$

ถ้ามีบางส่วนของ  $\delta$  ต่อกับแขนของมุม  $A'B'C'$  จะแยกพิจารณาเป็นกรณีดังนี้

**กรณีที่ 1**  $\delta$  ต่อกับส่วนของเส้นตรง  $A'C'$  แต่ไม่ต่อกับส่วนของเส้นตรง  $B'C'$

สมมติให้เส้นโค้งย่อย  $\alpha$  ต่อกับส่วนของเส้นตรง  $A'C'$  ที่จุด  $X$  ให้  $P'$  เป็นจุดบน  $A'B'$  ซึ่งทำให้  $XP'$  ตั้งฉากกับ  $A'B'$  และ  $R'$  เป็นจุดบน  $MC'$  ซึ่งทำให้  $XR'$  ตั้งฉากกับ  $MC'$  ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5

จะได้ว่า

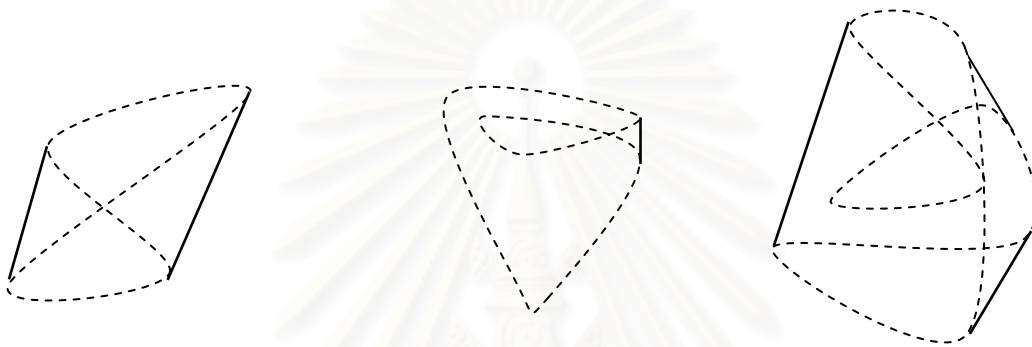
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A'B' &= A'M = A'P' + P'M = P'X + XR' \\ &\leq l(PX) + l(XR) \\ &\leq l(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $A'B' \leq 1$

สำหรับในกรณีที่  $\delta$  แต่ละส่วนของเส้นตรง  $B'C'$  แต่ไม่แต่ละส่วนของเส้นตรง  $A'C'$  หรือ กรณีที่  $\delta$  แต่ละส่วนของเส้นตรง  $B'C'$  และ  $A'C'$  นั้นมีวิธีการพิสูจน์เช่นเดียวกับในกรณีที่ 1 จะได้ว่า  $A'B' \leq 1$  ทุกกรณี ดังนั้น  $T'$  และ  $T_0$  เป็นสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน สรุปได้ว่า  $T_0$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง  $\delta$  ได้และมีจุดกึ่งกลาง  $R$  ของ  $\delta$  อยู่บนเส้นมัธยฐานของรูป  $T_0$  ด้วย โดยการวางให้ด้าน  $A'B'$  ของ  $T'$  อยู่บนด้าน  $AB$  ของ  $T_0$  และ  $C'M$  ทับ  $CM$  □

จากบทแทรกที่ 4.1 ได้ว่าสำหรับแต่ละ  $\gamma \in \mathcal{C}$  สามารถแทนได้ด้วยเส้นโค้ง  $\delta \in \mathcal{D}$  โดยที่  $\delta \leq 1$  ได้ ดังนั้นจากบทแทรกที่ 4.2 และ 4.3 จึงได้ว่า  $T_0$  สามารถปิดทับทุก  $\gamma \in \mathcal{C}$  ได้

นอกจากนี้เนื่องจากเส้นขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์ของเส้นโค้งปิดใด ๆ ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยเป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่งหน่วย[16] (ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.6) เราจึงสามารถสรุปได้อีกว่ารูป  $T_0$  สามารถปิดทับเส้นโค้งปิดใด ๆ ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้



รูปที่ 4.6 ขอบของคอนเวกซ์ฮัลล์ของเส้นโค้งปิดใด ๆ เป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์

ในลำดับต่อไปจะเป็นการตัดเล็กรูป  $T_0$  ให้เป็นรูป  $T_1$  ซึ่งมีพื้นที่น้อยลงแต่ยังคงสามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์และเส้นโค้งปิดได้ทุกเส้น และเพื่อความสะดวกเราจะทำความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์ต่าง ๆ เพิ่มเติมซึ่งต้องใช้ในการพิสูจน์ โดยจะใช้สัญลักษณ์เหล่านี้ไปจนจบบทนี้

กำหนดให้  $D$  และ  $E$  เป็นจุดบนด้าน  $AB$  ของ  $T_0$  ซึ่งทำให้  $AD = DE = EB = \frac{1}{3}$  หน่วย

ให้  $F$  เป็นจุดบน  $AC$  ซึ่งทำให้  $FD$  ตั้งฉากกับ  $AB$  ที่จุด  $D$

และ  $G$  เป็นจุดบน  $BC$  ซึ่งทำให้  $GE$  ตั้งฉากกับ  $AB$  ที่จุด  $E$

พิจารณาเมื่อ  $T_0$  อยู่บนระนาบ  $XY$  โดยให้  $M$  เป็นจุดกำเนิด  $(0,0)$  จะได้ว่าจุดต่าง ๆ มีพิกัดดังต่อไปนี้  $A = (-\frac{1}{2}, 0)$ ,  $B = (\frac{1}{2}, 0)$ ,  $C = (0, \frac{1}{2})$ ,  $D = (-\frac{1}{6}, 0)$ ,  $E = (\frac{1}{6}, 0)$  และมีทางเดิน  $\Gamma^-$  ของจุด  $(x, y)$  ใด ๆ ในจัตุภาคที่ 3 ซึ่งมีผลรวมของระยะห่างจากแกน  $y$  กับ ระยะห่างจากจุด  $D$  เป็น  $\frac{1}{2}$  หน่วยนั้นมีลักษณะเป็นพาราโบลา ซึ่งมีสมการเป็น

$$\Gamma^- : 9y^2 - 6x - 2 = 0$$

โดยมีจุด  $D = (-\frac{1}{6}, 0)$  เป็นจุดโฟกัส

สมการเส้นไดเรกทริกซ์คือ  $x = \frac{1}{2}$  และถ้า  $-\frac{1}{6} \leq x \leq 0$  แล้วจะได้ว่าเส้นโค้ง  $\Gamma^-$  นี้  
เชื่อมต่อกับจุด  $F = (-\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$  กับจุด  $H = (0, \frac{\sqrt{2}}{3})$  บนแกน  $y$  ซึ่งความชันของส่วนของเส้นโค้ง  $\Gamma^-$  ใน  
บริเวณนี้ลดลงจาก 1 ที่จุด  $F$  ไปถึง  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ที่จุด  $H$

สร้างรูปพาราโบลา  $\Gamma^+$  ที่สมมาตรกับ  $\Gamma^-$  จะได้ว่าสมการของ  $\Gamma^+$  คือ

$$\Gamma^+: 9y^2 + 6x - 2 = 0$$

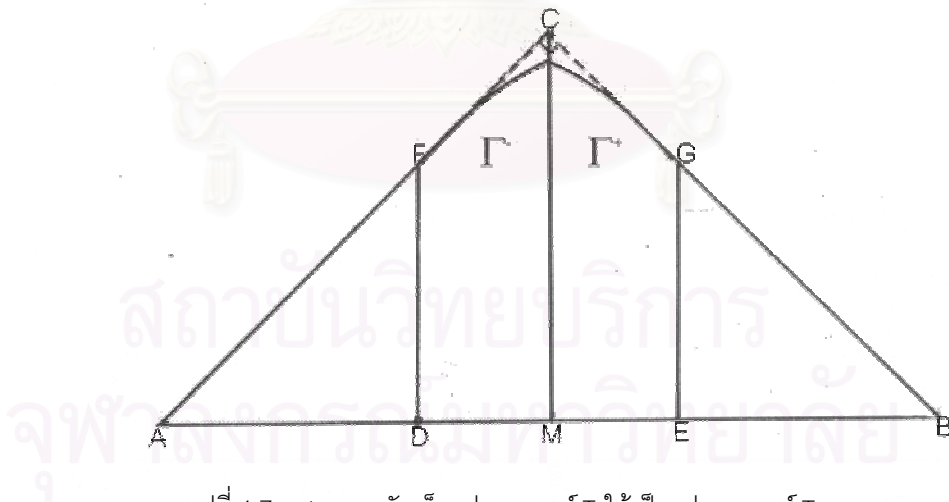
โดยมีจุด  $E = (\frac{1}{6}, 0)$  เป็นจุดโฟกัส

สมการเส้นไดเรกทริกซ์คือ  $x = -\frac{1}{2}$

เมื่อ  $x \geq 0$  จะได้ว่า  $G = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$  โดยมีความชันลดลงจาก  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ที่จุด  $H$

ไปเป็น -1 ที่จุด  $G$

จากนั้นลากเส้นเชื่อมจุด  $H$  กับ  $G$  และ  $H$  กับ  $F$  จะได้รูป  $T_1 = ABGHF$  ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ  
 $\frac{(4\sqrt{2} + 1)}{27} \approx 0.2465481$  ตารางหน่วย ดังแสดงในรูปที่ 4.7

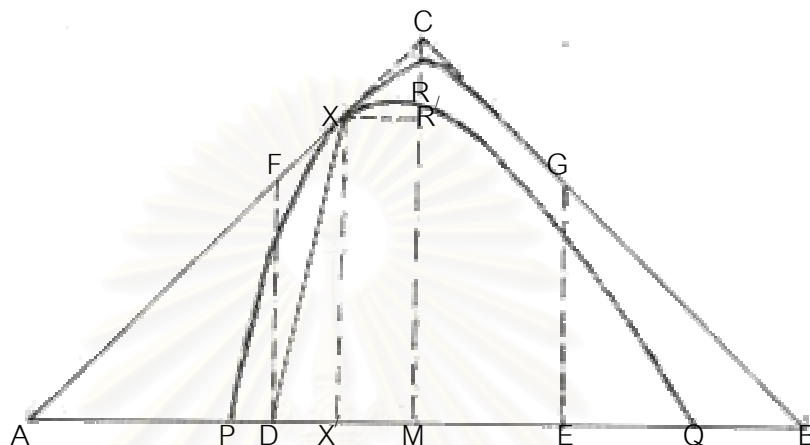


รูปที่ 4.7 แสดงการตัดเต็มรูปคอนเวกซ์  $T_0$  ให้เป็นรูปคอนเวกซ์  $T_1$

**บทแทรกที่ 4.4[9]** สำหรับแต่ละ  $\delta \in \mathcal{D}$  ซึ่งมี  $P, Q$  เป็นจุดปลายทั้งสองด้าน และ  $R$  เป็นจุดใด  
ๆ บน  $\delta$  กำหนดให้  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AD$  โดยที่  $P \neq D$  และ  $R$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  
 $CM$  ถ้า  $\alpha$  ตัดกับส่วนโค้ง  $\Gamma^-$  ของ  $T_1$  แล้ว  $l(\alpha) > \frac{1}{2}$  เมื่อ  $\alpha$  เป็นเส้นโค้งย่อย  $PR$  ของ  $\delta$

### บทพิสูจน์

กำหนดให้  $X$  เป็นจุดที่  $\alpha$  และกับส่วนโค้ง  $\Gamma^-$  ของ  $T_1$  ให้  $X'$  และ  $R'$  เป็นจุดบน  $CM$  ซึ่งทำให้  $XX'$  และ  $XR'$  ตั้งฉากกับ  $CM$  (ดังแสดงในรูป 4.8)



รูปที่ 4.8

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 l(\alpha) &= l(PX) + l(XR) \\
 &\geq PX + XR \\
 &> DX + XR' \text{ (เพราะว่า } P \text{ อยู่บนส่วนของเส้นตรง } AD \text{ และ } P \neq D) \\
 &> XX' + XR' \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

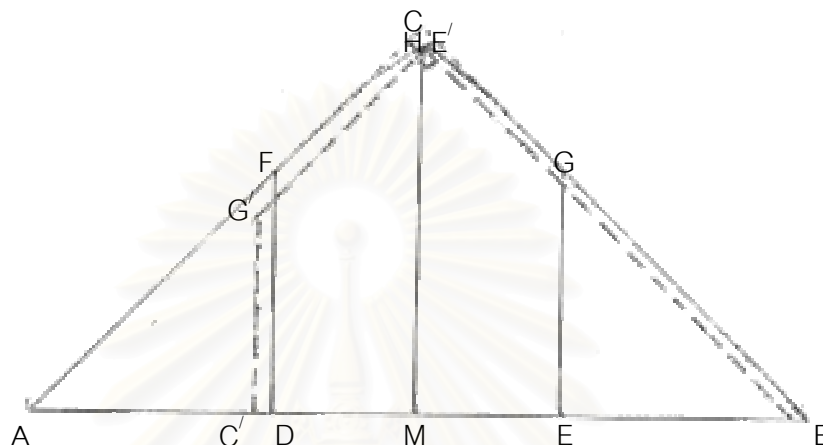
เนื่องจาก  $T_1$  มีส่วนของเส้นตรง  $MR'$  เป็นแกนสมมาตร ดังนั้นโดยบทแทรกที่ 4.4 จึงได้ว่า สำหรับแต่ละ  $\delta \in \mathcal{D}$  ซึ่งมี  $P$  และ  $Q$  เป็นจุดปลายทั้งสองด้าน และ  $R$  เป็นจุดใด ๆ บน  $\delta$  โดยที่  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $BE$ ,  $Q \neq E$  และ  $R$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $CM$  ถ้า  $\beta$  และกับส่วนโค้ง  $\Gamma^-$  แล้ว  $l(\beta) > \frac{1}{2}$  เมื่อ  $\beta$  เป็นเส้นโค้งย่อย  $PR$  ของ  $\delta$  □

