บทที่ 2

วิธีวิเคราะห์

<u>สมมติฐาน</u>

การวิเคราะห์ในการศึกษานี้ อาศัยข้อสมมติฐานต่อไปนี้

1. อาคารประกอบด้วยผนังรับแรงเฉือน (Shear wall) และโครงข้อแข็ง (Frame)
2. ระบบพื้นมีความเกร็ง (Rigidity) ในระนาบของมันเองสูงมาก (In-plane rigid floor) จนทำให้มันสามารถเปลี่ยนตำแหน่งแบบคงรูป (Rigid-body displacement) เท่านั้น
3. โครงข้อแข็งแต่ละระนาบ รับแรงในระนาบของมันเองเท่านั้น และคานทุกตัวของมันมีจุดดัดกลับอยู่ที่จุดกึ่งกลางช่วงคานเสมอ
4. ผนังรับแรงเฉือน (Shear wall) มีความชะลูด (Slenderness) H/l_w ตั้งแต่ 2.5 ขึ้นไป โดยอิงมาตราฐาน ACI318-89 เพื่อจะได้สมมติให้ว่ามีพฤติกรรมเป็นแบบคานยื่น (Cantilever beam)
5. พิจารณาเฉพาะการโก่งตัว (Deflection) อันเนื่องจากโมเมนต์ดัดเท่านั้น
6. การโก่งตัวของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ตลอดจนการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างมีค่าน้อย
7. คุณสมบัติเชิงกลและเชิงเรขาคณิตของโครงอาคารทุกชั้นเหมือนกันตลอดความสูง
8. ชิ้นส่วนของโครงสร้างมีพฤติกรรมแบบอีลาสติกเชิงเส้นตรง (Linear elastic behavior)

ในสมมติฐานดังกล่าวข้างต้น ก็ล้วนแต่เป็นสมมติฐานที่ใช้โดยทั่วไปยกเว้นในข้อ 3 ซึ่งกำหนดให้คานทุกตัวของโครงข้อแข็งมีจุดดัดกลับที่กึ่งกลางช่วง ดังนั้นเราจึงจะได้กล่าวถึงแบบจำลอง (Model) ของโครงข้อแข็งที่ได้จากสมมติฐานนี้โดยละเอียด พร้อมกับจะได้ประเมินความแม่นยำของมันด้วย

แบบจำลองสำหรับโครงข้อแข็ง

สมมติฐานเดิมที่นิยมใช้เพื่อการวิเคราะห์โครงข้อแข็งโดยประมาณมักจะกำหนดให้มีจุดดัดกลับที่กึ่งกลางความสูงแต่ละชั้นของเสาทุกต้นและที่จุดกึ่งกลางช่วงคานทุกตัว ดังในวิธีการที่เรียกว่า Portal method วิธีนี้จะให้ผลเฉลยถูกต้องเมื่ออัตราส่วนสติฟเนส (Stiffness) ของคานต่อเสามีค่ามาก ซึ่งรูปแบบการโก่งตัวของโครงข้อแข็งในกรณีนี้จะค่อนไปทาง Shear mode

อย่างไรก็ตามในอาคารสูงทั่วไปจะสังเกตได้ว่าเสามักมีขนาดใหญ่กว่าคานมาก จนอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าน้อยมาก ดังนั้นรูปแบบการโก่งตัวที่เกิดขึ้นจึงไม่ใช่แบบ Shear mode ทั้งนี้เพราะสติฟเนส (Stiffness) ของคานมีค่าน้อยจนไม่อาจจะทำให้เกิดจุดดัดกลับขึ้นในเสาทุกชั้นได้ ดังนั้นผลเฉลยของวิธี Portal จึงมีความคลาดเคลื่อนเป็นอย่างมาก

ในการศึกษาครั้งนี้ เราจึงจะแก้ไขข้อบกพร่องนี้โดยใช้แนวคิดของ Suriyamongkol (1993) สมมติให้มีจุดดัดกลับเฉพาะในคานเท่านั้นดังแสดงในรูปที่ 1 การกำหนดดังกล่าวทำให้สามารถแยกพิจารณาพฤติกรรมของเสาแต่ละต้นโดยอิสระได้ โดยใช้แบบจำลอง (Model) ดัง-แสดงในรูปที่ 2(a) และ (b) ซึ่งเรามองเสาแต่ละต้นของโครงข้อแข็งเสมือนหนึ่งว่ามีคานแขนยื่นออกมาที่ทุกระดับชั้น โดยคานแขนดังกล่าวมีความยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของช่วงคานเดิม ปลายคานมีสภาพรองรับแบบลูกกลิ้ง (Roller support) เสาภายในจะมีคานแขนสองข้าง ส่วนเสาริมมีข้างเดียว ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อเสาถูกกระทำด้วยแรงกระทำทางข้าง (Lateral Load) แทนที่จะโก่งตัวแบบคานยื่นอิสระ (Free cantilever) มันจะได้รับการพยุงจากคานแขนซึ่งดัดตัวฝืนกับทิศทางของโมเมนต์ล้มคว่ำ (Overturning moment) ทำให้เกิดโมเมนต์ดัดที่ขั้วต่อเป็น M_b และ M'_b ดังในรูป ค่าโมเมนต์ดัดนี้จะเป็นสัดส่วนกับมุมหมุนของขั้วต่อ (Joint rotation)

