การปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเซกเมนต์แนวตั้งและแนวนอน ที่มีความยาวรวมน้อยสุด

นายบัญญัติ สร้อยแสง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1130-8

MINIMAL ENCLOSING FOR REGIONS OF GIVEN AREAS BY VERTICAL AND HORIZONTAL SEGMENTS

Mr. Banyat Sroysang

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-53-1130-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเซกเมนต์แนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด
โดย	นายบัญญัติ สร้อยแสง
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยอนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.เปี่ยมศักดิ์ เมนะเศวต)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. กฤษณะ เนียมมณี)

....กรรมการ

(อาจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิติสิน)

นายบัญญัติ สร้อยแสง : การปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเซกเมนต์แนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด (MINIMAL ENCLOSING FOR REGIONS OF GIVEN AREAS BY VERTICAL AND HORIZONTAL SEGMENTS)
อ. ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา, 50 หน้า. ISBN 974- 53-1130-8

ในวิทยานิพนธ์นี้ เราจะหาคำตอบของปัญหาต่อไปนี้

1. การปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด

2. การปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

เราพบว่า รูปที่เป็นคำตอบของปัญหาข้างต้นนั้นแต่ละอาณาบริเวณต้องมีชิ้นเดียว และมีรูปแบบที่ขึ้นกับสัดส่วนของพื้นที่

ภาควิชา **คณิตศาสตร์**	ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา **คณิตศาสตร์**	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....
ปีการศึกษา **2547**	

4672314623 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD : MINIMAL ENCLOSING / SHORTEST ENCLOSURE

BANYAT SROYSANG : MINIMAL ENCLOSING FOR REGIONS OF GIVEN AREAS BY VERTICAL AND HORIZONTAL SEGMENTS. THESIS ADVISOR : WACHARIN WICHIRAMALA, Ph.D., 50 pp. ISBN: 974- 53-1130-8.

In this thesis, we find solutions of the following problems:

(1) the problem of minimal enclosing for one to two regions of given areas by vertical and horizontal segments;

(2) the problem of minimal enclosing for one to three regions of given areas by rectangles.

We show that each solution has connected regions and has shape depending on ratio of the areas.

Department **Mathematics**	Student's signature ....
Field of study **Mathematics**	Advisor's signature ....
Academic year **2004**	

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา สำหรับความช่วยเหลือและข้อเสนอแนะต่างๆในการค้นคว้าและจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอขอบคุณ คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์ รองศาสตราจารย์ ดร. กฤษณะ เนียมมณี และ อาจารย์ ดร. ณัฐพันธ์ กิติสิน สำหรับข้อเสนอแนะต่างๆในการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอขอบคุณ นายอรรณพ แก้วขาว ที่ช่วยอ่านเนื้อหาวิทยานิพนธ์เล่มนี้ สุดท้ายนี้ขอขอบคุณครอบครัวสำหรับความรักและกำลังใจ

สารบัญ

หน้า

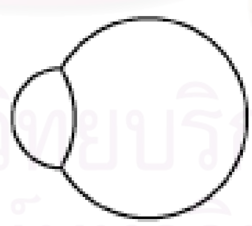
บทที่ 1

บทนำ

ปัญหาการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณบนระนาบซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดให้มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เป็นปัญหาที่มนุษย์ให้ความสนใจตั้งแต่สมัยโบราณ ชาวกรีกโบราณได้ตั้งข้อสงสัยว่า จะทำอย่างไรจึงจะใช้เชือกเส้นหนึ่งล้อมรอบให้ได้อาณาบริเวณที่มีพื้นที่มากสุด ซึ่งได้ถูกคาดการณ์ว่าต้องล้อมเป็นวงกลม คำถามของชาวกรีกนั้นเทียบได้กับปัญหาการปิดล้อมและแยกหนึ่งอาณาบริเวณบนระนาบซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด คำถามนี้มนุษย์เกือบทุกคนจะตอบอย่างมั่นใจว่ารูปนั้นต้องเป็นวงกลม แต่เมื่อมีคำถามต่อไปว่าทำไมจึงเป็นวงกลม พิสูจน์ให้เห็นได้หรือไม่ นักคณิตศาสตร์ประสบปัญหามากในการพิสูจน์ ส่วนหนึ่งที่ทำให้คนเหล่านั้นเห็นชัดว่าต้องเป็นวงกลมก็คือคนเหล่านั้นคิดว่าอาณาบริเวณมีชิ้นเดียว แต่ในทางคณิตศาสตร์ ปัญหานี้ยากกว่านั้นมาก กล่าวคือ อาณาบริเวณนั้นอาจจะถูกแบ่งเป็นหลายๆชิ้นได้ สำหรับปัญหาหนึ่งอาณาบริเวณนั้นพิสูจน์ได้ในปี ค.ศ.1880

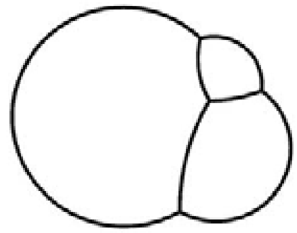
ในปี ค.ศ.1992 Frank Morgan [1] สามารถพิสูจน์ได้ว่า มีรูปที่ปิดล้อมและแยกหลายอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

สำหรับปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดให้มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด พิสูจน์ได้ในปี ค.ศ.1993 โดย J. Foisy, M. Alfaro, J. Brock, N. Hodges และ J. Zimba [2] และเป็นผลตามรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 : รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด [2]

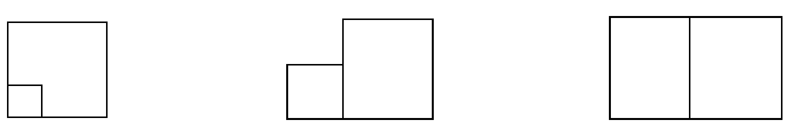
ในปัจจุบันปัญหาการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดให้มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด นั้นสามารถพิสูจน์ได้แค่การปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งพิสูจน์ได้ในปี ค.ศ.2002 โดย วัชรินทร์ วิชิรมาลา [3, 4] และเป็นผลตามรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 : รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด [3, 4]

นอกจากนั้น ผู้สนใจหาคำตอบของปัญหาในลักษณะนี้มักจะไปศึกษาปัญหาที่ใกล้เคียงกัน เช่น การปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณบนครึ่งระนาบ การปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณในมุม การปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณบนพื้นผิวของทรงกระบอก การปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณบนพื้นผิวของกรวย เป็นต้น สำหรับปัญหาการปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด และการปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด นั้นเป็นปัญหาที่น่าสนใจ ทั้งนี้เนื่องจากสิ่งต่างๆรอบตัวเราส่วนมากจะมีลักษณะมนหรือไม่ก็มีลักษณะเหลี่ยม อีกทั้งในปัจจุบันมนุษย์ให้ความสำคัญเกี่ยวกับการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งปัญหานี้อาจจะถูกนำไปประยุกต์ใช้ในอนาคต

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะหาคำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด แล้วจึงใช้คำตอบของปัญหาข้างต้นมาช่วยหาคำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด โดยเราจะใช้วิธีอย่างง่ายในการเปรียบเทียบความยาว ซึ่งจะเป็นประโยชน์แก่คนทั่วไปที่ไม่ใช่นักคณิตศาสตร์ในการศึกษาทำความเข้าใจ ทั้งนี้ปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุดพิสูจน์ได้ปี ค.ศ.1998 โดย Frank Morgan, Christopher French และ Scott Greenleaf [5] และเป็นผลตามรูปที่ 1.3 แต่ยากที่คนทั่วไปจะทำความเข้าใจ



รูปที่ 1.3 : รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด [5]

จากรูป 1.3 เราสามารถบอกได้ว่า คำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดไม่ได้เป็นคำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด นั่นคือ คำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด คือ สองรูปทางซ้ายโดยอาศัย [5] นั้นไม่ได้ แต่คำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุดของเรานั้นสามารถใช้ตอบปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดได้ นอกจากนี้เรายังสามารถหาคำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดได้อีกด้วย

ในวิทยานิพนธ์นี้ บางส่วนเราจะใช้การหาค่าต่ำสุดด้วยการวิเคราะห์อนุพันธ์ เราจะละไว้ซึ่งการแสดงว่าค่าที่ได้เป็นค่าต่ำสุด สำหรับการนับความยาวนั้นเราจะนับความยาวเฉพาะเส้นทึบและจะนับเพียงครั้งเดียวถ้าหากว่าเส้นทับกัน ทั้งนี้รูปที่เราสนใจจะไม่ทับพื้นที่กันและจะอยู่บนระนาบเท่านั้น เราจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนพื้นที่ และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทนความยาว

บทที่ 2

การปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนด ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

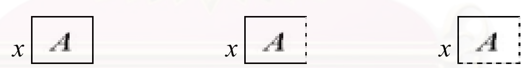
ในบทนี้จะพิจารณากรณีที่แต่ละอาณาบริเวณมีชิ้นเดียวว่า การปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปใดใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด แล้วจึงแสดงว่า รูปที่ปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดนั้นแต่ละอาณาบริเวณจะต้องมีชิ้นเดียว

ทฤษฎีบทที่ 2.1 ให้ $A > 0$ จะได้ว่า

(1) รูปที่ 2.1 (ก) ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $x = \sqrt{A}$

(2) รูปที่ 2.1 (ข) ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $x = \sqrt{2A}$

(3) รูปที่ 2.1 (ค) ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $x = \sqrt{A}$



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.1

บทพิสูจน์ (1) ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.1 (ก) $= 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{d}{dx}\left[2\left(x + \frac{A}{x}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \quad \text{นั่นคือ} \quad x = \sqrt{A}$$

(2) ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.1 (ข) $= x + \frac{2A}{x}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{d}{dx}\left[x + \frac{2A}{x}\right] = 1 - \frac{2A}{x^2} \quad \text{นั่นคือ} \quad x = \sqrt{2A}$$

(3) ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.1 (ค) $= x + \dfrac{A}{x}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{d}{dx}\left[x + \frac{A}{x} \right] = 1 - \frac{A}{x^2} \quad \text{นั่นคือ} \quad x = \sqrt{A}$$

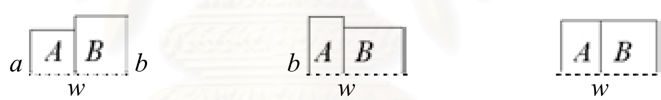
#

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้ $0 < A \le B$ และ $w > 0$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $A \ne B$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ก) น้อยกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมรูปที่ 2.2 (ข)

(2) ถ้า $2A < B$ แล้ว มี $b > 0$ ซึ่ง ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ก) น้อยกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมรูปที่ 2.2 (ค)

(3) ถ้า $2A \ge B$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ค) น้อยกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมรูปที่ 2.2 (ก)



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.2

บทพิสูจน์ (1) สมมุติ $A \ne B$ จากรูปที่ 2.2 (ข) จะได้ว่า $b > \dfrac{A + B}{w}$

ดังนั้น $bwB - bwA = bw(B - A) > (A + B)(B - A) = B^2 - A^2$

ดังนั้น $(bw - B)B = bwB - B^2 > bwA - A^2 = (bw - A)A$

ดังนั้น $\dfrac{B}{bw - A} > \dfrac{A}{bw - B}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ข)

$$= w + b\left(2 + \frac{B}{bw - A} \right)$$

$$> w + b\left(2 + \frac{A}{bw - B} \right)$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ก)

(2) สมมุติ $2A < B$ จะได้ว่า $\dfrac{-(2A-B)^2(A+B)}{(2A+5B)(4A+B)} + A + B < A + B$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ก) เมื่อ $b = \dfrac{6B(A+B)}{w(2A+5B)}$

$$= \; w + \frac{3}{w}\left[\frac{-(2A-B)^2(A+B)}{(2A+5B)(4A+B)} + A + B\right]$$

$$< \; w + \frac{3}{w}(A+B)$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ค)

(3) สมมุติ $2A \geq B$ จากรูปที่ 2.2 (ก) จะได้ว่า $0 < a < \dfrac{A+B}{w}$ และ $\dfrac{A}{a} < w$

