บทที่ 2

เวฟเลตและการแปลงเวฟเลต

ความเป็นมาของเวฟเลต

เวฟเลตเป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อการแบ่งสัญญาณหรือฟังก์ชันออกเป็นส่วนๆ โดยที่แต่ละส่วนนั้นมีองค์ประกอบในเชิงความถี่ที่แตกต่างกันไป และศึกษาหรือวิเคราะห์แต่ละส่วนด้วยความละเอียด (resolution) ที่เหมาะสมกับมาตราส่วน (scale) ของส่วนนั้นๆ

ถึงแม้ว่าเวฟเลตเพิ่งจะได้รับความสนใจในการนำมาประยุกต์ใช้ในงานประมวลผลสัญญาณภาพ และ สัญญาณเสียงในช่วง 2-3 ปีมานี้ แต่ในความเป็นจริงแล้วได้มีการศึกษาเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานของเวฟเลตมาตั้งแต่ช่วงทศวรรษ 1930 ซึ่งได้แก่งานวิจัยของ Levy และ Brownian, Littlewood และ Paley, Franklin, Lusin เป็นต้น หลังจากนั้นก็มีงานวิจัยที่เกี่ยวเนื่องกับเวฟเลตในแขนงวิชาต่างๆกัน เช่น คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ โดย Calderon ในปี ค.ศ. 1964, ควอนตัมฟิสิกส์ โดย Aslaksen และ Klauder ในปีค.ศ.1968 และ Paul ในปีค.ศ.1985, QMF filter โดย Esteban และ Galand ในปีค.ศ.1977 และ Smith และ Barnwell ในปีค.ศ. 1986, งานวิศวกรรมไฟฟ้า โดย Vetterli ในปีค.ศ.1986, การวิเคราะห์ข้อมูลแผ่นดินไหว โดย Morlet ในปีค.ศ.1983 เป็นต้น อย่างไรก็ตาม ชื่อเวฟเลตนี้ก็ได้มีการตั้งขึ้นเมื่อราวสิบปีที่ผ่านมานี่เอง

การแปลงเวฟเลต

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าเวฟเลตเป็นเครื่องมือวิเคราะห์ในเชิงความถี่ แต่ในขณะเดียวกันเวฟเลตนั้นก็ยังแสดงคุณลักษณะในเชิงเวลาของสัญญาณด้วย จึงอาจเรียกได้ว่าเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สัญญาณในเชิงเวลา-ความถี่ (time-frequency domain)

โดยทั่วไปแล้วการวิเคราะห์สัญญาณอาจทำได้ 2 วิธี คือ

1. การวิเคราะห์ในเชิงเวลา และ
2. การวิเคราะห์ในเชิงความถี่

ซึ่งการวิเคราะห์ในเชิงความถี่นั้นนิยมทำโดยการแปลงสัญญาณเป็นเชิงความถี่ก่อน ซึ่งวิธีที่นิยมใช้กันคือใช้การแปลงฟูริเยร์ (Fourier Transform) แต่การแปลงฟูริเยร์นั้นเหมาะกับสัญญาณที่มีลักษณะเป็นสัญญาณคงตัว (Stationary Signal) เท่านั้น ซึ่งในทางปฏิบัติ สัญญาณที่นำมาวิเคราะห์มักจะมีลักษณะเป็นสัญญาณไม่คงตัว (Non-Stationary Signal) หรือเป็นสัญญาณคงตัวเป็นช่วง (Quasi-Stationary Signal) ซึ่งการวิเคราะห์โดยใช้การแปลงฟูริเยร์จะไม่เหมาะสมนัก

Gabor ได้พัฒนา การแปลงฟูริเยร์ช่วงสั้น (Short-Time Fourier Transform หรือ STFT) ซึ่งจะวิเคราะห์สัญญาณในช่วงเวลาสั้นๆเพื่อหาความถี่ชั่วขณะ (Instantaneous Frequency) โดยการมองสัญญาณผ่านหน้าต่าง (window) $g(t)$ โดยมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง แล้วจึงทำการแปลงฟูริเยร์กับสัญญาณที่ผ่านหน้าต่างแล้ว $x(t)g^*(t-\tau)$ จะได้สมการการแปลงฟูริเยร์ช่วงสั้นดังนี้