รูปที่ 3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและมุมหมุน ซึ่งตามทฤษฎีพื้นฐานทั่วไปของคาน (Conventional beam theory) จะได้ว่า

$$M_b = \frac{6EK_b}{(1-\gamma)^3}\frac{d\Delta}{dz} \tag{1}$$

และ

$$M'_b = \frac{6EK'_b}{(1-\gamma')^3}\frac{d\Delta}{dz} \tag{2}$$

โดยที่ Δ เป็นระยะโก่งที่ความสูง z ของระดับชั้นใด ๆ ; $\frac{d\Delta}{dz}$ เป็นมุมเอียง (Slope) ณ ระดับชั้นนั้น ; E แทนโมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of elasticity) ของคาน ; γ, γ' หมายถึงอัตราส่วนระหว่างความลึกของเสาต่อความยาวช่วงคานทั้งสองข้าง และ K_b, K'_b เป็นอัตราส่วนสติฟเนส (Stiffness ratio) ของคานแขนทั้งสอง (ถ้ามี) โดยมีค่าเท่ากับอัตราส่วนของโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคานต่อความยาวจากศูนย์กลางถึงศูนย์กลางของช่วงคาน (Center-to-center span length) ดังนี้

$$K_b = \frac{I_b}{L} \quad ; \quad K'_b = \frac{I'_b}{L'} \tag{3}$$

พฤติกรรมของคานแขนที่เรียงตัวถี่ ๆ ตามจำนวนชั้นของอาคารเหล่านี้ เมื่อพิจารณาโดยภาพรวมก็อาจจะแทนด้วยที่รองรับอีลาสติกเชิงมุมที่ต่อเนื่องตลอดความสูง (Continuum rotational support) ดังแสดงในรูปที่ 2(c) ซึ่งตอบสนองต่อแรงกระทำด้วยปฏิกิริยาที่เป็นโมเมนต์ดัดมีค่าเป็นสัดส่วนกับมุมเอียง (Slope) ของเสา ซึ่งสัญลักษณ์ J หมายถึงอัตราการตอบสนองต่อหน่วยความยาวและต่อหน่วยมุมเอียงหรือที่เรียกว่าค่าโมดูลัสของที่รองรับ (Support modulus) ก็คืออัตราส่วนของ $M_b + M'_b$ ต่อหน่วยความเอียง $d\Delta/dz$ ต่อความสูงระหว่างชั้น h นั้นเองซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (1) และ (2) ดังนี้

$$J = \frac{M_b + M'_b}{h(d\Delta/dz)} = \frac{6E}{h}\left[\frac{K_b}{(1-\gamma)^3} + \frac{K'_b}{(1-\gamma')^3}\right] \tag{4}$$

จากแบบจำลองตามแนวคิดดังกล่าว ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ต่อเนื่อง (Continuum model) เราย่อมที่จะสามารถวิเคราะห์หาคำตอบ (Solution) ได้ง่ายขึ้น โดยใช้หลักการคงค่าพลังงานศักย์รวม (Principle of stationary total potential energy) ซึ่งกำหนดสภาวะสมดุลโครงสร้างด้วยเงื่อนไขที่พลังงานศักย์รวมมีค่าน้อยสุด

ในการวิเคราะห์นี้เราได้สมมติให้ระยะโก่งของแบบจำลองอยู่ในรูป

$$\Delta(z) = \sum_{m=1,3,5,\ldots} a_m \phi_m(z) \tag{5}$$

ในที่นี้ a_m เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าและกำหนดให้ฟังก์ชัน ϕ_m มีรูปแบบดังนี้

$$\phi_m(z) = 1 - \cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right) \tag{6}$$