ต่อไปจะกล่าวถึงการหมุนที่เหมาะสมที่ทำให้ AEGC เข้าไปอยู่ใน  $T_1$

บทแทรกที่ 4.5[9] ด้วยการหมุน 135 องศา จะทำให้รูปสี่เหลี่ยม AEGC ถูกปิดทับด้วย  $T_1$

**บทพิสูจน์**

พิจารณารูปที่ 4.9 ประกอบการพิสูจน์



รูปที่ 4.9

เนื่องจาก  $MH = EF = \frac{\sqrt{2}}{3}$  ดังนั้น เมื่อหมุน AEGC ด้วยมุม 135 องศาแล้วจะได้ว่า AEGC ถูกปิดทับด้วย  $T_1$  □

จากบทแทรกที่ 4.5 สามารถสรุปได้อีกว่า การหมุนด้วยมุม 135 องศาทำให้รูปสี่เหลี่ยม DBCF ถูกปิดทับด้วย  $T_1$

**ทฤษฎีบทที่ 4.6[9]**  $T_1 = ABH$  สามารถปิดทับทุก ๆ  $\delta \in \mathcal{D}$

**บทพิสูจน์**

ให้  $\delta \in \mathcal{D}$ , R เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\delta$  และ M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB เนื่องจาก  $T_0$  เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้น CM เป็นเส้นมัธยฐานของ  $T_0$  และ เนื่องจาก  $T_1$  เกิดจากการตัดบริเวณจุดยอดของ  $T_0$  ตามแนวของ  $\Gamma^+$  และ  $\Gamma^-$  ซึ่งสมมาตรกัน ดังนั้น CM จึงเป็นแกนสมมาตรของรูป  $T_1$  ด้วย

จากบทแทรกที่ 4.3 เราได้พิสูจน์แล้วว่า  $T_0$  สามารถปิดทับ  $\delta$  ได้ โดยให้ จุดปลาย  $P$ ,  $Q$  ของ  $\delta$  อยู่บน  $AM$  และ  $MB$  ตามลำดับ และจุด  $R$  อยู่บน  $CM$  จากนั้นวาง  $T_1$  ทับ  $T_0$  ซึ่งปิดทับ  $\delta$  อยู่ แล้วพิจารณาตำแหน่งของจุดต่าง ๆ บน  $\delta$  ใน  $T_1$  จะได้ว่า

ถ้า  $P = A$  และ  $Q = B$  จะได้ว่า  $\delta$  เป็นเส้นตรง ดังนั้นสามารถปิดทับได้ด้วย  $T_1$

ถ้า  $P = A$  และ  $Q = E$  (หรือ  $P = D$  และ  $Q = B$  หรือ ถ้า  $P = D$  และ  $Q = E$ )

หรือ ถ้า  $P = A$  และ  $Q \in ME$  ซึ่ง  $Q \neq E$  (หรือ  $P \in DM$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q = B$ )

หรือ ถ้า  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AD$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $ME$  (ถ้า  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $DM$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $EB$  ซึ่ง  $Q \neq E$ )

หรือ ถ้า  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AD$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q = E$  (ถ้า  $P = D$  และ  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $EB$  ซึ่ง  $Q \neq E$ )

หรือ ถ้า  $P = D$  และ  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $ME$  ซึ่ง  $Q \neq E$  (หรือ  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $DM$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q = E$ )

จะได้ว่า  $\delta$  อยู่ในบริเวณรูปเหลี่ยม  $AEGC$  (หรือ  $DBCF$ ) โดยบทแทรกที่ 4.5 สรุปได้ว่า  $\delta$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $T_1$

ถ้า  $P = A$  และ  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $EB$  ซึ่ง  $Q \neq E$  (หรือ  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AD$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q = B$ ) โดยบทแทรกที่ 4.4 จะได้ว่า  $\delta$  ไม่แตะทั้งส่วนโค้ง  $\Gamma^+$  และ  $\Gamma^-$  ดังนั้น  $\delta$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $T_1$

ถ้า  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AD$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $EB$  ซึ่ง  $Q \neq E$  โดยบทแทรกที่ 4.4 จะได้ว่า  $\delta$  ไม่แตะทั้งส่วนโค้ง  $\Gamma^+$  และ  $\Gamma^-$  ดังนั้น  $\delta$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $T_1$

ถ้า  $P$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $DM$  ซึ่ง  $P \neq D$  และ  $Q$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $ME$  ซึ่ง  $Q \neq E$  โดยบทแทรกที่ 4.4 จะได้ว่า  $\delta$  ไม่แตะทั้งส่วนโค้ง  $\Gamma^+$  และ  $\Gamma^-$  ดังนั้น  $\delta$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $T_1$

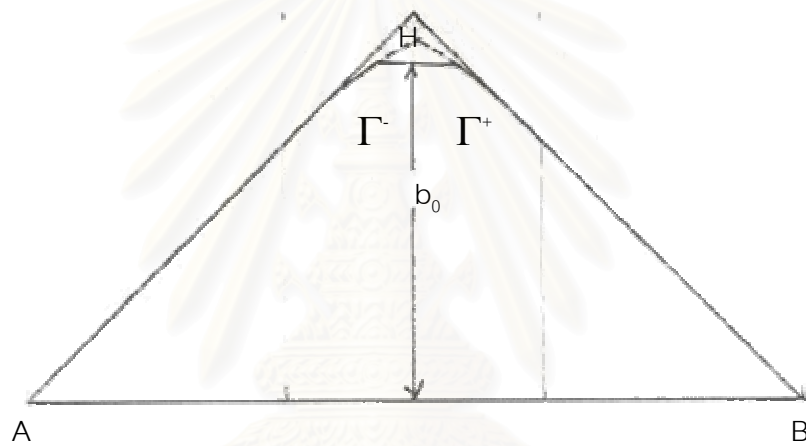
□

ในปัจจุบันรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดที่สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ ทุกเส้นมีพื้นที่ประมาณ 0.2464 ตารางหน่วย (น้อยกว่ารูป  $T_1$ ) รูปดังกล่าวได้จากการตัดเล็ม บางส่วนของรูป  $T_0$  ออกถูกค้นพบโดย ดร. วัชรินทร์ วิจิรมาลา ในปี ค.ศ. 2002 [7], [8] โดยรูปใหม่นี้ได้ผ่านการนำเสนอในงานสัมมนา Geometric Potpourri Seminar จัดขึ้นที่ University of Illinois at Urbana – Champaign เมื่อวันที่ 18 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2546 โดยมีชื่อเรื่องว่า “A smaller cover for unit convex arcs” ซึ่งขณะนี้ผลงานดังกล่าวกำลังอยู่ในขั้นตอนการตีพิมพ์

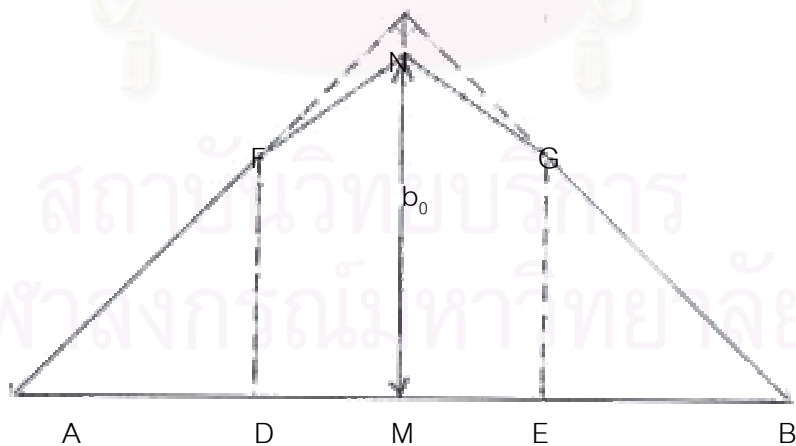


### ข้อคาดการณ์เกี่ยวกับการปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์

จากที่เราได้ทราบกันแล้วว่า รูปที่จะสามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้ นั้นจำเป็นจะต้องปิดทับเส้นโค้ง "The broadworm" ได้ก่อน ซึ่งการพิจารณาตัวปิดทับสำหรับเส้นโค้งที่คอนเวกซ์ก็จำเป็นจะต้องพิจารณาเงื่อนไขนี้ด้วยเช่นกัน นักคณิตศาสตร์ในกลุ่มนี้จึงได้ตั้งข้อคาดการณ์ที่น่าสนใจไว้ว่ารูปคอนเวกซ์  $T_2$  [9] ซึ่งมีพื้นที่ประมาณ 0.24509 ตารางหน่วย (ดังแสดงในรูปที่ 4.10(a)) และรูปคอนเวกซ์  $T_3$  [9] พื้นที่ประมาณ 0.23982 ตารางหน่วย (ดังแสดงในรูปที่ 4.10(b)) สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งได้ทุกเส้น โดยในปัจจุบันข้อคาดการณ์นี้ยังไม่สามารถพิสูจน์ได้



(a) รูป  $T_2$  พื้นที่ประมาณ 0.24509 ตารางหน่วย



(b) รูป  $T_3$  พื้นที่ประมาณ 0.23982 ตารางหน่วย

รูปที่ 4.8[9] รูปที่น่าจะเป็นตัวปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์

## บทที่ 5

### ข้อคาดการณ์ในปัญหา “Moser’s Worm Problem”

ในบทนี้จะเป็นการรวบรวมข้อคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา “Moser’s Worm Problem” ซึ่งนักคณิตศาสตร์ที่ศึกษาปัญหานี้ได้ตั้งไว้ โดยจากการศึกษาหลักฐานต่าง ๆ ที่ปรากฏนั้นสามารถแบ่งข้อคาดการณ์ออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ ๆ ด้วยกัน คือ ข้อคาดการณ์ที่ได้ถูกหักล้างไปแล้วเนื่องจากไม่สามารถปิดทับเส้นโค้งบางรูปแบบได้ และข้อคาดการณ์ซึ่งปัจจุบันยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าจริง หรือเท็จ

สำหรับการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการปิดทับ ดังเช่นปัญหา “Moser’s Worm Problem” นี้ มีข้อสังเกตที่พึงตระหนัก 3 ประการด้วยกัน [5] คือ

- คำตอบของปัญหาการปิดทับอาจไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียว
- ในการพิจารณาการปิดทับรูป  $\lambda$  ใด ๆ ในระนาบด้วยบริเวณ  $\Omega$  ซึ่งเป็นบริเวณที่น้อยที่สุดนั้น ขอบของบริเวณ  $\Omega$  และขอบของรูป  $\lambda$  อาจไม่สัมผัสกันก็ได้
- บางครั้งการตัดเล็มบริเวณเดิมที่สามารถปิดทับรูปได้ไปเรื่อย ๆ อาจไม่ได้นำมาซึ่งบริเวณที่เล็กที่สุดที่จะปิดทับรูปร่างได้

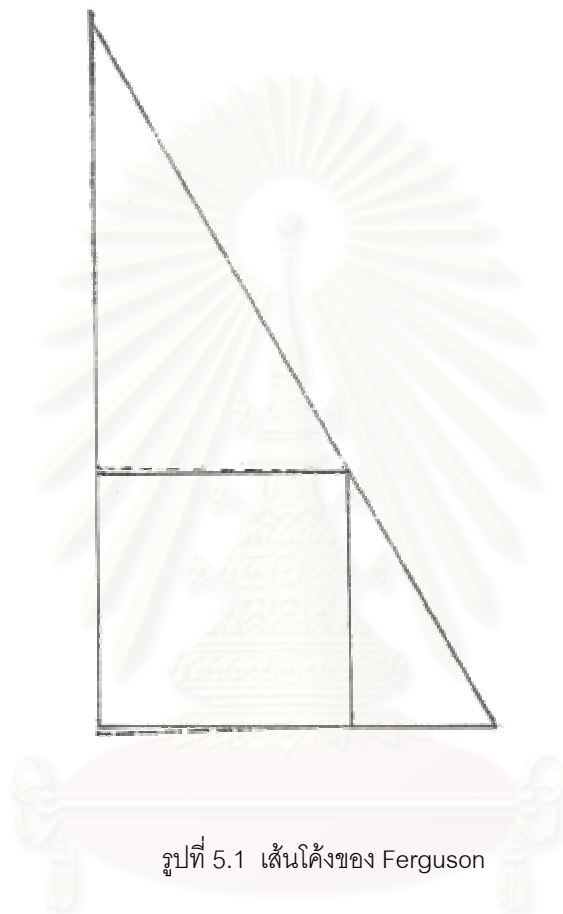
### ข้อคาดการณ์ที่ปัจจุบันได้ถูกหักล้างไปแล้ว

1. ในปี ค.ศ. 1974 [8] Norwood, Poole and Laidacker ได้ตั้งข้อคาดการณ์หนึ่งซึ่งมีความเชื่อว่า “รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มุมภายใน  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  ที่ใหญ่พอจะบรรจุรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีความยาวด้าน  $\frac{1}{3}$  หน่วย โดยให้มุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมนี้อยู่ที่มุมฉากของรูปสามเหลี่ยมดังกล่าว จะสามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้” จากการคำนวณได้ว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าว

คาดการณ์ข้างต้นนี้ มีด้านประกอบมุมฉาก ยาว  $\frac{1+\sqrt{3}}{3} \approx 0.910684$  หน่วย และ  $\frac{(3+\sqrt{3})}{9} \approx 0.525783$  หน่วย มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $\frac{(6+2\sqrt{3})}{9} \approx 1.1051567$  หน่วยและมีพื้นที่ประมาณ 0.23941 ตารางหน่วย

