บทที่ 3
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์

3.1 การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว (Single Exponential Smoothing)

การทำให้เรียบของอนุกรมเวลา เป็นการกำหนดตัวแทนของแนวโน้ม ณ จุดเวลาใดเวลาหนึ่งที่กำหนดให้ โดยเฉลี่ยน้ำหนักของข้อมูลหรือค่าสังเกตที่ใกล้เวลา ณ จุดนั้น วิธีการทำให้เรียบที่นิยมใช้กันมากวิธีหนึ่งคือ การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล(Exponential Smoothing) ซึ่งการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลมีแนวความคิดต่างจากการเฉลี่ยเคลื่อนที่โดยการเฉลี่ยเคลื่อนที่ให้ความสำคัญแก่ข้อมูลเท่ากันหมด กล่าวคือ การเฉลี่ยน้ำหนักของข้อมูลแบบเลขคณิตโดยให้น้ำหนักแต่ละข้อมูลเท่ากัน เมื่อได้กำหนดจำนวนเทอมที่เฉลี่ย แต่การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลจะให้ความสำคัญแก่ข้อมูลที่อยู่ใกล้กับเวลาที่จะพยากรณ์มากกว่า และให้น้ำหนักข้อมูลก่อนหน้านี้ลดลงเรื่อยๆ แบบเรขาคณิต เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล เป็นเครื่องมือการพยากรณ์ที่ประกอบด้วยหลายขั้นตอน ขั้นตอนหนึ่งเกี่ยวข้องกับ การเลือกค่าคงที่ของการทำให้เรียบคือ α (Smoothing Constant) ที่เหมาะสม ความไม่แม่นยำของการพยากรณ์โดยเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลอาจเป็นเพราะการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลาที่มีรูปแบบไม่แน่นอน ในกรณีนี้ วิธีการแก้ไขทางหนึ่งคือ การเลือกใช้ค่าคงที่ของการทำให้เรียบαที่เหมาะสม ซึ่งจะช่วยลดความผิดพลาดในการพยากรณ์

การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลมีข้อสมมติว่า อนุกรมเวลาเป็นโพลิโนเมียลฟังก์ชันของเวลา

$$x_t = \sum_{P=0}^{i} a_P \cdot t^P + \epsilon_t$$

เมื่อ

x_t แทนค่าสังเกต ณ เวลา t

a_P แทน พารามิเตอร์ของตัวแบบ

P แทน ลำดับของโพลิโนเมียล ; P = 0, 1,2,...,i

ϵ_t แทนค่าความคลาดเคลื่อน

การทำเรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลครั้งเดียวเป็นตัวแบบโพลิโนเมียลลำดับศูนย์

$$x_t = a_o + \varepsilon_t$$

ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว คือ

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha) S_{t-1}$$

หรือ $S_t = S_{t-1} + \alpha(x_t - S_t)$

เมื่อ S_t = ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล ณ เวลา t(หรืออาจเรียกว่า Smoothed Estimate หรือ Smoothed Statistic)

α = ค่าคงที่กำหนดน้ำหนักของการเฉลี่ย (Smoothing Constant)

จากสมการของการทำให้เรียบ $S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1}$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลบวกเชิงเส้น (Linear Combination) ของค่าสังเกตในอดีตทั้งหมด นั่นคือ

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1} \qquad .....(1)$$

$$S_{t-1} = \alpha x_{t-1} + (1-\alpha)S_{t-2} \qquad .....(2)$$

แทนค่าสมการ (2) ใน (1)

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)[\alpha x_{t-1} + (1-\alpha)S_{t-2}] \qquad .....(3)$$

$$= \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + (1-\alpha)^2 S_{t-2} \qquad .....(4)$$

$$S_{t-2} = \alpha x_{t-2} + (1-\alpha)S_{t-3} \qquad .....(5)$$

แทนค่าสมการ (5) ใน (4)

$$S_t = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + (1-\alpha)^3 S_{t-3} \qquad ..(6)$$

ในทำนองเดียวกัน หาค่า S_{t-3}, S_{t-4}, ..., S_2, S_1 แทนในสมการ (6)

$$S_t = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} x_1 + (1-\alpha)^t S_0$$

จากสมการ S_t ซึ่งอยู่ในรูปของ Recursive Formula สามารถเขียนอยู่ในรูปค่าสังเกต x_1, x_2, x_3, ...,x_t และค่าเริ่มต้น S_0 ค่าสัมประสิทธิ์ของค่าสังเกต α, $\alpha(1-\alpha)$, $\alpha(1-\alpha)^2$, ..., $\alpha(1-\alpha)^{t-1}$ เป็นตัวถ่วง น้ำหนักของค่าสังเกต x_t, x_{t-1}, x_{t-2},...x_1

012788

โดยให้น้ำหนักแก่ค่าสังเกตที่อยู่ใกล้กับเวลาที่จะพยากรณ์มากที่สุด และให้น้ำหนักแก่ข้อมูลก่อนหน้านี้ลดลงเรื่อยแบบเรขาคณิต การหาค่า S_t จะต้องทราบค่า S_{t-1} และจาก S_{t-1} ต้องทราบค่า S_{t-2} ย้อนขึ้นไปเรื่อยๆ ดังนั้นจึงเกิดปัญหาในการกำหนดค่าเริ่มต้น S_o ควรจะมีค่าเท่าไร ได้มีผู้เสนอแนวความคิดและวิธีการในการกำหนดค่าเริ่มต้นหลายวิธี ในงานวิจัยนี้จะใช้ค่าเริ่มต้นตามวิธีของ Holt คือจะใช้ข้อมูลตัวแรกเป็นค่าเริ่มต้น และจะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนั้นๆ เป็นค่าเริ่มต้น เพื่อเปรียบเทียบว่าการกำหนดค่าเริ่มต้นวิธีใดให้ความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ต่ำกว่ากัน

จากตัวแบบ การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว

$$x_t = a_o + \varepsilon_t$$

เมื่อ a_o = พารามิเตอร์ของตัวแบบ

ε_t = ค่าความคลาดเคลื่อน

ประมาณค่า a_o ณ เวลา t ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\hat{a}_o(t)$

$$\hat{a}_o(t) = S_t$$

ค่าพยากรณ์ 1 หน่วยเวลาล่วงหน้า ณ เวลาt คือ

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{a}_o(t) = S_t$$

3.2 <u>การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง</u> (Double Exponential Smoothing)

การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง เหมาะสำหรับอนุกรมเวลาที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลา การเปลี่ยนแปลงของระดับค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลาเป็นแบบเส้นตรง หรืออาจกล่าวได้ว่าการพยากรณ์โดยใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง เหมาะสำหรับอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มเป็นเส้นตรง การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง ใช้แนวความคิดและวิธีการเหมือนกับการเฉลี่ยเคลื่อนที่ซ้ำสองครั้ง เพียงแต่ว่าแตกต่างกันในแง่น้ำหนักที่ให้แก่ข้อมูลในอดีตดังได้กล่าวไว้แล้วข้างต้น

การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง ได้แก่

$$S_t^{(2)} = \alpha S_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(2)}$$

เมื่อ S_t = ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว ณ เวลาt(Single Smoothed estimate หรือ Single Smoothed Statistic)

ซึ่ง $S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1}$

$S_t^{(2)}$ = ค่าการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง ณ เวลา t (Double Smoothed Statistic)

α = ค่าคงที่กำหนดน้ำหนักของการเฉลี่ย โดย $0<\alpha<1$

ตัวแบบของการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง คือ

$$x_t = a_0 + a_1 \cdot t + \varepsilon_t$$

a_0 , a_1 เป็นค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ

ตัวประมาณของ a_0 , a_1 คือ $\hat{a}_0(t)$ และ $\hat{a}_1(t)$ ตามลำดับ

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a_0 และ a_1 สามารถเขียนอยู่ในรูปของการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง ดังนี้

$$\hat{a}_0(t) = 2S_t - S_t^{(2)}$$

$$\hat{a}_1(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\ (S_t - S_t^{(2)})$$

ค่าพยากรณ์ 1 หน่วยเวลาล่วงหน้า ณ เวลา t คือ

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{a}_0(t) + \hat{a}_1(t)$$

ค่าพยากรณ์ j หน่วยเวลาล่วงหน้า ณ เวลา t คือ

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+j} &= \hat{a}_0(t) + \hat{a}_1(t) \cdot j \\ &= 2S_t - S_t^{(2)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t - S_t^{(2)}) \cdot j \\ &= \left[2 + \frac{\alpha \cdot j}{(1-\alpha)}\right]S_t - \left[1 + \frac{\alpha \cdot j}{(1-\alpha)}\right]S_t^{(2)}\end{aligned}$$

การกำหนดค่าเริ่มต้นของการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้งคือ S_0 และ $S_0^{(2)}$ อาจทำได้หลายวิธี วิธีที่ง่ายที่สุดคือ กำหนดให้ข้อมูลตัวแรกเป็นค่าประมาณ S_0 และ $S_0^{(2)}$ หรืออาจใช้การพิจารณาหาค่า S_0 และ $S_0^{(2)}$ จากตัวแบบของการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้ง จะได้สมการ

$$S_0 = a_0(t) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}a_1(t)$$

$$S_0^{(2)} = a_0(t) - 2\frac{(1-\alpha)}{\alpha}a_1(t)$$

เนื่องจากตัวแบบการพยากรณ์ โดยใช้เทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้งเป็นตัวแบบเชิงเส้นในลักษณะปรับรูปตามเวลา ดังนั้นอาจหาค่า $a_0(t)$ และ $a_1(t)$ ได้โดยนำเอาข้อมูลทั้งหมดมาหาค่ากำลังสองน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับตัวแบบเชิงเส้น จะได้

$$a_1(t) = \frac{n\Sigma tx_t - \Sigma x_t \Sigma t}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$a_0(t) = \frac{\Sigma x_t}{n} - a_1(t)\frac{\Sigma t}{n}$$

เมื่อ t = เวลาของข้อมูล

x_t = ค่าของข้อมูล ณ เวลา t

การกำหนดค่าเริ่มต้น ของเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลซ้ำสองครั้งในงานวิจัยนี้ จะใช้การกำหนดค่าเริ่มต้นทั้งสองวิธีตามที่กล่าวข้างต้นคือ S_0 , $S_0^{(2)}$ เท่ากับค่าข้อมูลตัวแรก กับการกำหนด $S_0 = a_0(t) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha}a_1(t)$

$$S_0^{(2)} = a_0(t) - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}a_1(t)$$

เพื่อเปรียบเทียบว่า การกำหนดค่าเริ่มต้น S_0 และ $S_0^{(2)}$ วิธีใดให้ผลการพยากรณ์ใกล้เคียงค่าจริงมากที่สุด

การพยากรณ์โดยเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลครั้งเดียว หรือ ซ้ำสองครั้ง นอกจากมีปัญหาการกำหนดค่าเริ่มต้นแล้ว การทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลยังมีปัญหาการกำหนดค่าคงที่ที่กำหนดน้ำหนักของการเฉลี่ย α (Smoothing Constant) ว่าควรมีค่าเป็นเท่าไรจึงจะเหมาะสม การกำหนดค่า α นั้นขึ้นอยู่กับค่าของข้อมูลที่พยากรณ์ α ที่มีค่าน้อยทำให้น้ำหนักในการเฉลี่ยของข้อมูลค่อยๆ ลดลงอย่างช้าๆ เมื่อเวลาของข้อมูลห่างออกไปจากปัจจุบันมากขึ้น ในทางตรงข้าม α ที่มีค่ามากๆ ทำให้น้ำหนักในการเฉลี่ยของข้อมูลลดลงอย่างรวดเร็ว ดังนั้น α ที่มีค่ามากจะทำให้น้ำหนักในการเฉลี่ยของข้อมูลคาบเวลาใกล้ๆ ที่จะพยากรณ์มากกว่า และลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเวลาของข้อมูลห่างออกไปจากเวลาที่จะพยากรณ์ อาจกล่าวได้ว่าถ้าข้อมูลมีความสัมพันธ์กับคาบใกล้ๆ กันมาก ค่า α ควรมีค่าใกล้ 1 แต่ถ้าข้อมูลมีความสัมพันธ์กับคาบใกล้ๆกันน้อย ค่า α ควรมีค่าใกล้ศูนย์ ในทางปฏิบัติพบว่า α ที่มีค่าอยู่ระหว่าง .01 ถึง .30 จะใช้ได้ผลดี ในงานวิจัยนี้จะกำหนดค่า α โดยใช้วิธีค้นหา โดยในการพยากรณ์ทดลองใช้ค่าα ตั้งแต่.01 ถึง .99 แล้วเลือกค่า α ที่ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนต่ำที่สุด

3.3 การพยากรณ์แบบการกรองแบบปรับได้ (Adaptive Filtering Technique)

การพยากรณ์แบบการกรองแบบปรับได้เป็นการพยากรณ์เชิงปริมาณวิธีหนึ่งซึ่งเป็นวิธีการภายใต้แนวความคิดที่ว่าพฤติกรรมในอดีต ของสิ่งที่จะพยากรณ์เพียงพอ ที่จะพยากรณ์พฤติกรรมในอนาคตของมันเองได้ การพยากรณ์แบบการกรองแบบปรับได้ยังคงใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในอดีตเป็นค่าพยากรณ์ โดยใช้แนวความคิดคล้ายกับวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่และเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียลในส่วนที่ว่า ค่าพยากรณ์อาจเขียนเป็นผลรวมถ่วงน้ำหนักของค่าที่เกิดขึ้นจริงในคาบเวลาก่อนๆ แต่วิธีการพยากรณ์แบบการกรองแบบปรับได้มีวิธีกำหนดน้ำหนักของการเฉลี่ยที่แตกต่างไปจากวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ และเทคนิคการทำให้เรียบแบบเอกซ์โปเนนเชียล

ค่าพยากรณ์แบบการกรองแบบปรับได้อาจเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$S_{t+1} = w_1 x_t + w_2 x_{t-1} + \cdots + w_N x_{t-N+1}$$

หรือ

$$S_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i x_{t-i+1}$$

เมื่อ t = คาบเวลาซึ่งเท่ากับ 1, 2, 3, ...