$$STFT(\tau, f) = \int x(t) g^*(t-\tau) e^{-2j\pi ft} dt \qquad (2\text{-}1)$$

อย่างไรก็ตาม จะเห็นได้ว่าการแปลงฟูริเยร์ช่วงสั้นนี้ยังมีข้อจำกัดอยู่ คือไม่สามารถเปลี่ยนความละเอียด (Resolution) ในการวิเคราะห์สัญญาณได้ ในบางกรณี สัญญาณที่นำมาวิเคราะห์อาจมีอยู่หลายองค์ประกอบ ถ้าหากว่ามีบางองค์ประกอบเป็นสัญญาณที่คงตัวอยู่ในช่วงสั้นๆ และมีบางองค์ประกอบคงตัวอยู่ในช่วงระยะเวลาที่ยาวกว่า จะเห็นได้ว่าเราจะไม่สามารถวิเคราะห์สัญญาณ โดยที่องค์ประกอบของสัญญาณทั้งสองส่วนถูกวิเคราะห์ที่ความละเอียดที่เหมาะสมทั้งคู่

เวฟเลตถูกพัฒนาเพื่อแก้ไขข้อจำกัดของการแปลงฟูริเยร์ช่วงสั้นในเรื่องของระดับความละเอียดในการวิเคราะห์ที่เปลี่ยนแปลงไม่ได้ โดยเวฟเลตเป็นชุดของฟังก์ชันที่ถูกสร้างขึ้นจากฟังก์ชัน $\Psi(t)$ ซึ่งเรียกว่า mother wavelet โดยฟังก์ชัน $\Psi(t)$ นี้จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้คือ

1. well localized โดยจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ $|t|$ เข้าใกล้อนันต์
2. การแกว่ง (oscillation) เพื่อแสดงความเป็นคลื่น โดยอินทิกรัลของ $\Psi(t)$ และ m โมเมนต์แรกของ $\Psi(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)dt = ... = \int_{-\infty}^{\infty} t^{m-1}\Psi(t)dt \tag{2-2}$$

จาก mother wavelet $\Psi(t)$ นี้จะสร้างชุดเวฟเลตอื่นๆ $\Psi_{(a,\tau)}(t)$ โดยที่ $a > 0$ และ $\in R$ การเปลี่ยนค่าของ a คือการเปลี่ยนความละเอียด (dilation) ซึ่งปกติมีค่าเป็น 1 ส่วน b คือการเลื่อน (translation) ในเชิงเวลา ซึ่งปกติพิจารณาที่ $b = 0$ จะได้

$$\Psi_{(\tau,a)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \qquad ,a > 0, \tau \in R \tag{2-3}$$

จากสมบัติการเปลี่ยนความละเอียดได้นี้เอง ทำให้เราสามารถใช้เวฟเลตในการวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายความละเอียด (Multi-Resolution) โดยใช้การแปลงเวฟเลต ซึ่งถ้ามองเวฟเลตในลักษณะของตัวกรอง (filter) ความละเอียดจะเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับความถี่กึ่งกลางของช่วงที่กำลังพิจารณาอยู่ นั่นคือ

$$\frac{\Delta f}{f} = c \tag{2-4}$$

โดยจะเขียนสมการการแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่อง (Continuous Wavelet Transform - CWT) ได้ดังสมการต่อไปนี้

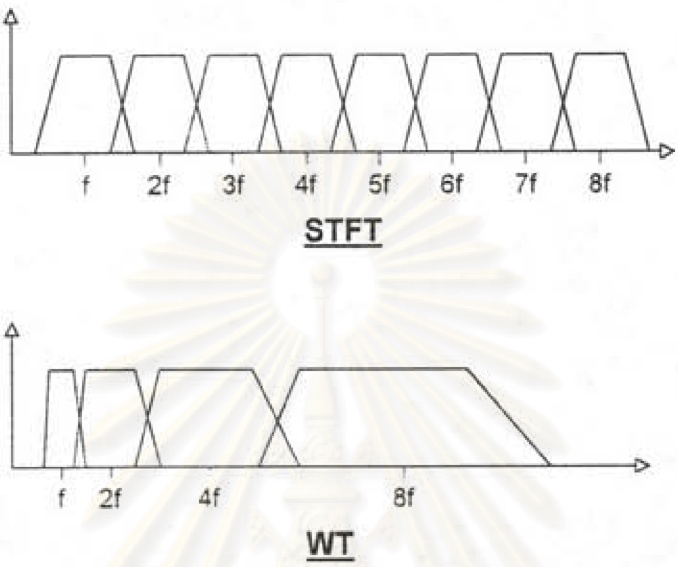
$$CWT(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int x(t)\Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt \qquad ,a = \frac{f_0}{f} \tag{2-5}$$

เปรียบเทียบผลตอบเชิงความถี่ของการแปลงฟูริเยร์ช่วงสั้นและการแปลงเวฟเลตได้ดังรูปที่ 2-1