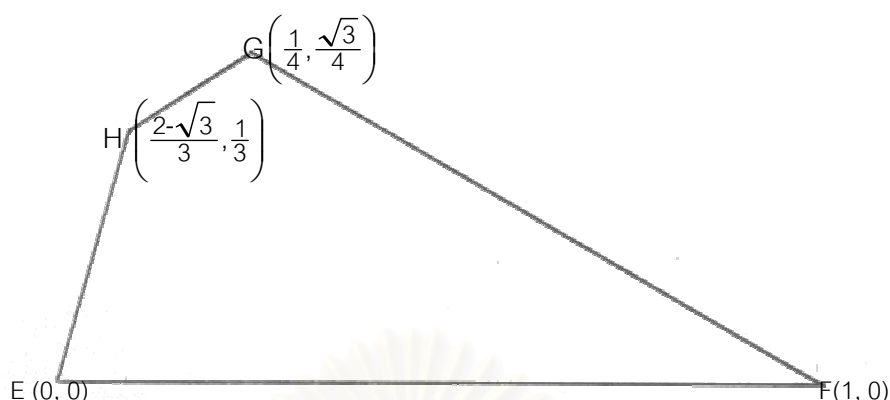
หลังจากที่ข้อคาดการณ์นี้ได้ถูกตั้งขึ้นประมาณ 8 ปี คือในปี ค.ศ. 2000 [17] Eric Ferguson วิศวกรชาวเนเธอร์แลนด์ได้เขียนข้อโต้แย้งของข้อคาดการณ์ผ่านทาง e - mail ฉบับลงวันที่ 10 เดือน

มีนาคม ค.ศ. 2000 มีใจความว่า “เส้นโค้งคอนเวกซ์ 3 ท่อน ซึ่งแต่ละท่อนมีความยาว  $\frac{1}{3}$  หน่วย ทำมุมกัน  $91^\circ$  ไม่สามารถถูกปิดทับได้ด้วยรูปดังกล่าว” (ดังแสดงในรูปที่ 5.1)



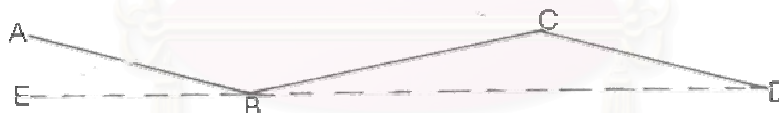
รูปที่ 5.1 เส้นโค้งของ Ferguson

2. ในปี ค.ศ. 1996 [18] Ian Stewart ได้เขียนบทความเรื่อง “Mother worm's blanket” ลงตีพิมพ์ในวารสาร “Scientific American Mathematical Recreations” ฉบับเดือน มกราคม ค.ศ. 1996 ซึ่งเนื้อหาในบทความนี้กล่าวถึงบริเวณ EFGH ที่ David Reynolds อ้างว่าสามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกรูปแบบโดยบริเวณนี้มีพื้นที่ประมาณ 0.239 ตารางหน่วย  $\angle FEH = 75^\circ$  และ  $\angle EFG = 30^\circ$  (ลักษณะดังรูปที่ 5.2)



รูปที่ 5.2 ตัวปิดทับตามสมมติฐานของ Reynold

โดยหลังจากที่บทความดังกล่าวถูกเผยแพร่ประมาณ 5 เดือน คือในเดือน มิถุนายน ค.ศ. 1996 [19] Richard Delaware ผู้อ่านวารสารดังกล่าวได้เขียนข้อโต้แย้งกลับมายังกองบรรณาธิการ โดย Richard Delaware ได้ยกตัวอย่างเส้นโค้งที่ไม่สามารถปิดทับได้ด้วยรูปดังกล่าวซึ่งเส้นโค้งนั้นคือเส้นโค้ง 3 ท่อนแบบซิกแซก ABCD ซึ่งมีระยะ  $AB = x$ ,  $BC = 1-2x$ , และ  $CD = x$  เมื่อ  $0 < x < 1$  ซึ่งทำให้ ขนาด  $\angle ABE = \angle CDE = 15^\circ$  (ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.3)



รูปที่ 5.3 เส้นโค้งของ Richard

จากการศึกษาข้อคาดการณ์ที่ได้ถูกหักล้างไปดังกล่าวข้างต้นและข้อสังเกตจากการพิจารณา รูปร่างของบริเวณต่าง ๆ ที่สามารถปิดทับได้นั้น พบว่าการที่เราจะพิจารณาคัดเลือกบริเวณที่มีพื้นที่น้อยกว่า 0.27524 ตารางหน่วย (ซึ่งเป็นขนาดพื้นที่ของรูปที่มีพื้นที่น้อยสุดในช่วงปี ค.ศ. 1992 ถึง ค.ศ. 2002 ที่เรียกว่า  $\Omega'$  ดังแสดงในบทที่ 3) เพื่อให้มีความเป็นไปได้ที่จะเป็นคำตอบของปัญหา "Moser's Worm Problem" นั้น มีคุณสมบัติสำคัญ 5 ประการ ที่ควรตระหนัก [5], [12], [18] ก่อนการพิจารณาในขั้นต่อไปคือ

- บริเวณนั้นควรจะสามารถปิดทับเส้นตรงที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้
- บริเวณนั้นควรจะสามารถปิดทับเส้นโค้ง “the broad worm ” ได้ หรืออีกนัยหนึ่งคือ บริเวณนั้นควรมีพื้นที่อย่างน้อย 0.21946 ตารางหน่วย
- บริเวณนั้นควรจะสามารถปิดทับเส้นโค้ง “The Staple” ได้
- บริเวณนั้นควรจะสามารถปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนแบบซิกแซกของ Besicovitch ได้
- บริเวณนั้นควรจะสามารถปิดทับเส้นโค้ง 2 ท่อนซึ่งเป็นขอบของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

$$\text{ความยาวด้าน} \frac{1}{2} \text{ หน่วยได้}$$

ในลำดับต่อไปจะเป็นการรวบรวมข้อคาดการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับปัญหา “Moser’s Worm Problem” ซึ่งในปัจจุบันยังไม่มีผู้ใดสามารถแสดงได้ว่าข้อคาดการณ์ต่อไปนี้ เป็นจริง หรือเท็จ

### ข้อคาดการณ์ซึ่งปัจจุบันยังไม่สามารถแสดงได้ว่าจริง หรือเท็จ

**ข้อคาดการณ์ที่ 1**[4],[5],[12] กล่าวว่า “เซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย พื้นที่  $\frac{\pi}{12} \approx 0.26180$  ตารางหน่วย (ลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.4) สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น” ข้อคาดการณ์นี้ได้ถูกตั้งขึ้นโดย John E. Wetzel ในปี ค.ศ.1970 ซึ่งนับเป็นเซตที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบันที่เชื่อกันว่าน่าจะปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น



รูปที่ 5.4 แสดงลักษณะของตัวปิดทับในข้อคาดการณ์ที่ 2

**ข้อคาดการณ์ที่ 2** [5],[12] กล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมภายใน  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  ซึ่งใหญ่พอที่จะบรรจุรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวด้าน  $\frac{1}{3}$  หน่วย โดยให้ด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมนั้น จะสามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น” ข้อคาดการณ์นี้ได้ถูกตั้งขึ้นโดย John E. Wetzel ในปี ค.ศ. 1970 ซึ่งจากการคำนวณได้ว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าว มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $\frac{(19+8\sqrt{3})}{27} \approx 1.1031337$  หน่วย ด้านประกอบมุมฉากทั้งสองข้างยาว  $\frac{(3+4\sqrt{3})}{18} \approx 0.55157$  หน่วย และ  $\frac{(4+\sqrt{3})}{6} \approx 0.955342$  หน่วย ตามลำดับ ซึ่งมีพื้นที่น้อยกว่า 0.2634674 ตารางหน่วย

**ข้อคาดการณ์ที่ 3** [5],[12] กล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมภายใน  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$  มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว  $\sqrt{\frac{10}{9}} \approx 1.054093$  หน่วย ด้านประกอบมุมฉากยาว  $\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745356$  หน่วย มีพื้นที่ประมาณ 0.2777... ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้” ข้อคาดการณ์นี้ได้ถูกตั้งขึ้นโดย John E. Wetzel ในปี ค.ศ. 1970

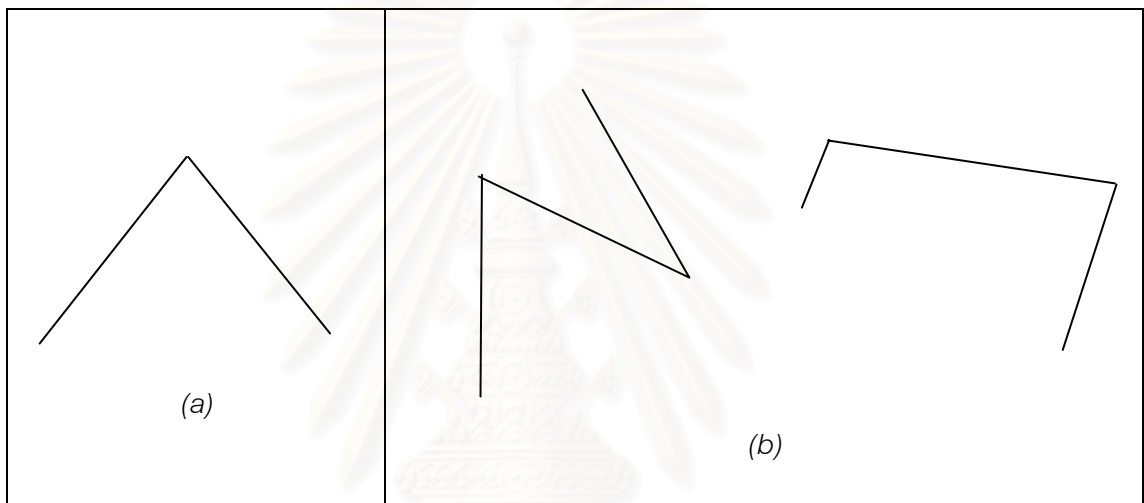
**ข้อคาดการณ์ที่ 4** [12] กล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีความยาวด้านเท่ากับ  $\sqrt{\frac{28}{27}} \approx 1.01835$  หน่วย (มีความสูง  $\frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0.881917$  หน่วย) พื้นที่น้อยกว่า 0.4490502 ตารางหน่วย สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้” ข้อคาดการณ์นี้ได้ถูกตั้งขึ้นโดย Besicovitch ในปี ค.ศ. 1965

**ข้อคาดการณ์ที่ 5** [4] กล่าวว่า “เซตคอนเวกซ์ใดที่สามารถปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนแบบซิกแซกที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นจะสามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้” ข้อคาดการณ์นี้เป็นที่ยอมรับของ John Wetzel, John Gerriets และ George Poole (นักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงในการศึกษาปัญหา “Moser's Worm Problem”) ซึ่งทั้ง 3 ท่านเชื่อว่าข้อคาดการณ์ดังกล่าวน่าจะเป็นจริง โดยข้อคาดการณ์นี้ได้รับการตีพิมพ์ครั้งแรกในปี ค.ศ. 1974 ในบทความชื่อ “Convex regions which cover arcs of constant length [4]”

## บทที่ 6

### การปิดทับเส้นโค้งด้วยเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาผลงานของ John E. Wetzel และ Patrick Coulton เกี่ยวกับการพิสูจน์ว่า เซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยสามารถปิดทับ เส้นโค้ง 2 ท่อน (ตัวอย่างดังรูปที่ 6.1(a)) เส้นโค้งคอนเวกซ์ และเส้นโค้ง 3 ท่อน (ตัวอย่างดังรูปที่ 6.1(b)) ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้



รูปที่ 6.1 (a) ตัวอย่าง เส้นโค้ง 2 ท่อน

(b) ตัวอย่างเส้นโค้ง 3 ท่อน

จากการศึกษาพบว่า เซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยนี้ได้รับการพิจารณาเพื่อเป็นตัวปิดทับมาเป็นเวลานานแล้ว เริ่มตั้งแต่ John E. Wetzel ได้ตั้งข้อคาดการณ์ขึ้นในปี ค.ศ. 1970 [4],[5],[12] มีใจความว่า “เซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย (พื้นที่น้อยกว่า 0.26180 ตารางหน่วย) สามารถปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น” ซึ่งในปัจจุบันยังไม่มีผู้ใดสามารถพิสูจน์ได้ว่าข้อคาดการณ์ดังกล่าวเป็นจริงหรือเท็จ นอกจากนี้ยังพบว่าเซกเตอร์ดังกล่าวได้รับการตรวจสอบแล้วว่าสามารถปิดทับรูปแบบพื้นฐาน (ดังที่ได้กล่าวไปในบทที่ 5) ได้ทุกรูปแบบ หากแต่ไม่มีการบันทึกเป็นลายลักษณ์อักษร จนกระทั่งในปี ค.ศ. 2000 [11] Patrick Coulton ก็ได้พิสูจน์ให้เห็นจริงว่าเซกเตอร์ดังกล่าวสามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ และเส้นโค้ง 3 ท่อนที่สมมาตรแต่ไม่คอนเวกซ์ได้ และยังได้เสนอแนะการพิสูจน์การปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนที่ไม่สมมาตรและไม่คอนเวกซ์ไว้ด้วยหากแต่ว่ายังไม่สมบูรณ์เราจึงจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ แต่เรา

สามารถศึกษาได้จาก [11] โดยผลงานดังกล่าวถูกเผยแพร่ในงาน Geometric Potpourri Seminar เมื่อวันที่ 30 มิถุนายน ค.ศ. 2003 (ปัจจุบันผลงานดังกล่าวยังไม่ได้รับการตีพิมพ์)

เนื่องด้วยข้อคาดการณ์ดังกล่าวข้างต้นได้ถูกตั้งขึ้นมานานกว่า 30 ปี ประกอบกับพื้นที่ของเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยมีค่าน้อยกว่าพื้นที่ของรูปคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยที่สุดในปัจจุบัน(ดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 3) และยังสามารถปิดทับรูปแบบพื้นฐานได้ทั้งหมด จึงทำให้เซกเตอร์นี้ได้รับความสนใจจากผู้ศึกษาในเรื่อง “Moser’s Worm Problem” เป็นอย่างมาก เราจึงได้ทำการศึกษาและรวบรวมบทพิสูจน์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการพยายามแสดงว่าเซกเตอร์ดังกล่าวสามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นไว้ในบทนี้