S_{t+1} = ค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ t+1 เมื่อ t=N, N+1, ...

w_i = ค่าถ่วงน้ำหนักที่สมนัยกับค่าที่เกิดขึ้นจริงกับคาบเวลา t-i+1

เมื่อ i = 1, 2, ..., N

x_t = ค่าที่เกิดขึ้นจริงที่คาบเวลา t

N = จำนวนตัวถ่วงน้ำหนัก

การกรองแบบปรับได้เป็นวิธีการกำหนดค่าที่เหมาะสมที่สุดของ w_i ที่เวลา t ค่าของ w_i จะถูกกำหนดขึ้นเพื่อให้ผลบวกของความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ เมื่อยกกำลังสองแล้ว มีค่าน้อยที่สุด แล้วใช้ค่าเหล่านี้พยากรณ์ค่าของ x_{t+1} ก็คือค่า S_{t+1} เมื่อเวลา t+1 นำค่า x_{t+1} ซึ่งทราบค่าเปรียบเทียบกับค่าพยากรณ์คือ S_{t+1} เพื่อหาความคลาดเคลื่อนและนำค่าความคลาดเคลื่อนนี้ไปใช้ปรับน้ำหนักในการเฉลี่ยที่จะกระทำ ณ เวลา t+1 โดย

$$w_i = w_i(t) + f(e_{t+1}, x_i)$$

เมื่อ e_{t+1} = ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์

$$= x_{t+1} - S_{t+1}$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และ $f(e_{t+1},x_i)$ เป็นค่าที่ใช้ปรับน้ำหนักในการเฉลี่ยที่กระทำ ณ เวลา t ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ e_{t+1} และ x_i

การพยากรณ์แบบการกรองแบบปรับได้ จะนำเอาข้อมูล N ค่าแรกมาคำนวณหา S_{N+1} โดยเลือกกำหนดตัวถ่วงน้ำหนัก $w_1, w_2, \ldots, w_N$ โดย

$$S_{N+1} = w_1x_N + w_2x_{N-1} + \cdots + w_Nx_1$$

จากนั้น หาค่า e_{N+1} โดย $e_{N+1} = x_{N+1} - S_{N+1}$ นำค่า e_{N+1} มาปรับค่า $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ใหม่ ค่า $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ที่ได้ใหม่จะนำไปใช้ในการหาค่าพยากรณ์ S_{N+2} โดยที่

$$S_{N+2} = w_1x_{N+1} + w_2x_N + \cdots + w_Nx_2$$ แล้วนำเอา S_{N+2} มาใช้หาค่า e_{N+2} ทำการคำนวณทำนองเดียวกันจนได้ค่า $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดสุดท้ายที่ใช้หาค่าพยากรณ์ S_{n+1} โดย

$$S_{n+1} = w_1x_n + w_2x_{n-1} + \cdots + w_Nx_{n-N+1}$$

ถ้าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน มีค่าน้อยก็จะใช้ค่า $w_1, w_2, \ldots, w_N$ หาค่าพยากรณ์ S_{n+1} แต่ถ้าหากผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่ามาก จะใช้ $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดสุดท้ายมาเป็นค่าถ่วงน้ำหนักเริ่มหา S_{N+1} ใหม่ แล้วหาค่า e_{N+1} เพื่อใช้ปรับถ่วงน้ำหนัก ทำการคำนวณจนได้ $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ที่ใช้หาค่าพยากรณ์ S_{n+1} ทำซ้ำๆ กันหลายๆ รอบจนกระทั่งผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนลดลงในอัตราที่น้อยมาก แสดงว่า $w_1, w_2, \ldots w_N$ ลู่เข้าหาค่า $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_N^*$ ซึ่งเป็นชุดที่ดีที่สุด โดยเมื่อนำมาใช้พยากรณ์ค่าแล้วจะทำให้ผลรวมของกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำที่สุด (Minimum Sum Square Error)

การปรับค่าตัวถ่วงน้ำหนักตามวิธีการพยากรณ์ แบบการกรองแบบปรับได้กระทำได้โดย

$$w_i' = w_i + 2ke_{t+1}x_{t-i+1}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, N$

$t = N+1, N+2, \ldots, n$

w_i' = ค่าถ่วงน้ำหนักตัวที่ i ซึ่งได้ปรับค่าแล้ว

w_i = ค่าถ่วงน้ำหนักตัวที่ i ก่อนการปรับค่า

k = ค่าคงที่ซึ่งเรียกว่า Learning Constant

e_{t+1} = ค่าความผิดพลาดของค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ t+1

x_{t-i+1} = ค่าที่เกิดขึ้นจริงที่คาบเวลา t-i+1

ปัญหาที่เกิดขึ้นในทางปฏิบัติ คือ ควรกำหนดค่า N และ k เท่ากับเท่าใด Makridakis และ Wheelwright พบว่าปกติค่า N จะใช้เพียง 2 หรือ 3 กรณีถ้าข้อมูลมีลักษณะที่เป็นอนุกรมเวลาแบบมีฤดูกาลและ/หรือ วัฏจักร ในกรณีนั้นอาจจะใช้ค่า N ตามคาบวัฏจักรทั้งนี้เพื่อให้ได้ w_i' ชุดที่ดีที่สุดเร็วขึ้นไม่ต้องทำการคำนวณหลายๆ รอบ ในงานวิจัยนี้ใช้ N=3 เพราะตัวอย่างที่นำมาทำการวิเคราะห์มีจำนวนมาก

จากผลการศึกษาของ Makridakis และ Wheelwright ได้ปรับสูตรการปรับค่าตัวถ่วงน้ำหนักเพื่อให้ได้ w_i ชุดที่ดีที่สุด และคำนวณหาได้เร็วขึ้น โดย

$$w_i' = w_i + 2ke^*_{t+1} x^*_{t-i+1}$$

เมื่อ e^*_{t+1} และ x^*_{t-i+1} เป็นค่าปรับใหม่ของ e_{t+1} และ x_{t-i+1}

โดย

$$e^*_{t+1} = \frac{e_{t+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x^2_{t-i+1}}}$$

$$x^*_{t-i+1} = \frac{x_{t-i+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x^2_{t-i+1}}}$$

ในกรณีนี้ค่าของ k ที่เหมาะสม คือ $k = \frac{1}{N}$ และการกำหนดค่า w_i ชุดเริ่มต้นก็อาจใช้ $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = \frac{1}{N}$

การพยากรณ์ค่าอนุกรมเวลา เมื่อได้ $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดที่ดีที่สุดแล้วนำมาหาค่าพยากรณ์ โดย

$$S_{n+1} = w_1x_n + w_2x_{n-1} + \ldots + w_Nx_{n-N+1}$$

ซึ่ง S_{n+1} คือค่าพยากรณ์ของ x_{n+1}

สรุปขั้นตอนการพยากรณ์ด้วยเทคนิคการพยากรณ์ แบบการกรองแบบปรับได้มีดังนี้

1. คำนวณหาค่าพยากรณ์ S_{N+1} โดยกำหนดตัว ถ่วงน้ำหนัก $w_1, w_2, \ldots, w_N = 1/N$ และกำหนดค่า $k = 1/N$

2. หาค่าความผิดพลาด e_{N+1} ซึ่ง $e_{N+1} = x_{N+1} - S_{N+1}$ นำค่า e_{N+1} มาปรับ $w_1, w_2, \ldots, w_N$ จะได้ $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดใหม่ซึ่งจะนำไปใช้คำนวณหา S_{N+2} ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนได้ค่า $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดสุดท้าย

3. นำค่า $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดสุดท้ายจากข้อ 2 มาคำนวณ หาค่า S_{N+1}, e_{N+1} ใหม่และทำการปรับค่า $w_1, w_2, \ldots w_N$ ใหม่เหมือนข้อ 2 ทำซ้ำเช่นนี้หลายๆ รอบ จนได้ค่า $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดที่ดีที่สุดเป็นชุดที่ให้ค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำที่สุด

4. นำ $w_1, w_2, \ldots, w_N$ ชุดที่ดีที่สุดจากข้อ 3 มาคำนวณหาค่าพยากรณ์ S_{n+1}

3.4 <u>การวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิก</u> (Classical Time Series Technique)

อนุกรมเวลา คือข้อมูลที่ได้จากการสังเกตชุดหนึ่งซึ่งถูกจัดเรียงกันตามความช้าเร็วที่เกิดขึ้น โดยที่ข้อมูลเหล่านี้จะถูกเก็บมา ณ ช่วงเวลาต่างๆ หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นปรากฏการณ์ของข้อมูลชุดหนึ่งที่แสดงลักษณะการเคลื่อนไหวหรือการเปลี่ยนแปลงในระยะเวลาที่ต่อเนื่องกัน

การวิเคราะห์อนุกรมเวลา ก็คือการศึกษาความเคลื่อนไหวของข้อมูลชุดหนึ่งๆ ตามงวดระยะเวลา ในการพยากรณ์ค่าของสิ่งที่จะเกิดขึ้นในอนาคตตามระยะเวลาเช่น ปี เดือน สัปดาห์ฯลฯ วิธีทางสถิติที่ใช้ได้ดีสำหรับการพยากรณ์ คือ การวิเคราะห์อนุกรมเวลา ซึ่งจะเน้นถึงการหาโมเดลหรือรูปแบบที่จะใช้พยากรณ์ในช่วงเวลาต่อๆ ไป การวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิกเป็นที่นิยมกันมากในวงการธุรกิจ เนื่องจากการวิเคราะห์ได้จำแนก อนุกรมเวลาออกเป็นส่วนประกอบต่างๆ ซึ่งทำให้นักธุรกิจสามารถได้คำตอบจนเป็นที่พอใจ เกี่ยวกับการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของอนุกรมเวลาบางส่วนได้ ทำให้การวางแผนล่วงหน้าในอนาคตทำได้ง่ายขึ้นในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิกนี้ สิ่งที่สำคัญที่สุดคือการหาว่าส่วนประกอบอะไรบ้างได้ถูกผสมผสานขึ้นมาเป็นอนุกรมเวลา อาจกล่าวได้ว่าการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเป็นการศึกษาลักษณะการเคลื่อนไหวของข้อมูลชุดหนึ่งที่เกิดขึ้นตามลำดับเวลาซึ่งตามปกติแล้วข้อมูลอนุกรมเวลาจะประกอบด้วยการเปลี่ยนแปลงที่สำคัญ 4 ประการ คือ การเปลี่ยนแนวโน้ม (Trend) การเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล (Season) การเปลี่ยนแปลงเนื่องจากวัฏจักร (Cycle) และการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเหตุการณ์ผิดปกติ (Irregular)

3.4.1 **ส่วนประกอบของอนุกรมเวลา**

3.4.1.1 **การเปลี่ยนแปลงเนื่องจากแนวโน้ม** เป็นการเคลื่อนไหวของการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างค่อยเป็นค่อยไปของอนุกรมเวลาในระยะเวลาค่อนข้างจะยาวนาน ค่าแนวโน้มนี้ปกติแสดงถึงทิศทางที่อนุกรมเวลาชุดนั้นๆ พุ่งไปสู่ ค่าแนวโน้มอาจมีลักษณะเป็น เส้นตรง เส้นโค้ง หรือลักษณะอื่นใดก็ได้ สำหรับค่าแนวโน้มจะแทนด้วยสัญลักษณ์ ย่อ T

3.4.1.2 **การเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล** เป็นพฤติการณ์ที่เกิดขึ้นซ้ำๆ กันในช่วงระยะเวลาสั้นๆ เช่น 1 วัน 1 สัปดาห์ 1 เดือนฯลฯ โดยเกิดการเคลื่อนไหวขึ้นลงซ้ำกันในช่วงเวลาเดียวกันโดยจะแสดงการเปลี่ยนแปลงเกิดจากฤดูกาลในลักษณะของแบบ (Pattern) ที่เกิดขึ้นซ้ำกันในแต่ละช่วง ซึ่งเรียกว่าดัชนีฤดูกาล(Seasonal index) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ย่อ S และมีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

3.4.1.3 **การเปลี่ยนแปลงเนื่องจากวัฏจักร** เป็นส่วนประกอบอีกส่วนหนึ่งของอนุกรมเวลา วัฏจักรโดยทั่วไปประกอบขึ้นด้วย ระยะเวลาที่รุ่งเรือง (Prosperity) ติดตามด้วยเศรษฐกิจฝืดเคือง (Recession) ตกต่ำ (Depression) และระยะฟื้นตัว (Recovery) แล้วกลับมาสู่ระยะที่เศรษฐกิจรุ่งเรืองอีกครั้งหนึ่งสลับกันไป ช่วงของวัฏจักรอาจสั้นหรือต้องใช้ระยะเวลายาวมากในการที่จะมองเห็นการเปลี่ยนแปลงชนิดนี้สำหรับค่าวัฏจักรจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ย่อ C และมีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

3.4.1.4 **การเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเหตุการณ์ผิดปกติ** เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยไม่อาจคาดการณ์มาก่อนล่วงหน้า เหตุการณ์ผิดปกติเหล่านี้อาจจะเป็นเรื่องเล็กน้อยเช่น การนัดหยุดงานของคนงานไปจนถึงเรื่องใหญ่ๆ เช่น การเกิดสงครามโลก การเกิดแผ่นดินไหว ฯลฯ ซึ่งไม่ได้อยู่ภายใต้กฎที่แน่นอนอย่างใดอย่างหนึ่ง มักจะเกิดขึ้นตามโอกาสหรือโดยบังเอิญ เหตุการณ์ผิดปกตินี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า การเปลี่ยนแปลงเชิงสุ่ม จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ย่อ I และมีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

การรวมตัว ของการเปลี่ยนแปลง 4 ชนิด ที่ประกอบขึ้นเป็นอนุกรมเวลานี้ โดยทั่วไปเกิดขึ้นได้ 2 แบบคือ

ก. การรวมตัวในรูปผลคูณ ซึ่งเขียนได้ในรูปตัวแบบเชิงคูณ(Multiplicative Model)

$$Y = T \times S \times C \times I$$

ข. การรวมตัวในรูปผลบวก ซึ่งเขียนได้ในรูปตัวแบบเชิงบวก(Additive Model)

$$Y = T + S + C + I$$

การพิจารณาว่าข้อมูลที่ศึกษามีการรวมตัวแบบใดจะต้องอาศัยประสบการณ์เพื่อพิจารณาว่าการเพิ่มหรือลดของปัจจัยแต่ละประเภทจะกระทบกระเทือนกันหรือไม่ถ้ากระทบกระเทือนกันจะเป็นตัวแบบเชิงคูณ แต่ถ้าไม่กระทบกระเทือนกันจะเป็นตัวแบบเชิงบวก ตัวอย่างเช่น ยอดขายของเดือนพฤษภาคมของบริษัทแห่งหนึ่งมักจะสูงกว่ายอดขายเดือนเมษายนเกือบทุกปี ในปีพ.ศ.2521 ยอดขายเดือนพฤษภาคมมีจำนวนเท่ากับ 100,000 บาท และเดือนเมษายนเท่ากับ 80,000 บาท ผลต่างระหว่างยอดขายสองเดือนนี้ เป็นที่เชื่อแน่ว่าเกิดจากปัจจัยทางฤดูกาล ยอดขายของเดือนพฤษภาคมสูงกว่าเดือนเมษายนเท่ากับ 20,000 บาท หรือสูงกว่า 25 เปอร์เซ็นสำหรับปีพ.ศ.2521 ไม่มีความแตกต่างกันเลยไม่ว่าจะพยากรณ์แบบใด แต่สำหรับปี พ.ศ.2522 ถ้ายอดขายเดือนเมษายนมีจำนวนเท่ากับ 110,000 บาท การพยากรณ์ยอดขายปี พ.ศ.2522 เดือนพฤษภาคมสามารถทำได้ 2 แบบคือ ถ้ายอดขายเดือนพฤษภาคมพยากรณ์ได้เท่ากับ 130,000 บาท ถือว่าผลต่างทางฤดูกาลมีค่าเป็นบวกเท่ากับ 20,000 บาท แต่ถ้าพยากรณ์ยอดขายเดือนพฤษภาคมได้เท่ากับ 137,500 บาท แสดงว่า ผลต่างที่เกิดจากฤดูกาลเท่ากับ 25 เปอร์เซ็นจึงคูณยอดขายเดือนเมษายน ปี พ.ศ.2522 ด้วยดัชนีฤดูกาล 125 วิธีใดจะเป็นวิธีที่ถูกต้องและเหมาะสมกว่านั้นย่อมขึ้นอยู่กับเหตุผลและประสบการณ์ของแต่ละบุคคล แต่ละบริษัทเป็นสำคัญ