สำหรับ DWT (Discrete Wavelet Transform) จะยึดแนวคิดเบื้องต้นของการแปลง เวฟเลต (wavelet transform) นั้นคือการพยายามแทนที่ฟังก์ชัน f ด้วยเวฟเลตหลายๆ เวฟเลต โดยแต่ละเวฟเลตจะแยกพิจารณาฟังก์ชันที่ความละเอียดต่างๆกัน โดยเขียนได้เป็น

$$f = \sum c_{m,n}(f)\Psi_{m,n} \tag{2-6}$$

โดย $\Psi_{m,n}(t)=\Psi_{(a_0^m,nb_0a_0^m)}(t)=a_0^{-m/2}\Psi(a_0^{-m}t-nb_0);a_0>1,b_0>0$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งถ้าหากว่า $a_0=2$ และ $b_0=1$ แล้ว จะทำให้เป็น orthogonal wavelet (Meyer, 1993)ซึ่งจะได้



รูปที่ 2-1 แสดงผลตอบเชิงความถี่ของ STFT และ WT

$$c_{m,n}(f)=<\Psi_{m,n},f>\int dx\Psi_{m,n}(x)f(x) \tag{2-7}$$

โดยวิธี multiresolution analysis จะประกอบด้วยฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันคือ mother wavelet Ψ และ scaling function Φ หรือ เรียกว่า father wavelet โดย

$$\Phi_{m,n}(x)=2^{-m/2}\Phi(2^{-m}x-n) \tag{2-8}$$

ซึ่งถ้า m คงที่ $\Phi_{m,n}$ จะเป็น orthogonal ถ้าให้ V_m เป็น space ที่ $\Phi_{m,n}$ ครอบคลุมไปถึง โดยที่ $...V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}...$ โดยแต่ละ space มี resolution 2^m สำหรับแต่ละค่า m $\Psi_{m,n}$ ครอบคลุมอยู่ในช่วง W_m ซึ่งเป็น orthogonal complement ใน V_{m-1} ของ V_m ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ $<\Psi_{m,n},f>$ จะแสดงถึงข่าวสาร (information) ที่สูญหายไประหว่างการเปลี่ยนการพิจารณาฟังก์ชัน f จาก resolution 2^{m-1} ไปยัง 2^m ซึ่งสามารถคำนวณหา $c_{m,n}(f)=<\Psi_{m,n},f>$ ได้ดังนี้

$$c_{m,n}(f) = \sum_k g_{2n-k} a_{m-1,k}(f) \tag{2-9}$$

$$a_{m,n}(f) = \sum_k h_{2n-k} a_{m-1,k}(f) \tag{2-10}$$

โดยที่ $$h_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx \Phi(x-n) \Phi(2x) \tag{2-11}$$

และ $$g_l = (-1)^l h_{-l-1} \tag{2-12}$$

ดังนั้น $\{h, g\}$ จะเป็นคู่ Quadrature Mirror Filter (QMF) ซึ่งสามารถทำ subband coding โดย low-pass filter h และ high-pass filter g และ ชุด filter นี้ก็สามารถใช้ทำ reconstruction ได้โดย

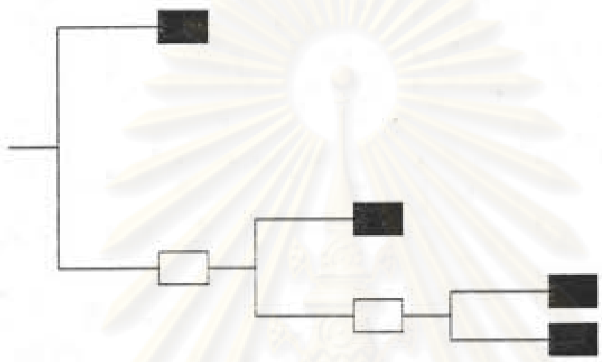
$$a_{m-1,l}(f) = \sum_n [h_{2n-l} a_{m,n}(f) + g_{2n-l} c_{m,n}(f)] \tag{2-13}$$

ข้อมูลที่จะนำมาบีบอัดจะผ่านการแปลงเวฟเลตโดยการวิเคราะห์แบบหลายความละเอียด (multiresolution analysis) โดยที่แต่ละความละเอียดจะแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วน โดยผ่าน low-pass filter และ high-pass filter โดยเลื่อนไปขั้นละ 2 ตำแหน่ง จะได้ข้อมูลเป็น 2 ส่วน ส่วนที่ผ่าน high-pass filter คือ รายละเอียดของข้อมูลที่ความละเอียดนั้นๆ อีกส่วนหนึ่งที่ผ่าน low-pass filter คือข้อมูลหยาบในระดับความละเอียดนั้น ซึ่งข้อมูลส่วนนี้จะถูกนำไปทำการวิเคราะห์ในระดับความละเอียดถัดไป โดยเปลี่ยนความละเอียดไปขั้นละ 2 เท่า (Gollmer, 1992) ดังแสดงดังนี้

ข้อมูลเริ่มต้นเป็น	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
ขั้นความละเอียดที่ 1	S0	S1	S2	S3	D0	D1	D2	D3
ขั้นความละเอียดที่ 2	SS0	SS1	SD0	SD1	D0	D1	D2	D3
ขั้นความละเอียดที่ 3	SSS0	SSD0	SD0	SD1	D0	D1	D2	D3

โดยที่ D คือรายละเอียด และ S คือข้อมูลหยาบ

โดยแสดงการแผนผังการทำ DWT ได้ดังรูปที่ 2.2 โดยส่วนที่ผ่านกิ่งทางด้านบนเป็นส่วนที่มีความถี่สูงและส่วนที่ผ่านกิ่งทางด้านล่างเป็นองค์ประกอบที่มีความถี่ต่ำ สี่เหลี่ยมแต่ละอันคือองค์ประกอบที่ได้จากการทำการแปลง และสี่เหลี่ยมทึบจะแสดงองค์ประกอบที่ใช้เป็นผลลัพธ์ของการแปลง



รูปที่ 2-2 แผนผังการทำ Discrete Wavelet Transform ถึง level 3

<u>การแปลงเวฟเลตแพคเกต</u>

ในขณะที่ Wavelet Transform จะจัดแบ่งข้อมูลเป็นส่วนๆ โดยที่ ที่ความถี่สูงจะพิจารณาที่ความละเอียดสูงกว่าที่ความถี่ต่ำ โดยช่วงพิจารณาที่ความถี่สูงก็จะกว้างกว่าที่ความถี่ต่ำด้วย คุณสมบัตินี้ทำให้ Wavelet Transform เหมาะกับงานบางด้านเท่านั้น เช่นงานประมวลผลสัญญาณภาพ เนื่องจากสายตามนุษย์จะแยกแยะภาพที่มีรายละเอียดสูงได้ยาก ซึ่งก็หมายความว่าที่ความถี่สูง สายตามนุษย์แยกแยะความแตกต่างของความถี่ได้ไม่ชัดเจน

สำหรับในการประมวลผลสัญญาณเสียงพูด หูมนุษย์จะมีความไวเสียงในแต่ละช่วงความถี่ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าไม่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นผลให้ Wavelet Transform ไม่สามารถให้ผลดีในงานประมวลผลสัญญาณเสียงพูด Wickerhauser ได้เสนอการแปลงเวฟเลตอีกแบบหนึ่งซึ่งเหมาะสมกับสัญญาณที่ต้องการรายละเอียดในทุกช่วงความถี่เท่ากันเช่นสัญญาณเสียงพูดนี้ โดยเรียกว่า Wavelet Packet Transform (Coifman et al., 1990)

การแปลงเวฟเลตแพคเกตนี้มีหลักการเดียวกับการทำการแปลงเวฟเลตเพียงแต่จะทำการแปลงทุกๆขั้นทั้งในส่วนที่ผ่านจาก high-pass filter และ low-pass filter ดังอาจแสดงดังนี้ (Coifman et al., 1990)

ข้อมูลเริ่มต้นเป็น	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
ขั้นความละเอียดที่ 1	S0	S1	S2	S3	D0	D1	D2	D3
ขั้นความละเอียดที่ 2	SS0	SS1	SD0	SD1	DS0	DS1	DD0	DD1
ขั้นความละเอียดที่ 3	SSS0	SSD0	SDS0	SDD0	DSS0	DSD0	DDS0	DDD0

โดยที่ D คือรายละเอียด และ S คือข้อมูลหยาบ

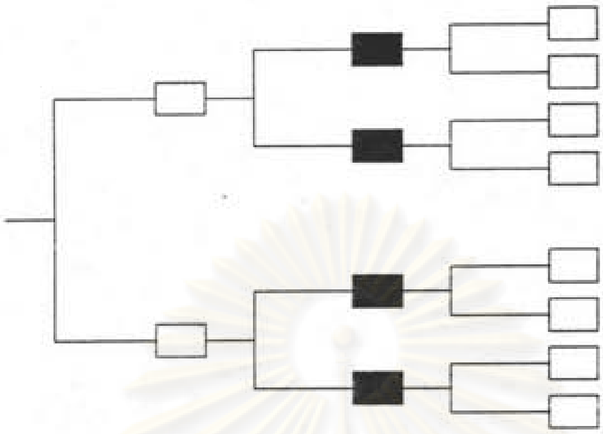
การบีบย่อข้อมูลโดยการทำการแปลงนั้น จะเลือกตัดส่วนที่มีความสำคัญน้อย ซึ่งสามารถตัดออกไปโดยไม่มีผลกระทบสัญญาณโดยรวมมากนัก สำหรับ wavelet packet transform นั้น เราจะเลือกชุดของ wavelet packet ที่ครอบคลุมช่วงความถี่ทั้งหมดของสัญญาณ โดยที่สามารถตัดส่วนที่มีความสำคัญน้อยออกไปได้มากที่สุด โดยทั่วไปแล้วการเลือกชุดของ wavelet packet นั้นมีเงื่อนไขอยู่ 2 อย่างคือ (Coifman et al., 1990)

1. best level และ
2. best basis

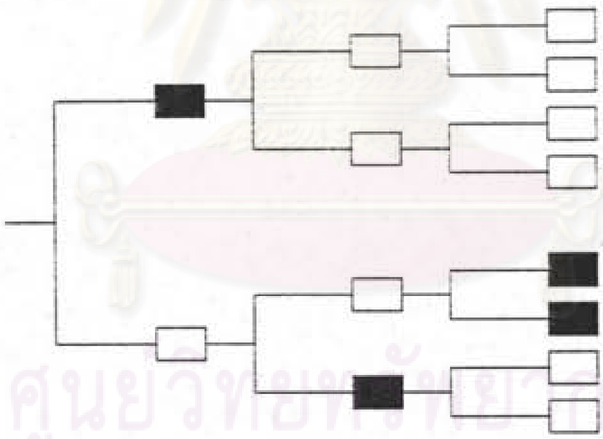
การเลือกโดยอาศัย best level นั้น จะเลือก level ของผลลัพธ์จาก transform ที่มีส่วนประกอบที่สามารถตัดออกไปได้มากที่สุด ดังตัวอย่างในรูปที่ 2-3 ส่วน best basis จะเลือกการแบ่งช่วงสัญญาณที่ดีที่สุดที่สามารถตัดส่วนประกอบออกไปได้มากที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 2-4 โดยอาจจะแบ่งย่อยออกไปได้อีก 3 วิธีคือ

1. best level ในเชิงความถี่
2. best level ในเชิงเวลา และ
3. best level ทั้งในเชิงความถี่และในเชิงเวลา

โดยการพิจารณา best level ในเชิงความถี่ นั้นจะจัดเรียงสัญญาณในเชิงความถี่ การพิจารณา best level ในเชิงเวลาก็จะจัดเรียงสัญญาณในเชิงเวลา ส่วนการพิจารณาทั้งในเชิงความถี่และเวลา จะทำทั้งสองวิธีที่กล่าวมาข้างต้น แล้วเลือกวิธีที่ดีที่สุด วิธีนี้จะต้องส่งข้อมูลจำนวน 1 bit เพื่อบอกว่าเลือกใช้วิธีใด ระหว่างการพิจาณาในเชิงเวลาและเชิงความถี่ ซึ่งจะเห็นได้ว่าไม่ว่าจะเลือกพิจารณาด้วยวิธีใด การเลือกจะต้องครอบคลุมช่วงสัญญาณได้ทั้งหมด



รูปที่ 2-3 ตัวอย่างการเลือก wavelet packets โดยเงื่อนไข best level
(ในกรณีนี้เลือก level 2)



รูปที่ 2-4 ตัวอย่างการเลือก wavelet packets โดยเงื่อนไข best basis

สำหรับการเลือกพิจารณาส่วนประกอบว่าส่วนใดมีความสำคัญน้อย สามารถตัดออกได้มีเกณฑ์อยู่หลายอย่าง ได้แก่ (Coifman et al., 1990)

1. ใช้การเปรียบเทียบขนาดของสัญญาณกับค่า threshold
2. ใช้การวัดพลังงานของสัญญาณ

3. ใช้การวัด entropy ของสัญญาณ

4. นำขนาดของส่วนประกอบทั้งหมดมาเรียงลำดับ และเก็บไว้เฉพาะส่วนประกอบที่มีขนาดสูงสุด n ตัวแรก โดยที่ n จะถูกกำหนดโดย entropy