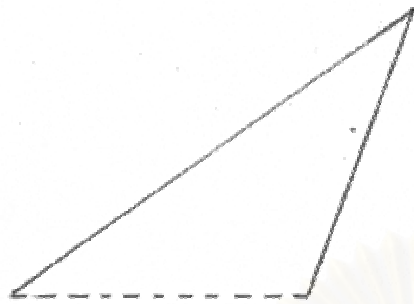
สำหรับการพิสูจน์ที่จะกล่าวถึงในบทนี้ มีข้อสังเกตเบื้องต้นที่ควรทราบและทำความเข้าใจก่อนการศึกษา คือ หากตัวปิดทับ  $K$  สามารถปิดทับ  $\text{conv}(\lambda)$  เมื่อ  $\lambda$  เป็นเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้  $K$  จะสามารถปิดทับเส้นโค้ง  $\lambda$  ได้ด้วย นอกจากนี้หาก  $K$  สามารถปิดทับ  $P \supseteq \text{conv}(\lambda)$  แล้ว  $K$  จะสามารถปิดทับ  $\lambda$  ได้ด้วย ดังนั้นในการพิจารณาการปิดทับเส้นโค้ง  $\lambda$  ด้วย  $K$  เราสามารถพิจารณาการปิดทับเส้นโค้งที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์สมนัยกับ  $\text{conv}(\lambda)$  หรือเส้นโค้งที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์ใหญ่กว่า  $\text{conv}(\lambda)$  ก็ได้

### พิจารณารูปที่ 6.2 ชุด a รูปที่ 6.2 ชุด b และรูปที่ 6.2 ชุด c ประกอบการพิจารณาต่อไป

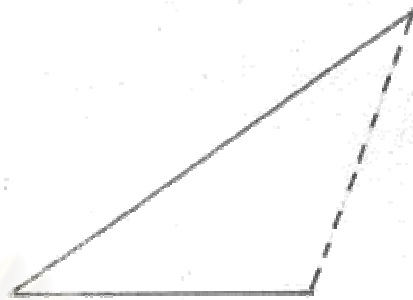
จะเห็นว่ารูปในแต่ละชุดข้างล่างนี้มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็นเซตเดียวกัน ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า  $K$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง(เส้นทึบ) รูปที่ 1 ในชุด a นั้นเราอาจแสดงว่า  $K$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง(เส้นทึบ)รูปที่ 2(หรือรูปที่ 3) ในชุด a ก็ได้ ดังนั้นในการพิสูจน์ทฤษฎีที่ 6.1 จึงเพียงพอที่จะแสดงว่าเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยสามารถปิดทับเส้นโค้ง 2 ท่อนที่มีลักษณะดังรูปที่ 3 ชุด a ได้

สำหรับในการปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนก็เช่นเดียวกัน จะเห็นว่าเส้นโค้ง(เส้นทึบ)รูปที่ 1 ในชุด b มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็นเซตเดียวกับรูปที่ 2 ในชุด b ดังนั้นในทฤษฎีที่ 6.2 หากเราแสดงว่า เซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนที่มีลักษณะดังรูปที่ 2 ชุด b ได้ แล้วเราจะสรุปได้ว่าเซกเตอร์นี้สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ 3 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้ เส้นโค้งในชุด c ก็แสดงได้เช่นเดียวกัน

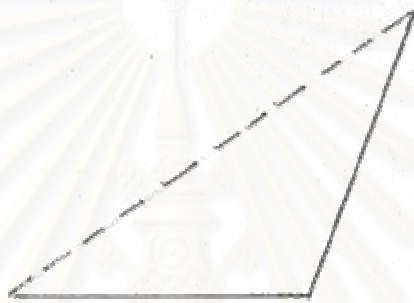




รูปที่ 1



รูปที่ 2

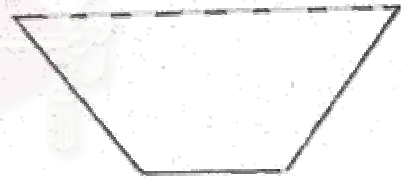


รูปที่ 3

รูปที่ 6.2 ชุด a



รูปที่ 1



รูปที่ 2

รูปที่ 6.2 ชุด b



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

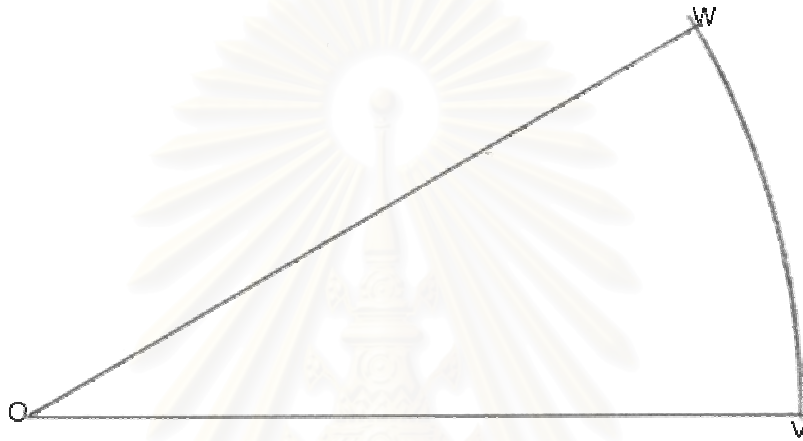
รูปที่ 6.2 ชุด c

เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้ในบทนี้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้  $\Gamma$  เป็นเซตของเส้นโค้ง 2 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยทั้งหมด

$\Psi$  เป็นเซตของเส้นโค้ง 3 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยทั้งหมด

และ  $\Pi$  เป็นเซกเตอร์ 30 องศาที่มีรัศมีหนึ่งหน่วยดังรูปที่ 6.3



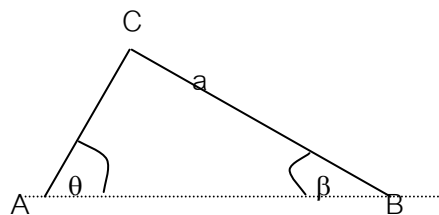
รูปที่ 6.3 แสดงตัวปิดทับ  $\Pi$

ในลำดับต่อไปจะเป็นการศึกษาผลงานของ John E. Wetzel เกี่ยวกับการพิสูจน์ว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง 2 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น

**ทฤษฎีบทที่ 6.1[10]**  $\Pi$  สามารถปิดทับทุก ๆ  $\gamma \in \Gamma$  ได้

**บทพิสูจน์**

ให้  $\gamma = ABC \in \Gamma$  เนื่องจาก  $\text{conv}(\gamma)$  เป็นรูปสามเหลี่ยม และ  $AC + CB = 1$  โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ ด้าน BC ยาว  $a \leq \frac{1}{2}$  หน่วย และจากข้อสังเกตข้างต้นเพียงพอที่จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่  $\angle BAC = \theta \leq 90^\circ$ ,  $\angle CBA = \beta$  และดังรูปที่ 6.4

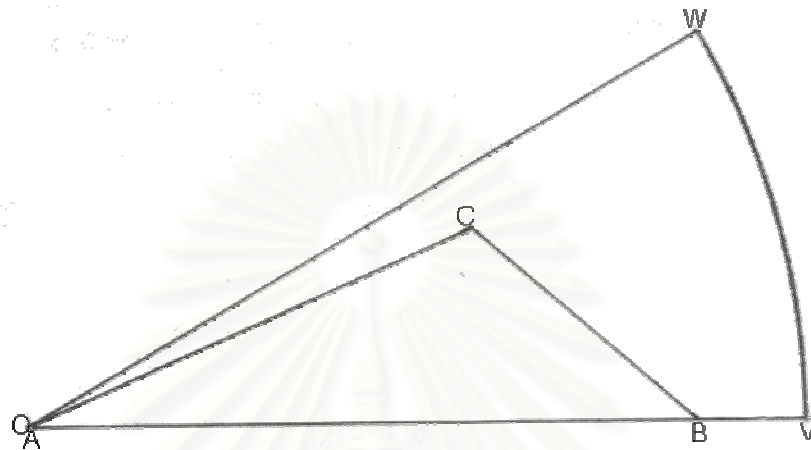


รูปที่ 6.4 แสดงเส้นโค้ง  $\gamma = ABC$

กรณีที่ 1  $\theta \leq 30^\circ$  องศา

เนื่องจาก  $OB = AB \leq AC + CB = 1$  จะได้ว่า  $\gamma$  ถูกปิดทับได้ด้วย  $\Pi$

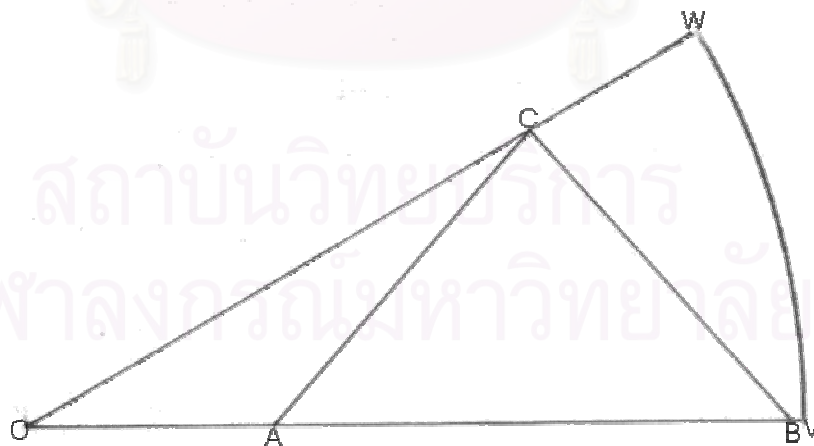
ดังรูปที่ 6.5



รูปที่ 6.5

กรณีที่ 2  $30^\circ < \theta \leq 90^\circ$

วาง  $\gamma$  ใน  $\Pi$  โดยให้ด้าน  $AB$  ของ  $\text{conv}(\gamma)$  อยู่บนด้าน  $OV$  ของ  $\Pi$  จากนั้นเลื่อน  $\gamma$  ไปทาง  $O$  จนกระทั่ง  $\gamma$  ตัดกับ  $OW$  ที่จุด  $C$  ดังรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6

จะแสดงว่า  $OC < 1$  และ  $OB < 1$

จากรูปที่ 6.6 และโดยกฎของไซน์ (The law of sines) จะได้ว่า

$$\frac{\sin 30^\circ}{a} = \frac{\sin \beta}{OC}$$

และ

$$\frac{\sin 30^\circ}{a} = \frac{\sin(150^\circ - \beta)}{OB}$$

ดังนั้น

$$OC = \frac{a \sin \beta}{\sin 30^\circ} = 2a \sin \beta \leq 1$$

$$OB = \frac{a \sin(150^\circ - \beta)}{\sin 30^\circ} = 2a \sin(150^\circ - \beta) \leq 1$$

จะได้ว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับ  $\gamma$  ได้

□

จากทฤษฎีบทที่ 6.1 ทำให้เรายืนยันได้ว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง 2 ท่อนความยาวหนึ่งหน่วยซึ่งมีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน  $\frac{1}{2}$  หน่วยได้

ในลำดับต่อไปจะเป็นการศึกษาผลงานของ Patrick Couton ที่พิสูจน์ว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้งที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้น ภายใต้ความเชื่อในข้อคาดการณ์ที่ว่า “เซตคอนเวกซ์ใดที่สามารถปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนแบบซิกแซกที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นจะสามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้” โดยในทฤษฎีบทที่ 6.2 จะเป็นการพิสูจน์ว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยและสมมาตรได้ จากนั้นในทฤษฎีบทที่ 6.3 จะแสดงให้เห็นว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์สามท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยแต่ไม่สมมาตรได้ และสุดท้ายในทฤษฎีบทที่ 6.4 จะเป็นการแสดงว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้

ทฤษฎีบทที่ 6.2 [11] สำหรับแต่ละ  $\omega \in \Psi$  ถ้า  $\omega$  สมมาตรแล้ว  $\omega$  จะสามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$

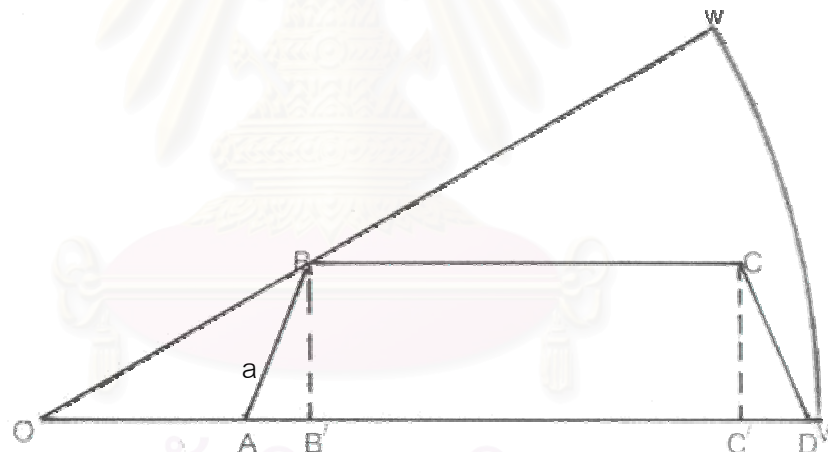
### บทพิสูจน์

ให้  $\omega = ABCD \in \Psi$  โดยที่  $\omega$  มีความสมมาตร

**กรณีที่ 1**  $\omega$  มีสมมาตรแบบเส้น

จะได้ว่า  $\omega$  มี  $\text{conv}(\omega)$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีด้านที่อยู่ตรงข้ามกันยาวเท่ากันอย่างน้อย 1 คู่ และมุมที่อยู่ติดกันมีขนาดเท่ากัน 2 คู่ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้  $AB = CD = a$  หน่วย และจากข้อสังเกตข้างต้นเพียงพอที่จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่  $\angle DAB = \angle CDA = \alpha \leq 90^\circ$  ดังนั้น  $\angle ABC = \angle BCD = 180^\circ - \alpha$

วางด้าน  $AD$  ของ  $\text{conv}(\omega)$  ตามแนวของ  $OV$  จากนั้นเลื่อน  $\omega$  ไปทางจุด  $O$  จนกระทั่ง  $\omega$  ต่อกับ  $OV$  ที่จุด  $B$  ให้  $B', C'$  เป็นจุดบน  $OV$  ซึ่งทำให้  $BB' \perp OV$  และ  $CC' \perp OV$  ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 6.7