แต่กล่าวโดยทั่วไปแล้ว การรวมตัวในรูปผลคูณมีเหตุผลที่ควรสนับสนุนมากกว่า กล่าวคือการตั้งข้อสมมติที่ว่าการเปลี่ยนแปลงเป็นไปในรูปของอัตราร้อยละที่เท่ากันจะทำให้การกะประมาณถูกต้องใกล้เคียงความจริงมากกว่า การเปลี่ยนแปลงที่เป็นจำนวนเงินที่เท่ากัน นอกจากนี้ตาม ข้อเท็จจริงปรากฏว่าธุรกิจส่วนมากในปัจจุบันใช้การวิเคราะห์อนุกรมเวลาอยู่ในรูปแบบผลคูณคือ $Y = T \times S \times C \times I$

ในการเลือกตัวแบบ วิธีใดเป็นวิธีที่เหมาะสม ขึ้นอยู่กับเหตุผลและประสบการณ์ของแต่ละบุคคล แต่ละบริษัท โดยทั่วไปสำหรับข้อมูลทางธุรกิจใช้ตัวแบบที่อยู่ในรูปผลคูณ ส่วนข้อมูลเงินอากรขาเข้า ที่ทำการศึกษานั้นใช้ตัวแบบที่อยู่ในรูปผลคูณ

ในการพยากรณ์อาจจะใช้เฉพาะค่า T หรือถ้าต้องการทำการพยากรณ์ให้ละเอียดยิ่งขึ้นทำได้โดย การใช้ค่า S มาปรับค่า T ให้เป็นไปตามฤดูกาล ข้อมูลที่มีฤดูกาลส่วนใหญ่จะเป็นข้อมูลรายเดือน การหาค่า S จะทำได้ภายหลังการกำจัดค่า T, C และ I ออกจากข้อมูลเดิม การหา

ค่า S ทำได้หลายวิธีซึ่งจะกล่าวในตอนต่อไป ถ้าต้องการพยากรณ์ให้ละเอียดยิ่งขึ้นอีก จะต้องหาค่าพยากรณ์ของ C×I จะทำภายหลังจากทำการกำจัดค่า T และ S จากข้อมูลเดิม โดย $C \times I = \frac{Y}{T \times S}$ และนำค่าพยากรณ์ C x Iโดยอาจจะพยากรณ์ค่า C และพยากรณ์ค่าI นำมาปรับกับค่า T x S หรืออาจจะพยากรณ์ค่าC กับค่า I โดยไม่ต้องแยกพยากรณ์และนำค่าพยากรณ์ C รวมกับ I มาปรับค่า T x S /

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเหตุการณ์ผิดปกติ I เป็นการเคลื่อนไหวโดยบังเอิญ ไม่สามารถคาดคะเนได้ล่วงหน้า เพราะเป็นการเคลื่อนไหวที่ขึ้นอยู่กับธรรมชาติ หรือเหตุการณ์ผิดปกติต่างๆ ซึ่งนานๆ จะเกิดขึ้นสักครั้ง ส่วนการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากวัฏจักร ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงในระยะยาวอาจมีระยะเวลานานถึง 10-15 ปี และมีรูปแบบไม่แน่นอน ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงไม่นำเอาค่าเหตุการณ์ผิดปกติ I และค่าวัฏจักร C มารวมในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิก ดังนั้นตัวแบบในการพยากรณ์จึงใช้ Y =T x S เท่านั้น

3.4.2 วิธีการหาค่าแนวโน้ม (T)

แนวโน้มเป็นส่วนสำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับการวางแผนในระยะยาว ผู้ที่มีหน้าที่เกี่ยวกับการวางนโยบายในอนาคตต้องใช้ลักษณะแนวโน้มที่ผ่านมาในอดีตเป็นเครื่องมือในการวางแผนทั้งสิ้น วิธีการหาค่าแนวโน้ม มีหลายวิธีแล้วแต่ผู้วิจัยจะเลือกใช้วิธีการแบบไหน การหาค่าแนวโน้มอาจทำได้โดยวิธี การกะประมาณด้วยสายตา (Freehand Method) การเลือกจุด2จุด(Selected Points Method) วิธีกึ่งถัวเฉลี่ย (Semiaverage Method) วิธีการใช้ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average) และการวัดแนวโน้มเชิงคณิตศาสตร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีแรกนั้นสามารถทำได้อย่างรวดเร็วและมีขอบเขตการใช้กว้างกว่าการใช้ฟังค์ชันทางคณิตศาสตร์ และอาจสร้างเส้นกราฟได้ใกล้เคียงกับข้อมูลจริงมากกว่า ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสามารถส่วนตัว โดยเฉพาะอย่างยิ่งประสบการณ์และความคุ้นเคย เกี่ยวกับปัญหานั้นๆเอง ของผู้วิเคราะห์เอง แต่การวัดแนวโน้มเชิงคณิตศาสตร์วิธีอื่นๆ นั้นก็ยังต้องอาศัยประสบการณ์ของผู้วิเคราะห์ในการเลือกตัวแบบ และข้อมูลที่จะนำมาวิเคราะห์ด้วย การวัดแนวโน้มเชิงคณิตศาสตร์จะเป็นตัวแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อมูลภายใต้กฎเกณฑ์ที่กำหนดไว้ จึงเป็นวิธีที่น่าเชื่อถือมากกว่าการวัดแนวโน้มจากกราฟซึ่งถูกเขียนขึ้นด้วยมือเปล่า สำหรับการหาค่าแนวโน้มเชิงคณิตศาสตร์ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ทำได้โดยการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์โดยมีหลักการที่ทำให้ระยะห่างยกกำลังสองของข้อมูลจากเส้นแนวโน้มที่สร้างขึ้นรวมกันแล้วน้อยกว่าเส้นอื่นๆการหาค่าแนวโน้มวิธีนี้ทำได้โดยไม่จำเป็นต้องอาศัยประสบการณ์

และความคิดเห็นส่วนตัวของผู้วิเคราะห์มากเท่ากับวิธีอื่นๆ ที่กล่าวมาข้างต้น

3.4.2.1 **การประมาณด้วยสายตา (Freehand Method)**

การหาค่าแนวโน้มโดยวิธีนี้ ต้องนำเอาข้อมูลอนุกรมเวลา ที่ต้องการหาค่าแนวโน้มมาเขียนแผนภาพขยายโดยให้แกน X แทนระยะเวลา และแกน Y แทนข้อมูลอนุกรมเวลาชุดนั้น แล้วจึงลากเส้นตรงเส้นหนึ่งโดยวิธีการประมาณด้วยสายตา การลากเส้นตรงดังกล่าวต้องพยายามลากผ่านจุดเหล่านั้นให้มากที่สุดหรือใกล้เคียงที่สุด และพยายามให้จำนวนจุดที่อยู่เหนือและใต้เส้นตรงนี้ มีจำนวนที่เท่ากันหรือเกือบจะเท่ากัน การหาเส้นแนวโน้มโดยวิธีนี้เป็นวิธีที่ง่าย สะดวกไม่สิ้นเปลืองเวลา แต่มีข้อเสียที่ว่าเป็นวิธีที่อาศัยดุลยพินิจของผู้ทำการวิเคราะห์เป็นสำคัญ เนื่องจากการประมาณโดยวิธีนี้เป็นวิธีที่ง่าย การหาเส้นแนวโน้มโดยวิธีนี้จึงมักจะนำมาใช้เป็นจุดเริ่มต้นในการพิจารณาว่า ข้อมูลอนุกรมเวลาชุดนั้นมีแนวโน้มเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง เพื่อจะได้นำไปคำนวณหาค่าแนวโน้มที่ถูกต้องและเหมาะสมต่อไป

3.4.2.2 **วิธีเลือกจุด (Selected Points Method)**

การหาค่าแนวโน้มวิธีนี้ ต้องพิจารณาก่อนว่า แนวโน้มของข้อมูลอนุกรมเวลาดังกล่าวพอจะอนุโลมได้ว่ามีลักษณะเป็นเส้นตรงหรือไม่ ถ้าอนุโลมได้ว่ามีแนวโน้มเป็นเส้นตรงจึงทำการเลือกจุดของข้อมูลในแผนภาพขยายเพียงสองจุด แล้วลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดทั้งสองที่เลือกมานั้นเส้นตรงเส้นนี้จะแทนเส้นแนวโน้มของอนุกรมเวลาชุดนั้น โดยปกติการเลือกจุดจะเลือกจุดที่อยู่ในช่วงเวลาแรกๆ และช่วงเวลาท้ายๆ ของข้อมูลอนุกรมเวลา แต่ทั้งนี้จะต้องพิจารณาด้วยว่าจุดทั้งสองที่เลือกนั้นเป็นตัวแทนแนวโน้มของอนุกรมเวลาชุดนั้นได้ดีหรือไม่ประกอบด้วย

3.4.2.3 **วิธีเฉลี่ยทีละครึ่ง (Semiaverage Method)**

การหาแนวโน้มโดยวิธีนี้ จะแบ่งอนุกรมเวลาชุดนั้นๆ ออกเป็น 2 กลุ่มแล้วคำนวณหาค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่ม จากนั้นลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านค่าเฉลี่ยทั้งสองเส้นตรงที่ได้เส้นนี้จะแทนเส้นแนวโน้มของอนุกรมเวลาชุดนั้น

3.4.2.4 **วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average Method)**

การเฉลี่ยเคลื่อนที่จะทำการหาค่าเฉลี่ยของอนุกรมโดยอาจทำการเฉลี่ยเคลื่อนที่ 3 เดือน 6 เดือน ฯลฯ แล้วแต่กรณีสังเกตลักษณะของการเกิดขึ้นซ้ำๆ กันทุก 3 เดือน 6 เดือน ฯลฯ การ

เลือกจำนวนข้อมูลของอนุกรมเวลามาทำการเฉลี่ยเคลื่อนที่นั้นสุดแต่ว่าต้องการ ให้แนวโน้มเรียบขึ้นเพียงใด ถ้าจำนวนข้อมูลที่นำมาทำการเฉลี่ยเคลื่อนที่มาก แนวโน้มก็จะเรียบมากขึ้น แต่ถ้าข้อมูลของอนุกรมเวลามีการเปลี่ยนแปลงตามวัฏจักรอยู่ด้วย เฉพาะอย่างยิ่งถ้าวัฏจักรนั้นมีขนาดความสูงและความยาวเท่ากับจำนวนเทอมที่นำมาเฉลี่ยเคลื่อนที่ การเฉลี่ยเคลื่อนที่นั้นจะกำจัด อิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงตามวัฏจักรออกไปด้วย ข้อดีของวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่เป็นวิธีการที่ง่ายค่าแนวโน้มที่ได้มักจะเคลื่อนตามความเคลื่อนไหวของอนุกรมเวลาชุดเดิม ข้อมูลไม่จำเป็นต้องมีลักษณะเป็นเส้นตรง ข้อเสียของวิธีนี้คือ ไม่มีตัวแบบค่าแนวโน้มที่จะนำไปพยากรณ์ ค่าแนวโน้มในตอนต้นและตอนปลายของอนุกรมเวลาจะหายไปจำนวนหนึ่ง และเป็นวิธีการที่จำเป็นต้องใช้ข้อมูลเป็นจำนวนมาก

3.4.2.5 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Method)

วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากสำหรับการกะประมาณค่าแนวโน้ม ทำได้โดยการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์ วิธีนี้กระทำโดยไม่ต้องใช้ประสบการณ์ของผู้วิเคราะห์มาช่วย นอกจากการตัดสินใจในการเลือกตัวแบบและจำนวนข้อมูลที่จะใช้ในการวิเคราะห์ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นวิธีการหาค่าแนวโน้มที่ให้ผลรวมของผลต่างระหว่างค่าจริงในข้อมูลและค่าแนวโน้มยกกำลังสอง หรือค่ากำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนที่วัดตามแนวตั้งฉากข้อมูล ไปยังแนวโน้มรวมกันจะมีค่าน้อยที่สุด หรือ $\Sigma (Y-\hat{Y})^2$ มีค่าน้อยที่สุด การจะทราบว่าข้อมูลชุดนั้นมีแนวโน้มในลักษณะใด จะทำได้โดยการลงจุดข้อมูลในกราฟ ซึ่งจะอยู่ในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง เช่น โพลิโนเมียลกำลังหนึ่ง โพลิโนเมียลกำลังสอง โพลิโนเมียลกำลังสาม เอ็กซ์โพเนนเชียล ฯลฯ อย่างไรก็ตาม บางครั้ง จากการลงจุดในกราฟก็ไม่สามารถบอกได้ว่าแนวโน้ม มีลักษณะเป็นโพลิโนเมียลกำลังหนึ่งหรือโพลิโนเมียลกำลังสอง ในกรณีนี้อาจใช้การหาค่า ความแตกต่างระหว่างข้อมูลในช่วง 2 เวลาที่ติดกันซึ่งถ้าค่าความแตกต่างระหว่างข้อมูลในช่วง 2 เวลาที่ติดกันลำดับแรก มีค่าใกล้เคียงหรือมีค่าคงที่ สามารถบอกได้ว่าแนวโน้มมีลักษณะเป็นโพลิโนเมียลกำลังหนึ่ง และถ้าค่าผลต่างระหว่าง ข้อมูลใน 2 ช่วงเวลาติดกันลำดับที่ 2 ที่ได้มีค่าคงที่หรือใกล้เคียงกับค่าคงที่ ก็บอกได้ว่าแนวโน้มมีลักษณะเป็นโพลิโนเมียลกำลังสอง ข้อดีของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดคือ ค่าแนวโน้มที่ได้จะเป็นตัวแทนที่ดีที่สุดของอนุกรมเวลาชุดนั้น เพราะผลรวมของผลต่างระหว่างค่าจริง และค่าแนวโน้มยกกำลังสองมีค่าน้อยกว่าวิธีอื่นๆ

เมื่อแนวโน้มมีลักษณะเป็นโพลิโนเมียลกำลัง n การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ X และตัวแปรตาม Y เป็นดังนี้

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_n x^n + \varepsilon$$

ค่าประมาณของ Y คือ $\hat{Y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าประมาณของ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

การหาค่าประมาณที่ทำให้ $\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ มีค่าน้อยที่สุด ทำได้โดยการดิฟเฟอเรนชิเอด (Differentiate) $\Sigma(Y-\bar{Y})^2$ เทียบกับค่าพารามิเตอร์ และให้ผลจากการดิฟเฟอเรนชิเอดเท่ากับศูนย์ จะได้ว่าสมการปกติ (Normal Equation) ซึ่งนำมาใช้หาค่าประมาณ คือค่า $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ได้โดยการแก้สมการปกตินี้ เช่น สมการโพลิโนเมียลกำลังสาม (Hyperbolic Equation)