ดังนั้น $aw < A + B \leq 3A$ นั่นคือ $\dfrac{A}{a} > \dfrac{w}{3}$

ให้ $t = \dfrac{A+B}{w} - a$

จะได้ว่า $t = 2\left(\dfrac{\frac{w}{3}}{w - \frac{w}{3}}\right)t < 2\left(\dfrac{\frac{A}{a}}{w - \frac{A}{a}}\right)t = \dfrac{2B}{w - \frac{A}{a}} - 2a - 2t$

ดังนั้น $3\left(\dfrac{A+B}{w}\right) - 3a = 3t < \dfrac{2B}{w - \frac{A}{a}} - 2a$

ดังนั้น $3\left(\dfrac{A+B}{w}\right) < a + \dfrac{2B}{w - \frac{A}{a}}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ค)

$$= \; w + 3\left(\frac{A+B}{w}\right)$$

$$< \; w + a + \frac{2B}{w - \frac{A}{a}}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.2 (ก)

#

หมายเหตุ : รูปที่ 2.2 (ค) ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวม น้อยกว่า รูปที่ 2.2 (ข)

ทฤษฎีบทที่ 2.3 ให้ $0 < A \leq B$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $2A < B$ แล้ว

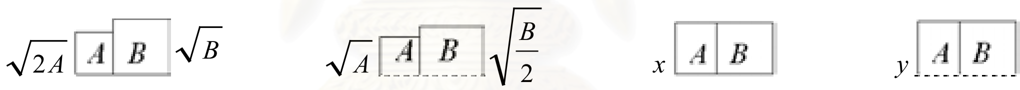
(1.1) รูปที่ 2.3 (ก) ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

(1.2) รูปที่ 2.3 (ข) ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนครึ่งระนาบ ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

(2) ถ้า $2A \geq B$ แล้ว

(2.1) รูปที่ 2.3 (ค) เมื่อ $x = \sqrt{\frac{2}{3}(A+B)}$ ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

(2.2) รูปที่ 2.3 (ง) เมื่อ $x = \sqrt{\frac{A+B}{3}}$ ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนครึ่งระนาบ ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด



(ก) (ข) (ค) (ง)

รูปที่ 2.3

บทพิสูจน์ (1) โดย ทฤษฎีบทที่ 2.1

(2) สมมุติ $2A \geq B$

(2.1) จากทฤษฎีบทที่ 2.2 และ เพราะว่าเราสามารถเลื่อนรูปที่ไม่อยู่ในลักษณะโครงสร้างเดียวกันกับรูปที่ 2.3 (ก) และ 2.3 (ค) ให้เกาะติดกันหมดได้ โดยความยาวเส้นรอบรูปรวมลดลง ทำให้เพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.3 (ค)

ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.3 (ค) $= 3x + \frac{2}{x}(A+B)$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{d}{dx}\left[3x + \frac{2}{x}(A+B)\right] = 3 - \frac{2}{x^2}(A+B) \quad \text{นั่นคือ} \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}(A+B)}$$

(2.2) จากทฤษฎีบทที่ 2.2 และ เพราะว่าเราสามารถเลื่อนรูปที่ไม่อยู่ในลักษณะโครงสร้างเดียวกันกับรูปที่ 2.3 (ข) และ 2.3 (ง) ให้เกาะติดกันหมดได้ โดยความยาวเส้นรอบรูปรวมลดลง ทำให้เพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.3 (ง)

ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูป 2.3 (ง) $= 3y + \dfrac{A+B}{y}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{d}{dy}\left[3y + \frac{A+B}{y}\right] = 3 - \frac{A+B}{y^2} \quad \text{นั่นคือ} \quad y = \sqrt{\frac{A+B}{3}}$$

#

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ให้ $0 < A \le B \le C$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $2A < B$ และ $\sqrt{C} < \dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}{2}$ แล้ว รูปที่ 2.4 (ก) ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้นซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

(2) ถ้า $2A < B$ และ $\sqrt{C} > \sqrt{A} + \sqrt{2B}$ แล้ว รูปที่ 2.4 (ข) ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้นซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

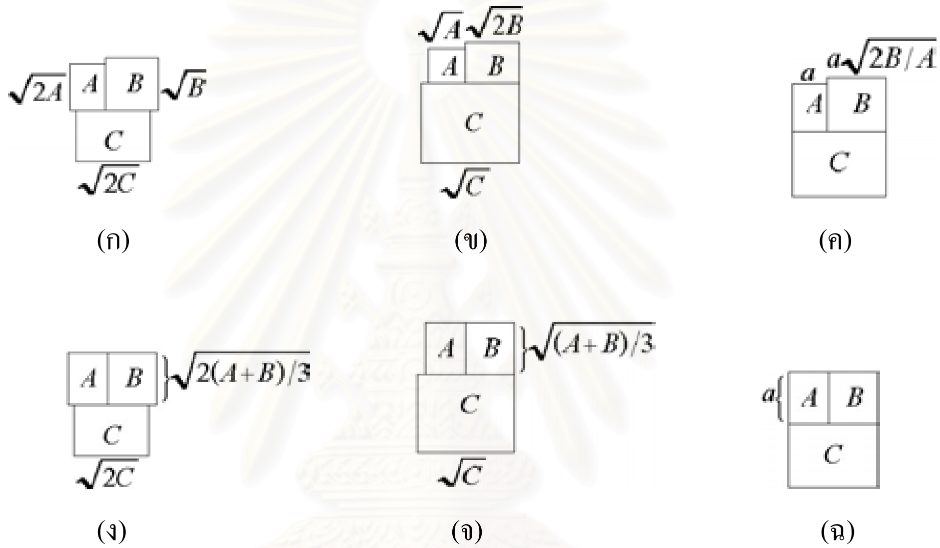
(3) ถ้า $2A < B$ และ $\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}{2} \le \sqrt{C} \le \sqrt{A} + \sqrt{2B}$ แล้ว รูปที่ 2.4 (ค) เมื่อ

$a = \dfrac{\sqrt{\dfrac{A}{3}\left[\left(\sqrt{A}+\sqrt{2B}\right)^2 + 2C\right]}}{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}$ ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้นซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

(4) ถ้า $2A \ge B$ และ $C < \dfrac{3}{4}(A+B)$ แล้ว รูปที่ 2.4 (ง) ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้นซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

(5) ถ้า $2A \ge B$ และ $C > 3(A+B)$ แล้ว รูปที่ 2.4 (จ) ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้นซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

(6) ถ้า $2A \geq B$ และ $\frac{3}{4}(A+B) \leq C \leq 3(A+B)$ แล้ว รูปที่ 2.4 (ฉ) เมื่อ $a = \dfrac{A+B}{\sqrt{A+B+\frac{2C}{3}}}$ ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้นซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด



รูปที่ 2.4

บทพิสูจน์ (1), (2), (4) และ (5) โดย ทฤษฎีบทที่ 2.1, 2.2 และ 2.3

(3) สมมุติ $2A < B$ และ $\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}{2} \leq \sqrt{C} \leq \sqrt{A}+\sqrt{2B}$ จะได้ว่า

รูปที่ 2.5 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.5 (ข) ถ้า $a \geq \sqrt{C}$

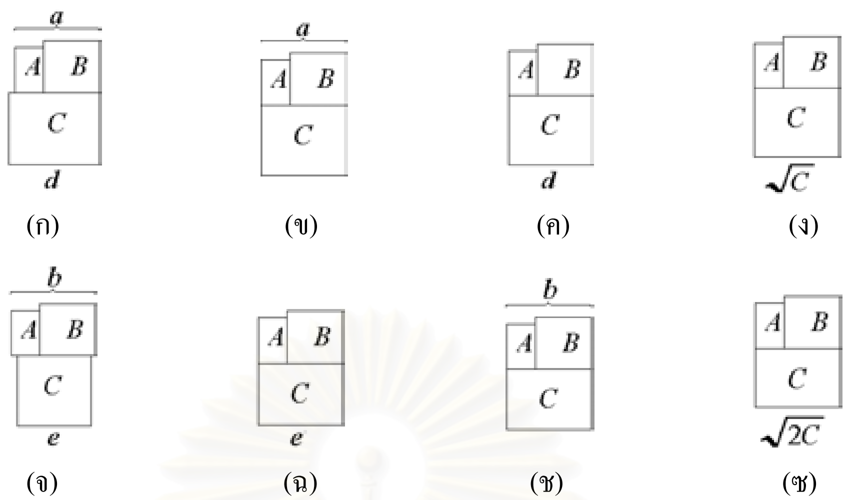
รูปที่ 2.5 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.5 (ค) ถ้า $d \leq \sqrt{C}$

รูปที่ 2.5 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.5 (ง) ถ้า $a < \sqrt{C} < d$

รูปที่ 2.5 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.5 (ฉ) ถ้า $e \geq \sqrt{2C}$

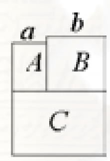
รูปที่ 2.5 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.5 (ช) ถ้า $b \leq \sqrt{2C}$

รูปที่ 2.5 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.5 (ซ) ถ้า $e < \sqrt{2C} < b$



รูปที่ 2.5

จากทฤษฎีบทที่ 2.2, จากข้างต้น และ เพราะว่าเราสามารถเลื่อนรูปที่ไม่อยู่ในลักษณะโครงสร้างเดียวกันกับ รูปที่ 2.5 (ก), รูปที่ 2.5 (ข) และ รูปที่ 2.5 (จ) ให้เกาะติดกันหมดได้ โดยความยาวเส้นรอบรูปรวมลดลง ทำให้เพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6

ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.6 $= 3(a+b) + \dfrac{A}{a} + \dfrac{2B}{b} + \dfrac{2C}{a+b}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{\partial}{\partial a}\left[3(a+b) + \frac{A}{a} + \frac{2B}{b} + \frac{2C}{a+b}\right] = 3 - \frac{A}{a^2} - \frac{2C}{(a+b)^2}$$

และ

$$0 = \frac{\partial}{\partial b}\left[3(a+b) + \frac{A}{a} + \frac{2B}{b} + \frac{2C}{a+b}\right] = 3 - \frac{2B}{b^2} - \frac{2C}{(a+b)^2}$$

นั่นคือ $b = a\sqrt{\dfrac{2B}{A}}$ จึงเพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.4 (ค)

ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.4 (ค)

$$= 3a\left(1 + \sqrt{\frac{2B}{A}}\right) + \frac{1}{a}\left(A + \sqrt{2AB} + \frac{2C}{1 + \sqrt{\dfrac{2B}{A}}}\right)$$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{d}{da}\left[3a\left(1+\sqrt{\frac{2B}{A}}\right) + \frac{1}{a}\left(A + \sqrt{2AB} + \frac{2C}{1+\sqrt{\frac{2B}{A}}} \right) \right]$$

$$= 3\left(1+\sqrt{\frac{2B}{A}}\right) - \frac{1}{a^2}\left(A + \sqrt{2AB} + \frac{2C}{1+\sqrt{\frac{2B}{A}}} \right)$$

นั่นคือ $a = \dfrac{\sqrt{\dfrac{A}{3}\left[\left(\sqrt{A}+\sqrt{2B}\right)^2 + 2C\right]}}{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}$

(6) สมมุติ $2A < B$ และ $\frac{3}{4}(A+B) \le C \le 3(A+B)$ จะได้ว่า

รูปที่ 2.7 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.7 (ข) ถ้า $a \ge \sqrt{C}$

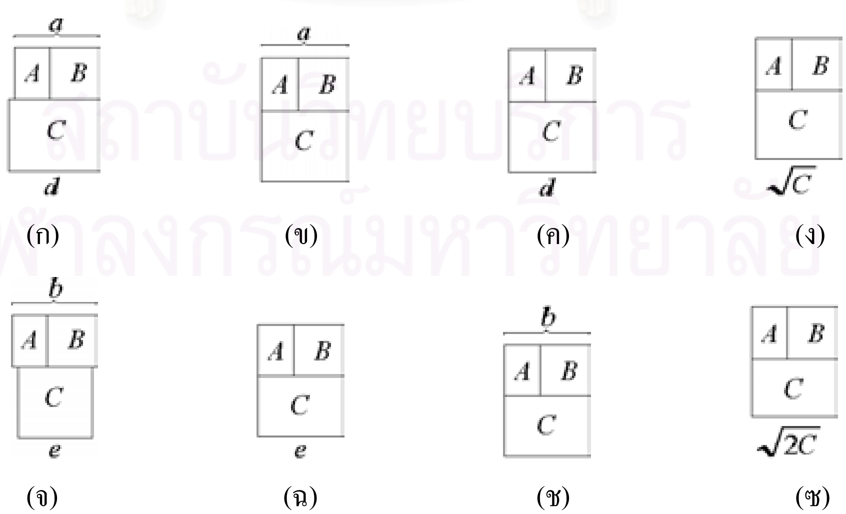
รูปที่ 2.7 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.7 (ค) ถ้า $d \le \sqrt{C}$