โดยที่ H หมายถึงความสูงของโครงสร้าง ฟังก์ชัน ϕ_m ใด ๆ ในสมการข้างบนนี้จะสอดคล้องกับเงื่อนไขของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ฐานของโครงสร้างกล่าวคือ ระยะโก่งและความลาดเอียงเป็นศูนย์ ส่วนที่ยอดนั้นมันจะให้ค่าโมเมนต์ดัดเป็นศูนย์ หรือเขียนเป็นสูตรได้ว่า

$$\Delta(0) = \Delta'(0) = \Delta''(H) = 0 \tag{7}$$

ฟังก์ชันที่สมมตินี้ จะบกพร่องไปบ้าง ก็คือการที่ไม่ให้ค่าของแรงเฉือนที่ยอดโครงสร้างเป็นศูนย์ด้วย ผลของข้อบกพร่องนี้อาจจะไม่มีนัยสำคัญมากนัก ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ในภายหลังว่าผลเฉลยของเรามีความแม่นยำอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ข้อดีของฟังก์ชันรูปนี้ก็คือมันเป็น Elementary function และเป็น Orthogonal function ด้วย

สัมประสิทธิ์ a_n ใด ๆ จะหาได้จากสภาวะสมดุลซึ่งกำหนดด้วยเงื่อนไขที่ว่าพลังงานศักย์รวม Π มีค่าน้อยสุดดังนี้

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0 \qquad n = 1,3,5,... \tag{8}$$

โดยที่

$$\Pi = U - W \tag{9}$$

U คือพลังงานความเครียด (Strain energy) ซึ่งในกรณีของแบบจำลองนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$U = \frac{EI_c}{2}\int_0^H [\Delta''(z)]^2\,dz + \frac{J}{2}\int_0^H [\Delta'(z)]^2\,dz \tag{10}$$

โดยที่ E เป็นโมดูลัสยืดหยุ่นของเสา I_c เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดเสา

ในสมการข้างบน พจน์แรกเป็นพลังงานความเครียดของเสา พจน์ที่สองเป็นของคาน ส่วน W เป็นงานที่เกิดจากแรงกระทำทางข้างภายนอก $f(z)$ หาได้จากสูตร

$$W_n = \int_0^H f(z)\,\Delta(z)\,dz \tag{11}$$

เมื่อแทน U และ W และต่อเนื่องไปยังสมการ (8) โดยใช้ฟังก์ชันที่สมมติก็จะได้

$$\sum_{m=1,3,5,...} a_m\left(EI_c\int_0^H \phi''_m\phi''_n\,dz + J\int_0^H \phi'_m\phi'_n\,dz\right) = \int_0^H f(z)\phi_n\,dz \quad ; n = 1,3,5,... \tag{12}$$

การแก้สมการข้างบนเพื่อหาสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า a_m ทำได้ง่าย โดยกำหนดให้ I_c และ J คงที่ตลอดความสูง (สมมติฐานข้อ 7) ก็จะสามารถใช้คุณสมบัติ Orthogonal ของฟังก์ชัน ϕ_m ในช่วงของ z ตั้งแต่ 0 ถึง H ดังต่อไปนี้

$$\int_0^H \phi_m\phi_n\,dz = \int_0^H \phi'_m\phi'_n\,dz = \int_0^H \phi''_m\phi''_n\,dz = 0 \qquad , m \neq n \tag{13}$$

$$\int_0^H \phi_m\phi_n\,dz = \frac{H}{2} \qquad , m = n \tag{14}$$

$$\int_0^H \phi'_m\phi'_n\,dz = \left(\frac{m\pi}{2H}\right)^2 \frac{H}{2} \qquad , m = n \tag{15}$$

และ

$$\int_0^H \phi''_m\phi''_n\,dz = \left(\frac{m\pi}{2H}\right)^4 \frac{H}{2}, \qquad , m = n \tag{16}$$

ดังนั้นอนุกรมของอินทิกรัลทางซ้ายมือของสมการ (12) จึงลดรูปลงเหลือเพียง

$$\left(EI_c\frac{m^4\pi^4}{32H^3} + J\frac{m^2\pi^2}{8H}\right)a_m = \int_0^H f(z)\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right]dz \tag{17}$$

ทำให้ได้สูตรสำเร็จของสัมประสิทธิ์ a_m เป็น

$$a_m = \frac{\int_0^H f(z)\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right]dz}{\left(EI_c\frac{m^4\pi^4}{32H^3} + J\frac{m^2\pi^2}{8H}\right)} \tag{18}$$

และเมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์นี้ลงในสมการ (5) ก็จะได้สูตรของการโก่งตัวของโครงข้อแข็งในรูปของอนุกรมเป็น

$$\Delta(z) \cong \sum_{m=1,3,5,...} \frac{\int_0^H f(z)\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right]dz}{\left(EI_c\frac{m^4\pi^4}{32H^3} + J\frac{m^2\pi^2}{8H}\right)}\left\{1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right\} \tag{19}$$