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \varepsilon$$

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

เมื่อ a_0, a_1, a_2, a_3 เป็นค่าประมาณของ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ตามลำดับ จะได้สมการปกติ

$$\Sigma Y = Na_0 + a_1 \Sigma x + a_2 \Sigma x^2 + a_3 \Sigma x^3$$

$$\Sigma xY = a_0 \Sigma x + a_1 \Sigma x^2 + a_2 \Sigma x^3 + a_3 \Sigma x^4$$

$$\Sigma x^2 Y = a_0 \Sigma x^2 + a_1 \Sigma x^3 + a_2 \Sigma x^4 + a_3 \Sigma x^5$$

$$\Sigma x^3 Y = a_0 \Sigma x^3 + a_1 \Sigma x^4 + a_2 \Sigma x^5 + a_4 \Sigma x^6$$

ในกรณีความสัมพันธ์อยู่ในรูปเอ็กซ์โพเนนเชียล ซึ่งมีสมการดังนี้

$$Y = AB^x$$

$$\hat{Y} = ab^x$$

เมื่อ a,b เป็นค่าประมาณของ A,B ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเส้นตรงได้ คือ

$$\log \hat{Y} = \log a + x \log b$$

3.4.3 **<u>การทดสอบตัวแบบ</u>** (Model)

การทดสอบตัวแบบทำขึ้นภายหลังจากการหาสมการค่าแนวโน้มแบบต่างๆ เรียบร้อยแล้ว เพื่อต้องการดูว่าตัวแบบใดจะเหมาะสมที่สุด

การทดสอบตัวแบบที่นิยมใช้มี 2 วิธี ดังต่อไปนี้

3.4.3.1 การทดสอบตัวแบบโดยใช้หลักว่า ตัวแบบที่เหมาะสมที่สุดคือ ตัวแบบที่ให้ค่า $\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ น้อยที่สุด

3.4.3.2 การทดสอบโดยใช้ F-test ถ้าข้อมูลเป็นแบบโพลิโนเมียล การทดสอบตัวแบบโดยใช้ F-test จะอยู่ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า

Y_i เป็นตัวแปรสุ่ม

ε_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน σ^2

ε_i และ ε_j ไม่มีความสัมพันธ์กัน หรือ $COV (\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0, i\neq j$

ถ้าพิจารณาโพลิโนเมียลกำลังหนึ่ง การทดสอบตัวแบบโดยการวิเคราะห์ความแปรปรวนจะพิจารณาโดยการทดสอบสมมติฐาน โดยการตั้งสมมติฐานจากสมการ

$$Y_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}x + ... + \alpha_{ii}x^i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, ..$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_{i0} + \hat{\alpha}_{i1}x + ... + \hat{\alpha}_{ii}x^i$$

$$H_0 : \alpha_{ii} = 0$$

$$H_A : \alpha_{ii} \neq 0$$

ตารางที่ 3.1 สูตรในการวิเคราะห์ค่าความแปรปรวนเพื่อทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \alpha_{ii} = 0$ ในสมการเชิงเส้นโพลิโนเมียล

สาเหตุของความแปรปรวน	องศาความเป็นอิสระ	SS.	MS.	F
$\alpha_{io}\ \alpha_{i1},....,\alpha_{ii}$	i + 1	$\hat{\alpha}_{io}\Sigma Y + \hat{\alpha}_{i1}\Sigma XY+....+\hat{\alpha}_{ii}\Sigma X^iY$ = (1)		
$\alpha_{io}\ \alpha_{i1},....,\alpha_{ii-1}$	i	$\hat{\alpha}_{i-1,o}\Sigma Y+\hat{\alpha}_{i-1,1}\Sigma XY+....+\alpha_{i-1,i-1}\Sigma X^{i-1}Y$ = (2)		
$\alpha_{ii}\|\alpha_{io},....,\alpha_{ii-1}$	1	(1)- (2) = (3)	(3)	$\frac{(3)}{(5)/(n-(i+1))}$
Residual	n-(i+1)	(4) - (1) = (5)	(5)/(n-(i+1))	
ผลรวม (uncorrected)	n	ΣY^2 = (4)		

n = จำนวนข้อมูลทั้งหมด

ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha=0.05$ หรือ $\alpha=0.10$ ถ้าค่า F ที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ความแปรปรวน น้อยกว่าค่า $F_{(1,n-(i+1),1-\alpha)}$ ที่ได้จากตารางสถิติ ดังนั้นยอมรับสมมติฐาน $\alpha_{ii} = 0$ จะหยุดพิจารณา และยอมรับว่า $Y_{i-1}=\alpha_{i-1,0}+\alpha_{i-1,1}x+\cdots+\alpha_{i-1,i-1}x^{i-1}+\epsilon_{i-1}$ เป็นตัวแบบที่เหมาะสมกับข้อมูลที่สุด ถ้าค่า F ที่คำนวณได้ มากกว่า $F_{(1,n-(i+1),1-\alpha)}$ ที่ได้จากตารางสถิติ จะปฏิเสธสมมติฐาน $\alpha_{ii}=0$ ซึ่งหมายความว่ามีนัยสำคัญเพียงพอที่จะอยู่ในสมการทดสอบโพลิโนเมียลกำลังสูงขึ้นต่อไป จนกว่าจะยอมรับสมมติฐาน เมื่อข้อมูลมีลักษณะ เป็นเอ็กซ์โพเนนเชียล การทดสอบก็ทำเช่นเดียวกับโพลิโนเมียล กำลังหนึ่ง เพื่อเมื่อเปรียบสมการเอ็กซ์โพ-เนนเชียลโดยการใส่ log จะได้สมการใหม่ซึ่งเป็นสมการโพลิโนเมียลกำลังหนึ่ง

3.4.4 การหาการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล

การเปลี่ยนแปลงฤดูกาลเป็นส่วนหนึ่งที่ประกอบอยู่ในอนุกรมเวลาเป็นพฤติการณ์ ที่เกิดขึ้นคล้ายๆ กันในระยะเวลาอันสั้น อาจจะมีระยะเวลาเป็น วัน สัปดาห์ เป็นเดือน หรือเป็นฤดูกาลก็ได้

การพยากรณ์ระยะสั้นยังมีความสำคัญอยู่ไม่น้อย ซึ่งจำเป็นต้องศึกษา ลักษณะการเคลื่อนไหวเดือนต่อเดือน หรือ ฤดูต่อฤดู ดังนั้นการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาล จึงมีส่วนช่วยอย่างมากต่อการพยากรณ์ หรือการวางแผนระยะสั้น การเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาลนั้น เนื่องมาจากเหตุสองประการคือ เนื่องมาจากอิทธิพลของธรรมชาติ เช่น ผลผลิตของผลไม้ชนิดหนึ่งในเดือนต่างๆกันของปี อีกประการหนึ่งเกิดจากสิ่งที่มนุษย์กำหนดเอง เช่นเทศกาลต่างๆ ข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงตามเทศกาลเช่น ระดับการขายสินค้าบางประเภท การวัดการเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาลทำให้เข้าใจในการสูงขึ้นของอนุกรมเวลา เพื่อนำไปใช้ในการพยากรณ์ หรือวัดการเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาลเพื่อต้องการกำจัดการเปลี่ยนแปลงนี้ออกจากข้อมูลอนุกรมเวลา เพื่อทำการศึกษาการเคลื่อนไหวอื่นๆเช่น วัฏจักร เป็นต้น

ในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาล จะคำนวณหาค่าอยู่ในรูปของดัชนีฤดูกาล (Seasonal Index) ซึ่งเป็นตัววัด ว่าในช่วงนั้นมีผลกระทบแบบ Seasonal มากน้อยแค่ไหน การคำนวณหาดัชนีฤดูกาลทำได้หลายวิธีดังต่อไปนี้

3.4.4.1 วิธีเฉลี่ยอย่างง่าย (The Method of Simple Average)

วิธีเฉลี่ยอย่างง่าย เป็นวิธีที่ง่ายที่สุด ใช้วิธีการคำนวณอย่างง่ายๆ ไม่ยุ่งยากซับซ้อนอย่างวิธีอื่น แต่เนื่องจากวิธีนี้เป็นวิธีที่ไม่ละเอียดพอจึงเป็นวิธีที่ไม่นิยมเท่าใดนัก

3.4.4.2 **วิธีอัตราส่วนต่อค่าเฉลี่ยอย่างง่าย (Ratio-to-Simple Average Method หรือ Percentage-of-Simple Average Method)** วิธีอัตราส่วนต่อค่าเฉลี่ยอย่างง่าย เป็นวิธีที่ค่อนข้างง่าย และให้ผลดีในกรณีที่ค่าแนวโน้มเป็นเส้นตรงในการศึกษาความเคลื่อนไหวตามฤดูกาลเดือนต่อเดือนในช่วงระยะเวลา 1 ปี จะต้องมีข้อมูลในอดีตสำหรับช่วงเวลานานพอสมควร ซึ่งอาจจะเป็น 5 ถึง 10 ปี การหาดัชนีฤดูกาล โดยวิธีอัตราส่วนต่อค่าเฉลี่ยอย่างง่ายเริ่มด้วยการคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตต่อเดือนของแต่ละปี ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของแต่ละปีที่คำนวณได้แสดงให้เห็นว่าถ้าในปีนั้นๆหากไม่มีความเคลื่อนไหวตามฤดูกาลแล้ว ค่าข้อมูลแต่ละเดือนควรจะมีค่าเท่ากับ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่คำนวณได้ขั้นต่อไป คำนวณหาอัตราร้อยละของตัวเลขจริงต่อค่าเฉลี่ยเลขคณิตของแต่ละเดือน ถ้าใช้ข้อมูลจริงในการวิเคราะห์ระยะเวลา 5 ปี ค่าอัตราร้อยละของตัวเลขจริงต่อค่าเฉลี่ยเลขคณิตมีอยู่ 5 ตัว เพื่อให้ได้ตัวแทนของแต่ละเดือน จะทำการหาค่าแนวโน้มเข้าสู่ ส่วนกลางอีกครั้ง ซึ่งอาจใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต หรือ ค่ามัธยฐานก็ได้ค่าแนวโน้มเข้าส่วนกลางของแต่ละเดือนที่หาได้นี้ จะเป็นดัชนีฤดูกาล ดัชนีฤดูกาลรายเดือน ผลรวมจะต้องเท่ากับ 1,200 ถ้าผลรวมของดัชนีฤดูกาลนี้ยังไม่เท่า 1,200 ก็ปรับให้เท่า โดยวิธีเทียบบัญญัติไตรยางค์

3.4.4.3 **วิธีอัตราส่วนต่อค่าแนวโน้ม (The Ratio-to-Trend Method หรือ Percentage-of-Trend Method)** การหาค่าดัชนีฤดูกาลโดยวิธีอัตราส่วนต่อค่าแนวโน้มเป็นวิธีที่ค่อนข้างง่าย และเป็นวิธีที่ดีกว่าวิธีเฉลี่ยอย่างง่าย การหาค่าดัชนีฤดูกาลโดยวิธีนี้ ต้องทำการประมาณค่าแนวโน้มสำหรับแต่ละเดือนของแต่ละปี การกำจัดค่าแนวโน้ม ทำได้โดยนำค่าแนวโน้มไปหาข้อมูลอนุกรมเวลาเดิม และปรับหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์ โดยการคูณด้วย 100 นำค่าข้อมูลอนุกรมเวลาเดิมที่กำจัดค่าแนวโน้ม หาค่าเฉลี่ยของแต่ละเดือน โดยอาจทำการเฉลี่ยเคลื่อนที่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต หรือค่าเฉลี่ยมัธยฐาน การหาโดยใช้ค่าเฉลี่ยมัธยฐานนั้นเป็นที่นิยมใช้กันมากเนื่องจากสะดวก ส่วนการใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตนั้นอาจถูกกระทบกระเทือนโดยค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ดังนั้นถ้าข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงสูงหรือต่ำกว่าเส้นแนวโน้มมาก การหาดัชนีฤดูกาลวิธีนี้จะให้ผลไม่ดีพอการเลือกใช้วิธีอื่นแทน เนื่องจากดัชนีฤดูกาลแต่ละเดือนมีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์ ผลรวมของดัชนีฤดูกาลทุกๆ ตัวใน 12 เดือนเท่ากับ 1,200 ดังนั้นต้องทำการปรับค่าดัชนีฤดูกาลที่คำนวณได้ ให้มีผลรวม 12 เดือนเท่ากับ 1,200 ด้วย

3.4.4 **วิธีอัตราส่วนต่อค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Ratio-to-Moving-Average Percentage-of-Moving Average Method)** การหาดัชนีฤดูกาล โดยวิธีอัตราส่วนต่อ ค่า

เฉลี่ยเคลื่อนที่ เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่าใช้วัด การเปลี่ยนแปลงอันเนื่องจาก ฤดูกาลที่ดี และค่อนข้างง่ายแม้ว่าจะใช้เวลาในการคำนวณ ค่อนข้างมากก็ตาม ข้อดีของวิธีนี้คือ หลีกเลี่ยงความผิดพลาดที่เกิดจากการนำเอาการเปลี่ยนแปลงอันเนื่องจากฤดูกาลไปคละกับค่าแนวโน้ม

การหาดัชนีฤดูกาลโดย วิธีอัตราส่วนต่อการเฉลี่ยเคลื่อนที่วิธีการนี้ จะเริ่มต้นด้วยการกำจัด S และ I ออกจากข้อมูลเสียก่อน โดยการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ 12 เดือน อาจใช้การเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบปกติ หรือ แบบเข้าสู่กึ่งกลาง (Centered 12 month moving average) ซึ่งวิธีนี้เป็นที่นิยมใช้มากกว่าการหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบปกติ เนื่องจากเป็นตัวแทนเฉลี่ยที่แน่นอนกว่า ซึ่งทำโดยการหาผลของข้อมูล 12 เดือน ซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลในระหว่างเดือนที่ 6 และเดือนที่ 7 ตัดข้อมูลแรกออกและเติมข้อมูลของเดือนต่อไป แล้วหาค่าผลบวก 12 เดือน เช่นเดิม นำมาใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลในระหว่าง 2 เดือนถัดไป จากนั้นหาผลบวกเคลื่อนที่ของค่ารวมเคลื่อนที่ที่อยู่ติดกัน 2 ค่า และนำเอาค่าผลบวกเคลื่อนที่ที่ได้ใหม่นี้หารด้วย 24 ผลหารที่ได้ คือค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเข้าสู่กึ่งกลาง (Centered moving average) ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเข้าสู่กึ่งกลางนี้เป็นค่าประมาณของแนวโน้ม และวัฏจักรนำเอาค่าประมาณแนวโน้ม และวัฏจักรนี้ไปหารข้อมูลเดิม ผลลัพธ์ที่ได้ คือการเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาล และการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเหตุการณ์ผิดปกติ กล่าวคือ

$$\frac{Y}{\text{ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ 12 เดือน}} = \frac{T \times C \times S \times I}{T \times C} = S \times I$$

จากนั้นหาค่าเฉลี่ยของเดือนเดียวกันในทุกๆ ปี เพื่อกำจัดการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเหตุการณ์ผิดปกติในการหาค่าเฉลี่ยนี้ อาจใช้การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต หรือมัธยฐานก็ได้และปรับให้ผลรวมของค่าเหล่านี้ ซึ่งมี 12 ค่า ให้เท่ากับ 1,200 เพราะดัชนีฤดูกาลปกติแต่ละเดือนมีอัตราร้อยละ 100