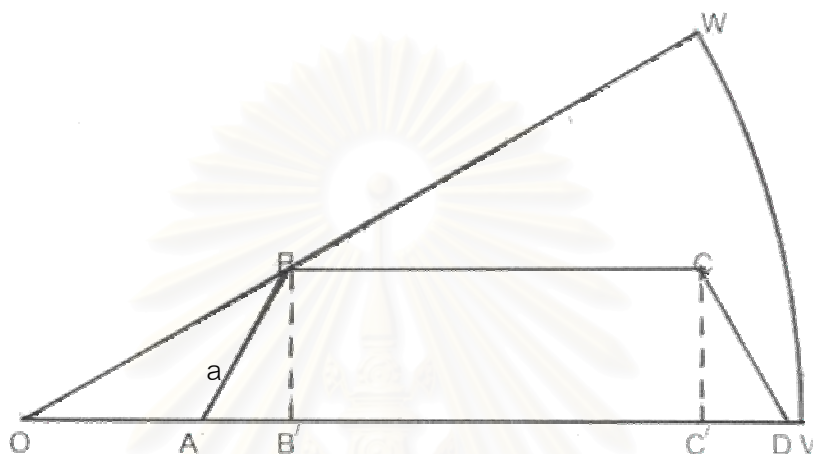


รูปที่ 6.7

บทแทรกที่ 6.2.1 [11] ถ้า  $\alpha = 60^\circ$  แล้ว  $\omega$  จะสามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$   
บทพิสูจน์

สมมติ  $\alpha = 60^\circ$  (พิจารณารูปที่ 6.8 ประกอบการพิสูจน์)

เห็นได้ชัดว่า D เป็นจุดบน  $\omega$  ซึ่งห่างจากจุด O มากสุด



รูปที่ 6.8

ดังนั้น  $BC = B'C' = 1-2a$

$$BB' = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$AB' = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2} = C'D$$

$$OB' = \frac{BB'}{\tan 30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right) \sqrt{3} = \frac{3}{2} a$$

จึงได้ว่า  $OD = OB' + B'C' + C'D = \frac{3}{2} a + (1-2a) + \frac{a}{2} = 1 = OV$

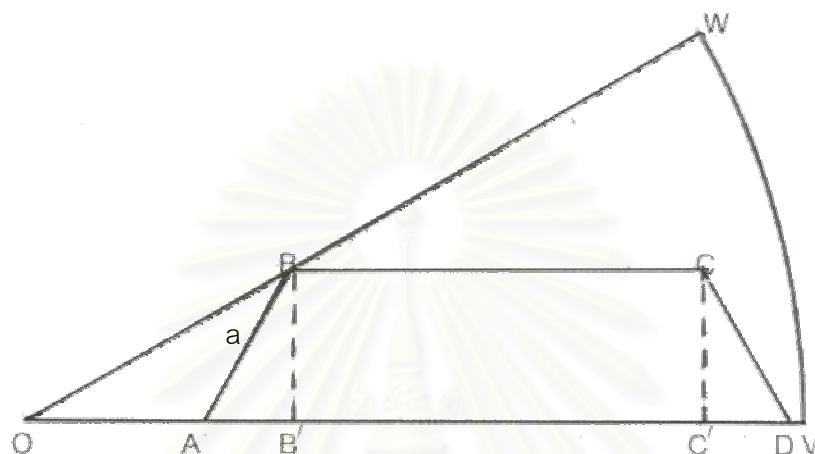
ดังนั้นถ้า  $\alpha = 60^\circ$  แล้ว  $\omega$  จะสามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$  □

บทแทรกที่ 6.2.2 [11] สำหรับแต่ละค่า  $a$  ที่กำหนดให้จะได้ว่า  $OD$  มีระยะมากที่สุดเมื่อ

$$\alpha = 60^\circ$$

### บทพิสูจน์

ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 (พิจารณารูปที่ 6.9 ประกอบการพิสูจน์)



รูปที่ 6.9

จะได้ว่า

$$BB' = a \sin \alpha = CC'$$

$$AB' = a \cos \alpha = C'D$$

$$OB' = \frac{BB'}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} BB' = \sqrt{3} a \sin \alpha$$

จาก  $AB = a = CD$  และ  $OW$  มีความยาวเท่ากับ 1 จึงได้ว่า  $BC = 1 - 2a = B'C'$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} OD &= OB' + B'C' + C'D \\ &= \sqrt{3} a \sin \alpha + (1 - 2a) + a \cos \alpha \end{aligned}$$

พิจารณา  $\frac{d}{d\alpha} OD = 0$  จะได้ว่า

$$\sqrt{3} a \cos \alpha - a \sin \alpha = 0$$

นั่นคือ

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

และเนื่องจากว่า

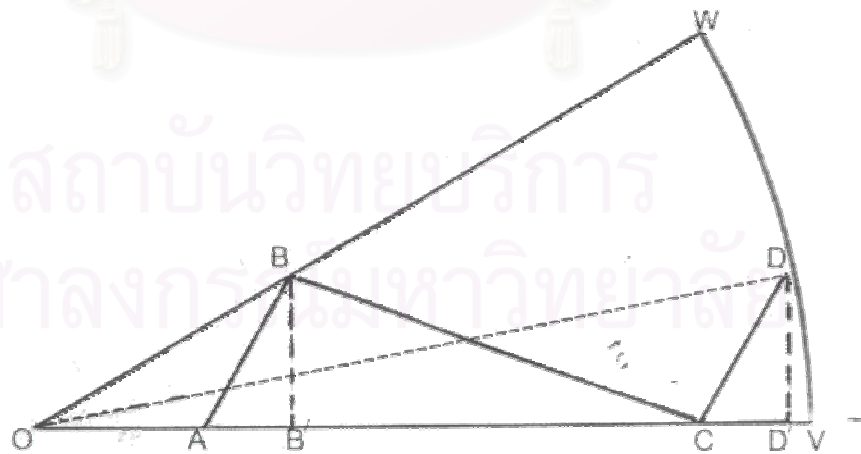
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d^2\alpha} OD \Big|_{\alpha=60^\circ} &= -\sqrt{3}a \sin\alpha - a \cos\alpha \Big|_{\alpha=60^\circ} \\ &= -\sqrt{3}a \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - a \frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นบทแทรกที่ 6.2.2 เป็นจริง  $\square$

จากบทแทรกที่ 6.2.1 และบทแทรกที่ 6.2.2 เราสรุปได้ว่า ถ้า  $\mathcal{W}$  มีสมมาตรแบบเส้น แล้ว  $\mathcal{W}$  จะสามารถถูกปิดทับได้ด้วย  $\Pi$

**กรณีที่ 2**  $\mathcal{W}$  มีสมมาตรแบบจุด

จะได้ว่า  $\text{conv}(\mathcal{W})$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน วางด้าน AC ของ  $\text{conv}(\mathcal{W})$  ตามแนวของ OV จากนั้นเลื่อน  $\mathcal{W}$  ไปทางจุด O จนกระทั่ง  $\mathcal{W}$  ตัดกับ OW ที่จุด B ให้  $B', D'$  เป็นจุดบน OV ซึ่งทำให้  $BB' \perp OV$  และ  $DD' \perp OV$  ตามลำดับ โดยไม่เสียหายให้  $AB = CD = a$  หน่วย และจากข้อสังเกตข้างต้นเพียงพอที่จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่  $\angle CAB = \angle D'CD = \alpha \leq 90^\circ$  จะได้ว่า  $BC = 1 - 2a$  หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 6.10



รูปที่ 6.10



เนื่องจาก  $BB' = DD'$  และ  $\sin\alpha = \frac{BB'}{a}$  จะได้ว่า  $BB' = DD' = a \sin\alpha$  หน่วย

ให้  $M$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $BC$  เนื่องจาก  $\text{conv}(\mathcal{O})$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน  
จะได้ว่า  $M$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $AD$  ด้วย

เนื่องจาก  $\tan 30^\circ = \frac{BB'}{OB'}$  จะได้  $OB' = \frac{a \sin\alpha}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} a \sin\alpha$

เนื่องจาก  $\triangle AB'B$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น

$$AB' = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \alpha)} = a \cos \alpha = CD'$$

เนื่องจาก  $\triangle BB'C$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น

$$B'C = \sqrt{(1-2a)^2 - (a \sin \alpha)^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} OD' &= OB' + B'C + CD' \\ &= \sqrt{3}a \sin \alpha + \sqrt{(1-2a)^2 - (a \sin \alpha)^2} + a \cos \alpha \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\triangle OD'D$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} OD^2 &= (DD')^2 + (OD')^2 \\ &= (a \sin \alpha)^2 + (\sqrt{3}a \sin \alpha + \sqrt{(1-2a)^2 - (a \sin \alpha)^2} + a \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\alpha$  เป็นค่าคงที่และจากสมการข้างต้นจะได้ว่าค่าของระยะ  $OD$  ขึ้นกับค่า  $a$

พิจารณา  $\frac{d}{da} OD^2$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} OD^2 &= 2a \sin^2 \alpha + \left( 2(\sqrt{3}a \sin \alpha + \sqrt{(1-2a)^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + a \cos \alpha) \right. \\ &\quad \left. [\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha + \frac{1}{2\sqrt{(1-2a)^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} (8a - 4 - 2a \sin^2 \alpha)] \right) \\ &= 2a \sin^2 \alpha + \left( 2\sqrt{3}a \sin \alpha + 2\sqrt{(1-2a)^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + 2a \cos \alpha \right) \\ &\quad \left[ \sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha + \frac{1}{2\sqrt{(1-2a)^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} (8a - 4 - 2a \sin^2 \alpha) \right] \\ &= 2a \sin^2 \alpha + \left( 4a \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) + 2\sqrt{(1-2a)^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \right) \\ &\quad \left[ 2 \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2\sqrt{(1-2a)^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} (8a - 4 - 2a \sin^2 \alpha) \right] \end{aligned}$$

พิจารณาเมื่อ  $a = 0$

$$\text{สำหรับแต่ละ } \alpha \neq \frac{\pi}{3} \text{ จะได้ว่า } \frac{d}{da} OD^2 \Big|_{a=0} = 4 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - 4 < 0$$

สรุปได้ว่า เมื่อ  $a$  มีค่ามากขึ้น ระยะ  $OD$  จะน้อยลงและน้อยกว่า 1 ดังนั้น  $\omega$  ถูกปิดทับ

ด้วย  $\Pi$  แต่เนื่องจาก  $\frac{d}{da} OD^2 = 0$  เมื่อ  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  ดังนั้น พิจารณา เมื่อ  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  จะได้

$$\begin{aligned} OD^2 \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{3}} &= \left(a\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{1-4a+4a^2 - \frac{3a^2}{4} + \frac{a}{2}}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \\ &= \left(2a + \sqrt{1-4a + \frac{13a^2}{4}}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} \\ &= 4a^2 + 4a\sqrt{1-4a + \frac{13a^2}{4}} + 1-4a + \frac{13a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \\ &= 8a^2 + 1 - 4a\left(1 - \sqrt{1-4a + \frac{13a^2}{4}}\right) \end{aligned}$$

ซึ่งถ้า  $a$  มีค่าเข้าใกล้ 0 จะได้  $OD^2$  มีค่าเข้าใกล้ 1 ดังนั้น  $\omega$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$

พิจารณาเมื่อ  $a \neq 0$  จะได้ว่า

$$OD^2 \leq 1 \iff 8a^2 + 1 - 4a\left(1 - \sqrt{1-4a + \frac{13a^2}{4}}\right) \leq 1$$

$$\iff 8a^2 \leq 4a\left(1 - \sqrt{1-4a + \frac{13a^2}{4}}\right)$$

$$\iff 2a \leq 1 - \sqrt{1-4a + \frac{13a^2}{4}}$$

$$\iff 1 - 2a \geq \sqrt{1-4a + \frac{13a^2}{4}}$$

$$\iff 4a^2 \geq \frac{13a^2}{4} \text{ ซึ่งจริงเสมอ}$$

ดังนั้น  $OD^2 \leq 1$  จะได้ว่า  $\omega$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$  □

จากทฤษฎีบทที่ 6.2 ทำให้เราสามารถยืนยันได้ว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวด้าน  $\frac{1}{3}$  หน่วย (The Staple) ได้ และสามารถปิดทับเส้นโค้ง 3 ท่อนแบบซิกแซกของ Besicovitch ได้ ในลำดับต่อไปจะเป็นการศึกษาถึงการปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ 3 ท่อนที่ไม่สมมาตรด้วย  $\Pi$

**ทฤษฎีบทที่ 6.3[11]** สำหรับ  $\omega \in \Psi$  ถ้า  $\omega$  คอนเวกซ์แล้ว  $\omega$  จะสามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$

### บทพิสูจน์

ให้  $\omega \in \Psi$  โดยที่  $\omega$  แทนด้วย ABCD

ถ้า  $\omega$  มีสมมาตรจะได้ว่าโดยทฤษฎีบทที่ 6.2  $\omega$  สามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$

ถ้า  $\omega$  ไม่มีสมมาตร จากข้อสังเกตข้างต้นเพียงพอที่จะพิจารณาเมื่อ AD เป็นด้านที่ยาวที่สุดของ  $\text{conv}(\omega)$  และกำหนดให้เมื่อวาง AD ตามแนวของ OV จากนั้นเลื่อน  $\omega$  ไปทาง O จนกระทั่ง  $\omega$  ต่ะกับ OW ที่จุด B แล้วทำให้ A อยู่ระหว่าง O กับ D และ OA มีระยะน้อยสุด (นั่นคือน้อยกว่าระยะ OD เมื่อ D อยู่ระหว่าง O กับ A)