สัญลักษณ์ $\cong$ ในสมการข้างบนนี้ ใช้เพื่อเน้นว่าค่าโก่งตัวนี้เป็นค่าที่จะต้องปรับแก้ในภายหลัง เพื่อให้ใกล้เคียงกับคำตอบที่ถูกต้อง

ตัวหารซึ่งอยู่ในรูปของกำลังที่สี่ของ m แสดงให้เห็นว่าอนุกรมมีอัตราการลู่เข้า (Convergence) เร็วมาก ดังนั้นเราสามารถหาการโก่งตัวได้โดยใช้เพียงไม่กี่พจน์ของอนุกรมก็จะให้ค่าที่แม่นยำเพียงพอ

เมื่อทราบค่าการโก่งตัวแล้วก็สามารถทำการหาค่าแรงภายในต่าง ๆ ได้ เริ่มจากโมเมนต์ในคานที่ระยะความสูงของชั้น z_k ซึ่งมีค่าเท่ากับ J คูณด้วยมุมลาดเอียง $\Delta'(z)$ แล้วอินทิเกรตจาก $z_k - h/2$ ถึง $z_k + h/2$ ดังนี้

$$M_b + M'_b = J\int_{z_k-h/2}^{z_k+h/2}\Delta'(z)\,dz = J\left[\Delta\left(z_k + h/2\right) - \Delta\left(z_k - h/2\right)\right] \qquad (20)$$

ส่วนค่าโมเมนต์ดัดโดยเฉลี่ยในเสา ก็อาจหาจากทฤษฎีพื้นฐานของการดัดตัว (Conventional flexural theory)

$$\overline{M}_c(z) = -EI_c\Delta''(z) \qquad (21)$$

โดย $\overline{M}_c$ หมายถึงค่าเฉลี่ยของโมเมนต์ดัดในเสา ที่ระดับความสูง z ใด ๆ

โมเมนต์ดัด $\overline{M}_c(z)$ ดังในสมการข้างบนนี้ จะมีค่าแปรผันแบบ Smooth curve ดังเส้นประในรูปที่ 4 แต่ในความเป็นจริง โมเมนต์ดัดในเสาจะต้องมีลักษณะคล้ายฟันปลาดังรูป ซึ่งเป็นผลมาจากโมเมนต์ต้านของคาน $M_b + M'_b$ ซึ่งกระจุกตัวที่แต่ละระดับชั้นของโครงข้อแข็ง

โมเมนต์ต้านดังกล่าวที่ระดับ z_k ใด ๆ มีค่าดังสมการ (20) ข้างบนนี้ซึ่งอาจแยกพิจารณาออกเป็นสองส่วนคือ

$$M_b + M'_b = J\left[\Delta\left(z_k + h/2\right) - \Delta\left(z_k\right)\right] + J\left[\Delta\left(z_k\right) - \Delta\left(z_k - h/2\right)\right] \qquad (22)$$

อาจกล่าวได้ว่าค่าเฉลี่ยของโมเมนต์ดัดในเสาหรือ $\overline{M}_c$ นั้น ได้คิดบวกค่าส่วนแรกของ $M_b + M'_b$ ในสมการข้างบนเข้าไปแล้ว แต่ในความเป็นจริง ที่พิกัดของระดับ z_k^+ นั้น จะยังไม่มีผลของโมเมนต์ของคานชั้น z_k แต่อย่างใด ดังนั้นค่าที่ถูกต้องของโมเมนต์ดัดของเสาที่พิกัด z_k^+ ควรจะเป็น

$$\begin{aligned} M_c(z_k^+) &= \overline{M}_c(z_k) - J\left[\Delta(z_k + h/2) - \Delta(z_k)\right] \\ &= -EI_c\Delta''(z_k) - J\left[\Delta(z_k + h/2) - \Delta(z_k)\right] \end{aligned} \tag{23}$$

ในทางกลับกัน ที่พิกัด z_k^- นั้น เราจะต้องคิดบวกค่าของโมเมนต์ต้านของคานทั้งหมดเข้าไป นั่นคือเราจะต้องบวกปริมาณส่วนที่สองของ $M_b + M_b'$ เข้ากับ $\overline{M}_c$ จึงจะได้ค่าที่ถูกต้องดังนี้

$$\begin{aligned} M_c(z_k^-) &= \overline{M}_c(z_k) + J\left[\Delta(z_k) - \Delta(z_k - h/2)\right] \\ &= -EI_c\Delta''(z_k) + J\left[\Delta(z_k) - \Delta(z_k - h/2)\right] \end{aligned} \tag{24}$$