งานวิจัยนี้ใช้การหาค่าดัชนีฤดูกาล โดยวิธีอัตราส่วนต่อค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่และการประยุกต์วิธีการหาค่าดัชนีฤดูกาล โดยการนำเอาดัชนีฤดูกาลที่คำนวณ โดยวิธีอัตราส่วนต่อค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่มาทำการเฉลี่ยเคลื่อนที่ใหม่อีกครั้ง โดยทำการเฉลี่ยเคลื่อนที่ทีละ 3 เดือนเพราะข้อมูลมีจำนวนน้อย การเฉลี่ยเคลื่อนที่นี้จะใช้ วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบถ่วงน้ำหนัก (1, 2, 1) และการเฉลี่ยเคลื่อนที่ โดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ทั้งนี้เพราะค่าดัชนีฤดูกาลของเดือนใกล้ๆ กันน่าจะมีค่าใกล้เคียงกัน ไม่ควรแตกต่างหรือกระโดดจากกันมาก ดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 แล้ว

3.4.5 การหาการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากวัฏจักร

การเปลี่ยนแปลงตามวัฏจักรเป็นการเคลื่อนไหวขึ้นๆ ลงๆ ของข้อมูลในระยะยาว แสดงถึงความรุ่งเรืองและความเสื่อมของอนุกรมเวลา วัฏจักรอาจไม่มีรูปแบบและความยาวที่แน่นอนในอนุกรมเวลาหนึ่งๆ ค่าวัฏจักรมักจะเป็นอัตราร้อยละ โดยหาจากการกำจัดค่า T และ S ในอนุกรมเวลาถ้า Y แทนอนุกรมเวลาเดิม $C \times I = \frac{Y}{T \times S}$ ค่า T x S คือผลคูณระหว่างค่าแนวโน้มและฤดูกาล เรียกว่าค่าปกติ (Normal value)ส่วนค่า C x I คือ ผลคูณระหว่างวัฏจักรและเหตุการณ์ผิดปกติ เรียกผลคูณของ C และ I ว่าอัตราร้อยละของค่าปกติ (Percentage of normal value) ขั้นต่อไปคือ การหาค่า C จากค่า C x I บางครั้งวัฏจักรไม่ปรากฏให้เห็นเด่นชัด เมื่อพิจารณาอนุกรมเวลาที่เกิดในช่วงเวลายาวนาน จึงไม่จำเป็นที่จะต้องแยกค่า C ออกจากค่า C x I

วิธีการหาค่าวัฏจักร

จะหาค่าวัฏจักรได้ จากการกำจัดค่าแนวโน้มออกจากอนุกรมเวลาเดิม แล้วทำการกำจัดการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล หรืออาจทำการกำจัดค่าแนวโน้ม และการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาลออกจากอนุกรมเวลาเดิมพร้อมๆ กัน หลังจากกำจัดค่าแนวโน้ม และการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาลแล้วจะได้ C x I คือผลคูณระหว่างวัฏจักรและเหตุการณ์ผิดปกติ ต่อไปทำการกำจัดค่าเหตุการณ์ผิดปกติออกจากผลคูณระหว่างวัฏจักรและเหตุการณ์ผิดปกติ โดยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบถ่วงน้ำหนัก เพราะเป็นการเฉลี่ยเคลื่อนที่ซึ่งดีกว่าการเฉลี่ยเคลื่อนที่ โดยใช้มัชฌิมเลขคณิต เนื่องจากให้น้ำหนักข้อมูลที่นำมาเฉลี่ยไม่เท่ากัน โดยให้น้ำหนักข้อมูลส่วนกลางมากกว่าส่วนอื่นๆ เพราะข้อมูลที่อยู่ไกลออกไปในอดีตจะมีอิทธิพลน้อยกว่าข้อมูลเพิ่งเกิดขึ้นในอดีต น้ำหนักที่ใช้ถ่วงในการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบถ่วงน้ำหนัก โดยมากนิยมใช้สัมประสิทธิ์ของไบโนเมียล(Binomial Coefficient) เช่น 1, 2, 1 หรือ 1, 4, 6, 4, 1 เป็นต้น การใช้การเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบถ่วงน้ำหนัก มีข้อดีทำให้อนุกรมเวลานั้นราบเรียบขึ้น ถ้าต้องการให้ราบเรียบมากยิ่งขึ้นจะต้องเลือกสัมประสิทธิ์ของไบโนเมียลที่สูงขึ้นด้วย ค่าที่ได้จากวิธีนี้ยังไม่สามารถหาค่าพยากรณ์ของวัฏจักรได้ เพราะไม่มีสมการที่แน่นอนสำหรับใช้พยากรณ์ ถ้าต้องการหาค่าพยากรณ์จะต้องหาสมการที่แน่นอนที่สามารถพยากรณ์ได้ วิธีหนึ่งคือ การหาค่าแนวโน้มของค่าวัฏจักร

บางครั้งการพยากรณ์ค่าวัฏจักรค่าเดียว อาจไม่ถูกต้อง เพราะเป็นการยากที่จะแยกค่าวัฏจักรออกจากค่าเหตุการณ์ผิดปกติ จึงพยากรณ์ค่าวัฏจักรและค่าเหตุการณ์ผิดปกติ พร้อมกันโดยไม่

แยกพยากรณ์แต่ละค่า

3.4.6 การหาค่าการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากเหตุการณ์ผิดปกติ

การหาค่าการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากเหตุการณ์ผิดปกติจะหาได้จากการกำจัดค่าแนวโน้ม ค่าการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล และค่าวัฏจักรออกจากอนุกรมเวลาเดิม ก็คือ $I=\frac{Y}{T \times S \times C}=\frac{C \times I}{C}$ ค่า I ที่ได้ไม่มีรูปแบบที่แน่นอนสำหรับการพยากรณ์ซึ่งอาจหารูปแบบของ I โดยเทคนิคของบ็อกซ์และเจนกินส์

3.5 การวิเคราะห์อนุกรมเวลาบ็อกซ์และเจนกินส์ (Box-Jenkins Technique)

อนุกรมเวลาหมายถึง ข้อมูลที่เกิดขึ้นในระยะเวลาต่างๆ กัน ซึ่งเรียงลำดับโดยคำนึงถึงเวลา ของการเกิด โดยระยะเวลาของการเกิดเป็นระยะเวลาที่เท่าๆ กัน อาจเป็น รายเดือน รายสัปดาห์ รายวันฯลฯ ถ้าค่าสังเกตกระทำในเวลาที่ต่อเนื่องกันอนุกรมเวลาเช่นนั้นเรียกว่า อนุกรมเวลาต่อเนื่อง (Continuous time series) แต่ถ้าค่าสังเกตกระทำ ณ จุดเวลาไม่ต่อเนื่องกัน อนุกรมเวลาเช่นนั้นเรียกว่าอนุกรมเวลาไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีค่าสังเกต ณ จุดเวลาต่างๆ ที่ห่างเท่ากัน การพยากรณ์ค่าในอนาคตเป็นวัตถุประสงค์สำคัญในการวิเคราะห์อนุกรมเวลา

การพยากรณ์เป็นขบวนการทางคณิตศาสตร์และสถิติอย่างหนึ่งที่นิยมใช้อย่างกว้างขวางในหลายวงการ โดยเฉพาะวงการธุรกิจ การพยากรณ์ในบางครั้ง อาจไม่จำเป็นต้องให้เกิดความแม่นยำสูงนัก ส่วนใหญ่จะเป็นการพยากรณ์ระยะยาว แต่ในบางครั้ง ก็ต้องการให้เกิดความแม่นยำสูงซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นการพยากรณ์ในระยะสั้น เทคนิคการพยากรณ์มีหลายวิธี บ็อกซ์–เจนกินส์ เป็นเทคนิคที่มีประสิทธิภาพสูงเทคนิคหนึ่ง สำหรับ การพยากรณ์ในระยะสั้น ซึ่งได้รับความนิยมมากในระยะหลัง โดยอาศัยความสัมพันธ์จากข้อมูลในอดีตของตัวเองเพื่อหารูปแบบการเปลี่ยนแปลง มาเป็นแนวทางในการกำหนดพฤติกรรมในอนาคต บ็อกซ์–เจนกินส์ ได้เสนออนุกรมเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time Series) ซึ่งเป็นขบวนการสโตคลาสติก (Stochastic Process) ที่อยู่ในสภาวะสมดุลย์เชิงสถิติ (Statistical Equilibrium) และเป็นขบวนการที่มีคุณสมบัติไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อจุดเริ่มต้นของเวลาเปลี่ยนแปลงไป ที่เรียกว่า Stationary Process ซึ่งค่าสังเกต Z_t สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$z_t = \mu + \phi_0 u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \cdots$$

เมื่อ u_t , u_{t-1} , u_{t-2}, ... แทนความคลาดเคลื่อนสุ่ม (random error)

μ , ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2, ...แทนพารามิเตอร์ของตัวแบบ

ในตัวแบบนี้มีข้อสมมติว่า u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, ... มีความเป็นอิสระต่อกัน มีการกระจายแบบปกติ (Normal distribution) ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และความแปรปรวนเท่ากัน

การแจกแจงความน่าจะเป็น $f(z_t)$ ของข้อมูล z_1, z_2, ..., z_t มีค่าคาดหมายและความแปรปรวนของกระบวนการคงที่เขียนได้เป็น

$$E(z_t) = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f(z_t)\, dz$$

และ $$V(z_t) = E(z_t - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \mu)^2 \, f(z)\, dz$$

ความแปรปรวนจะแสดงถึง การกระจายของอนุกรมเวลารอบค่าคาดหมาย ในทางปฏิบัติไม่อาจทราบค่าที่แท้จริง ของค่าคาดหมาย $E(z_t)$ และความแปรปรวน $V(z_t)$ ได้จึงต้องประมาณจากค่าสังเกต z_1, z_2, ..., z_N ด้วย

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} z_t$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (z_t - \bar{z})^2$$

เทคนิคการพยากรณ์ บ๊อกซ์และเจนกินส์ มีประโยชน์มากในการพยากรณ์ค่าในอนาคตของอนุกรมเวลาที่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ซึ่งจะมีตัวแบบ autoregreesive model, moving-average model และ mixed autoregressive-moving average model ดังจะกล่าวรายละเอียดในหัวข้อต่อไป ตัวแบบเหล่านี้สามารถใช้ได้ทั้งกับ อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล (Seasonal Time Series) และอนุกรมเวลาที่ไม่มีฤดูกาล (Nonseasonal Time Series) เทคนิคการพยากรณ์โดยทั่วไปมักจะต้องกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ขึ้นก่อนทำการวิเคราะห์ซึ่งมักเป็นปัญหาสำคัญสำหรับการวิเคราะห์ แต่การวิเคราะห์อนุกรมเวลาบ๊อกซ์และเจนกินส์จะไม่มีปัญหาดังกล่าว เนื่องจากไม่ต้องกำหนดรูปแบบขึ้นก่อนทำการวิเคราะห์ แต่รูปแบบความสัมพันธ์จะถูกกำหนดขึ้นจากขั้นตอนการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ในตัวเองของข้อมูล แล้วจึงเลือกรูปแบบมาประมาณค่าพารามิเตอร์ ก่อนที่จะพยากรณ์จะต้องทำการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบก่อนถ้าตัวแบบที่เลือกไม่เหมาะสม

I 15203803

ซึ่งหมายความว่า ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นไม่ได้เป็นไปโดยสุ่ม ก็จะอาศัยความสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนนี้เป็นแนวทางในการเลือกตัวแบบใหม่ จนกว่าจะพบตัวแบบที่เหมาะสมแล้วจึงพยากรณ์ค่า การวิเคราะห์อนุกรมเวลาบ๊อกซ์-เจนกินส์ ต้องอาศัยคุณสมบัติการไม่เปลี่ยนแปลงของขบวนการเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ดังนั้นคุณสมบัติ Stationarity ของอนุกรมเวลาจึงเป็นสิ่งจำเป็น แต่ในทางปฏิบัติข้อมูลวิเคราะห์อาจมีคุณสมบัติเป็น Nonstationary จะต้องทำการเปลี่ยนข้อมูลให้มีคุณ-สมบัติ Stationary วิธีหนึ่งที่ทำได้โดยการหาผลต่างลำดับต่างๆ ของข้อมูลจนกว่าอนุกรมเวลานั้นมีคุณสมบัติ Stationary เช่น ถ้าอนุกรมเวลาไม่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากฤดูกาล การแปลงอนุกรมเวลาที่เป็น Nonstationary ให้มีคุณสมบัติ Stationaryโดยการหาผลต่างอันดับหนึ่ง ของอนุกรมเวลา $z_1, z_2, \ldots, z_N$ จะได้

$$W_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1}$$

เมื่อ $t = 1, 2, 3, \ldots, N$

ถ้าหาผลต่างอันดับหนึ่ง ของอนุกรมแล้ว ค่าที่เปลี่ยนยังเป็นอนุกรมเวลา ที่มีคุณสมบัติ Nonstationary ก็หาผลต่างอันดับสองต่อไป โดย

$$W_t = \nabla^2 z_t = z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}$$

เมื่อ $t = 3, 4, 5, \ldots, N$

บางครั้งการเปลี่ยนอนุกรมเวลาให้มีคุณสมบัติ Stationary จำเป็นต้องอาศัย การเปลี่ยนในรูปของลอการิทึมฐานธรรมชาติ (Natural logarithm) หรือลอการิทึมของผลต่างลำดับหนึ่งหรือลำดับสองของอนุกรมเวลาเดิม ซึ่งกรณีนี้จะไม่พบบ่อยนัก

ขั้นตอนการวิเคราะห์อนุกรมเวลาบ๊อกซ์และเจนกินส์ สำหรับ Stationary process มีดังต่อไปนี้

3.5.1 การกำหนดรูปแบบ (Identification)

3.5.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter Estimation)

3.5.3 การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ (Diagonostic Checking)

3.5.4 การพยากรณ์ค่า (Forecasting)

3.5.1 การกำหนดรูปแบบ

การกำหนดรูปแบบของเทคนิคการพยากรณ์บ็อกซ์และเจนกินส์ อาศัยความสัมพันธ์ ในตัวเองของข้อมูลจากฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเอง (Autocorrelation Function) กับฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน (Partial Autocorrelation Function) เป็นตัวบอกถึงรูปแบบของกระบวนการและบอกถึงลำดับหรือจำนวนเทอมของข้อมูลที่จะพิจารณาย้อนหลัง การกำหนดตัวแบบอาศัยการวิเคราะห์ข้อมูลในอดีตซึ่งจะต้องมีอย่างน้อย 50 ช่วงเวลา และถ้าจะให้ได้ผลดียิ่งขึ้นต้องใช้ถึง 100 ช่วงเวลา ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองก่อนหน้านั้น j หน่วยเวลานิยามให้เท่ากับ

$$\rho_j = \frac{r_j}{r_0}$$

$$r_j = COV(Z_t, Z_{t+j}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+j} - \mu) \; ; \; j = 0,1,2,..,K$$

ในทางปฏิบัติค่า K เท่ากับ 25 ก็พอเพียงที่จะทราบลักษณะของฟังก์ชัน

r_j เรียก สหความแปรปรวน (Autocovariance) ระหว่าง Z_t กับ Z_{t+j} จะประมาณ r_j ด้วย C_i เมื่อ

$$C_j = \frac{1}{N-j} \sum_{t=1}^{N-j} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+j} - \bar{Z}) \quad ; \; j = 0,1,2,\ldots,K$$