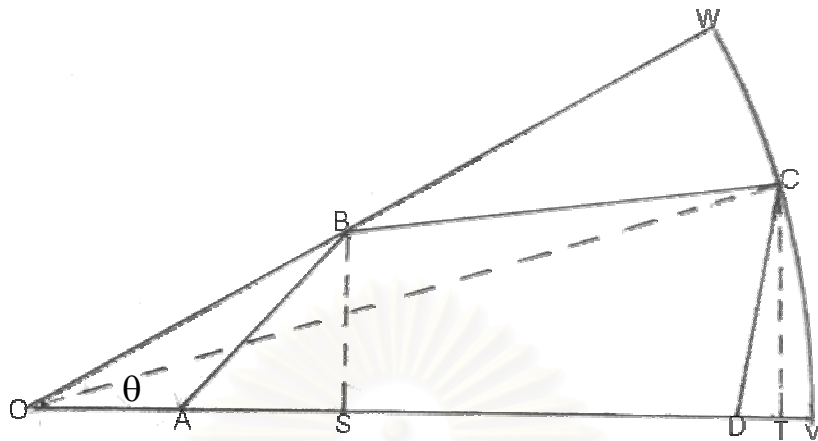
จะแสดงว่า จุด C และจุด D อยู่ในบริเวณ  $\Pi$

พิจารณาจุด C

**บทแทรกที่ 6.3.1 [11]** ถ้าจุด C ของ  $\omega$  อยู่บนส่วนโค้ง WV ของ  $\Pi$  แล้วจะได้ว่า  $\omega$  มีความยาวอย่างน้อย 1 หน่วย

บทพิสูจน์ (พิจารณารูปที่ 6.11 ประกอบการพิสูจน์)

ให้  $\angle VOC = \theta$  ให้ S, T เป็นจุดบน OV ซึ่งทำให้  $BS \perp OV$  และ  $CT \perp OV$  ตามลำดับ เนื่องจากระยะตั้งฉากมีความยาวน้อยสุด และไม่ทำให้ตำแหน่งของจุด C เปลี่ยน ดังนั้นสามารถพิจารณาเส้นโค้ง SBCT แทนเส้นโค้ง ABCD ให้  $BS = a$  หน่วย โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้  $CT \geq BS$



รูปที่ 6.11

เนื่องจาก  $\sin\theta = \frac{CT}{OC}$  จะได้ว่า  $CT = \sin\theta \geq a$

เนื่องจาก  $\tan 30^\circ = \frac{BS}{OS}$  จะได้ว่า  $OS = \sqrt{3}a$

เนื่องจาก  $\cos\theta = \frac{OT}{OC}$  จะได้ว่า  $OT = \cos\theta$

จะได้  $ST = OT - OS = \cos\theta - \sqrt{3}a$

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า  $BC = \sqrt{(\cos\theta - \sqrt{3}a)^2 + (\sin\theta - a)^2}$

พิจารณาคความยาวของ  $\omega$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \ell(\omega) &= AB + BC + CD \\ &\geq SB + BC + CT \\ &= a + \sqrt{(\cos\theta - \sqrt{3}a)^2 + (\sin\theta - a)^2} + \sin\theta \\ &\approx 1 + \sin\theta + a(1 - 2\sin(\theta + \frac{\pi}{6})) + 2a^2 \end{aligned}$$

เพราะว่า  $\sin\theta \geq a$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \ell(\omega) &\approx 1 + \sin\theta + a(1 - 2\sin(\theta + \frac{\pi}{6})) + 2a^2 \\ &\geq 1 + a + a(1 - 2\sin(\theta + \frac{\pi}{6})) + 2a^2 \\ &> 1 \text{ เมื่อ } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $l(\omega) = 1$  จะได้ว่า จุด C อยู่ในบริเวณ  $\Pi$

พิจารณาจุด D

ให้  $\angle DAB = \alpha$   $\angle CDA = \beta$  และ AB มีค่า a หน่วย

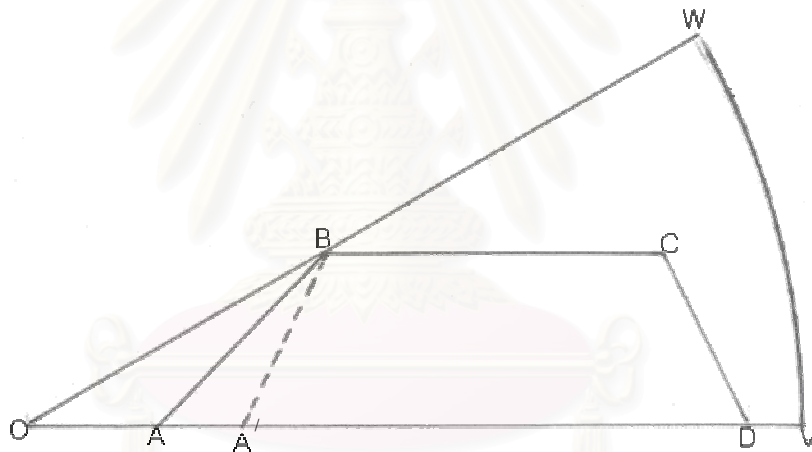
ให้ z เป็นระยะระหว่างจุด B กับ AD และ w เป็นระยะระหว่างจุด C กับ AD

โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้  $z \leq w$

**กรณีที่ 1**  $z = w$

จะได้ว่า  $\alpha \leq \beta$  และถ้า  $\alpha = \beta$  จะได้ว่า  $\omega$  เป็นเส้นโค้ง 3 ท่อนที่คอนเวกซ์และมีสมมาตรแบบเส้น โดยบทแทรกที่ 6.2.1 จะได้ว่า  $\omega$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$

ถ้า  $\alpha < \beta$  ให้  $A'$  เป็นจุดบน OV ซึ่งทำให้  $\angle DA'B = \beta$  เลื่อน  $\omega' = A'BCD$  ดังแสดงในรูปที่ 6.12



รูปที่ 6.12

จะได้ว่า  $l(\omega') \leq 1$  และ  $\omega'$  เป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์ 3 ท่อนที่มีสมมาตรแบบเส้น โดยบทแทรกที่ 6.2.1 จะได้ว่า  $\omega'$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$

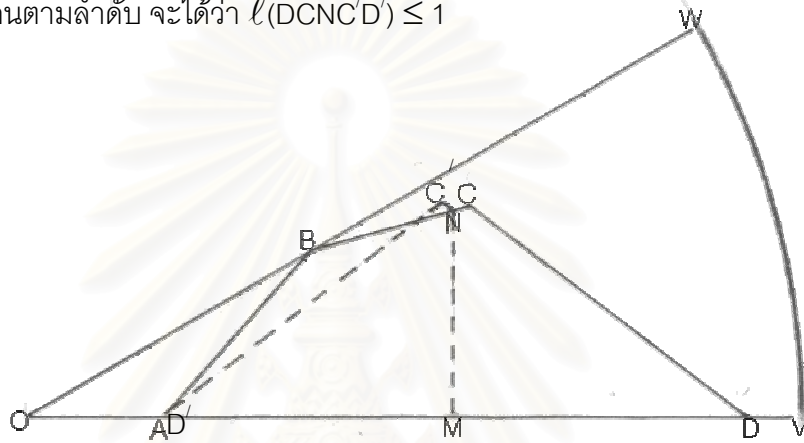
ดังนั้น จุด D อยู่ในบริเวณ  $\Pi$

**กรณีที่ 2**  $z < w$

ให้  $M$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $AD$  และ  $N$  เป็นจุดบนด้าน  $BC$  ซึ่งทำให้  $NM$  ตั้งฉากกับ  $AD$  ที่จุด  $M$  เห็นชัดว่า  $N$  อยู่ในบริเวณ  $\Pi$

กรณีที่ 2.1  $AB + BN > NC + CD$  (พิจารณารูปที่ 6.13 ประกอบการพิสูจน์)

เนื่องจาก  $\omega$  มีความยาวหนึ่งหน่วย จะได้ว่า  $NC + CD \leq \frac{1}{2}$  พิจารณารูปเหลี่ยม  $DCNC'D'$  โดย  $C'$  และ  $D'$  เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด  $C$  และ  $D$  เมื่อมี  $NM$  เป็นแกนสะท้อนตามลำดับ จะได้ว่า  $l(DCNC'D') \leq 1$



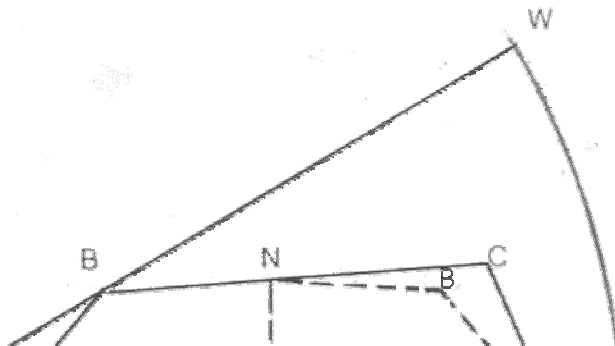
รูปที่ 6.13

เนื่องจาก  $DCC'D'$  เป็นเส้นโค้ง 3 ท่อนที่มีสมมาตรแบบเส้นและ  $l(DCC'D') < 1$  ดังนั้น โดยบทแทรกที่ 6.2.1 จึงได้ว่า  $DCC'D'$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$

สรุปได้ว่าจุด  $D$  อยู่ในบริเวณ  $\Pi$

กรณีที่ 2.2  $AB + BN \leq NC + CD$  (พิจารณารูปที่ 6.14 ประกอบการพิสูจน์)

เนื่องจาก  $\omega$  มีความยาวหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $AB + BN \leq \frac{1}{2}$  พิจารณารูปเหลี่ยม  $ABNB'A'$  โดย  $A'$  และ  $B'$  เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด  $A$  และ  $B$  เมื่อมี  $NM$  เป็นแกนสะท้อนตามลำดับ จะได้ว่า  $l(ABNB'A') \leq 1$



รูปที่ 6.14

เนื่องจาก  $DCC'D'$  เป็นเส้นโค้ง 3 ท่อนที่มีสมมาตรแบบเส้นและ  $\ell(ABB'A') < 1$  ดังนั้น โดยบทแทรกที่ 6.2.1 จึงได้ว่า  $ABB'A'$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$

สรุปได้ว่าจุด  $D$  อยู่ในบริเวณ  $\Pi$

ดังนั้น  $\omega$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$  □

ในลำดับต่อไปจะแสดงว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้ ซึ่งในการพิสูจน์ดังกล่าวจำเป็นต้องศึกษาบทแทรกที่ 6.4 นี้ก่อน

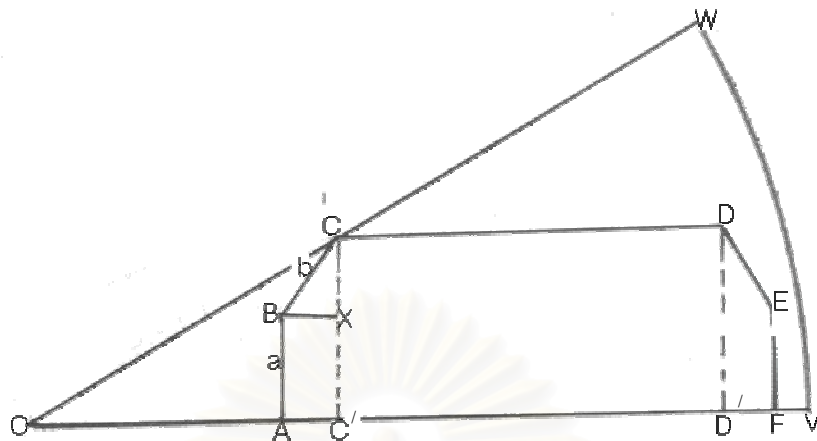
**บทแทรกที่ 6.4** เส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ และมีขาสองข้าง ตั้งฉากสามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$

#### บทพิสูจน์

ให้  $\Xi = ABCDEF$  เป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยโดยมี  $AF$  เป็นด้านที่ยาวที่สุดของ  $\text{conv}(\Xi)$  และมีขาสองข้างตั้งฉาก นั่นคือ  $\angle FAB = 90^\circ = \angle EFA$

วาง  $AF$  ตามแนวของ  $OV$  โดยให้  $A$  อยู่ระหว่าง  $O$  กับ  $F$  จากนั้นเลื่อน  $\Xi$  ไปทาง  $O$  จนกระทั่ง  $\omega$  ต่อกับ  $OW$  ที่จุด  $C$  (หรือ  $B$ ) โดยไม่เสียนัยทั่วไปกำหนดให้  $OA$  มีระยะน้อยสุด (นั่นคือน้อยกว่า ระยะ  $OF$  เมื่อวาง  $AF$  ตามแนวของ  $OV$  โดยให้  $F$  อยู่ระหว่าง  $O$  กับ  $A$ )

**กรณีที่ 1**  $\Xi$  มีสมมาตร พิจารณารูปที่ 6.15 ประกอบการพิสูจน์



รูปที่ 6.15

โดยบทแทรกที่ 6.2.2 จะได้ว่า BE มีระยะมากที่สุดเมื่อ  $\angle ABC = 150^\circ = \angle FED$   
และเนื่องจาก  $\triangle OEF$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

$$OE = \sqrt{OF^2 + EF^2}$$

กำหนดให้  $AB = a$  และ  $BC = b$  จะได้ว่า  $EF = a$  และ  $DE = b$  (เนื่องจาก  $\triangle$  มี  
สมมาตร) ให้  $C'$  และ  $D'$  เป็นจุดบน  $OV$  ซึ่งทำให้  $CC' \perp OV$  ที่จุด  $C'$  และ  $DD' \perp OV$  ที่จุด  
 $D'$  ดังนั้น  $CD = C'D' = 1 - 2a - 2b$  และให้  $X$  เป็นจุดบน  $CC'$  ซึ่งทำให้  $BX \perp CC'$  ที่จุด  $X$

$$\text{เพราะว่า } CX = b \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} b$$

$$\text{ดังนั้น } CC' = CX + XC' = CX + a = \frac{\sqrt{3}}{2} b + a$$

$$\text{จะได้ว่า } OC' = \frac{CC'}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} b + a \right) \text{ และ } AC' = BX = D'F = b \sin 30^\circ = \frac{b}{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } OF = OA + AC' + C'D' + D'F = OC' + C'D' + D'F$$

$$< \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} b + a \right) + 1 - 2a - 2b + \frac{b}{2}$$

$$= a\sqrt{3} + 1 - 2a$$

$$\text{ดังนั้น } OE = \sqrt{OF^2 + EF^2}$$



$$\begin{aligned}
 &< \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3} + 1 - 2a)^2} \\
 &= \sqrt{1 + (8 - 4\sqrt{3})a^2 - (4 - 2\sqrt{3})a}
 \end{aligned}$$

