เซมิกรุปของเมตริกซ์ที่เรกูลาร์บนเซมิริง

นางสาว นงนุช นิวาสานนท์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2530

ISBN 974-567-646-2

REGULAR MATRIX SEMIGROUPS OVER SEMIRINGS

Miss Nongnuch Nivasanon

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University

1987

ISBN 974-567-646-2

Thesis Title	Regular Matrix Semigroups over Semirings
By	Miss Nongnuch Nivasanon
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya .... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committe

Thavee Srisangthong .... Chairman

(Associate Professor Thavee Srisangthong M.A.)

Yupaporn Kemprasit .... Thesis Advisor

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Patanee Udomkavanich .... Member

(Assistant Professor Patanee Udomkavanich Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เซมิกรุปของเมตริกซ์ที่เรกูลาร์บนเซมิริง

ชื่อนิสิต นางสาว นงนุช นิวาสานนท์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2529

บทคัดย่อ

เรากล่าวว่า เซมิกรุป S <u>เรกูลาร์</u> ถ้าสำหรับทุกสมาชิก $x \in S$ มีสมาชิก $y \in S$ ซึ่งทำให้ $x = xyx$

ถ้า S เป็นเซมิริงสลับที่ได้ภายใต้การบวกและ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วเราให้ $M_n(S)$ แทนเซตของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บน S ทั้งหมด ซึ่งจะได้ว่า $M_n(S)$ เป็นเซมิกรุปภายใต้การคูณของเมตริกซ์

สำหรับคำว่า <u>เซมิกรุปของเมตริกซ์</u>บนเซมิริง S ซึ่งสลับที่ได้ภายใต้การบวก เราจะหมายถึงเซมิกรุปซึ่งมีสมาชิกเป็นเมตริกซ์บน S และการดำเนินการคือการคูณของเมตริกซ์

ให้ $S = (S,+,\cdot)$ เป็นเซมิริงสลับที่ได้และมี 0,1

จะเรียกเซมิริง S ว่าเป็น

<u>เซมิริงบูลลีน</u> ถ้า $x^2 = x$ สำหรับทุกสมาชิก $x \in S$

<u>เซมิฟิลด์</u> ถ้า $(S \setminus \{0\},\cdot)$ เป็นกรุป

มีจุดประสงค์หลัก 2 ประการในการวิจัยนี้ จุดประสงค์หลักประการแรกคือหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของจำนวนเต็มบวก n และเซมิริงบูลลีน S ที่ทำให้เซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เป็นเซมิกรุปเรกูลาร์ จุดประสงค์หลักอีกประการหนึ่งคือ หาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของจำนวนเต็มบวก n และเซมิฟิลด์ S ที่ทำให้ $M_n(S)$ เป็นเซมิกรุปของเมตริกซ์ที่เรกูลาร์

ผลลัพธ์ที่สำคัญของการวิจัย มีดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ให้ S เป็นเซมิริงบูลลีนและ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เรกูลาร์ เมื่อและต่อเมื่อข้อใดข้อหนึ่งของเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $n = 1$

(ii) S เป็นริงบูลลีน

(iii) $n = 2$ และสำหรับทุกสมาชิก $x \in S$, $1+2x = 1$ และมีสมาชิก $y \in S$ ซึ่ง $x+y = 1$ และ $xy = 0$

<u>ทฤษฎีบท 2</u> ให้ S เป็นเซมิริงบูลลีนและ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เรกูลาร์ เมื่อและต่อเมื่อข้อใดข้อหนึ่งของเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $n = 1$

(ii) S เป็นริงบูลลีน

(iii) $n = 2$ และ $S \cong B \times R$ สำหรับบางพีชคณิตบูลลีน B และริงบูลลีน R

<u>ทฤษฎีบท 3</u> ให้ S เป็นเซมิฟิลด์และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เรกูลาร์ เมื่อและต่อเมื่อข้อใดข้อหนึ่งของเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $n = 1$

(ii) S เป็นฟิลด์

(iii) $n = 2$ และ S เป็นเซมิฟิลด์ไอเด็มโพเทนต์ภายใต้การบวก

<u>บทแทรก 4</u> ให้ S เป็นเซมิฟิลด์ของจำนวนจริงซึ่ง ≥ 0 ภายใต้การคูณปกติ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก สมมติว่า $\oplus$ เป็นการบวกบนเซมิฟิลด์ S ดังนั้นเซมิกรุปของเมตริกซ์ $M_n(S)$ เรกูลาร์ เมื่อและต่อเมื่อข้อใดข้อหนึ่งของเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $n = 1$

(ii) $1 \oplus 1 = 0$

(iii) $n = 2$ และ $1 \oplus 1 = 1$

Thesis Title Regular Matrix Semigroups over Semirings

Name Miss Nongnuch Nivasanon

Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Department Mathematics

Academic Year 1986

ABSTRACT

A semigroup S is said to be regular if for every $x \in S$, $x = xyx$ for some $y \in S$.

If S is an additively commutative semiring and n is a positive integer, we let $M_n(S)$ be the set of all $n \times n$ matrices over S, so it is a semigroup under the matrix multiplication.

By a matrix semigroup over an additively commutative semiring S, we shall mean a semigroup of matrices over S under the matrix multiplication.

Let $S = (S,+,\cdot)$ be a commutative semiring with 0,1.
The semiring S is called

a Boolean semiring if $x^2 = x$ for every $x \in S$,

a semifield if $(S \setminus \{0\},\cdot)$ is a group.

There are two main purposes of this research. The first one is to find necessary and sufficient conditions of a positive integer n and a Boolean semiring S in order that the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular. The second one is to find those of a positive integer n and a semifield S such that $M_n(S)$ is a regular matrix semigroup.

The main results of this research are as follows :

Theorem 1. Let S be a Boolean semiring and n a positive integer. Then the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular if and only if one of the following conditions holds :

(i) $n = 1$.

(ii) S is a Boolean ring.

(iii) $n = 2$ and for every $x \in S$, $1+2x = 1$ and there exists a $y \in S$ such that $x+y = 1$ and $xy = 0$.

Theorem 2. Let S be a Boolean semiring and n a positive integer. Then the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular if and only if one of the following conditions holds :

(i) $n = 1$.

(ii) S is a Boolean ring.

(iii) $n = 2$ and $S \cong B \times R$ for some Boolean algebra B and Boolean ring R.

Theorem 3. Let S be a semifield and n a positive integer. Then the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular if and only if one of the following conditions holds :

(i) $n = 1$.

(ii) S is a field.

(iii) $n = 2$ and S is an additively idempotent semifield.

Corollary 4. Let S be a semifield of nonnegative real numbers under the usual multiplication and n a positive integer. Assume that $\oplus$ is the addition on the semifield S. Then the matrix semigroup $M_n(S)$ is regular if and only if one of the following conditions holds :

(i) $n = 1$.

(ii) $1 \oplus 1 = 0$.

(iii) $n = 2$ and $1 \oplus 1 = 1$.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Asso. Prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my mother, brother and sisters for their encouragement thoughout my graduate study.

CONTENTS