รูปที่ 2.7 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.7 (ง) ถ้า $a < \sqrt{C} < d$

รูปที่ 2.7 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.7 (ฉ) ถ้า $e \ge \sqrt{2C}$

รูปที่ 2.7 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.7 (ช) ถ้า $b \le \sqrt{2C}$

รูปที่ 2.7 (ก) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม มากกว่า รูปที่ 2.7 (ซ) ถ้า $e < \sqrt{2C} < b$



รูปที่ 2.7

จากทฤษฎีบทที่ 2.2, จากข้างต้น และ เพราะว่าเราสามารถเลื่อนรูปที่ไม่อยู่ในลักษณะโครงสร้างเดียวกันกับ รูปที่ 2.7 (ก), รูปที่ 2.7(ข) และ รูปที่ 2.7(จ) ให้เกาะติดกันหมดได้โดยความยาวเส้นรอบรูปรวมลดลง ทำให้เพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.4 (ฉ)

ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.4 (ฉ) $= a\left(3 + \dfrac{2C}{A+B}\right) + \dfrac{3}{a}(A+B)$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ

$$0 = \frac{d}{da}\left[\, a\left(3 + \frac{2C}{A+B}\right) + \frac{3}{a}(A+B) \,\right] = 3 + \frac{2C}{A+B} - \frac{3}{a^2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

นั่นคือ $a = \dfrac{A+B}{\sqrt{A+B+\dfrac{2C}{3}}}$ #

ต่อไปเราจะพิสูจน์ว่าการเรียงสามชิ้นไม่ได้ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด และจากทฤษฎีบทที่ 2.2 ทำให้เพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.8 (ก) และ (ข)

ทฤษฎีบทที่ 2.5 ให้ $0 < A \le B \le C$ จะได้ว่า

ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.8 (ก) และ (ข) มากกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(ก) (ข)

$$a \le b \le \frac{C}{y}$$

รูปที่ 2.8

บทพิสูจน์ เพราะว่า รูปที่ 2.8 (ก) และ (ข) มีความยาวเส้นรอบรูปรวม เท่ากัน ทำให้เพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.8 (ก)

จากรูปที่ 2.8 จะได้ว่า $xb \geq A + B$ นั่นคือ $b \geq \dfrac{A+B}{x}$

ให้ ℓ แทน ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ถ้า $a > x$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.8 (ก)

$$= a + 2x + b + 2\left(y + \frac{C}{y}\right)$$

$$> 3x + \frac{A+B}{x} + 2\left(y + \frac{C}{y}\right)$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.9 (ก) $\geq \ell$

ถ้า $b < \dfrac{C}{y} < x$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.8 (ก)

$$= a + 2x + 2y + b + 2\frac{C}{y}$$

$$> a + 2x + 2\mathrm{y} + 2b + \frac{C}{y}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.9 (ข) $\geq \ell$

ถ้า $b = \dfrac{C}{y} < x$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.8 (ก)

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.9 (ข) $> \ell$

ถ้า $b < x \leq \dfrac{C}{y}$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.8 (ก)

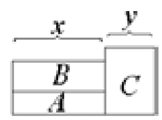
$$= a + 2x + b + 2\left(y + \frac{C}{y}\right)$$

$$> a + x + 2b + 2\left(\mathrm{y} + \frac{C}{y}\right)$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.9 (ค) $\geq \ell$

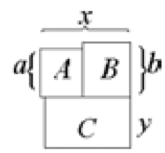
ถ้า $x = b$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.8 (ก)

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.9 (ค) $> \ell$



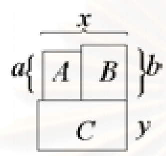
$$\frac{A+B}{x} \le \frac{C}{y}$$

(ก)



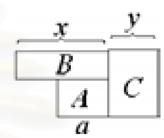
$$a \le b$$

(ข)



$$a \le b\,,\ x \le \frac{C}{y}$$

(ค)



$$a \le x$$

(ง)

รูปที่ 2.9

จากข้างต้น จึงเพียงพอที่จะพิจารณากรณี $a \le x < b$

สมมุติ $a \le x < b$

จากรูปที่ 2.8 (ก) จะได้ว่า

$$x\left(b-\frac{A}{a}\right) = xb-\frac{Ax}{a} > xb-\frac{Ab}{a} = b\left(x-\frac{A}{a}\right) = \mathrm{B}$$

ดังนั้น $b-\frac{A}{a} > \frac{B}{x}$ นั่นคือ $b > \frac{A}{a}+\frac{B}{x}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.8 (ก)

$$= \quad a+2x+b+2\left(y+\frac{C}{y}\right)$$

$$> \quad a+2x+\frac{A}{a}+\frac{B}{x}+2\left(y+\frac{C}{y}\right)$$

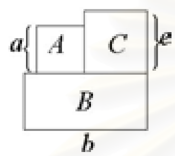
= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.9 (ง) $\ge \ell$

#

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ให้ $0 < A \le C$ และ $0 < B < C$ จะได้ว่า

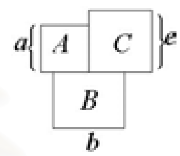
(1) ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ก) มากกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ค) หรือ (ง)

(2) ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ข) มากกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า



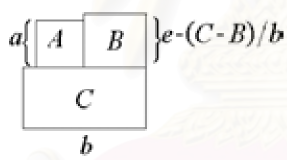
$$\frac{A}{a} + \frac{C}{e} \le b\,,\ a \le e$$

(ก)



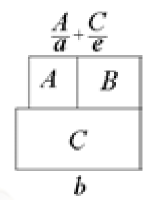
$$a \le e$$

(ข)



$$\frac{A}{a} + \frac{B}{e - \left(\frac{C-B}{b}\right)} \le b\,,\ e - \left(\frac{C-B}{b}\right) \ge a$$

(ค)



$$\frac{A}{a} + \frac{C}{e} \le b$$

(ง)

รูปที่ 2.10

บทพิสูจน์ (1) พิจารณารูปที่ 2.10 (ก)

กรณีที่ 1. $e - \left(\frac{C-B}{b}\right) \ge a$

เพราะว่า $\frac{C}{e} < b$ จะได้ว่า $\frac{C}{e}\left(\frac{C-B}{b}\right) < b\left(\frac{C-B}{b}\right) = C - B$

ดังนั้น $B < C - \frac{C}{e}\left(\frac{C-B}{b}\right) = \frac{C}{e}\left[e - \left(\frac{C-B}{b}\right)\right]$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ก)

$$= a + \frac{A}{a} + 2\left(e + b + \frac{B}{b}\right) + \frac{C}{e}$$

$$> a + \frac{A}{a} + 2\left(e + b + \frac{B}{b}\right) + \frac{B}{e - \left(\dfrac{C - B}{b}\right)}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ค)

กรณีที่ 2. $e - \left(\frac{C - B}{b}\right) < a$

เพราะว่า $a \le e$ จะได้ว่า $A \le \frac{eA}{a}$ นั่นคือ $A + C \le \frac{eA}{a} + C = e\left(\frac{A}{a} + \frac{C}{e}\right)$

เพราะว่า $\frac{A}{a} + \frac{C}{e} \le b$

จะได้ว่า $$\frac{A + B}{\frac{A}{a} + \frac{C}{e}} + \frac{C - B}{b} \le \frac{A + B}{\frac{A}{a} + \frac{C}{e}} + \frac{C - B}{\frac{A}{a} + \frac{C}{e}} = \frac{A + C}{\frac{A}{a} + \frac{C}{e}} \le e$$

ดังนั้น $$\frac{3(A + B)}{\frac{A}{a} + \frac{C}{e}} \le 3\left[e - \left(\frac{C - B}{b}\right)\right] < 2\left[e - \left(\frac{C - B}{b}\right)\right] + a$$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ก)

$$= \frac{A}{a} + 2\left(b + \frac{C}{b}\right) + \frac{C}{e} + 2\left[e - \left(\frac{C - B}{b}\right)\right] + a$$

$$> \frac{A}{a} + 2\left(b + \frac{C}{b}\right) + \frac{C}{e} + \frac{3(A + B)}{\frac{A}{a} + \frac{C}{e}}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ง)

(2) พิจารณารูปที่ 2.10 (ข)

ให้ ℓ แทน ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C โดยมีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ C ติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ถ้า $b \le e$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ข)

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.11 (ก) $> \ell$

ถ้า $\quad a < b \le \dfrac{C}{e}\quad$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ข)

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ = ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.11 (ข) $> \ell$

$a \le e\,,\ b \le e \qquad\qquad\qquad b \le \dfrac{C}{e}$

(ก) $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (ข)

รูปที่ 2.11

สมมุติ $\quad b > min\{\, e\,, \dfrac{C}{e}\,\}$

กรณีที่ 1. $\quad b\left(e - a + \dfrac{A}{a} + \dfrac{C}{e} - b\right) > C - B$

จะได้ว่า $\quad$ มี $x\,,\ y > 0\quad$ ซึ่ง $\quad x < e - a\,,\ \ y < \dfrac{A}{a} + \dfrac{C}{e} - b\quad$ และ $\quad b(\,x + y\,) = C - B$

ดังนั้น $\quad C - \left(\dfrac{C}{e}x + ey\right) > C - b(\,x + y\,) = B$

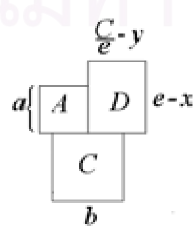
เราจะแสดงว่ารูป 2.10 (ข) มีความยาวเส้นรอบรูปรวมเท่ากับรูปที่บางอาณาบริเวณมีพื้นที่เพิ่มขึ้น

ให้ $\quad D = \left(\dfrac{C}{e} - y\right)\left(e - x\right)$

จะได้ว่า $\quad D = xy + C - \left(\dfrac{C}{e}x + ey\right) > xy + B > B$

ดังนั้น $\quad$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ข)

$\quad\quad$ = ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.12 $> \ell$



รูปที่ 2.12

กรณีที่ 2. $b\left(e-a+\frac{A}{a}+\frac{C}{e}-b\right) \leq C-B$

จะได้ว่า $A+B < A+B+(e-a)\frac{A}{a}+\left(\frac{A}{a}+\frac{C}{e}-b\right)(b-e)$

$$= b\left(e-a+\frac{A}{a}+\frac{C}{e}-b\right)+B-C+ab \leq ab$$

นั่นคือ $a > \frac{A+B}{b}$

และ $\frac{A+B+C}{b} \leq \frac{1}{b}\left[b\left(e-a+\frac{A}{a}+\frac{C}{e}-b\right)+B-C+ab+C\right]$

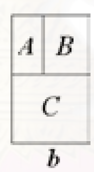
$$= e+\frac{A}{a}+\frac{C}{e}-b+\frac{B}{b}$$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.10 (ข)

$= 3b+2\left(e+\frac{A}{a}+\frac{C}{e}-b+\frac{B}{b}\right)+a$

$> 3b+2\left(\frac{A+B+C}{b}\right)+\frac{A+B}{b}$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.13 $\geq \ell$



รูปที่ 2.13

#

ทฤษฎีบทที่ 2.7 ให้ $0 < A \leq B \leq C$ จะได้ว่า

รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A, B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด คือ รูปที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุดในทฤษฎีบทที่ 2.4

บทพิสูจน์ เพราะว่าสามารถเลื่อนรูปที่ไม่เรียงติดกัน และรูปที่มีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่งติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ ให้เกาะติดกันหมดได้ โดยความยาวเส้นรอบรูปรวมลดลง จึงเพียงพอที่จะพิจารณารูปที่เรียงติดกัน และรูปที่มีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่งติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ

จากทฤษฎีบทที่ 2.2 จึงเพียงพอที่จะพิจารณารูปที่ 2.8 (ก) และ (ข) และ รูปที่มีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่งติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ

จากทฤษฎีบทที่ 2.5 จึงเพียงพอที่จะพิจารณารูปที่มีด้านหนึ่งของชิ้นที่ปิดล้อมพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่งติดกับสองพื้นที่ที่เหลือ

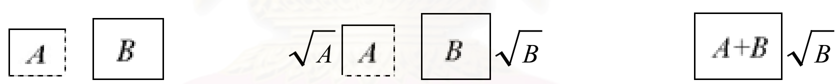
จากทฤษฎีบทที่ 2.2 และ 2.4 - 2.6 จะได้ว่า รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ อาณาบริเวณละชิ้น ซึ่งมีพื้นที่ A, B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด คือ รูปที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดในทฤษฎีบทที่ 2.4

#

ทฤษฎีบทที่ 2.8 ให้ $0 < A \leq B$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $A < B$ แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.14 (ข) มากกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.14 (ค)

(2) ถ้า รูป 2.14 (ก) ไม่เป็นรูปเดียวกับ รูปที่ 2.14 (ข) แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.14 (ก) มากกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.14 (ค)



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.14

บทพิสูจน์ (1) สมมติ $A < B$

จะได้ว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.14 (ข)

$$= 4\sqrt{B} + 2\sqrt{A}$$

$$= 4\sqrt{B} + 2\frac{A}{\sqrt{A}}$$

$$> 4\sqrt{B} + 2\frac{A}{\sqrt{B}}$$

$$= 2\sqrt{B} + 2\frac{(A+B)}{\sqrt{B}}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 2.14 (ค)

(2) โดยทฤษฎีบทที่ 2.1 #

ทฤษฎีบทที่ 2.9 ให้ $m \in \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า

สำหรับรูปที่ปิดล้อมและแยก m อาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด แต่ละอาณาบริเวณจะมีชิ้นเดียว

บทพิสูจน์ พิจารณา รูปที่ปิดล้อมและแยก m อาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า และมีบางอาณาบริเวณมีมากกว่าหนึ่งชิ้น

ให้ ด้านบนและด้านขวาของแต่ละชิ้นเป็นตัวแทนของแต่ละชิ้น

พิจารณาการเลื่อนในแนวตั้งหรือแนวนอนทางเดียวไม่มีผลกระทบต่อชิ้นอื่น

เลือกชิ้นที่มีพื้นที่มากที่สุดของแต่ละอาณาบริเวณ จากนั้น เลื่อนแต่ละชิ้นที่เลือกในแนวนอนหรือแนวตั้งให้ติดกัน(ในกรณีที่ $m > 1$) และ เติมด้านซ้ายและด้านล่างจนอยู่ในลักษณะของรูปที่ปิดล้อมและแยกด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

โดยทฤษฎีบทที่ 2.8 จะสามารถนำตัวแทนของชิ้นที่เหลือ ไปเพิ่มพื้นที่ให้กับแต่ละชิ้นที่เลือกไว้ จนแต่ละชิ้นมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ต้องการ และ อยู่ในลักษณะของรูปที่ปิดล้อมและแยกด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมลดลง

ดังนั้น รูปที่ปิดล้อมและแยก m อาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด แต่ละอาณาบริเวณจะมีชิ้นเดียว

#

ทฤษฎีบทที่ 2.10 ให้ $0 < A \le B \le C$ จะได้ว่า

(1) รูปที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด คือ รูปที่ 2.1 (ก) เมื่อ $x = \sqrt{A}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $4\sqrt{A}$

(2) รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A < B$ คือ รูปที่ 2.3 (ก) ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{2A} + 4\sqrt{B}$

(3) รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A \ge B$ คือ รูปที่ 2.3 (ค) เมื่อ $x = \sqrt{\frac{2}{3}(A+B)}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{6(A+B)}$

(4) รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A< B$ และ $\sqrt{C} < \dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}{2}$ คือ รูปที่ 2.4 (ก) ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{2A} + 4\sqrt{B} + 2\sqrt{2C}$

(5) รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A< B$ และ $\sqrt{C} > \sqrt{A}+\sqrt{2B}$ คือ รูปที่ 2.4 (ข) ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{A} + 2\sqrt{2B} + 4\sqrt{C}$

(6) รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A< B$ และ $\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}{2} \le \sqrt{C} \le \sqrt{A}+\sqrt{2B}$ คือ รูปที่ 2.4 (ค) เมื่อ $a = \dfrac{\sqrt{\frac{A}{3}\left[\left(\sqrt{A}+\sqrt{2B}\right)^2 + 2C\right]}}{\sqrt{A}+\sqrt{2B}}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $6\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{A}+\sqrt{2B}\right)^2 + 2C\right]}$

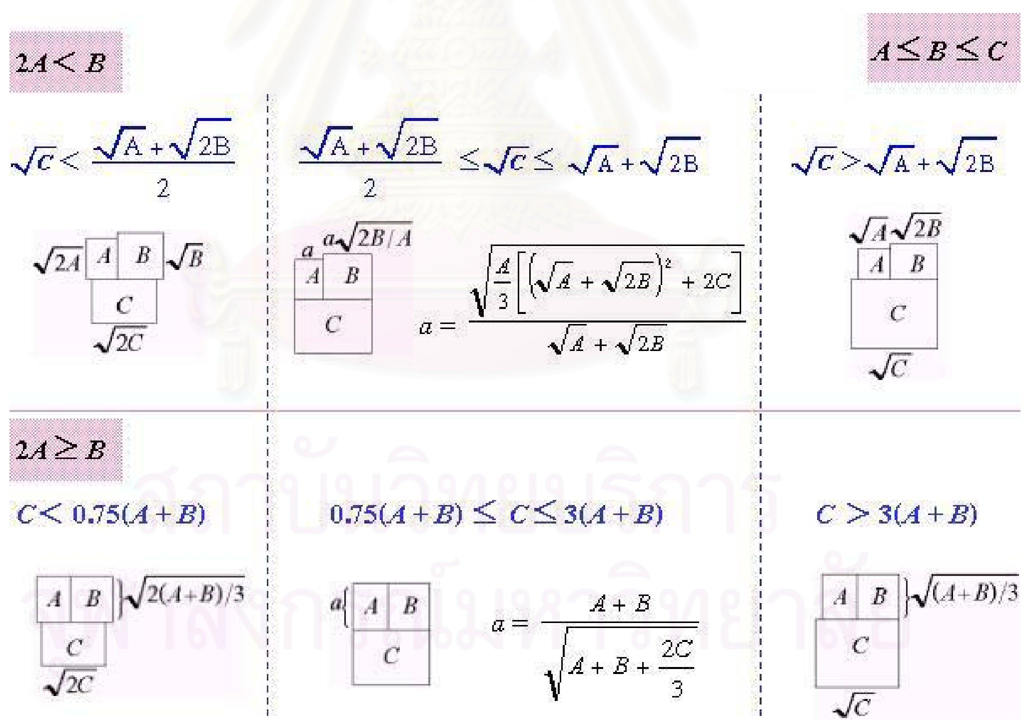
(7) รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A \ge B$ และ $C < \frac{3}{4}(A+B)$ คือ รูปที่ 2.4 (ง) ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{6(A+B)} + 2\sqrt{2C}$

(8) รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A \ge B$ และ $C > 3(A+B)$ คือ รูปที่ 2.4 (จ) ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{3(A+B)} + 4\sqrt{C}$

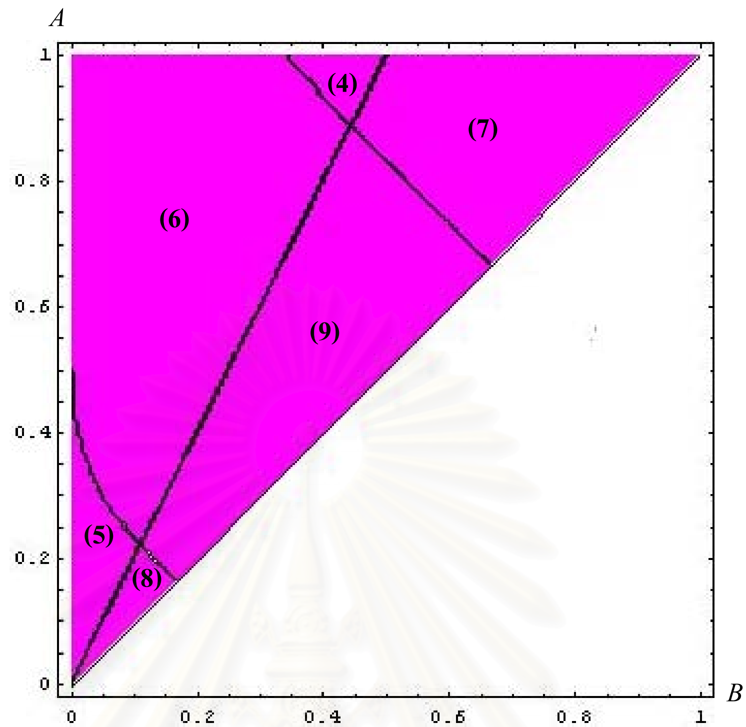
(9) รูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A , B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เมื่อ $2A \ge B$ และ $\frac{3}{4}(A+B) \le C \le 3(A+B)$ คือ รูปที่ 2.4 (ฉ) เมื่อ $a = \dfrac{A+B}{\sqrt{A+B+\frac{2C}{3}}}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $6\sqrt{A+B+\frac{2C}{3}}$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 2.1 , 2.3 , 2.4 , 2.7 และ 2.9 #

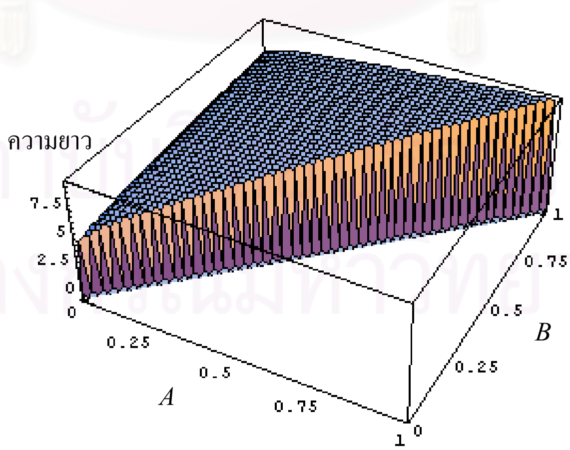
จากทฤษฎีบทที่ 2.10 และ จากรูปที่ 2.15 2.16 และ 2.17 เราจะสังเกตว่า สำหรับสองและสามอาณาบริเวณ ความยาวเส้นรอบรูปรวมกรณี $2A = B$ นั้นเป็นลิมิตของกรณี $2A < B$ เมื่อ A เข้าใกล้ B และสำหรับสามอาณาบริเวณซึ่ง $2A < B$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมกรณี $\sqrt{C} = \dfrac{\sqrt{A} + \sqrt{2B}}{2}$ นั้นเป็นลิมิตของกรณี $\sqrt{C} < \dfrac{\sqrt{A} + \sqrt{2B}}{2}$ เมื่อ $\sqrt{C}$ เข้าใกล้ $\dfrac{\sqrt{A} + \sqrt{2B}}{2}$ และความยาวเส้นรอบรูปรวมกรณี $\sqrt{C} = \sqrt{A} + \sqrt{2B}$ นั้นเป็นลิมิตของกรณี $\sqrt{C} > \sqrt{A} + \sqrt{2B}$ เมื่อ $\sqrt{C}$ เข้าใกล้ $\sqrt{A} + \sqrt{2B}$ และสำหรับสามอาณาบริเวณซึ่ง $2A \geq B$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมกรณี $C = \dfrac{3}{4}(A+B)$ นั้นเป็นลิมิตของกรณี $C < \dfrac{3}{4}(A+B)$ เมื่อ C เข้าใกล้ $\dfrac{3}{4}(A+B)$ และความยาวเส้นรอบรูปรวมกรณี $C = 3(A+B)$ นั้นเป็นลิมิตของกรณี $C > 3(A+B)$ เมื่อ C เข้าใกล้ $3(A+B)$