พิจารณา  $\frac{d^2}{da^2} OE^2$  สำหรับ  $0 < a \leq \frac{1}{2}$  จะได้

$$\frac{d^2}{da^2} OE^2 = 4(4 - 2\sqrt{3}) > 0 \text{ (เพราะว่า } 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.5359)$$

จะได้ว่า  $OE < 1$  เมื่อ  $0 < a \leq \frac{1}{2}$

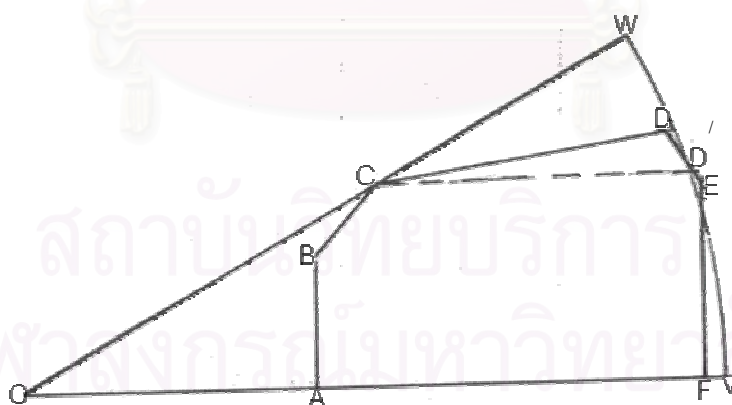
โดยบทแทรกที่ 6.3.1 เห็นชัดว่า จุด D อยู่ในบริเวณ  $\Pi$

ดังนั้น  $\Xi$  ถูกปิดทับด้วย  $\Pi$

**กรณีที่ 2**  $\Xi$  ไม่มีสมมาตร

กำหนดให้  $z$  เป็นระยะระหว่างจุด C กับด้าน OV และ  $w$  เป็นระยะระหว่างจุด D กับด้าน OV โดยไม่เสียหายทั่วไปกำหนดให้  $z \leq w$  (จะแสดงโดยวิธีขัดแย้ง)

สมมติให้ E เป็นจุดบน  $\Xi$  ซึ่งอยู่นอกบริเวณ  $\Pi$  ให้ D' เป็นจุดบน  $\Xi$  ซึ่งทำให้ระยะระหว่างจุด D' กับ OV มีค่าเป็น  $z$  ดังรูปที่ 6.16 จะเห็นว่า จุด E ยังคงอยู่ในตำแหน่งเดิม ดังนั้นสามารถพิจารณาเส้นโค้ง ABCD'EF แทน  $\Xi$  ได้

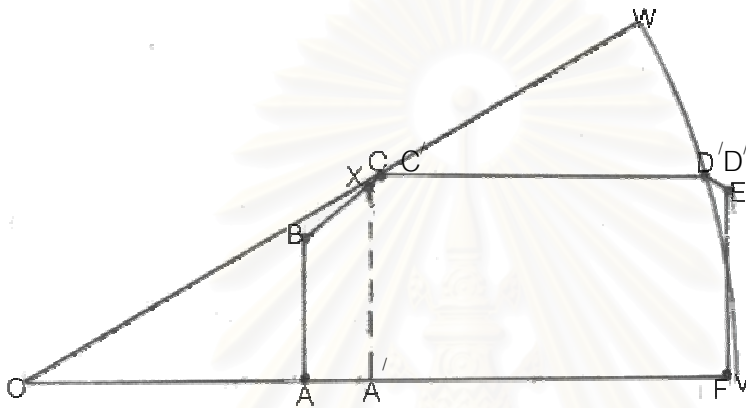


รูปที่ 6.16

**กรณีที่ 2.1** ถ้า  $AB \leq EF$

ให้  $X$  เป็นจุดบน  $BC$  ซึ่งทำให้ระยะระหว่าง  $X$  กับ  $OV$  มีค่าเท่ากับระยะ  $EF$  สร้างเส้นโค้ง  $XC'D'E$  ที่มีสมมาตรแบบเส้นและ  $\angle EXC' = 60^\circ = \angle D''EX$  จะได้ว่า จุด  $E$  อยู่ห่างจาก  $O$  มากกว่าเดิม (ดังแสดงในรูปที่ 6.17)

ให้  $A'$  เป็นจุดบน  $OV$  ซึ่ง  $XA' \perp OV$  จะได้ว่า เส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อน  $A'XC'D''EF$  มีสมมาตรและมีความยาวน้อยกว่าหนึ่ง ดังนั้นโดยกรณีที่ 1  $\Pi$  ปิดทับเส้นโค้ง  $A'XC'D''EF$  ได้ นั่นคือจุด  $E$  อยู่ในบริเวณ  $\Pi$  ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมุติ

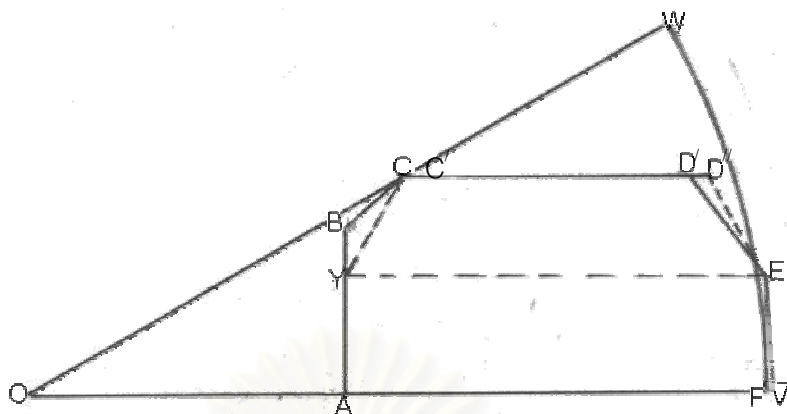


รูปที่ 6.17

กรณีที่ 2.2 ถ้า  $AB > EF$

ให้  $Y$  เป็นจุดบน  $BE$  ซึ่งทำให้ระยะระหว่าง  $Y$  กับ  $OV$  มีค่าเท่ากับ ระยะ  $EF$  สร้างเส้นโค้ง 3 ท่อน  $YC'D''E$  ที่มีสมมาตรแบบเส้น และ  $\angle EYC' = 60^\circ = \angle D''EY$  จะได้ว่าจุด  $E$  อยู่ห่างจากจุด  $O$  มากกว่าเดิม (ดังแสดงในรูปที่ 6.18)

จะได้ว่า เส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อน  $A'YC'D''EF$  มีสมมาตรและมีความยาวน้อยกว่าหนึ่ง ดังนั้นโดยกรณีที่ 1  $\Pi$  ปิดทับเส้นโค้ง  $A'YC'D''EF$  ได้ นั่นคือจุด  $E$  อยู่ในบริเวณ  $\Pi$  ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมุติ



รูปที่ 6.18

**ทฤษฎีบทที่ 6.5**  $\Pi$  สามารถปิดทับทุก ๆ เส้นโค้งคอนเวกซ์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้

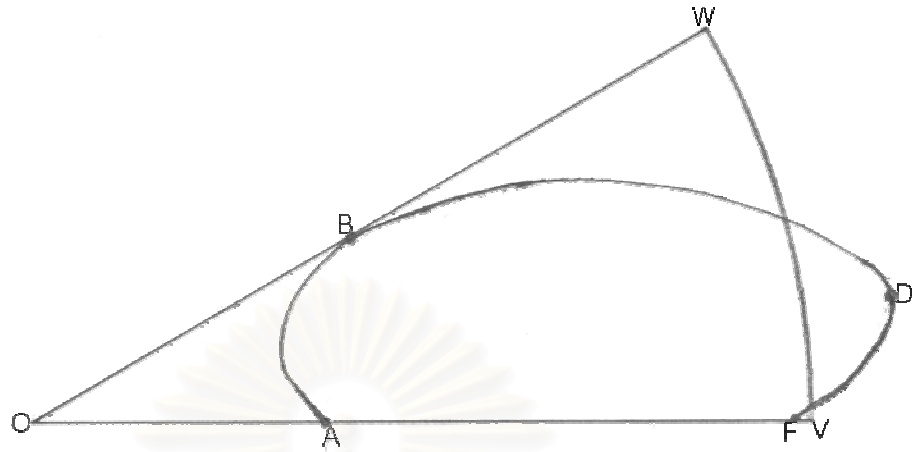
**บทพิสูจน์**

สมมติให้  $\lambda$  เป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์ความยาวหนึ่งหน่วยที่ไม่สามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$  จะแสดงว่า  $\lambda$  สามารถแทนได้ด้วยเส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อนที่มีขาสองข้างตั้งฉากและเมื่อวางเส้นโค้งใน  $\Pi$  ด้วยการวางด้านยาวสุดของคอนเวกซ์ฮัลล์ของเส้นโค้งทาบรัศมีด้านหนึ่งของ  $\Pi$  แล้วบางส่วนอยู่นอก  $\Pi$

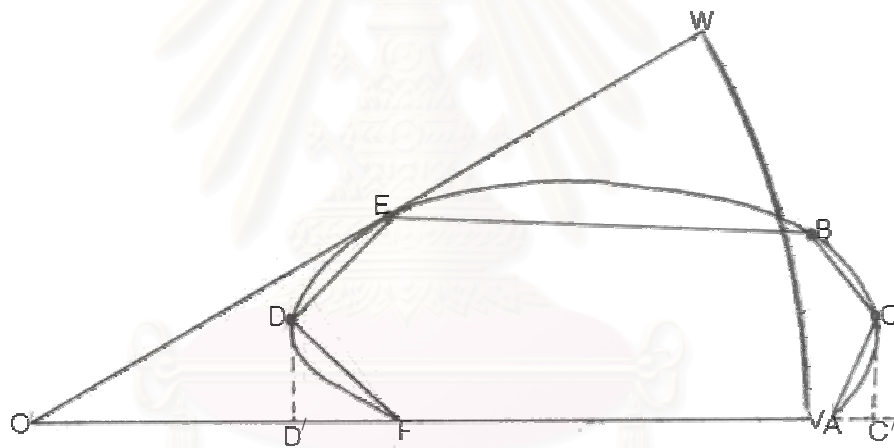
พิจารณากการแทนเส้นโค้งคอนเวกซ์  $\lambda$  ด้วยเส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อน

กำหนดให้ A และ F เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของ  $\lambda$  วาง AF ตามแนวของ OV โดยให้ A อยู่ระหว่าง O กับ F จากนั้นเลื่อน  $\lambda$  ไปทาง O จนกระทั่ง  $\lambda$  แตะกับ OW เรียกจุดบน  $\lambda$  ซึ่งแตะกับ OW จุดแรกว่า B และให้ D เป็นจุดบน  $\lambda$  ซึ่งอยู่ห่างจากจุด O มากสุดและอยู่นอก  $\Pi$  (ดังแสดงในรูปที่ 6.19) จากนั้น พลิก  $\lambda$  แล้ววาง AF ตามแนวของ OV โดยให้ F อยู่ระหว่าง O กับ A เลื่อน  $\lambda$  ไปทาง O จนกระทั่ง  $\lambda$  แตะกับ OW เรียกจุดบน  $\lambda$  ซึ่งแตะกับ OW จุดแรกว่า E และให้ C เป็นจุดบน  $\lambda$  ซึ่งอยู่ห่างจากจุด O มากสุดและอยู่นอก  $\Pi$  (ดังแสดงในรูปที่ 6.20) ลากเส้นเชื่อมจุดทั้งหมดตามลำดับบนเส้นโค้งคอนเวกซ์  $\lambda$  เริ่มจากจุด F จะได้เส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อน FDEBCA ที่มีความยาวน้อยกว่าหนึ่ง และมีบางส่วนอยู่นอก  $\Pi$

พิจารณาเส้นโค้ง  $D'DEBC'C'$  เมื่อ  $D'D \perp OV$  และ  $CC' \perp OV$  จะได้ว่า เส้นโค้ง  $D'DEBC'C'$  เป็นเส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อนที่มีขาสองข้างตั้งฉาก มีความยาวน้อยกว่าหนึ่งและมีบางส่วนอยู่นอกบริเวณ  $\Pi$



รูปที่ 6.19



รูปที่ 6.20

สรุปได้ว่า เส้นโค้งคอนเวกซ์ใดก็ตามที่ไม่สามารถปิดทับได้ด้วย  $\Pi$  จะสามารถแทนได้ด้วยเส้นโค้งคอนเวกซ์ 5 ท่อนที่มีขาสองข้างตั้งฉากและมีความยาวน้อยกว่าหนึ่งหน่วยซึ่งขัดแย้งกับบทแทรกที่ 6.4 ดังนั้น ทฤษฎีบทที่ 6.5 เป็นจริง □

จากการศึกษาผลงานของ John E. Wetzel และ Patrick Coulton เกี่ยวกับการพิจารณา  $\Pi$  เป็นตัวปิดทับในปัญหา Moser's Worm Problem สามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

- ประการแรก เห็นได้ชัดว่า  $\Pi$  สามารถปิดทับส่วนของเส้นตรงความยาวหนึ่งหน่วยได้
- ประการที่สอง พื้นที่ของ  $\Pi$  ประมาณ 0.26180 ตารางหน่วย ซึ่งมีขนาดพื้นที่น้อยกว่าเซตคอนเวกซ์ที่มีพื้นที่น้อยสุดในปัจจุบัน (ดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 3)
- ประการที่สาม  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้ง 2 ท่อนที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าได้ (จากการพิสูจน์ของ John E. Wetzel ทฤษฎีบทที่ 6.1)
- ประการที่สี่  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ 3 ท่อนที่มีคอนเวกซ์ฮัลล์เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวด้าน  $\frac{1}{3}$  หน่วยได้ (จากการพิสูจน์ของ Patrick Coulton ทฤษฎีบทที่ 6.2 บทแทรกที่ 6.2.1)
- ประการที่ห้า  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ 3 ท่อนแบบซิกแซก และมีสมมาตรได้ นั่นคือ สามารถปิดทับเส้นโค้งของ ได้จากการพิสูจน์ของ Patrick Coulton ในทฤษฎีบทที่ 6.2 บทแทรกที่ 6.2.2)
- ประการที่หก  $\Pi$  สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ใด ๆ ได้ (จากการพิสูจน์ของ Patrick Coulton ทฤษฎีบทที่ 6.5)

จากบทสรุปข้างต้น จะเห็นได้ว่าหากเราเชื่อตามข้อคาดการณ์ที่กล่าวว่า “สำหรับแต่ละบริเวณคอนเวกซ์ที่สามารถปิดทับเส้นโค้งแบบซิกแซก 3 ท่อนที่มีความยาวหนึ่งหน่วยได้ทุกเส้นจะสามารถปิดทับเส้นโค้งหนึ่งหน่วยใด ๆ ได้” จะเห็นได้ว่า การพิสูจน์ว่า  $\Pi$  เป็นตัวปิดทับเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วยใด ๆ จะเหลือแค่เพียงการพิสูจน์ว่า  $\Pi$  ปิดทับเส้นโค้งแบบซิกแซก 3 ท่อนที่ไม่สมมาตรได้เท่านั้น โดยในขณะนี้ Patrick Coulton ได้เสนอการพิสูจน์สำหรับกรณีดังกล่าวแล้ว หากแต่ว่าอยู่ในขั้นตอนของการตรวจสอบความถูกต้อง นอกจากนี้ยังมีผลการทดลองโดยการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ ซึ่งใช้วิธีการสุ่มหาจุด 4 จุดที่เรียงกันเป็นเส้นโค้งแบบซิกแซก จากนั้นวัดความยาวเมื่อทดลองใส่จุดลงใน  $\Pi$  ทุกรูปแบบที่เป็นได้พบว่าความยาวน้อยสุดของเส้นโค้งแบบซิกแซก 3 ท่อนที่  $\Pi$  ไม่สามารถปิดทับได้จะต้องมีความยาวอย่างน้อยหนึ่งเสมอ จึงทำให้เราสามารถเชื่อได้ว่า  $\Pi$  ปิดทับเส้นโค้งแบบซิกแซก 3 ท่อนที่ไม่สมมาตรได้อย่างแน่นอน

## รายการอ้างอิง

- [1] Moser, L. Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry. (Mimeographed).
- [2] Croft, H. T.; Falconer, K. J.; and Guy, R. K. Unsolved problem in geometry. New York: Springer Verlag, 1991.
- [3] Gerriets, J.; and Poole, G. Minimum covers for arcs of constant length. Bull. Amer. Math. Soc. 79(1973): 462-463.
- [4] Norwood, R.; Poole, G.; and Laidacker, M. The worm problem of Leo Moser. Discrete Comput. Geom. 7 (1992): 153 – 162.
- [5] Gerriets, J.; and Poole, G. Convex regions which cover arcs of constant length. Amer. Math. Monthly. 81(1974): 36-41.
- [6] Norwood, R.; and Poole, G. An improved upper bound for Leo Moser' s Worm Problem. Discrete Comput. Geom. 29(2003): 409-417.
- [7] Wichiramala, W. A Smaller cover for unit convex arcs. Geometric Potpourri Seminar Presentation at the University of Illinois. March 18. 2003.
- [8] Wichiramala, W. A Smaller cover for unit convex arcs.(Preprint).
- [9] Johnson, J. A.; Poole, G. D.; and Wetzel, J. E. A small cover for convex unit Arcs. Discrete Comput. Geom. 32 (2004): 141- 147.
- [10] Wetzel, J. E. 2 – segment unit arcs can be covered by 30 degree circular sector. Geometric Potpourri Seminar.(June 2003).
- [11] Coulton, P. Perhaps the 30 degree pie slice cover three ligament worms. Geometric Potpourri Seminar Presentation at the University of Illinois. June 10. 2003.
- [12] Wetzel, J. E. Fits and covers. Math. Magazine. 76(2003): 349-363.
- [13] Wetzel, J. E. Sectorial covers for curves of constant length. Canad. Math. Bull. 16(1973): 367-376.
- [14] Besicovitch, A. S. On arcs that cannot be covered by an open equilateral triangle of side 1. Math. Gaz. 49(1965): 286-288.
- [15] Füredi, Z.; and Wetzel, J. E. The smallest convex cover for triangles of perimeter two. Geom. Dedicata 81(2000): 285-293.

- [16] Schear, J. An obvious but useful theorem about closed curves. Math. Mag 45(1972); 154-155.
- [17] Ferguson, E. 2000. Counterexample to a conjectured upper bound [online]. Available from E- Mail : [e.ferguson@antenna.nl](mailto:e.ferguson@antenna.nl)
- [18] Stewart, I. Mathematical Recreations: Mother worm's blanket. Scientific American. (January 1996): 98-99.
- [19] Stewart, I. Mathematical Recreations: Feedback. Scientific American. (June 1996): 103.
- [20] Maki, J.; Wetzel, J. E.; and Wichiramala, W. Drapeability. Discrete. Compute. Geom.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



**สัจพจน์ (Postulates)** คือสิ่งที่ยอมรับในวิชาเรขาคณิตว่าเป็นความจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ และนำไปใช้อ้างเพื่อการพิสูจน์ข้อความอื่นว่าเป็นความจริงได้ ดังนี้

1. มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ลากผ่านจุดที่กำหนดได้ 2 จุดได้
2. เส้นตรง 2 เส้นตัดกันได้ที่จุดๆ เดียวเท่านั้น
3. ส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 ปลายอาจถูกต่อออกไปได้โดยไม่จำกัดความยาว
4. บรรดาเส้นทั้งหลายที่ลากผ่านจุด 2 จุดคู่เดียวกัน เส้นตรงย่อมสั้นที่สุด
5. เมื่อมีจุดหนึ่งซึ่งถือเป็นจุดศูนย์กลาง และส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้เป็นรัศมี ย่อมสร้างวงกลมได้เพียงวงเดียวเท่านั้น
6. รูปเรขาคณิตต่างๆ อาจทำให้เคลื่อนที่ไปได้โดยรูปลักษณะ และขนาดคงเดิม
7. ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง มีจุดกึ่งกลางได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น
8. มุมๆ หนึ่ง ย่อมมีเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น
9. มุมฉากทุกมุม มุมตรงทุกมุม ย่อมเท่ากัน
10. เมื่อกำหนดจุดบนเส้นตรงให้ จะลากเส้นให้ตั้งฉากกับเส้นตรงนั้นที่จุดนั้นได้ เพียงเส้นเดียวเท่านั้น
11. เส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงเส้นหนึ่งย่อมมีเส้นเดียว และเป็นเส้นสั้นที่สุดในบรรดาเส้นทั้งหลายที่ลากจากจุดเดียวกันมายังเส้นตรงเส้นเดียว
12. มุมรอบจุดๆ หนึ่งรวมกันย่อมเป็นสองเท่าของมุมตรง หรือเป็นสี่เท่าของมุมฉาก
13. รัศมีของวงกลมที่เท่ากันย่อมเท่ากัน
14. เส้นตรงเส้นหนึ่งลากผ่านวงกลมหนึ่งได้เพียงสองจุดเท่านั้น เส้นตรงชนิดนี้ เรียกว่า เส้นพาดวง (Secant) หรือเส้นผ่านวง

<b>ทฤษฎีบท</b>	เส้นตรงเส้นหนึ่งพบเส้นตรง ทำให้เกิดมุมประชิดรวมกันเป็นสองมุมฉาก
<b>ทฤษฎีบท</b>	ถ้าเส้นตรงสองเส้นมาพบกันที่จุดปลายข้างหนึ่งของเส้นตรงเส้นหนึ่ง ทำให้เกิดมุมประชิดรวมกันเป็น 2 มุมฉาก เส้นตรงทั้งสองที่มาพบกันนี้ ย่อมเป็นเส้นตรงเดียวกัน
<b>ทฤษฎีบท</b>	เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน
<b>ทฤษฎีบท</b>	เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในและมุมภายนอกของมุมๆ หนึ่ง ย่อมตั้งฉากกัน
<b>ทฤษฎีบท</b>	สามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และมุมในระหว่างด้านทั้งสองนี้เท่ากัน สามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการ

- ทฤษฎีบท** ถ้าลากเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมทำให้
1. สามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นเท่ากันทุกประการ
  2. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดนั้นจะแบ่งครึ่งฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
  3. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดนั้นจะตั้งได้ฉากกับด้านฐาน
- ทฤษฎีบท** รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีด้านเท่ากันสามด้าน ด้านต่อด้าน สามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการ
- ทฤษฎีบท** รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีด้านเท่ากันหนึ่งด้าน และมีมุมเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม สามเหลี่ยมทั้งสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ
- ทฤษฎีบท** รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันด้วย สามเหลี่ยมทั้งสองนี้ย่อมเท่ากันทุกประการ
- ทฤษฎีบท** เส้นขนานสองเส้นมีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดขวาง จะทำให้
1. มุมแย้งเท่ากัน
  2. มุมภายในและมุมภายนอกบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเท่ากัน
  3. มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตรงตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก
- ทฤษฎีบท** มุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ย่อมรวมกันได้เท่ากับสองมุมฉาก
- ทฤษฎีบท** ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาว ย่อมใหญ่กว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามด้านสั้น
- ทฤษฎีบท** ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใดๆ รวมกันเข้าย่อมยาวกว่าด้านที่สามของสามเหลี่ยมรูปนั้น
- ทฤษฎีบท** รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีด้านเท่ากันสองด้าน แต่มุมในระหว่างด้านเท่าไม่เท่ากัน ฐานที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่ของรูปหนึ่งย่อมยาวกว่าฐานที่อยู่ตรงข้ามมุมเล็กของอีกรูปหนึ่ง
- ทฤษฎีบท** ถ้าเส้นขนานคู่หนึ่งยาวเท่ากัน เส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของเส้นขนานคู่นี้ย่อมยาวเท่ากันและขนานกันและทำให้เกิดสี่เหลี่ยมด้านขนาน
- ทฤษฎีบท** ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทุกรูป
1. เส้นทแยงมุมแต่ละเส้นย่อมแบ่งครึ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
  2. ด้านตรงข้ามย่อมยาวเท่ากัน
  3. มุมตรงข้ามย่อมกวางเท่ากัน
  4. เส้นทแยงมุมสองเส้นย่อมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

## ลักษณะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยม

### ลักษณะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

1. ด้านตรงข้ามขนานกันและยาวเท่ากัน
2. มุมตรงข้ามเท่ากัน
3. เส้นทแยงมุมแต่ละเส้นทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ
4. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

### ลักษณะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

1. มีลักษณะสมบัติเช่นเดียวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
3. เส้นทแยงมุมสองเส้นยาวเท่ากัน

### ลักษณะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1. มีลักษณะสมบัติเหมือนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
2. ด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน
3. เส้นทแยงมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน

### ลักษณะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

1. มีลักษณะสมบัติเหมือนรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. ด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน
3. มุมทุกมุมไม่เป็นมุมฉาก
4. เส้นทแยงมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน

**ทฤษฎีบท** เส้นตรงที่ลากจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมและขนานกับอีกด้านหนึ่ง ย่อมแบ่งครึ่งด้านที่สามของสามเหลี่ยมนั้น

**ทฤษฎีบท** เส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของสามเหลี่ยม

1. ย่อมขนานกับด้านที่สามของสามเหลี่ยมนั้น
2. ย่อมยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สามของสามเหลี่ยมนั้น

**ทฤษฎีบท** เส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมใดๆ จะตัดกันที่จุดๆ หนึ่ง และจุดนั้นจะแบ่งเส้นมัธยฐานออกเป็นหนึ่งในสามของเส้นมัธยฐานแต่ละเส้น จุดนั้นเรียกว่า Centroid

**ทฤษฎีบท** สี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือสี่เหลี่ยมด้านขนานทุกรูปที่อยู่บนฐานเดียวกันหรือบนฐานที่เท่ากัน และอยู่ในระหว่างคู่ขนานเดียวกัน หรือมีส่วนสูงเท่ากัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

- ทฤษฎีบท** พื้นที่ของสามเหลี่ยมใดๆ ย่อมเป็นครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเท่ากันและส่วนสูงเท่ากัน หรืออยู่ในระหว่างคู่ขนานคู่เดียวกัน
- ทฤษฎีบท** พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลคูณระหว่างส่วนสูงและผลบวกของด้านคู่ขนาน
- ทฤษฎีบท** สามเหลี่ยมทุกรูปที่อยู่บนฐานเดียวกัน หรือบนฐานที่เท่ากัน และมีส่วนสูงเท่ากันหรืออยู่ระหว่างเส้นคู่ขนานเดียวกัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน
- ทฤษฎีบท** ในสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านระกอบมุมฉากรวมกันเท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก
- ทฤษฎีบท** ทางเดินของจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่กำหนดให้สองจุดมีระยะทางเท่ากันเป็นเส้นตรง ซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้
- ทฤษฎีบท** ทางเดินของจุดซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันในระยะทางเท่ากันเป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมที่เกิดจากเส้นตรงทั้งสองตัดกัน

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาว เปรมรัตน์ ภู่อาลัย เกิดเมื่อวันที่ 11 ตุลาคม พ.ศ. 2522 ที่ตำบลคลองคูณ อำเภอบางบาล จังหวัดพระนครศรีอยุธยา สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2544 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีจากภาควิชา มัธยมศึกษา – วิทยาศาสตร์ (วิชาเอกคณิตศาสตร์) คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โดย ได้รับทุนโครงการเร่งรัดการผลิตและพัฒนาบัณฑิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของ ประเทศ (รพค.) จากทบวงมหาวิทยาลัย และในปีการศึกษา 2545 ได้เข้าศึกษาต่อในระดับ ปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย ด้วยทุนอุดหนุนการศึกษา ระดับบัณฑิตศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพื่อเฉลิมฉลองในวโรกาสที่พระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัวทรงเจริญพระชนมายุครบ 72 พรรษา จากบัณฑิต วิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นเวลา 2 ปี

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย