2. ทฤษฎีสำคัญและสมมุติฐาน

ในการศึกษาวิจัยทางด้านคุณสมบัติการขึ้นรูปของโลหะแผ่น มีอยู่สองประการหลักที่เป็นที่สนใจ เพราะเกี่ยวข้องกับการควบคุมการผลิตให้เป็นไปตามที่ได้ออกแบบไว้เช่นรูปร่างของชิ้นงานเป็นต้น และยังเกี่ยวข้องกับคุณภาพของชิ้นงานเช่นความเสียหายเนื่องจากการฉีกขาดหรือมีผิวหน้าที่ไม่เรียบเป็นต้น สิ่งที่มักสนใจประการแรกคือการหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ใช้กับการแปรรูปที่เกิดขึ้น ซึ่งความสัมพันธ์นี้สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียด ทำให้สามารถคำนวณได้ว่าในกระบวนการขึ้นรูปโลหะแผ่นนั้นๆ ต้องการเครื่องจักรที่มีกำลังเท่าใดในการขึ้นรูปหรือต้องควบคุมการขึ้นรูปอย่างไร ส่วนประการที่สองที่สนใจคือขีดจำกัดของการขึ้นรูป เนื่องจากการขึ้นรูปของโลหะแผ่นส่วนมากไม่ได้มีการขึ้นรูปแบบสม่ำเสมอทั่วทั้งชิ้นงาน บางส่วนอาจจะไม่มีการแปรรูปเลย ในขณะที่บางส่วนอาจจะแปรรูปจนเกินขีดจำกัดของการแปรรูป

เมื่อความหนาและชนิดวัสดุของโลหะแผ่นไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลง แต่ปริมาณของการแปรรูปกลับแตกต่างกันอย่างมาก จึงเป็นการดีถ้าทราบถึงขีดจำกัดของการแปรรูป ทั้งนี้ยังเป็นการประหยัดค่าใช้จ่ายในกระบวนการผลิต หรือทำให้มีการปรับปรุงเทคนิคการผลิตให้ดีขึ้นได้ เพราะเมื่อทราบถึงปัจจัยที่มีผลต่อขีดจำกัดการแปรรูปแล้ว การลดหรือเลี่ยงปัจจัยเหล่านั้นในกระบวนการผลิตจึงเป็นสิ่งที่น่าจะเป็นไปได้ ด้วยการปรับปรุงทางเทคนิค

ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นแล้วว่า ในกระบวนการขึ้นรูปโลหะแผ่น สิ่งที่ต้องการทราบเป็นเบื้องต้นคือปริมาณแรงภายนอกที่ใช้ในการทำให้เนื้อของโลหะมีการไหลและมีการแปรรูปให้เป็นรูปร่างที่ต้องการ แต่เนื่องจากความเค้นภายในไม่ใช่ปัจจัยเพียงปัจจัยเดียวที่ทำให้ทราบถึงปริมาณแรงภายนอก ยังมีปัจจัยอื่นที่ทำให้แรงภายนอกที่ใช้มีค่าสูงขึ้น เช่น ผลกระทบจากความฝืด (Frictional effects) , ความไม่สม่ำเสมอในการแปรรูป (Non-Homogeneous Deformation) และ พฤติกรรมจริงของการแข็งขึ้นเนื่องจากความเครียด (Strain Hardening) ระหว่างการขึ้นรูปที่ซับซ้อน ผลจากปัจจัยทั้งหลายเหล่านี้ ทำให้แทบจะหาค่าที่แท้จริงของแรงกระทำภายนอกไม่ได้ แต่โดยอาศัยเทคนิคต่างๆที่มีการพัฒนากันมามากมาย และจากการอาศัยสมมุติฐานที่ตรงกับปัญหานั้นๆทำให้สามารถประมาณค่าแรงกระทำภายนอกที่ต้องการได้ ในที่นี้จะขอกล่าวถึงการศึกษาความเค้นภายในเพียงปัจจัยเดียวก่อน เนื่องจากการวัดค่าความเค้นภายในของวัตถุโดยวิธีการวัดค่าโดยตรงนั้นกระทำได้ไม่ง่ายนักในกรณีทั่วๆไป ส่วนมากจึงใช้การหาค่าทางอ้อม คือการหาค่าความเค้นจากค่าความเครียด ซึ่งหมายความว่า ถ้าต้องการหาค่าความเค้นของโลหะแผ่นหนึ่งๆ จำเป็นที่จะต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของโลหะแผ่นนั้นๆเสียก่อน

การพิจารณาความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียดในการขึ้นรูปโลหะแผ่น มีสิ่งที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียดอยู่สามข้อด้วยกันคือ

1. เกณฑ์การยีลด์ (Yield Criterion) และกฎการไหล (Flow Rule)
2. ฟังก์ชันของความเค้นและความเครียดสมมูลย์ (Generalized or Effective Stress and Strain Functions) ซึ่งมีค่าเทียบเท่ากับระบบของความเค้นภายในขอบเขตที่สนใจ
3. สมการองค์ประกอบ (Constitutive Equations) ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ของความเค้นที่มีต่อความเครียด และที่มีต่อตัวแปรอื่นที่สนใจในวัสดุต่างๆ ตั้งแต่แบบที่มีความต่อเนื่องไม่มีทิศทาง (Isotropic Continuum) จนกระทั่งถึงแบบการรวมกันแบบพหุผลึกที่มีทิศทาง (Anisotropic Polycrystalline aggregate)

เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์ของความเค้นต่อความเครียด จำเป็นต้องสร้างแบบจำลองของวัสดุหรือสมการองค์ประกอบที่ต้องการ , กฎการไหลแบบพลาสติก และ ความเค้นกับความเครียดสมมูลย์ ซึ่งกำเนิดมาจากกลศาสตร์แบบต่อเนื่อง (Continuum Mechanics)

เกณฑ์การยีลด์ (Yield Criterion)

เกณฑ์การยีลด์เป็นการแสดงออกโดยยึดหลักทางคณิตศาสตร์ของสภาวะความเค้นที่จะนำมาซึ่งการยีลด์ รูปแบบทั่วๆไปคือ

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = \text{ค่าคงที่} \qquad \text{(สมการที่ 1)}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปของความเค้นในแนวแกนหลักเป็น

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{ค่าคงที่} \qquad \text{(สมการที่ 2)}$$

สำหรับโลหะเหนียวส่วนมากที่คุณสมบัติไม่ขึ้นกับทิศทาง สมมุติฐานต่อไปนี้ถูกนำมาอ้างเนื่องจากได้มีการพบเห็นในหลายๆตัวอย่าง

1. ไม่เกิดปรากฏการณ์ Bauschinger Effect ดังนั้นค่าความแข็งแรงยีลด์ของแบบแรงดึงและแรงกดจึงมีค่าเท่ากัน
2. ความเป็นค่าคงที่ของปริมาตรมีความเด่นชัด ดังนั้นค่าทางพลาสติกที่เทียบเท่ากับ Poisson's Ratio คือเท่ากับ 0.5
3. ขนาดของความเค้นหลักเฉลี่ย ($\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$) ไม่ได้มีอิทธิพลต่อการยีลด์

แม้ว่าได้สร้างสมมุติฐานเหล่านี้ไว้เป็นเกณฑ์การยีลด์ดังจะได้กล่าวต่อไป การฝ่าฝืนใดๆของสมมุติฐานเหล่านี้จะนำมาซึ่งเกณฑ์การยีลด์ที่ต่างกัน ผลกระทบของอัตราการยืดและอุณหภูมิจะไม่นำมาคิดในที่นี้

แต่จะมีการนำผลกระทบเนื่องจากการแปรรูปแบบพลาสติกที่มีทิศทาง (Plastic Anisotropy) มาพิจารณาด้วย

เป็นสิ่งที่สำคัญมากที่จะตระหนักถึงข้อจำกัดเหล่านี้ เพราะมีความหมายว่าเกณฑ์การยีลด์ไม่ได้เป็นที่ยอมรับในทุกกรณีสำหรับทุกๆของเข็ง หรือในทุกๆเงื่อนไขการกระทำที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก เมื่อมองข้อสมมุติฐานในข้อที่ 1 และข้อที่ 3 ข้างต้น เป็นการยืนยันเกณฑ์การยีลด์ว่า ถ้าทำการเขียนกราฟสามมิติของสามแกนหลักจะต้องได้พื้นผิวทรงปริซึม ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดไม่เปลี่ยนแปลง พื้นผิวนี้เรียกว่าพื้นผิวการยีลด์

สมมุติฐานที่ว่าการยีลด์เป็นอิสระจากค่าความเค้นเฉลี่ย หรือเรียกอีกอย่างว่าองค์ประกอบความดันสถิตย์ (Hydrostatic Component) ของสภาวะความเค้นโดยรวม นับว่าสมเหตุสมผลถ้าการไหลแบบพลาสติกขึ้นอยู่กับกลไกการเฉือน (Shear Mechanism) เช่นการเกิด Slip และ Twinning ดังนั้นสมการการยีลด์จึงน่าจะเขียนใหม่ได้ว่า

$$f[(\sigma_1-\sigma_2),(\sigma_2-\sigma_3),(\sigma_3-\sigma_1)] = \text{ค่าคงที่} \qquad \text{(สมการที่ 3)}$$

ซึ่งสามารถเอ่ยอ้างได้ว่าการยีลด์ขึ้นอยู่กับขนาดของวงกลมของมอห์ร (Mohr's Corcle) แต่ไม่ได้ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของมัน ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m$, $\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m$ และ $\sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m$ และเรียกความเค้นแบบนี้ว่าความเค้นเบี่ยงเบน (Deviatoric Stresses) เนื่องจากว่าเป็นค่าความเค้นที่เบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยความเค้นที่มีขนาดคงที่ จะสามารถเขียนสมการการยีลด์ได้ในเทอมของความเค้นเบี่ยงเบนดังนี้

$$f(\sigma'_1,\sigma'_2,\sigma'_3) = \text{ค่าคงที่} \qquad \text{(สมการที่ 4)}$$

<u>เกณฑ์การยีลด์ของ von Mises</u>

ในเกณฑ์การยีลด์นี้กล่าวไว้ว่าการยีลด์จะเกิดขึ้นเมื่อมีบางค่าของรากที่สองของค่าเฉลี่ยกำลังสองของความเค้นเฉือนมีค่าคงที่หรือ

$$[\ (\ (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\ )\ /\ 3\ ]^{1/2} = C_1 \qquad \text{(สมการที่ 5)}$$

ซึ่งเทียบเท่ากับ

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 = C_2 \qquad \text{(สมการที่ 6)}$$

โดยการใช้การทดสอบแรงดึงแบบแกนเดียว ทำให้สามารถที่จะนิยามค่า C_2 ได้ โดยการแทนค่า σ_1 เท่ากับ Y ณ.จุดเกิดการยืลด์ และ σ_2 กับ σ_3 มีค่าเท่ากับศูนย์ จะสามารถหาค่าคงที่ C_2 ได้เท่ากับ $2Y^2$ หรืออีกวิธีหนึ่งคือการหาค่า C_2 จากการทดสอบการบิดตัว เพื่อให้เกิดความเค้นเฉือนอย่างเดียว แล้วนำค่า σ_1 กับค่า $-\sigma_3$ ที่มีค่าเท่ากันกับ k และ σ_2 เท่ากับศูนย์มาแทนค่า จะได้ค่าคงที่ C_2 เท่ากับ $6k^2$ ดังนั้นสมการการยืลด์ของ von Mises จึงสามารถเขียนได้ดังนี้

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2Y^2 = 6k^2 \qquad \text{(สมการที่ 7)}$$

หรือถ้าเขียนให้อยู่ในรูปแบบความเค้นทั่วๆไปจะสามารถเขียนสมการการยืลด์ได้ดังนี้

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2 + 6(\tau^2_{xy} + \tau^2_{yz} + \tau^2_{zx}) = 2Y^2 = 6k^2 \qquad \text{(สมการที่ 8)}$$

<u>ทฤษฎีพลาสติกที่ขึ้นกับทิศทางของฮิลล์ (Hill's Anisotropic Plasticity Theory)</u>

Hill, R. (1948) ได้สร้างสมการเชิงปริมาณเพื่ออธิบายคุณสมบัติ Anisotropy ในช่วงพลาสติกโดยไม่ได้คำนึงถึงทิศทางของผลึกเริ่มต้น แต่กลับตั้งนิยามว่าวัสดุมีคุณสมบัติเหมือนกันในทิศทางแกนหลัก x , y และ z โดยมีคุณสมบัติที่สมมาตรกันแบบกระจกบนแกนระนาบ (Planes of mirror symmetry) คือ ระนาบ x-y , y-z และ z-x ในแผ่นโลหะที่ผ่านการรีดโดยทั่วไปจะกำหนดให้ทิศทาง x , y และ z เป็นทิศทางขนานกับการรีด , ทิศทางขวางกับการรีด และทิศทางตามความหนาตามลำดับ ทฤษฎีนี้มีสมมุติฐานว่า ไม่ว่าในทิศทางใดก็ตาม ค่ายืลด์ของการทดสอบแรงดึงจะเท่ากับค่ายืลด์ที่ได้จากการทดสอบแรงกด ซึ่งสมการของฮิลล์นี้จะได้แสดงและอธิบายในช่วงการสร้างแบบจำลองต่อไป

<u>ทฤษฎีการเพิ่มขึ้น (Incremental Theory)</u>

ความสัมพันธ์ของความเค้นกับความเครียด ซึ่งอธิบายเส้นทางของการแปรรูปแบบพลาสติกของวัสดุ เรียกว่ากฎการไหล (Flow Rule)

การไหลสำหรับเกณฑ์การยืลด์ใดๆอาจหาได้จากการใช้สมการต่อไปนี้

$$d\varepsilon_{ij} = \partial f(\sigma_{ij})/\partial\sigma_{ij}\ (d\lambda) \qquad \text{(สมการที่ 9)}$$

โดยที่ $f(\sigma_{ij})$ ในที่นี้คือฟังก์ชันการยีลด์แบบไม่ขึ้นกับทิศทาง สำหรับเกณฑ์ของ von Mises สมการของการไหลที่ได้มาคือ

$$d\varepsilon_1/\sigma'_1 = d\varepsilon_2/\sigma'_2 = d\varepsilon_3/\sigma'_3 = d\lambda \qquad \text{(สมการที่ 10)}$$

โดยที่ σ'_i คือองค์ประกอบความเค้นเบี่ยงเบน สมการนี้คือสมมุติฐานของ Reuss ที่กล่าวว่าการเพิ่มขึ้นของความเครียดแบบพลาสติกเป็นสัดส่วนกับความเค้นเบี่ยงเบน จากความสัมพันธ์อันนี้ทำให้ได้มาซึ่งสมการ Levy-Mises ที่ใช้กันโดยทั่วไปสำหรับวัสดุแบบไม่ขึ้นกับทิศทางดังนี้

$$d\varepsilon_x/(\sigma_x-\sigma_m) = d\varepsilon_y/(\sigma_y-\sigma_m) = d\varepsilon_z/(\sigma_z-\sigma_m) = \qquad \text{(สมการที่ 11)}$$
$$d\gamma_{xy}/(2\tau_{xy}) = d\gamma_{yz}/(2\tau_{yz}) = d\gamma_{zx}/(2\tau_{zx}) = d\lambda$$

โดยที่ $d\lambda$ คือ Instantaneous , Positive , Varying , Proportionality Factor หรือ Plastic Compliance

หรือเขียนในรูปของ Suffix Notation ว่า

$$(d\varepsilon_{ij})_p = \sigma'_{ij}\, d\lambda \qquad \text{(สมการที่ 12)}$$

จากทฤษฎีนี้สามารถแสดงความเค้นหลักได้ดังนี้

$$d\varepsilon_1 = d\lambda\, [\, \sigma_1 - 1/2\, (\, \sigma_2 + \sigma_3\,)\,] \qquad \text{(สมการที่ 13)}$$

$$d\varepsilon_2 = d\lambda\, [\, \sigma_2 - 1/2\, (\, \sigma_1 + \sigma_3\,)\,] \qquad \text{(สมการที่ 14)}$$

$$d\varepsilon_3 = d\lambda\, [\, \sigma_3 - 1/2\, (\, \sigma_1 + \sigma_2\,)\,] \qquad \text{(สมการที่ 15)}$$

ทฤษฎีการแปรรูป (Deformation Theory)

ทฤษฎีนี้มีการตั้งสมมุติฐานว่าการให้แรงกระทำเพิ่มขึ้นแบบเป็นสัดส่วน (Proportional Loading) ดังนั้นการเพิ่มขึ้นของความเครียด (Strain Increment , $d\varepsilon_i$) จากทฤษฎีการเพิ่มขึ้น สามารถแทนด้วยความเครียดรวม (Total Strain , ε_i) ของทฤษฎีนี้ ดังนั้นสมการที่ 13 , 14 และ 15 จึงเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\varepsilon_1 = d\lambda \left[\sigma_1 - 1/2 \left(\sigma_2 + \sigma_3 \right) \right] \quad \text{(สมการที่ 16)}$$

$$\varepsilon_2 = d\lambda \left[\sigma_2 - 1/2 \left(\sigma_1 + \sigma_3 \right) \right] \quad \text{(สมการที่ 17)}$$

$$\varepsilon_3 = d\lambda \left[\sigma_3 - 1/2 \left(\sigma_1 + \sigma_2 \right) \right] \quad \text{(สมการที่ 18)}$$

การวิเคราะห์หาขีดจำกัดความเครียดในการขึ้นรูปโลหะแผ่นโดยการทดลอง

การเกิด Diffuse Necking เกิดขึ้นจากเงื่อนไขดังนี้

$$dF = 0 = \underline{\sigma}\, dA + A\, d\underline{\sigma} \quad \text{(สมการที่ 19)}$$

โดยที่ F คือ แรงที่ใช้ในการดึงโลหะแผ่น ในทิศทางแกนหลัก

A คือ พื้นที่หน้าตัดของโลหะแผ่น และตั้งฉากกับแรงที่ใช้ในการดึงโลหะแผ่น

ในการหาค่า Critical Effective Strain โดยการทดลอง จะหาได้จากการกราฟแรงกับระยะยืด ณ. จุดที่มีแรงสูงสุด หรือ ณ.จุดที่มีความชันเท่ากับศูนย์ ตามสมการที่ 19

เนื่องจากค่าแรงสูงสุดไม่ได้มีเพียงค่าเดียว ในที่นี้จะใช้การสร้างสมการถดถอยกำลังสองในช่วงแคบๆ คือบวกและลบ 10 นิวตันจากค่าแรงสูงสุดโดยประมาณสำหรับการทดลองชุด A , B และ C แต่สำหรับการทดลองชุด D ใช้ค่าบวกและลบ 5 นิวตันจากค่าแรงสูงสุดโดยประมาณ จากนั้นจึงทำการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและให้เท่ากับศูนย์ เมื่อแก้สมการแล้วระยะยืดที่ได้จะนำมาเปลี่ยนเป็นค่า Critical Effective Strain ต่อไป

การวิเคราะห์หาขีดจำกัดความเครียดในการขึ้นรูปโลหะแผ่นโดยทางทฤษฎีของฮิลล์

พิจารณาการแปรรูปโดยใช้คุณสมบัติ Anisotropy ตาม Hill's Theory

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y-\sigma_z)^2 + G(\sigma_z-\sigma_x)^2 + H(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 2L(\tau_{yz})^2 + 2M(\tau_{zx})^2 + 2N(\tau_{xy})^2 = 1 \quad \text{(สมการที่ 20)}$$

โดยที่ $f(\sigma_{ij})$ คือ ฟังก์ชันของ Anisotropic Yield Criterion

F , G , H , L , M , N คือ สัมประสิทธิ์ที่แสดงลักษณะความเป็น Anisotropy

σ_x , σ_y , σ_z คือ ความเค้นดึงในทิศทางแกน x , y และ z ตามลำดับ

τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} คือ ความเค้นเฉือนบนระนาบ x , y และ z ตามลำดับ โดยมีทิศทางชี้ตามแกน y , z และ x ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาในกรณีที่เป็น Biaxial Stress State ในทิศทางของแกนหลัก สมการที่ 20 จะสามารถหาค่า Effective Stress ($\underline{\sigma}$) ได้ดังนี้

$$\underline{\sigma}^2 = (\sigma_1)^2 - [2H/(G+H)]\,(\sigma_1)(\sigma_2) + [(F+H)/(G+H)]\,(\sigma_2)^2 \qquad \text{(สมการที่ 21)}$$

โดยที่ σ_1 , σ_2 คือ ความเค้นในแนวแกนหลักหรือทิศทางการดึง และความเค้นในแนวแกนรองหรือในทิศทางความกว้างที่ขวางกับการดึง ตามลำดับ

จาก Flow Rule และใช้ Total Plastic Strain (ε) แทน Strain Increment ($d\varepsilon$) จะได้ว่า

$$\varepsilon_1 = d\lambda\,[\,H(\sigma_1 - \sigma_2)+G\sigma_1\,] \qquad \text{(สมการที่ 22)}$$

$$\varepsilon_2 = d\lambda\,[\,F\sigma_2+H(\sigma_2 - \sigma_1)\,] \qquad \text{(สมการที่ 23)}$$

โดยที่ ε_1 , ε_2 คือ ความเครียดในแนวแกนหลักหรือทิศทางการดึง และความเครียดในทิศทางความกว้างที่ขวางกับการดึง ตามลำดับ

$d\lambda$ คือ ค่า Plastic Compliance

นำสมการที่ 23 มาหารด้วยสมการที่ 22 จะได้ค่าเท่ากับ Constant Strain Ratio (ρ)

$$\text{Constant Strain Ratio } (\rho) = \varepsilon_2/\varepsilon_1 = [\,F\sigma_2+H(\sigma_2 - \sigma_1)\,]/[\,H(\sigma_1 - \sigma_2)+G\sigma_1\,] \qquad \text{(สมการที่ 24)}$$

จัดสมการที่ 24 เสียใหม่ให้อยู่ในรูปของ Constant Stress Ratio (α)

$$\text{Constant Stress Ratio } (\alpha) = \sigma_2/\sigma_1 = [\,(\rho H+\rho G+H)/(F+H+\rho H)\,] \qquad \text{(สมการที่ 25)}$$

แทนค่าสมการที่ 25 ลงในสมการที่ 21 จะได้ว่า

$$\underline{\sigma}^2 = (\sigma_1)^2 - [2H/(G+H)](\alpha)(\sigma_1)^2 + [(F+H)/(G+H)](\alpha)^2(\sigma_1)^2 \qquad \text{(สมการที่ 26)}$$

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบง่ายๆได้ดังนี้

$$\underline{\sigma} = K\sigma_1 \qquad \text{(สมการที่ 27)}$$

โดยที่ K คือ อัตราส่วนค่าคงที่ระหว่าง Effective Stress กับ ความเค้นในแกนหลัก

จากแนวคิดของ " Work Equivalent Measure " ทำให้สามารถหาค่า Effective Strain ($\underline{\varepsilon}$) ได้ดังนี้

$$\underline{\sigma\varepsilon} = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 = \sigma_1\varepsilon_1 + \alpha\rho\sigma_1\varepsilon_1 + (0)\varepsilon_3 = [\ 1+\alpha\rho\ ]\sigma_1\varepsilon_1 \qquad \text{(สมการที่ 28)}$$

โดยที่ σ_3 คือ ความเค้นในทิศทางความหนาที่ขวางกับการดึง

ε_3 คือ ความเครียดในทิศทางความหนาที่ขวางกับการดึง

แทนค่าสมการที่ 28 ลงในสมการที่ 27 จะได้ว่า

$$\underline{\varepsilon} = [\ 1+\alpha\rho\ ]\varepsilon_1/K \qquad \text{(สมการที่ 29)}$$

การเกิด Diffuse Necking เกิดขึ้นจากเงื่อนไขดังนี้

$$d\sigma_1/\sigma_1 = -dA/A = d\varepsilon_1 \qquad \text{(สมการที่ 30)}$$

แทนค่า $\underline{\sigma}$ และ $\underline{\varepsilon}$ จากสมการที่ 27 และ 29 ลงในสมการที่ 30 สามารถหาเงื่อนไขของ Critical Effective Strain ออกมาจะได้

$$d\ \ln\underline{\sigma}\ /\ d\underline{\varepsilon} = [\ K\ /\ (\ 1+\alpha\rho\ )\ ] \qquad \text{(สมการที่ 31)}$$

ในการหาค่า Critical Effective Strain โดยทางทฤษฎีนี้ จะหาได้จากการกราฟของ ลอการิทึมความเค้นกับความเครียด ณ.จุดที่มีความชันเท่ากับ [K / (1+$\alpha\rho$)] ตามสมการที่ 31

การหาค่าความชันของกราฟกึ่งลอการิทึมข้างต้น สามารถหาได้ทั้งแบบกราฟฟิก และการ Fit Curve ในที่นี้จะใช้การ Fit Curve ด้วยสมการถดถอยกำลังสี่ที่มีค่า R^2 มากกว่า 0.9995 สำหรับชุดการทดลองชุด A , B และ C แต่สำหรับชุดการทดลอง D ใช้สมการถดถอยกำลังสี่ที่มีค่า R^2 มากกว่า 0.99 โดยเริ่มทำการ Fit Curve ตั้งแต่ช่วงที่มีการแปรรูปแบบพลาสติกเต็มที่แล้ว จนถึงช่วงที่แรงดึงมีค่าสูงสุด จากนั้นจึงทำการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและให้เท่ากับ [K / (1+αρ)] เมื่อแก้สมการแล้วความเค้นที่ได้ก็คือค่า Critical Effective Strain ตามทฤษฎี

<u>การวิเคราะห์หาค่าขีดจำกัดความเครียดโดยใช้ค่า Strain-Hardening Exponent จากอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของความสัมพันธ์แบบลอการิทึมของความเค้นกับความเครียด</u>

การเกิด Diffuse Necking เกิดขึ้นจากเงื่อนไขดังนี้

$$d(\ln \underline{\sigma}) = d\underline{\sigma} / \underline{\sigma} = -dA/A = d\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}\, d(\ln \underline{\varepsilon}) \qquad \text{(สมการที่ 32)}$$

จากนิยามของ Strain Hardening Exponent (n) สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$n = d(\text{Log } \underline{\sigma})/d(\text{Log } \underline{\varepsilon}) = d(\ln \underline{\sigma})/d(\ln \underline{\varepsilon}) \qquad \text{(สมการที่ 33)}$$

จากสมการที่ 32 และสมการที่ 33 สามารถหาค่า Critical Effective Strain ได้เท่ากับค่า n

การหาค่า n จะต้องหาจาก ค่าความชันของกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $\ln \underline{\sigma}$ กับ $\ln \underline{\varepsilon}$ ด้วยวิธีใช้สมการถดถอยเชิงเส้น โดยเลือกค่า R^2 เท่ากับ 0.9995 สำหรับชุดการทดลอง A , B และ C ส่วนการทดลองชุด D โดยเลือกค่า R^2 เท่ากับ 0.99 และเริ่มใช้ข้อมูลตั้งแต่ช่วงที่มีการแปรรูปแบบพลาสติกเต็มที่แล้ว จนถึงช่วงที่แรงดึงมีค่าสูงสุด จากนั้นจึงทำการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพื่อให้ได้ค่าความชันออกมา ซึ่งเท่ากับค่า n