ในการประมาณ ρ_j ด้วย $r_j = \frac{C_j}{C_o}$ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 นั้น Bartlett ได้ให้สูตรประมาณการกำหนดค่าความแปรปรวนของ r_j เมื่อ j มีค่ามากกว่าคาบเวลาที่ q ไว้คือ

$$\text{var}(r_j) \simeq \frac{1}{N}(1 + 2\sum_{v=1}^{q} r_v^2) \quad ; \; j > q$$

ดังนั้นการคำนวณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ r_j หาได้จาก

$$SE(r_j) \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}(1 + 2\sum_{v=1}^{q} r_v^2)^{\frac{1}{2}} \quad ; \; j > q$$

ซึ่งใช้ประโยชน์ในการทดสอบนัยสำคัญของ ρ_j ว่าเท่ากับศูนย์หรือไม่ กล่าวคือ ที่ระดับ นัยสำคัญ 0.05 ถ้า

$$| r_j | > 1.96 \frac{1}{\sqrt{N}} (1+2 \sum_{v=1}^{q} r_v^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad j > q$$

หมายความว่าค่า ρ_j มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ในทางปฏิบัติ อาจประมาณ 1.96 ด้วย 2 ได้

สำหรับการคำนวณฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน คำนวณจากสมการยูล-วอล์กเกอร์ (Yule-Walker equation)

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \cdots \rho_{K-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \cdots \rho_{K-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{K-1} & \rho_{K-2} & \rho_{K-3} \cdots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{K1} \\ \Phi_{K2} \\ \vdots \\ \Phi_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_K \end{bmatrix}$$

เมื่อ Φ_{KK} แทนสัมประสิทธิ์สหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนก่อนหน้านั้น K หน่วยเวลา จะประมาณ Φ_{KK} ด้วย $\hat{\Phi}_{KK}$ เมื่อ

$$\hat{\Phi}_{KK} = \begin{cases} r_1 & ; \quad K = 1 \\ \dfrac{r_K - \sum_{j=1}^{K-1} \hat{\Phi}_{K-1,j} \cdot r_{K-j}}{1 - \sum_{j=1}^{K-1} \hat{\Phi}_{K-1,j} \cdot r_j} & ; \quad K = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\hat{\Phi}_{Kj} = \hat{\Phi}_{K-1,j} - \hat{\Phi}_{KK} \cdot \hat{\Phi}_{K-1,K-j} \quad ; \quad j = 1, 2, ., K-1$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ Φ_{KK} Quenouilli ใช้สูตรประมาณในการคำนวณค่าความแปรปรวนของ $\hat{\Phi}_{KK}$ ซึ่งคาบเวลามีค่ามากกว่าคาบเวลา P การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\Phi}_{KK}$ คำนวณได้จาก

$$SE(\hat{\Phi}_{KK}) \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} \quad ; \quad K > P$$

บ็อกซ์และเจนกินส์ ได้สร้างตัวแบบสำหรับ การวิเคราะห์อนุกรมเวลาไว้ 3 ประเภท ดังนี้

3.5.1.1 Moving Average of Order q (MA (q))

ตัวแบบ Moving Average of Order q แสดงค่าอนุกรมเวลา อยู่ในเทอมของความคลาดเคลื่อนสุ่ม (U_t) โดยจะพิจารณาเพียง q เทอม ของ U_t ในอดีตเท่านั้น

$$Z_t = \mu + U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2} - \ldots \theta_q U_{t-q}$$

เมื่อ $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_q$ เป็นค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ Moving Average of Order q ไม่มีข้อจำกัดของพารามิเตอร์ $\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, \theta_q$ ที่ทำให้แบบจำลองเป็น Stationary แต่มีข้อจำกัดของพารามิเตอร์ที่ทำให้แบบจำลองมีคุณสมบัติ Invertible หมายถึง ข้อจำกัดพารามิเตอร์ที่ทำให้เมตริกซ์ผกผัน (Inverse matrix) exist ในการประมาณค่า ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ ในตัวเองบางส่วนมีลักษณะ Damped Exponential หรือ Damped Sine Waves หรือทั้ง 2 แบบรวมกันเป็น tails off ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองจะมีลักษณะ Cutts off ค่า r_K ลดลงอย่างรวดเร็ว จะมีลำดับ q เมื่อหลัง lag q มีค่าเป็นศูนย์ ในทางปฏิบัติลำดับ q มักมีค่าไม่เกิน 2

3.5.1.1.1 First Order Moving Average Model (MA (1))

$$Z_t = \mu + U_t - \theta_1 U_{t-1}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง ρ_K และ θ_1 ของ First Order Moving Average Model คือ

$$\rho_K = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & ; \quad K = 1 \\ 0 & ; \quad K > 1 \end{cases}$$

นั่นคือ $\rho_1 = \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$

เมื่อแก้สมการข้างต้นสามารถเขียน θ_1 ในเทอมของ ρ_1 ได้ดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\theta_1 = \frac{-1}{2\rho_1} \pm \left[\frac{1}{(2\rho_1)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

ประมาณค่า θ_1 ด้วย $\hat{\theta}_1 = \frac{-1}{2r_1} \pm \left[\frac{1}{(2r_1)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$

จะเห็นว่าค่าประมาณเบื้องต้น $\hat{\theta}_1$ มี 2 ค่า คือ

$$\frac{-1}{2r_1} + \left[\frac{1}{(2r_1)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \text{ และ } \frac{-1}{2r_1} - \left[\frac{1}{(2r_1)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

แต่จะมีค่า $\hat{\theta}_1$ เพียงค่าเดียว ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดที่ทำให้แบบจำลองเป็น Invertible คือ $|\theta_1| < 1$ ส่วน μ คือค่าเฉลี่ยของแบบจำลอง ค่าประมาณเบื้องต้นของ μ หรือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตของอนุกรมเวลา คือ

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{t=1}^{N} Z_t}{N}$$

ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเอง Cutts off หลัง lag 1 ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนมีลักษณะ Damped Exponential

3.5.1.1.2 Second Order Moving Average (MA (2))

$$Z_t = \mu + U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$$

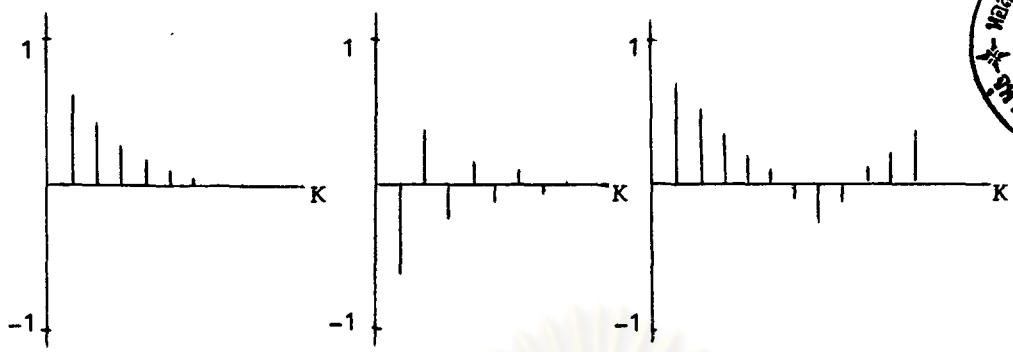
ข้อจำกัดของพารามิเตอร์ ทำให้แบบจำลอง Invertible คือ

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$|\theta_2| < 1$$

ค่าเฉลี่ยของแบบจำลองคือ μ ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนจะลดลงมีลักษณะผสมของ Damped Exponential และ/หรือ Damped Sine Wave ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ ในตัวเองจะ Cutts off หลัง lag 2



Damped Exponential Damped Sine Waves

รูปที่ 3.1 กราฟแสดงค่าฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนกับ lag K

ความสัมพันธ์ระหว่างความสัมพันธ์ในตัวเองและพารามิเตอร์ของแบบจำลองจะได้

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$$

$$\rho_K = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad K > 2$$

ซึ่งจะใช้ความสัมพันธ์นี้หาค่า θ_1 , θ_2 ในเทอมของ ρ_1 , ρ_2 และจะประมาณ ρ_1 และ ρ_2 ด้วย r_1 และ r_2 ตามลำดับ ดังนั้นจะหาค่าประมาณเบื้องต้น $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ ได้เมื่อ $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ สอดคล้องกับข้อจำกัดของตัวแบบ กล่าวคือ

$$\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 < 1$$

$$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 < 1$$

$$|\hat{\theta}_2| < 1$$

และค่าประมาณเบื้องต้นของ μ คือ $\bar{z} = \frac{\sum_{t=1}^{N} z_t}{N}$

3.5.1.2 Autoregressive Process of Order P (AR (P))

Autoregressive Process of Order P เป็นกระบวนการถดถอยในตัวเองซึ่งแสดงความสัมพันธ์ ของค่าอนุกรมเวลาในปัจจุบันกับค่าในอดีตโดยพิจารณาเพียง P เทอมดังนี้

$$Z_t = \delta + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \Phi_p Z_{t-p} + U_t$$

เมื่อ δ = ค่าคงที่ของกระบวนการ

Φ_j = Autoregressive Parameter ; $j = 1, 2, .., p$

U_t = การแปรปรวน (Disturbance) สุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงของความน่าจะเป็นเดียวกัน มีค่าคาดหมายเท่ากับศูนย์ และความแปรปรวนเท่ากับ σ_u^2 .

แบบจำลอง AR (P) ไม่มีข้อจำกัดของพารามิเตอร์ที่ทำให้แบบจำลองเป็น Invertible แต่มีข้อจำกัดของพารามิเตอร์ที่ทำให้แบบจำลองนั้นเป็น Stationary ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเอง r_K มีค่ามากในค่าแรก ๆ และลดลงอย่างช้า ๆ เมื่อ K มีค่ามากขึ้นเกือบถึงศูนย์หรือ tail off มีลักษณะ Damped Exponential หรือ Damped Sine Wave หรือทั้ง 2 แบบรวมกัน ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว ค่า Φ_{KK} มีค่าเป็นศูนย์หลัง lag P หรือ cutts off แบบจำลอง AR จะมีorder เป็น P

$$\Phi_{KK} \neq o \quad ; \quad K \leq P$$

และ $$\Phi_{KK} = o \quad ; \quad K > P$$

ลำดับของกระบวนการ AR ในทางปฏิบัติ ไม่เกิน 2 นั่นคือ $P \leq 2$

3.5.1.2.1 First Order Autoregressive Model (AR(1))

$$Z_t = \delta + \Phi_1 Z_{t-1} + U_t$$

ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับพารามิเตอร์ Φ_1 ที่ทำให้แบบจำลองเป็น Stationary คือ $|\Phi_1| < 1$ และค่าเฉลี่ยของแบบจำลอง $\mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1}$ ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเอง

บางส่วน Cutts off หลัง lag 1 และฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างสหความสัมพันธ์ในตัวเอง กับ พารามิเตอร์ ของแบบจำลอง

$$\rho_K = \Phi_1^K \quad \text{สำหรับ} \quad K \geq 1$$

คือ $\rho_1 = \Phi_1$

นั่นคือ $\hat{\Phi}_1 = r_1$

ค่าประมาณเบื้องต้น $\hat{\Phi}_1$ มีคุณสมบัติที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้แบบจำลองมีคุณสมบัติ Stationary กล่าวคือ $|\hat{\Phi}_1| < 1$

จาก $\mu = \dfrac{\delta}{1 - \Phi_1}$

$\delta = \mu(1 - \Phi_1)$

ดังนั้น $\hat{\delta} = \bar{Z}\,(1 - \hat{\Phi}_1)$

เมื่อ $\bar{Z} = \dfrac{\sum_{t=1}^{N} Z_t}{N}$

3.5.1.2.2 Second Order Autoregressive Model (AR (2))

$$Z_t = \delta + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + U_t$$

ข้อตกลงเบื้องต้นของพารามิเตอร์ที่ทำให้แบบจำลองเป็น Stationary คือ

$$\Phi_1 + \Phi_2 < 1$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 < 1$$

$$|\Phi_2| < 1$$

ค่าเฉลี่ยของแบบจำลอง $\mu = \dfrac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2}$

ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนจะ Cutts off หลัง lag 2 และฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองลดลงในลักษณะ Damped Exponentials และ /หรือ Damped Sine Wave

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความสัมพันธ์ระหว่าง สหความสัมพันธ์ในตัวเอง กับ พารามิเตอร์ ของแบบจำลอง

$$\rho_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \Phi_1 \rho_1 + \Phi_2$$

สมการทั้งสองสมการข้างต้นเรียกว่า Yule - Walker equations

จะได้ $$\rho_1 = \frac{\Phi_1}{1 - \Phi_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\Phi_1^2}{1 - \Phi_2} + \Phi_2$$

ค่าประมาณเบื้องต้น $\hat{\Phi}_1$ และ $\hat{\Phi}_2$ คือ

$$\hat{\Phi}_1 = r_1\left(\frac{1 - r_2}{1 - r_1^2}\right)$$

$$\hat{\Phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

ค่าประมาณเบื้องต้น $\hat{\Phi}_1$ และ $\hat{\Phi}_2$ จะสอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้แบบจำลอง Stationary

$$\hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_2 < 1$$

$$\hat{\Phi}_2 - \hat{\Phi}_1 < 1$$

$$|\hat{\Phi}_2| < 1$$

จาก $$\mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2}$$

$$\delta = \mu (1 - \Phi_1 - \Phi_2)$$

$$\hat{\delta} = \bar{z} (1 - \hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.5.1.3 Mixed Autoregressive - Moving Average Process of Order Pand q (ARMA(P,q)) ตัวแบบ ARMA(P,q) เป็นตัวแบบที่มีลักษณะผสมของ AR และ MA ที่มีลำดับ P และ q ตามลำดับ อาจเขียนอยู่ในรูป

$$z_t = \delta + \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + .. + \Phi_p z_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - ... - \theta_q u_{t-q}$$

โดยที่ข้อจำกัดที่ทำให้แบบจำลองเป็น Stationary สำหรับกระบวนการ AR ลำดับที่ P และ Invertibility สำหรับกระบวนการ MA ลำดับที่ q ได้แก่ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ ในตัวเองบางส่วนและฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองมีลักษณะ Damped Exponential หรือ Damped Sine Waves หรือทั้ง 2 แบบรวมกันเป็น tail off

3.5.1.3.1 Mixed Autoregressive - Moving Average Model of Order (1,1) (ARMA (1,1))

$$z_t = \delta + \Phi_1 z_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

ข้อตกลงเบื้องต้นที่ทำให้แบบจำลองเป็น Stationary ถ้า $|\Phi_1| < 1$ และจะ Invertible ถ้า $|\theta_1| < 1$ ค่าเฉลี่ยของตัวแบบ $\mu = \frac{\delta}{1-\Phi_1}$

สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน และสหสัมพันธ์ในตัวเองลดลงในลักษณะ Damped Exponential