อย่างไรก็ตาม ค่าต่าง ๆ ที่ได้นี้ยังคงเป็นผลเฉลยเบื้องต้นเท่านั้น ซึ่งต้องประเมินผลและตรวจสอบตลอดจนปรับแก้เพื่อความถูกต้องต่อไป

<u>ความแม่นยำของผลเฉลยและการปรับแก้ผลของโครงข้อแข็ง</u>

โดยทั่วไปการอาศัยแบบจำลองในการวิเคราะห์มักจะมีข้อจำกัด ดังนั้นการใช้แบบจำลองใด ๆ ก็ตามจำเป็นต้องตระหนักถึงสมมติฐานที่ใช้เสมอ รวมทั้งยังต้องเข้าใจความแตกต่างของแบบจำลองกับโครงสร้างจริงด้วย ด้วยเหตุนี้เราจึงทำการประเมินผลแบบจำลองเพื่อจะได้ทำความเข้าใจมันให้ท่องแท้ขึ้น รวมทั้งยังสามารถนำไปปรับปรุงตลอดจนแก้ไขให้สัมฤทธิ์ผลยิ่งขึ้น

ในการศึกษานี้เราประเมินผลการวิเคราะห์ข้างต้น เทียบกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ XETABS เนื่องจากผลเฉลยของเราอยู่ในรูปอนุกรมที่ลู่เข้า (Convergence) ค่าคงที่ค่าหนึ่ง จึงทำการทดลองวิเคราะห์ผลพบว่า พจน์ที่ 21 ของอนุกรมการโก่งตัว (สมการ (19)) ให้ค่าต่างจากเดิมไม่ถึง 1 เปอร์เซ็นต์ ดังแสดงในตารางที่ 1 ดังนั้นจึงอาศัยผลเฉลยที่มีจำนวน 20 พจน์เป็นเกณฑ์ในการประเมินผลนี้

ในการพิจารณาโครงข้อแข็งแบบพอร์ทอลคูหาเดียว (Single-bay portal frame) 20 ชั้น รับแรงกระทำทางข้างคงที่ตลอดความสูง โดยแปรค่าอัตราส่วนสติฟเนสของคาน (Beam stiffness) กับสติฟเนสของเสา (Column stiffness) หรือ

$$\mu = \frac{(K_b + K_b')}{K_c} \tag{25}$$

ระหว่าง 0 ถึง 1 และอัตราส่วนระหว่างความลึกของเสา a ต่อความยาวช่วงคาน L หรือ

$$\gamma = \frac{a}{L} \tag{26}$$

ระหว่าง 0 ถึง 0.1875 ผลการวิเคราะห์การโก่งตัวและโมเมนต์ดัดของเสาทั้งสองวิธี แสดงเปรียบเทียบในรูปที่ 5 ถึง 22 พบว่าเมื่ออัตราส่วน μ และ γ มีค่าน้อย การโก่งตัวที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนน้อย และมากขึ้นเมื่ออัตราส่วน μ และ γ เพิ่มมากขึ้นตามลำดับ โดยสรุปค่าความคลาดเคลื่อนไว้ในตารางที่ 2 สำหรับโมเมนต์ดัดในเสาและคานกลับคลาดเคลื่อนไม่เกิน 7 เปอร์เซนต์ ในทุกกรณียกเว้นที่ช่วงชั้นบนและล่างเท่านั้น และจากภาพรวมของโมเมนต์ดัดพบว่าที่ช่วงชั้นล่างมีนัยสำคัญมากกว่า โดยโมเมนต์ดัดที่ฐานของเสามีความคลาดเคลื่อนมากที่สุดประมาณ 15-45 เปอร์เซนต์ ดังแสดงในตารางที่ 3

ในการตรวจสอบความคลาดเคลื่อนนั้น เราใช้อัตราส่วนระหว่างการโก่งตัวของ XETABS กับการโก่งตัววิธีข้างต้น เป็นตัวตรวจสอบ ซึ่งพบว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าเกือบจะคงที่ตลอดความสูงแล้วแต่กรณีไป เพื่อตรวจสอบลักษณะดังกล่าวจึงได้ทำการวิเคราะห์กับตัวอย่างใหม่เป็นโครงข้อแข็ง 30 ชั้น อีกครั้ง โดยมีแรงกระทำทางข้างตลอดจนการแปรค่าต่าง ๆ เหมือนกับตัวอย่างแรก ก็ยังคงพบว่าการโก่งตัวมีความคลาดเคลื่อน ขณะที่ค่าโมเมนต์ดัดยังคงให้ค่าที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงในลักษณะเช่นเดิม และที่สำคัญอัตราส่วนความคลาดเคลื่อนของการโก่งตัวสำหรับตัวอย่างทั้งสองที่ค่า μ และ γ เดียวกันมีค่าใกล้เคียงกันมาก รูปที่ 23 แสดงค่าเฉลี่ยตลอดความสูงของอัตราส่วนดังกล่าวกับตัวอย่างข้างต้น

จากการเปรียบเทียบระยะโก่งที่คำนวณจากสมการ (19) กับระยะโก่งของ XETABS โดยแปรค่าของ μ ระหว่าง 0 ถึง 1 และค่าของ γ ระหว่าง 0 ถึง 0.1875 และใช้หลักการของการ Fit curve กับกราฟรูปที่ 23 ทำให้ได้ตัวประกอบ C เพื่อการปรับแก้ระยะโก่งตัว ดังนี้

$$C = 1 + 0.527\mu\exp(3.33\gamma) \tag{27}$$

เพื่อให้ผลการโก่งตัวในการศึกษานี้สามารถใช้ได้สัมฤทธิ์ผลสำหรับค่า μ ระหว่าง 0 ถึง 1 และค่า γ ระหว่าง 0 ถึง 0.1875 ดังนั้นเราจึงอาศัยอัตราส่วนความคลาดเคลื่อนข้างต้นในการปรับแก้ค่าของการโก่งตัวในสมการ (19) เป็น

$$\Delta(z) = C \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\int_0^H f(z)\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right]dz}{\left(EI_c \frac{m^4\pi^4}{32H^3} + J\frac{m^2\pi^2}{8H}\right)}\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right] \tag{28}$$

การโก่งตัวที่ปรับแก้นี้ เมื่อนำไปคำนวณเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จาก XETABS อีกครั้งกับตัวอย่างข้างต้นพบว่าให้ค่าใกล้เคียงมากในทุกกรณี ดังแสดงในรูปที่ 24 ถึง 39

สำหรับความคลาดเคลื่อนของการโก่งตัวที่เกิดขึ้นนี้ น่าจะมาจากประเด็นที่ว่าพฤติกรรมการดัดตัวโครงข้อแข็งจริงจะมีการเปลี่ยนความโค้ง (Curvature) ของเสาในแต่ละช่วงชั้นซึ่งเป็นผลจากโมเมนต์ต้านของคานแขน แต่ฟังก์ชันของการโก่งตัว ϕ_m ที่สมมติไว้ในสมการ (16) ไม่สามารถแสดงลักษณะการดัดกลับดังกล่าวได้ไม่ว่า μ จะมีค่าเท่าใดก็ตาม จากลักษณะที่แตกต่างกันนี้ส่งผลให้การหาพลังงานความเครียดในแบบจำลองแตกต่างจากพลังงานความเครียดที่เกิดขึ้นจริง ซึ่งสะท้อนออกมาในสองลักษณะคือ

1. ระยะโก่งที่คำนวณตามสมการ (19) มีค่าน้อยกว่าที่ควรเป็นโดยจะต้องปรับแก้ด้วยตัวประกอบ C ในสมการ (27) เป็นที่น่าสังเกตว่าถ้า $\mu = 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่มีคานแขนหรือกรณีของ Free cantilever ซึ่งไม่มีการดัดกลับระหว่างชั้นของโครงข้อแข็ง ค่า C ก็เท่ากับ 1 พอดี

2. ค่าโมเมนต์ดัดในเสา $M_c(z_k^+)$ และ $M_c(z_k^-)$ ไม่อาจคำนวณได้จาก Conventional flexural theory โดยใช้สมการ (21) โดยตรง แต่ต้องปรับใช้ตามสมการ (23) และ (24)

การที่ต้องปรับแก้ระยะโก่งด้วยตัวประกอบ C อาจพิจารณาตามนัยของสมการ (8), (9), (10), (11) และ (12) ได้ว่า เป็นการปรับแก้พลังงานความเครียด U ในสมการ (10) ด้วยตัวประกอบ $1/C$ ได้

ดังนั้นเมื่อพิจารณาโครงข้อแข็งในฐานะที่เป็นโครงสร้างย่อยหน่วยหนึ่งในโครงสร้างรวมของอาคาร เราจะพิจารณาว่า เมื่อเกิดการโก่งตัวในรูปแบบของฟังก์ชัน ϕ_m มันจะเกิดพลังงานของความเครียดเป็น

$$U = \frac{1}{C}\left\{\frac{EI_c}{2}\int_0^H [\Delta''(z)]^2 dz + \frac{J}{2}\int_0^H [\Delta'(z)]^2 dz\right\} \tag{29}$$

แทนที่จะเป็นดังสมการ (10)

อย่างไรก็ตามสูตรในสมการ (29) สามารถใช้กับผนังรับแรงเฉือนก็ได้ เพราะเมื่อไม่มีคานแขน μ จะมีค่าเป็นศูนย์ และ C ก็จะเป็น 1 โดยอัตโนมัติ (ดูสมการ (27))

การวิเคราะห์การรับแรงทางข้างของอาคาร

ในการศึกษานี้ เราพิจารณาเสาแต่ละต้นและผนังรับแรงเฉือนเป็นแต่ละโครงสร้างย่อยของอาคาร ร่วมกันตอบสนองต่อแรงกระทำทางข้างโดยมีพื้นเป็นตัวยึดติดกัน โดยกำหนดให้ความสูงของทุกโครงสร้างย่อยมีค่าเท่ากัน

รูปที่ 40 แสดงผังของโครงสร้างย่อยดังกล่าวหน่วยที่ i มีศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x_i, y_i) ระนาบประธาน (Principal plane) ของมันทำมุมทวนเข็มนาฬิกา α_i กับแกนอ้างอิง x

ให้ u(z), v(z) และ θ(z) เป็นฟังก์ชันการเปลี่ยนตำแหน่งของอาคาร ในทิศของแกนอ้างอิง x, y และมุมหมุนรอบจุดกำเนิด o ตามลำดับ โดยกำหนดให้มีรูปแบบของอนุกรมของฟังก์ชัน ϕ_m ดังนี้

$$u(z) = \sum_{m=1,3,5,...} A_m\phi_m(z) \tag{30}$$

$$v(z) = \sum_{m=1,3,5,...} B_m\phi_m(z) \tag{31}$$

$$\theta(z) = \sum_{m=1,3,5,...} C_m\phi_m(z) \tag{32}$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ฐานของอาคาร ดังที่ได้กล่าวถึงก่อนหน้านี้ โดยที่ A_m, B_m, C_m เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของอนุกรม อาศัยสมมติฐานพื้นอาคารมีความแข็งเกร็งในระนาบสูง (Rigid floor assumption) ดังนั้นค่าการโก่งตัว $\Delta_i(z)$ ในระนาบประธาน (Principal plane) ของโครงสร้างย่อยที่ i ใด ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน u(z), v(z) และ θ(z) โดยใช้หลักเรขาคณิตมุมน้อย ๆ ดังนี้

$$\Delta_i(z) = u(z)\cos\alpha_i + v(z)\sin\alpha_i + \theta(z)\left(x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i\right) \tag{33}$$

โดยใช้สมการ (29) เราจะสามารถหาพลังงานความเครียดของโครงสร้างย่อยที่ i ในรูปของระยะโก่งตัว $\Delta_i(z)$ ได้ดังนี้

$$U_i = \frac{1}{C_i}\left\{\frac{EI_{ci}}{2}\int_0^H\left[\Delta_i''(z)\right]^2 dz + \frac{J_i}{2}\int_0^H\left[\Delta_i'(z)\right]^2 dz\right\} \tag{34}$$

โดยที่
$$C_i = 1 + 0.527\mu_i \exp\left(3.33\gamma_i\right) \tag{35}$$

พลังงานความเครียดทั้งหมดของอาคาร U ก็คือผลรวมทั้งหมดของพลังงานความเครียดของโครงสร้างย่อย ถ้าอาคารประกอบด้วยโครงสร้างย่อยจำนวน N ก็จะได้ว่า

$$U = \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{N} U_i \tag{36}$$

สำหรับงานเนื่องจากแรงกระทำทางข้างภายนอกนั้น เราสามารถหาได้สูตร

$$W = \int_0^H\left[X(z)u(z) + Y(z)v(z) + T(z)\theta(z)\right]dz \tag{37}$$

โดยที่ $X(z)$, $Y(z)$ และ $T(z)$ เป็นฟังก์ชันของแรงลัพธ์ (Resultant force) ของแรงกระทำทางข้างที่กระทำต่อโครงสร้างในทิศทาง x, y และโมเมนต์บิดรอบจุดกำเนิด (Origin) ของระบบโคออร์ดิเนทตามลำดับ

เราจะสังเกตได้ว่าพลังงานศักย์รวม Π ใหม่นี้มี ตัวสัมประสิทธิ์ A_m, B_m และ C_m เป็นตัวที่ทำให้พลังงานศักย์รวมเปลี่ยนแปลง ซึ่งทฤษฎีของการคงค่าของพลังงานศักย์รวม (Principle of stationary total potential energy) กำหนดว่าในสภาวะสมดุลของแรง อนุพันธ์ของพลังงานศักย์รวมจะต้องเป็นศูนย์หรือเขียนเป็นสูตรได้ว่า

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_n} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial U}{\partial A_n} = \frac{\partial W}{\partial A_n} \qquad n = 1,3,5,\ldots \tag{38}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B_n} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial U}{\partial B_n} = \frac{\partial W}{\partial B_n} \qquad n = 1,3,5,\ldots \tag{39}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_n} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial U}{\partial C_n} = \frac{\partial W}{\partial C_n} \qquad n = 1,3,5,\ldots \tag{40}$$

แทนสูตรจากสมการ (30) ถึง (37) ลงในสมการ (38), (39) และ (40) ข้างบน และใช้คุณสมบัติของ Orthogonality ของขอบเขตฟังก์ชัน ซึ่งเป็นเหตุให้ต้องกำหนดความสูงของทุกโครงสร้างย่อยเท่ากัน ก็จะได้สมการสมดุลของอาคารภายใต้แรงกระทำทางข้างในรูปต่อไปนี้

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F} \tag{41}$$

โดยที่

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & K_{u\theta} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{v\theta} \\ K_{\theta u} & K_{\theta v} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}=\begin{Bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{Bmatrix},\qquad \mathbf{F}=\begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_\theta \end{Bmatrix}$$

โดยที่

$$K_{uu}=\sum_{i=1}^{N} Q_i \cos^2\alpha_i$$

$$K_{uv}=\sum_{i=1}^{N} Q_i \sin\alpha_i \cos\alpha_i$$

$$K_{u\theta}=K_{\theta u}=\sum_{i=1}^{N} Q_i\left(x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i\right)\cos\alpha_i$$

$$K_{vv}=\sum_{i=1}^{N} Q_i \sin^2\alpha_i$$

$$K_{v\theta}=K_{\theta v}=\sum_{i=1}^{N} Q_i\left(x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i\right)\sin\alpha_i$$

$$K_{\theta\theta}=\sum_{i=1}^{N} Q_i\left(x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i\right)^2$$

$$Q_i=\frac{1}{C_i}\left[EI_{ci}\frac{m^4\pi^4}{32H^3}+J_i\frac{m^2\pi^2}{8H}\right]$$

$$F_u=\int_0^H X(z)\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right]dz$$

$$F_v=\int_0^H Y(z)\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right]dz$$

$$F_\theta=\int_0^H T(z)\left[1-\cos\left(\frac{m\pi z}{2H}\right)\right]dz$$

แก้สมการ (40) ข้างต้นหาสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$A_m=\frac{\left(K_{vv}K_{\theta\theta}-K_{v\theta}^2\right)F_u+\left(-K_{uv}K_{\theta\theta}+K_{u\theta}K_{v\theta}\right)F_v+\left(K_{uv}K_{v\theta}-K_{u\theta}K_{vv}\right)F_\theta}{|\mathbf{K}|} \tag{42}$$

$$B_m=\frac{\left(-K_{uv}K_{\theta\theta}+K_{u\theta}K_{v\theta}\right)F_u+\left(K_{uu}K_{\theta\theta}+K_{u\theta}^2\right)F_v+\left(-K_{uu}K_{v\theta}+K_{u\theta}K_{uv}\right)F_\theta}{|\mathbf{K}|} \tag{43}$$

$$C_m=\frac{\left(K_{uv}K_{v\theta}-K_{u\theta}K_{vv}\right)F_u+\left(-K_{uu}K_{v\theta}+K_{u\theta}K_{uv}\right)F_v+\left(K_{uu}K_{vv}-K_{uv}^2\right)F_\theta}{|\mathbf{K}|} \tag{44}$$

นำสัมประสิทธิ์ข้างต้นแทนลงในสมการ (30), (31) และ (32) ก็จะได้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง $u(z)$, $v(z)$ และ $\theta(z)$ ของอาคารได้ และสำหรับโครงสร้างย่อยใด ๆ ที่เราสนใจ ก็อาจคำนวณระยะโก่งตลอดจนโมเมนต์ดัดของมันได้โดยใช้สมการ (33), (20), (23), (24) และ (27) ตามแต่กรณี

ในบทต่อไปจะได้คำนวณผลลัพธ์ตัวเลขและเปรียบเทียบหาความแม่นยำของผลเฉลยของวิธีการนี้