รูปที่ 2.15 : แสดงรูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A, B และ C ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด ในแต่ละกรณี



รูปที่ 2.16 : กราฟแสดงบริเวณที่ทำให้ (4) - (9) ในทฤษฎีบทที่ 2.10 ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดในการปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A, B และ 1 ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยที่ $0 < A \leq B \leq 1$

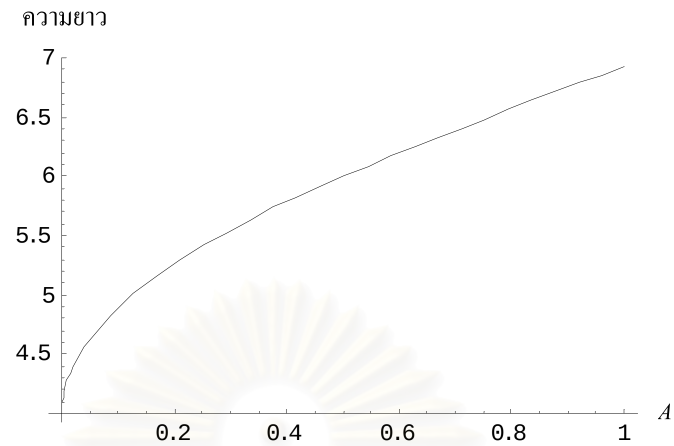


รูปที่ 2.17 : กราฟแสดงความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดที่ใช้ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A, B และ 1 ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยที่ $0 < A \leq B \leq 1$

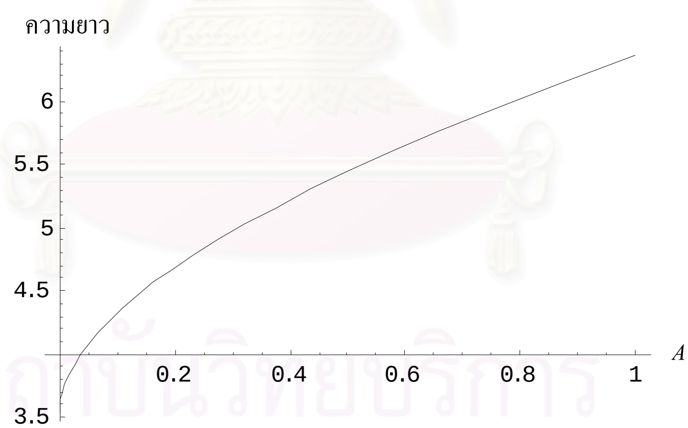
ต่อไปเราจะจะพิจารณาเปรียบเทียบกราฟของความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดสำหรับสองอาณาบริเวณ ที่ปิดล้อมและแยก ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า กับ ปิดล้อมและแยกใดๆ แต่สำหรับสามอาณาบริเวณเราจะไม่พิจารณาเปรียบเทียบกราฟของความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด เพราะว่าระบบสมการของความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณใดๆ นั้นเป็นระบบสมการไม่เชิงเส้น

ชัดเจนว่าความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะมากกว่ากับความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B

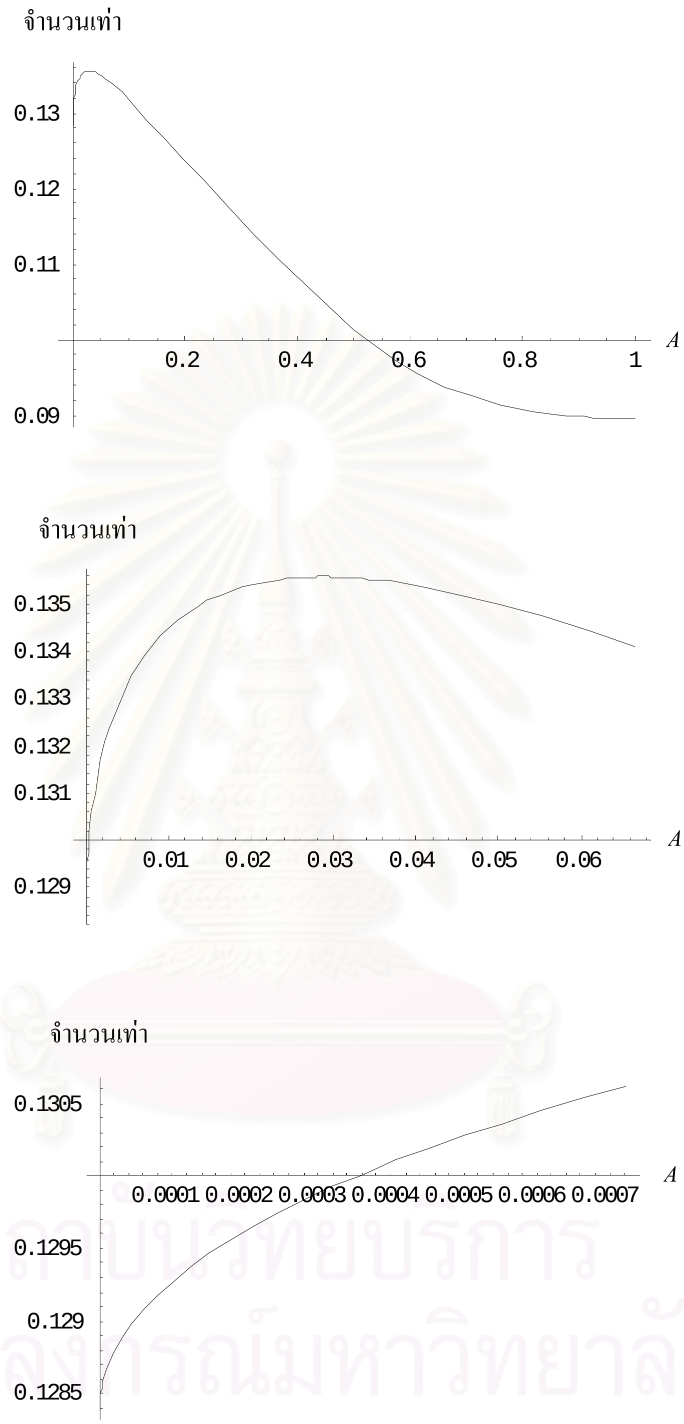
จากรูปที่ 2.18 2.19 และ 2.20 เราสังเกตได้ว่าความแตกต่างระหว่างความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้ากับความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B นั้นขัดกับความรู้สึกของคนทั่วไปที่เชื่อว่าความยาวรวมนั้นน่าจะแตกต่างกันมาก และจะพบว่าความแตกต่างระหว่างความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า กับความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B นั้นจะแตกต่างกันน้อยที่สุด เมื่อ $A = B$ ในทางกลับกันความแตกต่างจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆถ้าหากว่า $A - B$ ลดลงเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดหนึ่งซึ่ง $A - B$ มีค่าน้อยๆความแตกต่างก็จะผกผันเป็นลดลงเรื่อยๆ



รูปที่ 2.18 : กราฟแสดงความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยที่ $0 < A \leq 1$



รูปที่ 2.19 : กราฟแสดงความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 โดยที่ $0 < A \leq 1$



รูปที่ 2.20 : กราฟแสดงส่วนเกินความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อเทียบกับความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 โดยที่ $0 < A \leq 1$

บทที่ 3

การปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนด ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด

ในบทนี้จะพิจารณาและเปรียบเทียบความยาวรวมของบางรูป แล้วจึงค้นหา รูปที่ปิดล้อมและแยกหนึ่งถึงสองอาณาบริเวณบนระนาบซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ให้ $A > 0$ จะได้ว่า

รูปที่ 2.1 (ก) เมื่อ $x = \sqrt{A}$ ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน ใช้ความยาวรวมน้อยสุด และมีความยาวเท่ากับ $4\sqrt{A}$

บทพิสูจน์ พิจารณารูปที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

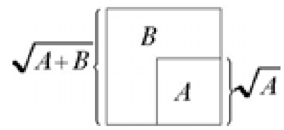
ให้นำทุกกลุ่มมาเรียงติดกัน แล้วลบเส้นภายในให้หมดจนเหลือแต่กรอบ(ถ้าความยาวกรอบมีค่าอนันต์ก็จะยาวกว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว $\sqrt{A}$ ก็จะกลายเป็นชิ้นเดียวซึ่งจะมีความยาวเส้นรอบรูปเท่ากับรูปที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ B $(B > A)$ ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งซึ่งมีรูปที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยกว่า

โดยทฤษฎีบทที่ 2.1 รูปที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด คือ รูปที่ 2.1 (ก) เมื่อ $x = \sqrt{A}$

#

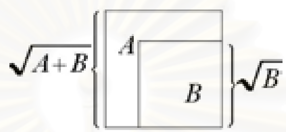
ทฤษฎีบทที่ 3.2 ให้ $0 < A < B$ จะได้ว่า

รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B โดยมีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมซ้อนกัน ที่ใช้ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด คือ รูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 2.1 จึงเพียงพอที่จะเปรียบเทียบระหว่างรูปที่ 3.1 กับ 3.2



รูปที่ 3.2

$$\begin{aligned} \text{ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.2} &= 4\sqrt{A+B} + 2\sqrt{B} \\ &> 4\sqrt{A+B} + 2\sqrt{A} \\ &= \text{ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1} \end{aligned}$$

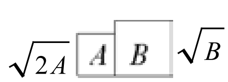
#

ทฤษฎีบทที่ 3.3 สำหรับ $0 < 2A < B$ ให้ ℓ_1 และ ℓ_2 แทน ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.3 และ 3.1 ตามลำดับ จะได้ว่า

(1) ถ้า $B > \left(\dfrac{43 + 30\sqrt{2}}{16}\right)A$ แล้ว $\ell_1 > \ell_2$

(2) ถ้า $B = \left(\dfrac{43 + 30\sqrt{2}}{16}\right)A$ แล้ว $\ell_1 = \ell_2$

(3) ถ้า $B < \left(\dfrac{43 + 30\sqrt{2}}{16}\right)A$ แล้ว $\ell_1 < \ell_2$



รูปที่ 3.3

บทพิสูจน์ พิจารณา $4\sqrt{A+B}+2\sqrt{A} = \ell_2 = \ell_1 = 4\sqrt{B}+2\sqrt{2A}$

จะได้ว่า $4\sqrt{A+B} = 4\sqrt{B} + 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{A}$

ดังนั้น $16(A+B) = 16B + 16(\sqrt{2}-1)\sqrt{AB} + 4(3-2\sqrt{2})A$

ดังนั้น $4(2\sqrt{2}+1)A = 16(\sqrt{2}-1)\sqrt{AB}$

ดังนั้น $\sqrt{B} = \left[\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4(\sqrt{2}-1)}\right]\sqrt{A}$ นั่นคือ $B = \left(\dfrac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A$

ต่อไป พิจารณา $B = 8A > \left(\dfrac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A$

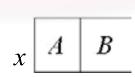
จะได้ว่า $\ell_1 = 10\sqrt{2A} > 14\sqrt{A} = \ell_2$

ดังนั้น ถ้า $B > \left(\dfrac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A$ แล้ว $\ell_1 > \ell_2$

และ ถ้า $B < \left(\dfrac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A$ แล้ว $\ell_1 < \ell_2$ #

ทฤษฎีบทที่ 3.4 ให้ $0 < A \le B \le 2A$ และ $w > 0$ จะได้ว่า

ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.4 เมื่อ $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}(A+B)}$ น้อยกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.4

บทพิสูจน์ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1

$= 4\sqrt{A+B}+2\sqrt{A}$

$> 4\sqrt{A+B}+2(\sqrt{6}-2)\sqrt{3A}$

$\ge 4\sqrt{A+B}+2(\sqrt{6}-2)\sqrt{A+B}$

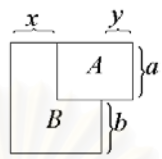
$= 2(\sqrt{6})\sqrt{\mathrm{A+B}}$

$=$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.4 เมื่อ $\mathrm{x} = \sqrt{\dfrac{2}{3}(A+B)}$

#

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ให้ $A, B > 0$ จะได้ว่า

รูปที่ 3.5 ไม่ใช่รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน ที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด



รูปที่ 3.5

บทพิสูจน์ จากรูปที่ 3.5 จะได้ว่า $B = ax + b(x + \frac{A}{a} - y)$

ให้ ℓ แทน ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

กรณีที่ 1. $b > a$, $x > \frac{y}{2}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A + B &< A + B + \frac{y}{2}(b - a) \\ &= A + ax + b(x + \frac{A}{a} - y) + \frac{y}{2}(b - a) \\ &= (a + b)(x + \frac{A}{a} - \frac{y}{2}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $a + b > \dfrac{A + B}{x + \frac{A}{a} - \frac{y}{2}}$

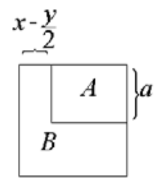
ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.5

$$= 2(a + b) + a + 3\frac{A}{a} + 2x - y$$

$$> 2\left(\frac{A + B}{x + \frac{A}{a} - \frac{y}{2}}\right) + a + 3\frac{A}{a} + 2x - y$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.6

≥ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.6

กรณีที่ 2. $b \geq a$, $x \leq \frac{y}{2}$

จะได้ว่า $B = ax + b(x + \frac{A}{a} - y) \leq bx + b(x + \frac{A}{a} - y) = b(2x + \frac{A}{a} - y)$

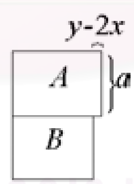
ดังนั้น $b \geq \dfrac{B}{2x + \frac{A}{a} - y}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.5

$$= 2b + 3a + 3\frac{A}{a} + 2x - y$$

$$> 2\left(\frac{B}{2x + \frac{A}{a} - y}\right) + 2a + 3\frac{A}{a} + 2x - y$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.7 $\geq \ell$



$2x \leq y$

รูปที่ 3.7

กรณีที่ 3. $b < a$

จะได้ว่า $(a+b)(2x + \frac{A}{a} - y) = a(\frac{A}{a} - y) + 2ax + b(2x + \frac{A}{a} - y)$

$$> b(\frac{A}{a} - y) + 2ax + b(2x + \frac{A}{a} - y) = 2B$$

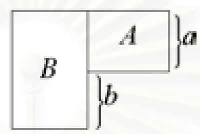
ดังนั้น $2x + \frac{A}{a} - y > \dfrac{2B}{a+b}$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.5

$$= \; 2b+3a+2\frac{A}{a}+2x+\frac{A}{a}-y$$

$$> \; 2b+3a+2\frac{A}{a}+\frac{2B}{a+b}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.8 $\geq \ell$



รูปที่ 3.8

กรณีที่ 4. $b=a\,,\; x>\frac{y}{2}$

ให้ $m = min\{$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1, ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.2 , $\ell\;\}$

จากทฤษฎีบทที่ 2.3 และ 3.3 จะได้ว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.8 $> m$

เพราะว่า $B = b(2x+\frac{A}{a}-y)$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.5

$$= \; 5a+2\frac{A}{a}+2x+\frac{A}{a}-y$$

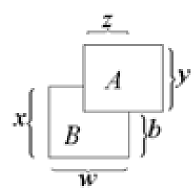
$$= \; 5a+2\frac{A}{a}+\frac{B}{b}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.8 $>$ m

#

ทฤษฎีบทที่ 3.6 ให้ $A\,,\; B>0$ และ $0<w\leq x$ จะได้ว่า

รูปที่ 3.9 ไม่ใช่รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน ที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด



รูปที่ 3.9

บทพิสูจน์ จากรูปที่ 3.9 จะได้ว่า $B = x(w-z) + zb$ นั่นคือ $\frac{B}{x} + z - w = \frac{zb}{x}$
และ $x > max\{z\,,b\} \geq \sqrt{zb}$

ให้ ℓ แทน ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

กรณีที่ 1. $x \leq y$

จะได้ว่า $2(\frac{B}{x} + z - w) = 2\frac{zb}{x} < 2\frac{zb}{\sqrt{zb}} = 2\sqrt{zb} \leq z + b$

ดังนั้น $2\frac{B}{x} < 2w - z + b$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.9

$$= 2y + 2\frac{A}{y} + x + 2w - z + b$$

$$> 2y + 2\frac{A}{y} + x + 2\frac{B}{x}$$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.10 $\geq \ell$

รูปที่ 3.10

กรณีที่ 2. $x > y\,,\ x \geq 2b$

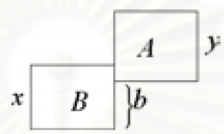
จะได้ว่า $2(\frac{B}{x} + z - w) = 2\frac{zb}{x} \leq 2\frac{zb}{2b} = z$ นั่นคือ $2\frac{B}{x} \leq 2w - z$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.9

$$= 2y + 2\frac{A}{y} + x + 2w - z + b$$

$$\geq 2y + 2\frac{A}{y} + x + 2\frac{B}{x} + b$$

$=$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.11 $> \ell$



รูปที่ 3.11

กรณีที่ 3. $x > y$, $x < 2b$, $\frac{A}{y}b < B$

จะได้ว่า $2(B - \frac{A}{y}b) + \frac{A}{y}x = x(2w - z) + (z - \frac{A}{y})(2b - x) < x(2w - z)$

ดังนั้น $2w - z > 2\left(\frac{B - \frac{A}{y}b}{x}\right) + \frac{A}{y}$

ให้ $m = min\{$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1 , ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.2 , ℓ $\}$

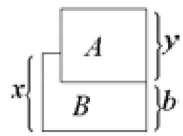
จากทฤษฎีบทที่ 3.5 จะได้ว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.12 $> m$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.9

$$= 2y + 2\frac{A}{y} + x + 2w - z + b$$

$$> 2y + 2\frac{A}{y} + x + 2\left(\frac{B - \frac{A}{y}b}{x}\right) + \frac{A}{y} + b$$

$=$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.12 $> m$



รูปที่ 3.12

กรณีที่ 4. $x > y$, $x < 2b$, $\dfrac{A}{y}b \geq B$

จะได้ว่า $0 < (2b-x)(w-z) = b(2w-z)-B$ นั่นคือ $0 < 2w-z-\dfrac{B}{b}$

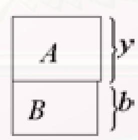
ดังนั้น $2b+\dfrac{B}{b} < x+b+\dfrac{B}{b} < x+b+2w-z$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.9

$= 2y+2\dfrac{A}{y}+x+b+2w-z$

$> 2y+2\dfrac{A}{y}+2b+\dfrac{B}{b}$

$=$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.13 $\geq \ell$

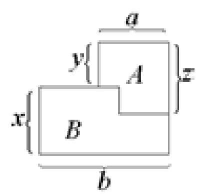


รูปที่ 3.13

#

ทฤษฎีบทที่ 3.7 ให้ A , $B > 0$ จะได้ว่า

รูปที่ 3.14 ไม่ใช่รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน ที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด

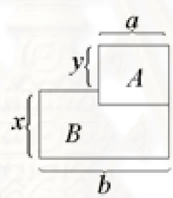


รูปที่ 3.14

บทพิสูจน์ ให้ ℓ แทน ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $m = min\{$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1 , ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.2 , ℓ $\}$

จากทฤษฎีบทที่ 3.5 จะได้ว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.15 $> m$



รูปที่ 3.15

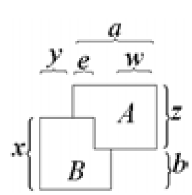
ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.14

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.15 > m

#

ทฤษฎีบทที่ 3.8 ให้ A , $B > 0$ จะได้ว่า

รูปที่ 3.16 ไม่ใช่รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน ที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด



รูปที่ 3.16

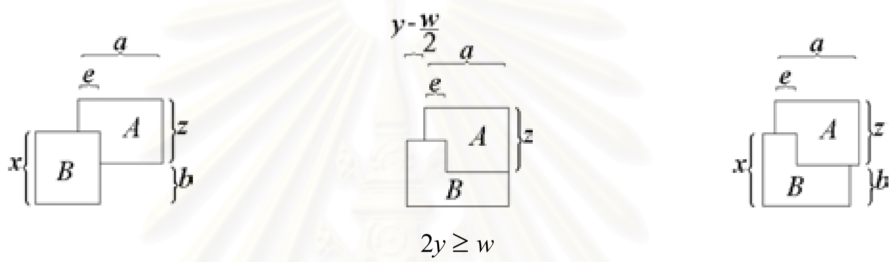
บทพิสูจน์ ให้ ℓ แทน ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $m = min\{$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.1 , ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.2 , ℓ $\}$

จากทฤษฎีบทที่ 3.6 จะได้ว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.17 (ก) $>$ m

จากทฤษฎีบทที่ 3.7 จะได้ว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.17 (ข) $>$ m

และ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.17 (ค) $>$ m



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 3.17

จากรูปที่ 3.16 จะได้ว่า $B = x(y+e) + b(a-e-w)$

นั่นคือ $x(\frac{B}{x} - y - e) = b(a-e-w)$

กรณีที่ 1. $x \geq 2b$

จะได้ว่า $2b(\frac{B}{x} - y - e) \leq x(\frac{B}{x} - y - e) = b(a-e-w)$

ดังนั้น $2\frac{B}{x} - e \leq a + 2y - w$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.16

$= 2z + b + x + 2a + a + 2y - w$

$\geq 2z + b + x + 2a + 2\frac{B}{x} - e$

$=$ ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.17 (ก) $>$ m

กรณีที่ 2. $x < 2b$, $y \geq \frac{w}{2}$

จะได้ว่า $b > b - \frac{x}{2} > \left(b - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{w}{a + y - \frac{w}{2}}\right)$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.16

$= \quad 2z + 3a + 2y - w + b + x$

$> \quad 2z + 3a + 2y - w + b + x - 2\left(b - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{w}{a + y - \frac{w}{2}}\right)$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.17 (ข) $>$ m

กรณีที่ 3. $x < 2b$, $\mathrm{y} < \frac{w}{2}$

จะได้ว่า $\frac{xy}{b} < \frac{2by}{b} = 2y$

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.16

$= \quad 2z + b + x + 3a + 2y - w$

$> \quad 2z + b + x + 3a + \frac{xy}{b} - w$

= ความยาวเส้นรอบรูปรวมของรูปที่ 3.17 (ค) $>$ m

#

ทฤษฎีบทที่ 3.9 สำหรับรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนโดยใช้ความยาวรวมน้อยสุด แต่ละอาณาบริเวณจะมีชิ้นเดียว และมีลักษณะโครงสร้างเดียวกับรูปที่ 3.1 หรือ 3.3 หรือ 3.4 หรือ 3.5 หรือ 3.9 หรือ 3.14 หรือ 3.16

บทพิสูจน์ พิจารณารูปที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน และมีบางอาณาบริเวณมีมากกว่าหนึ่งชิ้น

ให้ ด้านบนและด้านขวาทุกด้านของแต่ละชิ้นเป็นตัวแทนของแต่ละชิ้น

เลือกชิ้นที่มีพื้นที่มากที่สุดของแต่ละอาณาบริเวณ ตีกรอบเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองชิ้น(ในกรณีที่มีชิ้นที่เลือกซึ่งไม่ใช่สี่เหลี่ยมผืนผ้า) จากนั้น เลื่อนให้ติดกัน(ในกรณีที่ยังไม่

ติดกัน) จากนั้น ตัดแต่งรูปให้มีพื้นที่เท่าเดิม (ตัวอย่างดังรูปที่3.18) และเลื่อนให้อยู่ใน ลักษณะโครงสร้างเดียวกับรูปที่ 3.1 หรือ 3.3 หรือ 3.4 หรือ 3.5 หรือ 3.9 หรือ 3.14 หรือ 3.16 และ เติมด้านซ้ายและด้านล่างจนอยู่ในลักษณะที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณ ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน โดยใช้ความยาวรวมลดลง

รูปที่ 3.18 : การตัดแต่งรูปบริเวณที่ซ้อนกันหลังจากตีกรอบ โดยพื้นที่ไม่ลดลง

ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.9 นำตัวแทนของชิ้นที่เหลือ ไปเพิ่มพื้นที่ให้กับแต่ละชิ้นที่เลือกและตัดแต่งไว้ จนแต่ละชิ้นมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ต้องการ และ อยู่ในลักษณะที่ปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน โดยใช้ความยาวรวมลดลง

ดังนั้น รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนโดยใช้ความยาวรวมน้อยสุด แต่ละอาณาบริเวณจะมีชิ้นเดียว

#

ทฤษฎีบทที่ 3.10 ให้ $0 < A \le B$ จะได้ว่า

(1) รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด เมื่อ $\left(\frac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A < B$ คือ รูปที่ 3.1 ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $4\sqrt{A+B}+2\sqrt{A}$

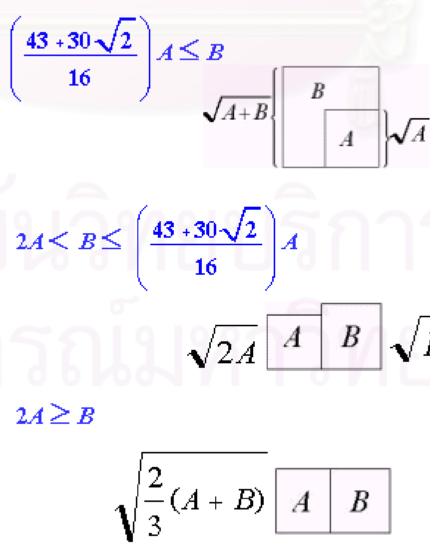
(2) รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด เมื่อ $\left(\frac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A = B$ คือ รูปที่ 3.1 และ 3.3 ซึ่งมีความยาวเท่ากันเท่ากับ $5(\sqrt{2}+1)\sqrt{A}$

(3) รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด เมื่อ $2A < B < \left(\frac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A$ คือ รูปที่ 3.3 ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{2A} + 4\sqrt{B}$

(4) รูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณ ซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด เมื่อ $2A \geq B$ คือ รูปที่ 3.4 เมื่อ $x = \sqrt{\frac{2}{3}(A+B)}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากับ $2\sqrt{6(A+B)}$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 2.10 และ 3.2 - 3.9 #

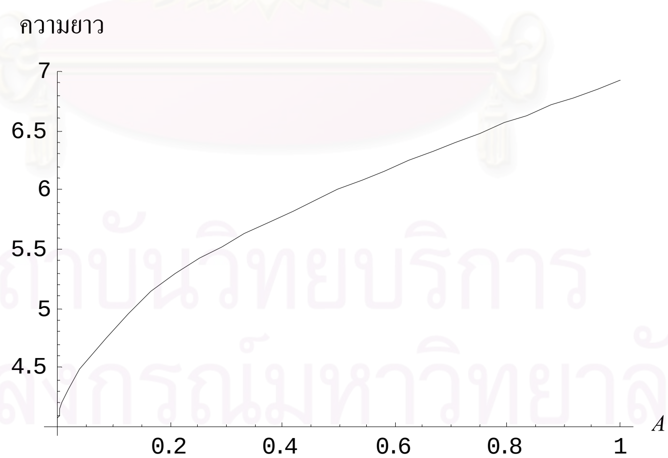
จากทฤษฎีบทที่ 3.10 และ รูปที่ 3.19 จะสังเกตว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมกรณี $2A = B$ นั้นเป็นลิมิตของกรณี $2A < B$ เมื่อ A เข้าใกล้ B และความยาวเส้นรอบรูปรวมกรณี $\left(\frac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A = B$ นั้นเป็นลิมิตของกรณี $\left(\frac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A \neq B$ เมื่อ $\left(\frac{43+30\sqrt{2}}{16}\right)A$ เข้าใกล้ B



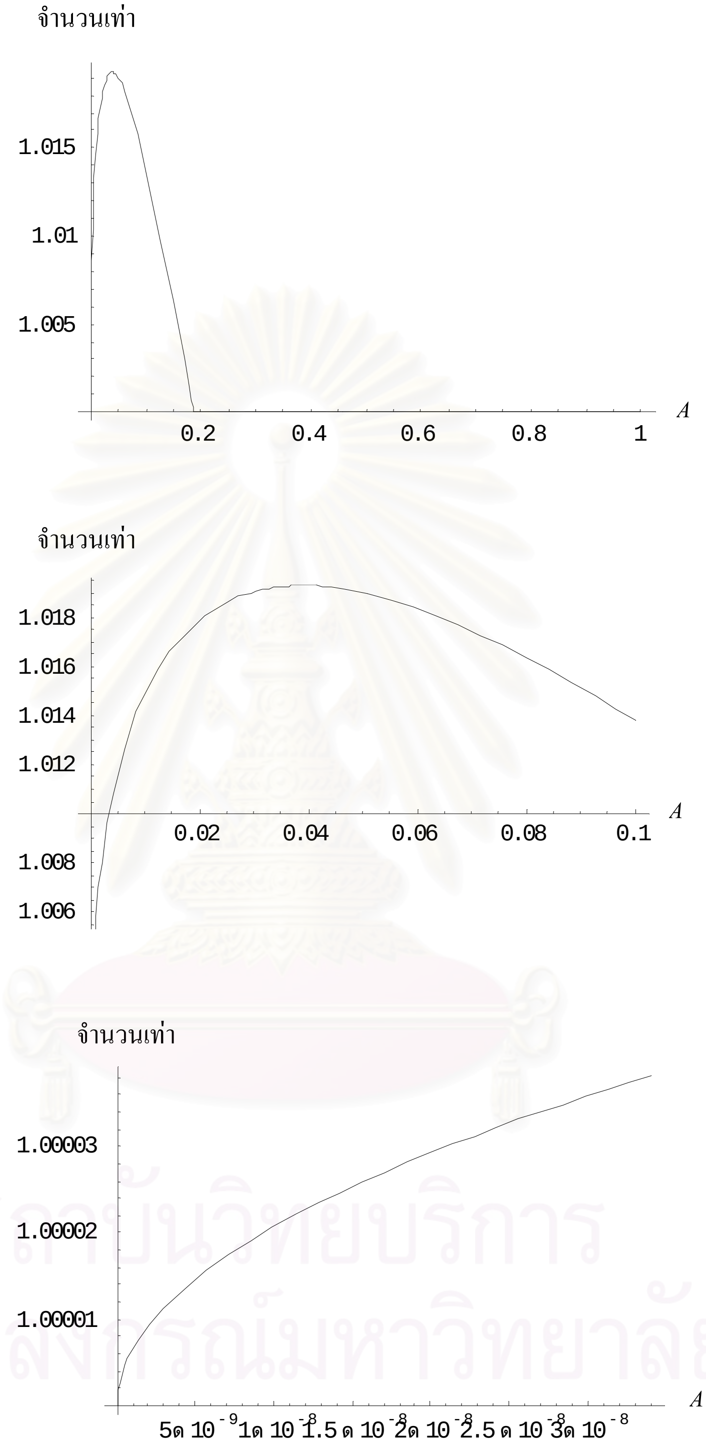
รูปที่ 3.19 : แสดงรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่ใช้ความยาวรวมน้อยสุด ในแต่ละกรณี

จากการสร้างกราฟดังรูปที่ 3.20 และ 3.21 จะพบว่าความยาวรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน จะน้อยกว่า ความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าเมื่อ $A-B$ มีค่าน้อยๆ นอกนั้นจะเท่ากัน

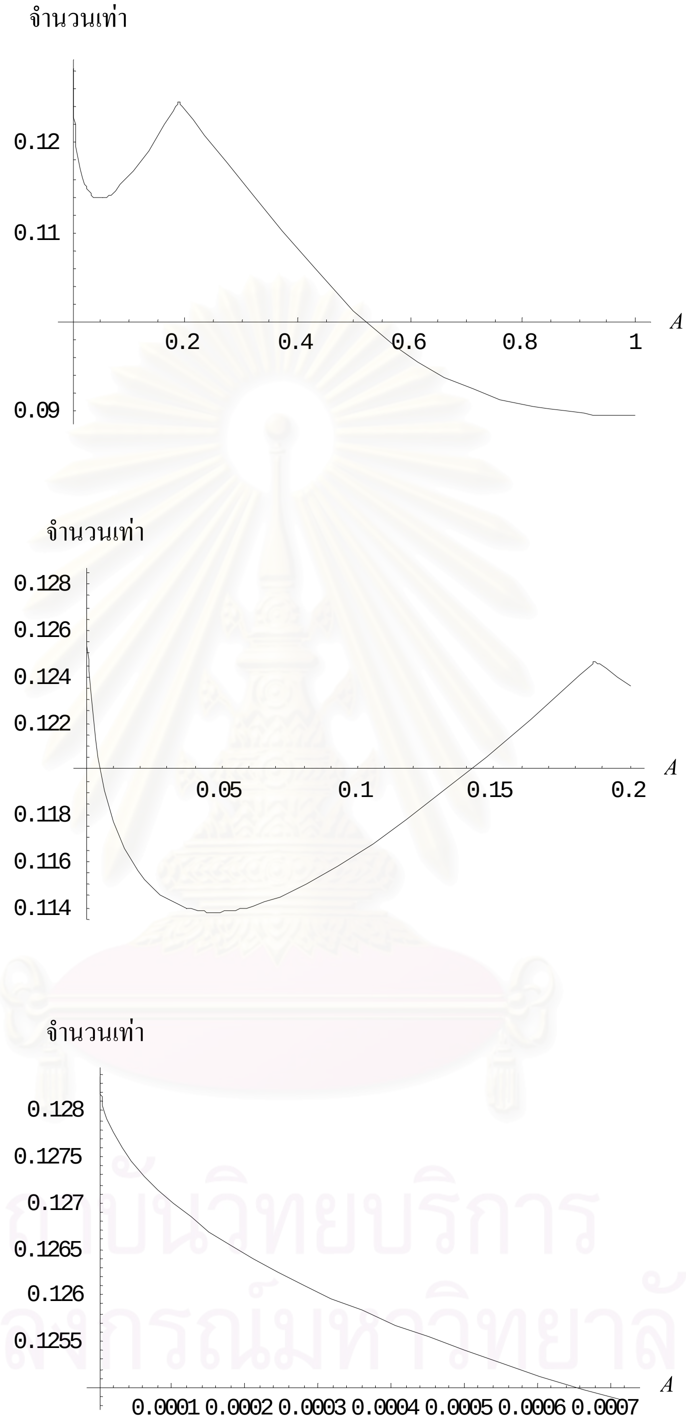
จากการสร้างกราฟดังรูปที่ 3.20 และ 3.22 เราสังเกตได้ว่าความแตกต่างระหว่างความยาวรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนกับความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B นั้นขัดกับความรู้สึกของคนทั่วไปที่เชื่อว่าความยาวรวมนั้นน่าจะแตกต่างกันมาก และจะพบว่าความแตกต่างระหว่างความยาวรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน กับความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ B นั้นจะแตกต่างกันน้อยที่สุด เมื่อ $A = B$ ในทางกลับกันความแตกต่างจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆถ้าหากว่า $A-B$ ลดลงเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดหนึ่งซึ่ง $A-B$ มีค่าน้อยๆความแตกต่างก็จะผกผันเป็นลดลงเรื่อยๆ และเมื่อถึงจุดหนึ่งซึ่ง $A-B$ มีค่าน้อยลงไปอีก ความแตกต่างก็จะผกผันกลับมาเป็นเพิ่มขึ้นเรื่อยๆเหมือนเดิม ส่วนรอยหักของกราฟเกิดจากการเปลี่ยนอย่างกะทันหันระหว่างรูปที่ 3.1 กับ 3.3



รูปที่ 3.20 : กราฟแสดงความยาวรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน โดยที่ $0 < A \le 1$



รูปที่ 3.21 : กราฟแสดงการเปรียบเทียบความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อเทียบกับความยาวรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน โดยที่ $0 < A \leq 1$



รูปที่ 3.22 : กราฟแสดงส่วนเกินความยาวรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 ด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอน เมื่อเทียบกับความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดของรูปที่ปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A และ 1 โดยที่ $0 < A \leq 1$

บทที่ 4

งานวิจัยต่อเนื่อง

ในบทนี้ เราจะแนะนำปัญหาที่สืบเนื่องต่อจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ซึ่งประกอบด้วย ปัญหาการปิดล้อมและแยกสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด และปัญหาการปิดล้อมและแยกสามถึงสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด ว่าน่าจะมีกระบวนการในการหาคำตอบของปัญหาอย่างไร เพราะอะไรปัญหาเหล่านั้นจึงยากขึ้นมาก และมีข้อควรระวังอะไรบ้างในการหาคำตอบของปัญหาเหล่านั้น ทั้งนี้เพื่อมุ่งหวังให้เป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหาเหล่านั้นต่อไป

4.1 ปัญหาการปิดล้อมและแยกสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด

กระบวนการหาคำตอบของปัญหานี้น่าจะสามารถทำในลักษณะเดียวกันกับปัญหาการปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดได้ แบ่งเป็นสองส่วนหลัก คือ หาคำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสี่อาณาบริเวณอาณาบริเวณละชิ้นซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดก่อน และแสดงว่าคำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุดนั้นแต่ละอาณาบริเวณต้องมีชิ้นเดียว

ความยากของปัญหานี้น่าจะมีสองประเด็นหลักๆ คือ

1. กรณีต่างๆของคำตอบน่าจะแบ่งออกเป็นหลายกรณีมากโดยขึ้นอยู่กับสัดส่วนของพื้นที่การเปรียบเทียบรูปที่มีอาณาบริเวณละชิ้นมีหลายกรณีมาก อาจจะทำให้เราต้องอาศัยการแยกกรณีจากสัดส่วนของพื้นที่นั้นมาใช้เป็นข้อมูลในการเปรียบเทียบความยาวเส้นรอบรูปรวมมากขึ้นกว่าปัญหาสามอาณาบริเวณซึ่งเกือบทั้งหมดเราสามารถเปรียบเทียบความยาวเส้นรอบรูปรวมได้โดยไม่ต้องคำนึงถึงสัดส่วนของพื้นที่
2. การแสดงว่าคำตอบของปัญหาแต่ละอาณาบริเวณต้องมีชิ้นเดียว

ข้อควรระวัง : ถ้าจะใช้วิธีเดียวกันกับปัญหาสามอาณาบริเวณในการแสดงว่าคำตอบของปัญหาแต่ละอาณาบริเวณต้องมีชิ้นเดียว จะต้องระวังในขั้นตอนที่เราจะทำให้ชิ้นที่เลือกเป็นรูปที่ปิดล้อมและแยกสี่อาณาบริเวณด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าว่าทำได้หรือไม่อย่างไร

4.2 ปัญหาการปิดล้อมและแยกสามถึงสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด

กระบวนการหาคำตอบของปัญหานี้น่าจะสามารถทำในลักษณะเดียวกันกับปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุดได้ นั่นคือ จะต้องเปรียบเทียบความยาวรวมของรูปที่ปิดล้อมและแยกสามถึงสี่อาณาบริเวณบางรูปก่อน จากนั้นจะต้องแสดงว่าคำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยกสามถึงสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุดนั้นจะต้องเป็นรูปใดรูปหนึ่งที่เปรียบเทียบความยาวไปแล้ว

ความยากของปัญหานี้น่าจะคล้ายกับปัญหา 4.1 แต่มีประเด็นเพิ่มเติม คือ

1. การแสดงว่าคำตอบของปัญหาต้องเป็นรูปใดรูปหนึ่งที่เปรียบเทียบความยาวไปแล้ว

ข้อควรระวัง : ถ้าจะใช้วิธีเดียวกันกับปัญหาสองอาณาบริเวณในการแสดงว่าคำตอบของปัญหาต้องเป็นรูปใดรูปหนึ่งที่เปรียบเทียบความยาวไปแล้ว จะต้องระวังในขั้นตอนที่เราตีกรอบชิ้นที่เลือก(อาจทำให้ซ้อนกันได้) จากนั้นตัดแต่งได้เป็นรูปที่ปิดล้อมและแยกสามถึงสี่อาณาบริเวณด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนว่าทำได้หรือไม่อย่างไร

2. อาจจะมีกรณีที่คำตอบไม่ได้มีคำตอบเดียว เช่นเดียวกันกับปัญหาสองอาณาบริเวณซึ่งมีกรณีที่คำตอบนั้นมีสองรูปที่มีความยาวรวมเท่ากัน

4.3 คำถามที่น่าสนใจ

4.3.1 จริงหรือไม่ที่คำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยก m อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปรวมน้อยสุด แต่ละอาณาบริเวณต้องมีชิ้นเดียว และถ้าไม่จริงในกรณี m ใดๆ แล้ว m ที่น้อยสุดที่ทำให้ไม่จริงเป็นเท่าไร

4.3.2 จริงหรือไม่ที่คำตอบของปัญหาการปิดล้อมและแยก m อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดด้วยเส้นแนวตั้งและแนวนอนที่มีความยาวรวมน้อยสุด แต่ละอาณาบริเวณต้องมีชิ้นเดียว และถ้าไม่จริงในกรณี m ใดๆ แล้ว m ที่น้อยสุดที่ทำให้ไม่จริงเป็นเท่าไร

รายการอ้างอิง

[1] Morgan, F. Soap bubbles in R^2 and on surfaces. Pacific J. Math. 165 (1994): 347-361.

[2] Foisy, J., Alfaro, M., Brock, J., Hodges, N., and Zimba, J. The standard soap bubbles R^2 uniquely minimizes perimeter. Pacific J. Math. 159 (1993): 47-59.

[3] Wichiramala, W. Proof of the planer triple bubble conjecture. J. reine angew. Math. 567 (2004): 1-49.

[4] Wichiramala, W. The planer triple bubble problem. Doctoral dissertation, Mathematics, Graduate College, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.

[5] Morgan, F., French, C., and Greenleaf, S. Wulff Clusters in R^2. J. Geom. Anal. 8 (1998): 97-115.

ภาคผนวก

กราฟต่างๆในวิทยานิพนธ์เล่มนี้สร้างจากโปรแกรม Mathematica 5.0 สร้างโดยใส่คำสั่งดังนี้

$$\mathtt{l}[\theta\_] = \frac{\theta}{\mathrm{Sin}[\theta]}\,\mathtt{h};$$

$$\mathtt{A}[\theta\_] = \mathtt{h}\hat{\ }2\,\frac{\theta - \mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\theta]}{4\,\mathrm{Sin}[\theta]\hat{\ }2};$$

$$\mathtt{A1} = \mathtt{A}\left[2\,\frac{\pi}{3} - \theta\right] + \mathtt{A}[\theta];$$

$$\mathtt{A2} = \mathtt{A}\left[\theta + 2\,\frac{\pi}{3}\right] - \mathtt{A}[\theta];$$

$$\mathtt{L} = \mathtt{l}[\theta] + \mathtt{l}\left[\theta + 2\,\frac{\pi}{3}\right] + \mathtt{l}\left[2\,\frac{\pi}{3} - \theta\right];$$

$$\mathtt{Lr2}[\mathtt{a1\_},\ \mathtt{a2\_}] = \mathtt{If}\left[2\,\mathtt{a1} < \mathtt{a2},\ 2\sqrt{2\,\mathtt{a1}} + 4\sqrt{\mathtt{a2}},\ 2\sqrt{6\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2})}\right];$$

$$\mathtt{Lr22}[\mathtt{a1\_},\ \mathtt{a2\_}] = \mathtt{If}\left[2\,\mathtt{a1} < \mathtt{a2},\ \mathtt{If}\left[\frac{43+30\sqrt{2}}{16}\,\mathtt{a1} < \mathtt{a2},\right.\right.$$
$$\left.\left. 4\sqrt{\mathtt{a1}+\mathtt{a2}} + 2\sqrt{\mathtt{a1}},\ 2\sqrt{2\,\mathtt{a1}} + 4\sqrt{\mathtt{a2}}\right],\ 2\sqrt{6\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2})}\right];$$

$$\mathtt{Lr3}[\mathtt{a1\_},\ \mathtt{a2\_},\ \mathtt{a3\_}] = \mathtt{If}\left[2\,\mathtt{a1} < \mathtt{a2},\ \mathtt{If}\left[\sqrt{\mathtt{a3}} < \frac{\sqrt{\mathtt{a1}}+\sqrt{2\,\mathtt{a2}}}{2},\ 1,\right.\right.$$
$$\left.\mathtt{If}\left[\sqrt{\mathtt{a3}} > \sqrt{\mathtt{a1}} + \sqrt{2\,\mathtt{a2}},\ 2,\ 3\right]\right],$$
$$\left.\mathtt{If}\left[\mathtt{a3} < \frac{3}{4}\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2}),\ 4,\ \mathtt{If}[\mathtt{a3} > 3\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2}),\ 5,\ 6]\right]\right];$$

$$\mathtt{Lr33D}[\mathtt{a1\_},\ \mathtt{a2\_},\ \mathtt{a3\_}] =$$
$$\mathtt{If}\left[\mathtt{a1} < \mathtt{a2},\right.$$
$$\mathtt{If}\left[2\,\mathtt{a1} < \mathtt{a2},\ \mathtt{If}\left[\sqrt{\mathtt{a3}} < \frac{\sqrt{\mathtt{a1}}+\sqrt{2\,\mathtt{a2}}}{2},\right.\right.$$
$$2\sqrt{2\,\mathtt{a1}} + 4\sqrt{\mathtt{a2}} + 2\sqrt{2\,\mathtt{a3}},$$
$$\mathtt{If}\left[\sqrt{\mathtt{a3}} > \sqrt{\mathtt{a1}} + \sqrt{2\,\mathtt{a2}},\ 2\sqrt{\mathtt{a1}} + 2\sqrt{2\,\mathtt{a2}} + 4\sqrt{\mathtt{a3}},\right.$$
$$\left.\left.6\sqrt{\frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{\mathtt{a1}}+\sqrt{2\,\mathtt{a2}}\right)^2 + 2\,\mathtt{a3}\right)}\right]\right],$$
$$\mathtt{If}\left[\mathtt{a3} < \frac{3}{4}\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2}),\ 2\sqrt{6\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2})} + 2\sqrt{2\,\mathtt{a3}},\right.$$
$$\mathtt{If}\left[\mathtt{a3} > 3\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2}),\ 2\sqrt{3\,(\mathtt{a1}+\mathtt{a2})} + 4\sqrt{\mathtt{a3}},\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.6\sqrt{\mathtt{a1}+\mathtt{a2}+\frac{2}{3}\,\mathtt{a3}}\right]\right]\right],\ 0\right];$$

```
Plot[Lr2[a, 1], {a, 0, 1}];

Plot[Lr22[a, 1], {a, 0, 1}];

Plot[Lr2[a, 1] / Lr22[a, 1], {a, 0, 1}];

Plot[Lr2[a, 1] / Lr22[a, 1], {a, 0, .1}];

Plot[Lr2[a, 1] / Lr22[a, 1], {a, 0, .000000034}];
```

```
h = 1;
ParametricPlot[{A1/A2, L/√A2}, {θ, 0, π/3}];
h =.

h = 1;
ParametricPlot[{A1/A2, Lr2[A1, A2]/L - 1}, {θ, 0, π/3}];
h =.

h = 1;
ParametricPlot[{A1/A2, Lr2[A1, A2]/L - 1}, {θ, .7, π/3}];
h =.

h = 1;
ParametricPlot[{A1/A2, Lr2[A1, A2]/L - 1}, {θ, 1.01, π/3}];
h =.

h = 1;
ParametricPlot[{A1/A2, Lr22[A1, A2]/L - 1}, {θ, 0, π/3}];
h =.

h = 1;
ParametricPlot[{A1/A2, Lr22[A1, A2]/L - 1}, {θ, .475, π/3}];
h =.

h = 1;
ParametricPlot[{A1/A2, Lr22[A1, A2]/L - 1}, {θ, 1.01, π/3}];
h =.

ContourPlot[Lr3[A, B, 1], {A, 0, 1}, {B, 0, 1}, PlotPoints → 150];

Plot3D[Lr33D[A, B, 1], {A, 0, 1}, {B, 0, 1}, PlotPoints → 50];
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายบัญญัติ สร้อยแสง เกิดเมื่อวันที่ 22 เดือนกันยายน ปีพ.ศ.2524 ที่จังหวัดสุรินทร์ ประเทศไทย สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี ศึกษาศาสตร์บัณฑิต(เกียรตินิยมอันดับสอง) สาขาการสอนคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ด้วยทุน ร.พ.ค. และเข้าศึกษาในระดับปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์ ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และได้รับทุนพัฒนาอาจารย์สาขาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์