ความสัมพันธ์ระหว่างสหสัมพันธ์ในตัวเองกับพารามิเตอร์ของตัวแบบ

$$\rho_1 = \frac{(1 - \Phi_1 \theta_1)(\Phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \Phi_1}$$

$$\rho_2 = \Phi_1 \rho_1$$

$$\rho_K = \Phi_1 \rho_{K-1} \quad \text{สำหรับ } K > 3$$

จาก $\mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1}$

จะได้ $\delta = \mu (1 - \Phi_1)$

และ $\hat{\delta} = \bar{z} (1 - \hat{\Phi}_1)$

เนื่องจากกระบวนการเป็น Nonstationary จะทำอนุกรมเวลาให้เป็น Stationary โดยการหาผลต่างลำดับต่างๆ ของข้อมูล เมื่อเป็นผลต่างอันดับที่ 1 ได้ว่า

$$w_t = z_t - z_{t-1}$$

เมื่อใช้ w_t ในการวิเคราะห์ตัวแบบต่างๆ แทน z_t เรียกกระบวนการ ARMA ในรูปของ w_t ว่า Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) ถ้ากำหนดให้ ARIMA (p, d, q) เมื่อ d = 1 เป็น

$$w_t = \delta + \Phi_1 w_{t-1} + \Phi_2 w_{t-2} + \ldots + \Phi_p w_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \ldots - \theta_q u_{t-q}$$

หรือเขียนในเทอมของ z_t ได้เป็น

$$z_t = \delta + z_{t-1} + \Phi_1 (z_{t-1} - z_{t-2}) + \Phi_2 (z_{t-2} - z_{t-3}) + \ldots + \Phi_p (z_{t-p} - z_{t-p-1})$$

$$+ u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \ldots - \theta_q u_{t-q}$$

จะสามารถเขียน z_t อยู่ในรูปผลบวกของ w_t ได้ดังนี้

$$z_t = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \ldots$$

เนื่องจากสมการข้างต้น z_t สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของ w_t ดังนี้ จึงเรียกสมการ

$$w_t = \delta + \Phi_1 w_{t-1} + \Phi_2 w_{t-2} + \ldots + \Phi_p w_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \ldots - \theta_q u_{t-q}$$

ว่ากระบวนการ Autoregressive Integrated Moving-Average (ARIMA)

ถ้าผลต่างลำดับ 1 ของข้อมูลยังไม่ทำให้อนุกรมเวลาเป็น Stationary ก็ต้องหาผลต่างลำดับอื่นๆ ไปจนกว่าจะเป็น Stationary ในทางปฏิบัติแล้วมักจะใช้ผลต่างลำดับที่ 0, 1 และอย่างมาก 2 ก็สามารถทำให้รูปแบบที่ได้เป็น Stationary ในการศึกษาจะให้ d เป็นดีกรี (degree) ของผลต่าง (differencing) กระบวนการ ARIMA กำหนดขึ้นโดย p, d และ q หากกระบวนการ ARIMA ไม่มีเทอมเฉลี่ยเคลื่อนที่ (MA) หรือเทอมถดถอยในตัวเอง(AR) เขียนได้เป็น

ARIMA (p, d, o) = ARI (p, d)

ARIMA (o, d, q) = IMA (d, q)

แบบจำลองของอนุกรมเวลา Nonstationary อาจพิจารณาแตกต่างกันได้ 6 รูปแบบ คือ

The Integrated Moving Average Model of Order (0, 1, 1) หรือ IMA (1, 1) แบบจำลองนี้ได้จากการแทนค่า p = 0, d = 1 และ q = 1 ดังนั้น IMA (1, 1) ก็คือ ARIMA (0, 1, 1) มีสมการดังนี้คือ

$$z_t - z_{t-1} = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

โดยที่ $|\theta_1| < 1$

The Integrated Moving Average Model of Order (0, 1, 2) หรือ IMA (1, 2) แบบจำลองนี้ได้จากการแทนค่า p = 0, d = 1 และ q = 2 ดังนั้น IMA (1, 2) ก็คือ ARIMA (0, 1, 2) มีสมการดังนี้

$$z_t - z_{t-1} = \mu + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2}$$

โดยที่ $\theta_1 + \theta_2 < 1$

$\theta_2 - \theta_1 < 1$

$|\theta_2| < 1$

The Nonstationary First Order Autoregressive Model

หรือ ARI (1, 1) แบบจำลองนี้ได้จากการแทนค่า p = 1, d = 1 และ q = 0 ดังนั้น ARI (1, 1) ก็คือ ARIMA (1, 1, 0) มีสมการดังนี้คือ

$$(z_t - z_{t-1}) - \phi_1(z_{t-1} - z_{t-2}) = \delta + u_t$$

โดยที่ $|\phi_1| < 1$

The Nonstationary Second Order Autoregressive Model

หรือ ARI (2, 1) แบบจำลองนี้ได้จากการแทนค่า p = 2, d = 1 และ q = 0 ดังนั้น ARI (2, 1) ก็คือ ARIMA (2, 1, 0) ซึ่งมีสมการดังนี้

$$(z_t - z_{t-1}) - \Phi_1(z_{t-1} - z_{t-2}) - \Phi_2(z_{t-2} - z_{t-3}) = \delta + u_t$$

โดยที่ $\Phi_1 + \Phi_2 < 1$

$\Phi_2 - \Phi_1 < 1$

$|\Phi| < 1$

The First Order Autoregressive Integrated First Order Moving Average Model หรือ ARIMA (1,1,1) แบบจำลองนี้ได้จากการแทนค่า $p = 1$, $d = 1$ และ $q = 1$ ซึ่งมีสมการดังนี้

$$(z_t - z_{t-1}) - \Phi_1(z_{t-1} - z_{t-2}) = \delta + u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

โดยที่ $|\Phi_1| < 1$

$|\theta_1| < 1$

The Random Walk Model หรือ ARIMA (0,1,0) แบบจำลองนี้ได้จากการแทนค่า $p = 0$, $d = 1$ และ $q = 0$ มีสมการดังนี้

$$z_t - z_{t-1} = u_t$$

แบบจำลองของอนุกรมเวลาที่กล่าวข้างต้นไม่มีผลกระทบเนื่องจากฤดูกาลแต่บางครั้งอนุกรมเวลาที่สนใจศึกษาบางประเภทได้รับผลกระทบโดยตรงจากฤดูกาล (Seasonal Time Series) ซึ่งลักษณะของอนุกรมเวลาประเภทนี้จะเปลี่ยนแปลงขึ้นลงเลียนแบบกันตามช่วงเวลา เช่น ยอดขายของจะมีค่าสูงคล้ายๆ กันทุกปีในช่วงเทศกาลต่างๆ แบบจำลองสำหรับอนุกรมเวลาประเภทนี้ เรียกว่า แบบจำลองอนุกรมเวลาที่มีฤดูกาล (Seasonal Time Series Model) แบบจำลองนี้ยังคงลักษณะของแบบจำลอง ARMA อยู่แต่จะมีการปรับเนื่องจากผลต่างฤดูกาล (Seasonal Difference) กับอนุกรมเวลาเดิมดังนี้

$$w_t = \nabla_s z_t = z_t - z_{t-s}$$

เมื่อ s คือ ช่วงเวลาของฤดูกาลที่ทำให้อนุกรมเวลา z_t มีการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นจะหาแบบจำลองที่ใช้พยากรณ์อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลได้จาก ARIMA (p,d,q) ซึ่งแสดงผลเกี่ยวข้องกับข้อมูลที่อยู่ในช่วงเวลาที่ติดต่อกันอาจเป็น เดือน ปี ฯลฯ

อนุกรมเวลาที่มีฤดูกาลนั้นนอกจากข้อมูลที่เกี่ยวข้องกันระหว่างเดือนแล้ว ข้อมูลยังเกี่ยวข้องกันระหว่างปีด้วย ซึ่งสามารถหาแบบจำลองได้ กล่าวคือ ถ้าใช้ ARIMA (0,1,1) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่อยู่ห่างกัน 12 คาบเวลา หรือ 12 เดือน จะได้

$$z_t - z_{t-12} = u_t - \theta^* u_{t-12}$$

เมื่อ $z_t - z_{t-12}$ คือ ผลต่างของข้อมูลที่อยู่ห่างกัน 12 คาบเวลา

θ^* คือ ค่าพารามิเตอร์ใน Seasonal Moving Average Model

และถ้าสมมติใช้ ARIMA (0,1,1) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่อยู่ห่างกัน 1 คาบเวลาหรือ 1 เดือน มีสมการดังนี้

$$z_t - z_{t-1} = u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

เมื่อ $z_t - z_{t-1}$ หมายถึง ผลต่างของข้อมูลที่อยู่ห่างกัน 1 คาบเวลา

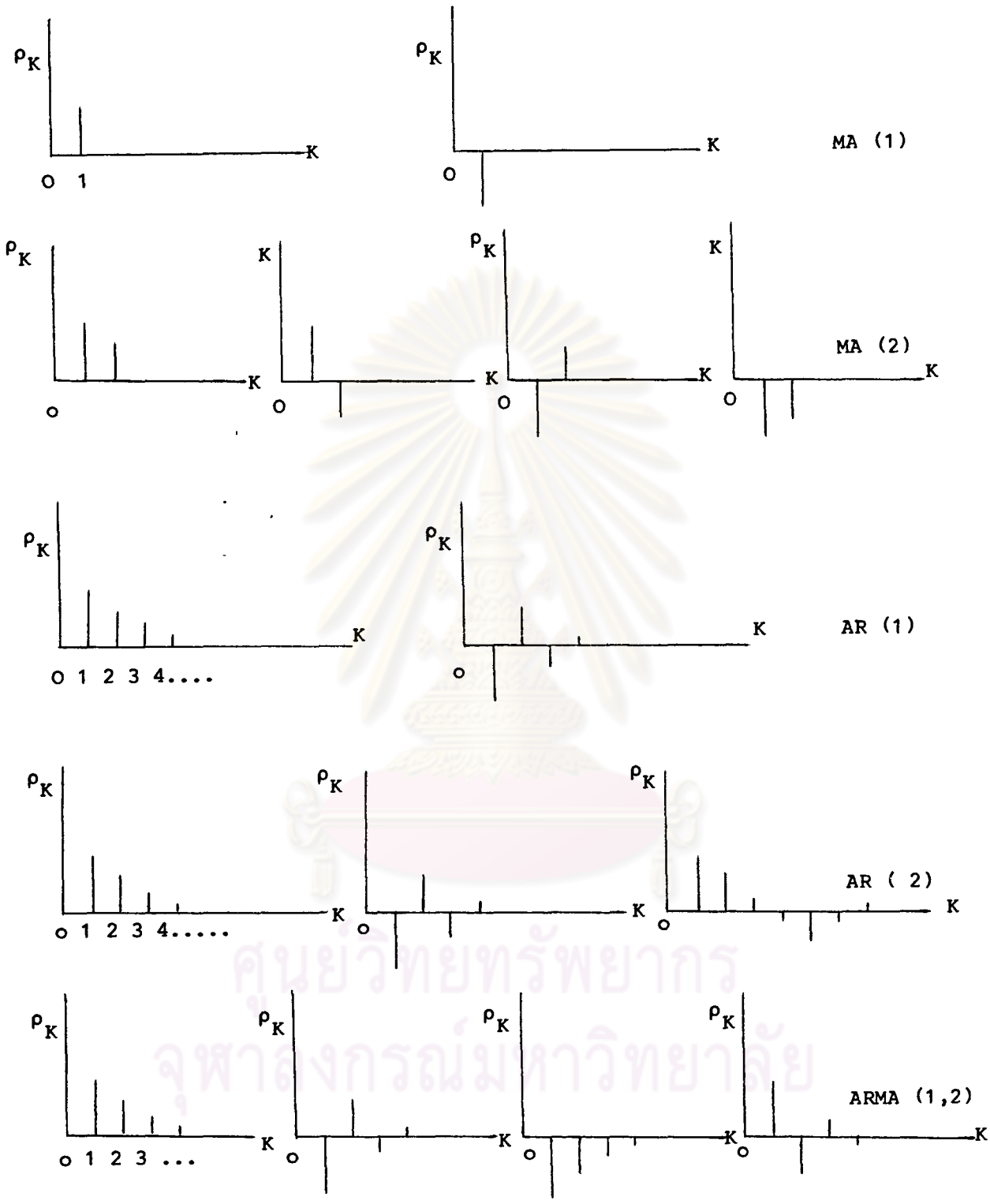
$u_t\ u_{t-1}$ หมายถึง Random Shock ที่อยู่ห่างกัน 1 คาบเวลา

จาก Seasonal Model ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกันในแต่ละปี และในปีเดียวกันยังเกี่ยวข้องกันในแต่ละเดือนด้วย มีสมการดังนี้

$$(z_t - z_{t-1}) - (z_{t-12} - z_{t-13}) = (u_t - \theta u_{t-1}) - \theta^* (u_{t-12} - \theta u_{t-13})$$

หรือ $$z_t - z_{t-1} - z_{t-12} + z_{t-13} = u_t - \theta u_{t-1} - \theta^* u_{t-12} - \theta\theta^* u_{t-13}$$

การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมสำหรับอนุกรมเวลาชุดหนึ่งๆ นั้นมีหลักสำคัญอยู่ที่การเปรียบเทียบคุณสมบัติทางสถิติของอนุกรมเวลานั้นกับคุณสมบัติทางสถิติของแบบจำลองอนุกรมเวลาแบบต่างๆ คุณสมบัติทางสถิติที่ใช้ในการเลือกแบบจำลองอนุกรมเวลาคือ ค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเอง และค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน แบบจำลองที่เลือกมาใช้อธิบายอนุกรมเวลาชุดหนึ่งๆ นั้น จะต้องมีคุณสมบัติของสถิติเหมือนกับอนุกรมเวลาชุดนั้น ค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเอง ρ_k จะแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่อยู่ห่างกัน k คาบเวลา



รูปที่ 3.2 กราฟของค่าฟังก์ชั่นสหสัมพันธ์ในตัวเอง ($k \geq 0$) สำหรับแบบจำลอง Stationary

กราฟของแบบจำลองที่แสดงความสัมพันธ์ของ ρ_K กับค่าของ K สำหรับรูปแบบ AR (1), AR (2) และ ARMA (1, 1) มีลักษณะคล้ายกัน ถ้าหากกราฟของ r_K มีรูปแบบที่เป็นไปได้ 3 รูปแบบคือ AR (1), AR (2) และ ARMA (1, 1) อาจต้องนำข้อมูลชุดนั้นไปหาค่าประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 3 รูปแบบ แล้วจึงนำไปตรวจสอบว่ารูปแบบไหนเหมาะสมกับข้อมูลชุดนั้น

เนื่องจากแบบจำลองอนุกรมเวลาหลาย ๆ แบบจำลองมีลักษณะของฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองและฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนคล้ายกัน การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมเพื่อมาอธิบายอนุกรมเวลาชุดหนึ่ง ๆ จึงต้องคำนึงว่าจำนวนพารามิเตอร์ของแบบจำลองอนุกรมเวลานั้นควรจะมีน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยที่แบบจำลองอนุกรมเวลานั้นยังคงคุณสมบัติทางสถิติเหมือนกับคุณสมบัติทางสถิติของอนุกรมเวลาชุดนั้น ๆ อยู่ ทั้งนี้เพื่อประโยชน์ในการนำแบบจำลองอนุกรมเวลาไปใช้พยากรณ์ต่อไป และจะทำให้สามารถประมาณค่าเบื้องต้นของพารามิเตอร์เหล่านั้นได้เร็วขึ้น

ตาราง 3.2 ลักษณะทางทฤษฎีของฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเอง และฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนของแบบจำลองอนุกรมเวลา

แบบจำลอง	ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเอง	ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน
MA (m)	มีค่าเป็นศูนย์หลังจากเวลา m (2)	มีค่าค่อย ๆ ลดลง (1)
AR (n)	มีค่าค่อย ๆ ลดลง (1)	มีค่าเป็นศูนย์หลังจากเวลา n (2)
ARMA(n,m)	มีค่าค่อย ๆ ลดลง (1)	มีค่าค่อย ๆ ลดลง (1)

หมายเหตุ

(1) หมายถึงฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองหรือฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนมีค่าค่อย ๆ ลดลง ซึ่งอาจจะอยู่ในลักษณะ Exponential, Sinusoidal หรือ Geometric ในหลาย ๆ ช่วงเวลา

(2) หมายถึงฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเอง หรือ ฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนจะมีค่าต่างจากศูนย์อยู่ n หรือ m หน่วยเวลา หลังจากนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์หมด

การพิจารณาว่าอนุกรมเวลาชุดใด Stationary หรือไม่นั้น ดูได้จากค่า r_K ของข้อมูล ถ้าค่า r_Kลดน้อยมากเมื่อ K มีค่ามาก แสดงว่าอนุกรมเวลาชุดนั้นเป็น Nonstationary ถ้าเป็นอนุกรมเวลา Nonstationary อนุกรมเวลาของผลต่างมักจะเป็นอนุกรมเวลา Stationary จึงจำเป็นต้องพิจารณาผลต่างลำดับที่ 1 ของข้อมูลชุดนั้น ถ้าผลต่างลำดับที่ 1 ของอนุกรมเวลาเดิมเป็น Stationary ก็ไม่จำเป็นต้องพิจารณาผลต่างลำดับที่ 2 ต่อไปแต่ผลต่างลำดับที่ 1 ยังเป็น Nonstationary จำเป็นต้องหาผลต่างลำดับที่ 2 ต่อไป แต่ในทางปฏิบัติมักมักจะหาผลต่างไม่เกินลำดับที่ 2

3.5.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์

หลังจากได้เลือกรูปแบบของแบบจำลองอนุกรมเวลาในขั้นตอนที่ 1 แล้วต่อไปจะประมาณค่าพารามิเตอร์ ได้จากสูตรที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ สำหรับรูปแบบ ARIMA (p, d, q) แสดงไว้ในตารางที่ 3.3

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3.3 สูตรใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ สำหรับรูปแบบ ARIMA(p,d,q)

ลำดับ (p,d,q)	พารามิเตอร์ที่จะประมาณ	สูตรที่ใช้ในการประมาณ	ขอบเขตของค่าพารามิเตอร์
(0,d,1)	θ_1	$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$	$-1 < \theta_1 < 1$
(0,d,2)	θ_1 , θ_2	$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$	$-1 < \theta_2 < 1$ $\theta_1 + \theta_2 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$
		$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$	
(1,d,0)	Φ_1	$\Phi_1 = \rho_1$	$-1 < \Phi_1 < 1$
(2,d,0)	Φ_1 , Φ_2	$\Phi_1 = \frac{(1-\rho_2)}{(1-\rho_1^2)}$	$-1 < \Phi_2 < 1$ $\Phi_1 + \Phi_2 < 1$
		$\Phi_2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1^2)}{(1-\rho_1)}$	$\Phi_2 - \Phi_1 < 1$
(1,d,1)	Φ_1 , θ_1	$\rho_1 = \frac{(1-\theta_1\Phi_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\Phi_1\theta_1}$	$-1 < \Phi_1 < 1$ $-1 < \theta_1 < 1$
		$\rho_2 = \rho_1\Phi_1$	

Φ_1 , θ_1 และ θ_2 คือ พารามิเตอร์ของแบบจำลองต่าง ๆ ที่ต้องประมาณ และประมาณค่า ρ_1 และ ρ_2 ด้วย r_1 และ r_2 ตามลำดับ

ค่าประมาณที่หาได้นี้เป็นค่าประมาณเบื้องต้นซึ่งจะนำไปหาค่าประมาณพารามิเตอร์ค่าสุดท้าย ค่าประมาณพารามิเตอร์ค่าสุดท้ายที่ดีที่สุดซึ่งจะนำไปใช้ในแต่ละแบบจำลอง จะเป็นค่าพารามิเตอร์ ที่เมื่อนำไปใช้พยากรณ์ค่าของอนุกรมเวลาแล้วจะมีผลทำให้ ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด การคำนวณหาค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่น้อยที่สุดนี้จะคำนวณโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์

3.5.3 การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ

หลังจากเลือกแบบจำลองอนุกรมเวลาและคำนวณค่าพารามิเตอร์แล้ว จะต้องตรวจสอบว่าแบบจำลองนั้นเป็นแบบจำลองที่เหมาะสมกับอนุกรมเวลาชุดนั้น ๆ จริงหรือไม่ การตรวจสอบนี้กระทำโดยการพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากแบบจำลองหลังจากแทนค่าอนุกรมเวลาและค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองนั้นแล้ว ความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากแบบจำลองนี้คือ $\hat{e}_t$ เมื่อ $t = 1, 2, \ldots, N$ ซึ่งเป็นค่าโดยประมาณของความคลาดเคลื่อน e_t เนื่องจาก e_t ; $t = 1, 2, 3, \ldots, N$ อยู่ภายใต้ข้อสมมติที่ว่าจะเป็นอิสระต่อกันดังนั้นถ้า $\hat{e}_t$; $t = 1, 2, 3, \ldots, N$ มีความเป็นอิสระต่อกันแล้ว ตัวแบบอนุกรมเวลาที่เลือกมานั้นจะเป็นตัวแบบที่เหมาะสมกับอนุกรมเวลาชุดนั้น มิฉะนั้นจะต้องกลับไปพิจารณาเลือกตัวแบบอื่น ๆ ที่เหมาะสมกว่าต่อไป

การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ ทำได้ 2 วิธีคือ

3.5.3.1 ตรวจสอบว่าค่า $\hat{e}_t$ มีความสัมพันธ์กันหรือไม่กล่าวคือ $r_K(\hat{e}_t)$ เท่ากับศูนย์หรือไม่ภายใต้ข้อสมมติที่ว่า $e_t \sim N(0, \sigma_{e_t}^2)$ เมื่อ

$$r_K(\hat{e}_t) = \frac{\frac{1}{N-K}\sum_{t=1}^{N-K} \hat{e}_t \hat{e}_{t+K}}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \hat{e}_t^2}$$

โดยที่ N = จำนวนเทอมความแปรปรวนสุ่ม e_t

$K = 1, 2, \ldots, K$ โดยที่ $K \leq \sqrt{N}$ แต่ต้องไม่น้อยกว่า 12 ค่า

ถ้า $r_K(\hat{e}_t)$ เท่ากับศูนย์แสดงว่าตัวแบบที่ตรวจสอบถูกต้องเหมาะสมกับอนุกรมเวลาชุดนั้น

ถ้า $r_K(\hat{e}_t)$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์แสดงว่าตัวแบบที่ตรวจสอบยังไม่เหมาะสมต้องหาตัวแบบใหม่ซึ่ง $r_K(\hat{e}_t)$ จะเท่ากับศูนย์หรือไม่ขึ้นอยู่กับการเปรียบเทียบ $r_K(\hat{e}_t)$ กับค่าประมาณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $r_K(\hat{e}_t)$ กับค่า $\hat{\sigma}_{r_K(\hat{e}_t)}$ ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $|r_K(\hat{e}_t)| \leq Z_{\alpha/2}\ \hat{\sigma}_{r_K(\hat{e}_t)}$ ทุกค่า K แสดงว่ายอมรับว่า $r_K(\hat{e}_t) = 0$ นั่นคือถ้า $\alpha = .05$ จะได้ว่า $|r_K(\hat{e}_t)| < 1.96\hat{\sigma}_{r_K(\hat{e}_t)}$ แล้ว $r_K(\hat{e}_t) = 0$ โดยที่ K = 1, 2,...,K

ในทางปฏิบัตินิยมใช้ 2 เป็นค่าประมาณของ 1.96 สำหรับระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ เพื่อง่ายต่อการคำนวณ โดยที่

$$\hat{\sigma}_{r_K(\hat{e}_t)} = \sqrt{\text{Var}\ (r_K(\hat{e}_t))}$$

ตารางที่ 3.4 แสดงค่า $\hat{\sigma}_{r_K(\hat{e}_t)}$ ของแต่ละตัวแบบ

Var $(r_K(\hat{e}_t))$	ARIMA(1,d,o)	ARIMA(2,d,o)	ARIMA(o,d,1)	ARIMA(O,d,2)	ARIMA(1,d,1)
K = 1	$\frac{\Phi_1^2}{N}$	$\frac{\Phi_2^2}{N}$	$\frac{\theta_1^2}{N}$	$\frac{\theta_2^2}{N}$	$\frac{\theta_1^2}{N}$
K = 2	$\frac{1-\Phi_1^2+\Phi_1^4}{N}$	$\frac{\Phi_2^2+\Phi_1^2(1+\Phi_2)^2}{N}$	$\frac{1-\theta_1^2+\theta_1^4}{N}$	$\frac{\theta_2^2+\theta_1^2(1+\theta_2)^2}{N}$	$\frac{1-\theta_1^2+\theta_1^4}{N}$
K = 3	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$

3.5.3.2 ตรวจสอบตัวแบบโดยใช้ Box - Pierce Chi - Square

การตรวจสอบว่า $\hat{e}_t$; t = 1, 2,....,N มีความเป็นอิสระต่อกันหรือไม่ทำได้โดยเปรียบเทียบค่าสหความสัมพันธ์ในตัวเองของ $\hat{e}_t$ ณ เวลาต่าง ๆ กับพิสัยแห่งความเชื่อถือ (Confidence Interval) ที่แต่ละหน่วยเวลานั้น ซึ่งเป็นการตรวจสอบความเป็นอิสระของ $\hat{e}_t$ เฉพาะแต่ละหน่วยเวลา

จากสหความสัมพันธ์ในตัวเองของความแปรปรวนสุ่ม e_t ในหน่วยเวลาต่าง ๆ Box และ Pierce ได้เสนอวิธีทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบโดยสร้างตัวสถิติที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ โดยเรียกตัวสถิตินี้ว่า Box - Pierce Chi - Square Statistics และแทนด้วยสัญลักษณ์ Q

$$Q = (N-d) \sum_{i=1}^{K} r_i^2 (\hat{e}_t)$$

เมื่อ N แทน จำนวนข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลา

d แทน ลำดับผลต่างของข้อมูลที่ทำให้เป็น Stationary

K แทน จำนวน Lag

$r_i^2 (\hat{e}_t)$ แทน กำลังสองของสหความสัมพันธ์ในตัวเองของความคลาดเคลื่อนที่ช่วงเวลาก่อนหน้านั้น i หน่วยเวลา

Q มีองศาแห่งความอิสระเท่ากับ K - A เมื่อ A เท่ากับ จำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณในตัวแบบ จะทำการทดสอบว่า ρ_i (; i = 1, 2,....., K) มีค่าเป็นศูนย์หรือไม่ โดยเทียบ Q กับค่าจากตาราง $\chi^2_{\alpha,K-A}$ ถ้า $Q > \chi^2_{\alpha,K-A}$ แล้วแสดงว่า ρ_i มีค่า ความคลาดเคลื่อนยังมีสหความสัมพันธ์กันอยู่จึงต้องปรับปรุงตัวแบบใหม่ โดยพิจารณาฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองของความคลาดเคลื่อนว่าควรเพิ่มเทอมใดลงไป ถ้า $Q < \chi^2_{\alpha,K-A}$ แสดงว่าความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระต่อกันตัวแบบที่ได้ถือว่าเป็นตัวแบบที่เหมาะสม และจะนำไปใช้ในการพยากรณ์ต่อไป

3.5.4 การพยากรณ์ค่า

จุดประสงค์ประการหนึ่งของการวิเคราะห์อนุกรมเวลา คือ การพยากรณ์ค่าของอนุกรมเวลาล่วงหน้า ซึ่งจะช่วยในการวางแผนงานที่เกี่ยวข้องมีความเหมาะสมมากขึ้น การพยากรณ์โดยใช้ตัวแบบอนุกรมเวลามีจุดเด่นกว่าการพยากรณ์แบบอื่น ๆ เช่น การวิเคราะห์ความถดถอย การวิเคราะห์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิก ในแง่ที่ตัวแบบอนุกรมเวลานี้สามารถใช้พยากรณ์ได้ทันที เพราะการพยากรณ์อาศัยข้อมูลอนุกรมเวลาและความคลาดเคลื่อนในหน่วยเวลาที่ผ่านมาแล้วเท่านั้น เมื่อได้ตัวแบบที่เหมาะสม โดยเทคนิคของบ็อกซ์และเจนกินส์แล้วการพยากรณ์ตามตัวแบบที่เหมาะสมนั้นต้องทราบค่าเริ่มต้นของการพยากรณ์ (Forecast Origin) ด้วย ซึ่งปกติจะใช้ช่วงเวลา n คือช่วงเวลาสุดท้ายของอนุกรมเวลาที่มีอยู่เป็นค่าเริ่มต้นพยากรณ์ช่วงเวลาที่ n + 1, n + 2,..... จะทำการพยากรณ์ไปข้างหน้ากี่หน่วยเวลาก็ได้ แต่ยิ่งพยากรณ์ออกไปไกลเท่าไร ค่าพยากรณ์ที่ได้จะอาศัยข้อมูลจริงน้อยลงมากเท่านั้นโดยนำค่าจากการพยากรณ์ในคาบเวลาที่ผ่านมา มาใช้พยากรณ์ในเวลาข้างหน้า ความแม่นยำในการพยากรณ์จึงลดลงมากถ้ายิ่งพยากรณ์ไปในช่วงเวลาข้างหน้านาน ๆ และถ้าสหความสัมพันธ์ในตัวเองมีเครื่องหมายบวก ค่าพยากรณ์ในอนาคตจะมีแนวโน้มสูงขึ้นเรื่อย ๆ ในทำนองเดียวกันถ้าสหความสัมพันธ์ในตัวเองมี

เครื่องหมายลบ ค่าพยากรณ์จะมีแนวโน้มลดลงเรื่อย ๆ ทั้งที่ในความเป็นจริงแล้วพฤติกรรมในอนาคตมีแนวโน้มที่เป็นไปได้ทั้งเพิ่มขึ้นและลดลง อนุกรมเวลาบ๊อกและเจนกินส์เหมาะสำหรับการพยากรณ์ในระยะสั้น ๆ และพยากรณ์เพียง 1 หน่วยเวลาข้างหน้าเท่านั้นจึงเกิดความแม่นยำสูงที่สุด เนื่องจากได้อาศัยข้อมูลที่เกิดขึ้นจริงมากที่สุด

สรุปขั้นตอนการพยากรณ์ด้วยเทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลาบ๊อกซ์และเจนกินส์มีดังนี้

1. กำหนดรูปแบบที่จะนำไปใช้ในการพยากรณ์ โดยพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเอง และฟังก์ชันสหความสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน

2. ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ

3. ทำการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบโดยใช้ตัวสถิติ CHI-SQUARE เป็นตัวทดสอบด้วยความเชื่อมั่น 95 เปอร์เซ็นต์

4. ทำการพยากรณ์ค่าโดยอาศัยตัวแบบที่เหมาะสมจากข้อ 3

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย