การทวนสอบการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติโดยใช้การส่งผ่านเวกเตอร์

นายวรยุทธ วงศ์นิล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2554

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

REVERSIBILITY VERIFICATION OF ONE-DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA USING VECTOR TRANSITIONS

Mr. Worayoot Wongnin

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Computer Science
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2011
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การทวนสอบการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติโดยใช้การส่งผ่านเวกเตอร์
โดย	นายวรยุทธ วงศ์นิล
สาขาวิชา	วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

……………………………………………คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

……………………………………………ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิษณุ คนองชัยยศ)

……………………………………………อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

……………………………………………กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

วรยุทธ วงศ์นิล: การทวนสอบการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติโดยใช้การส่งผ่านเวกเตอร์. (REVERSIBILITY VERIFICATION OF ONE-DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA USING VECTOR TRANSITIONS) อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ.ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 46 หน้า.

ในงานวิจัยเกี่ยวกับการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิตินั้น ปัญหาที่เราสนใจคือเรื่องของจำนวนของกฎในการส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้ ซึ่งงานวิจัยหลายชิ้นมุ่งเน้นในการศึกษาและหาโมเดลที่สามารถส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาให้ย้อนกลับได้ด้วยกฎการส่งผ่านที่หลากหลายมากกว่าที่ผ่านมาเพื่อที่จะทำให้เซลลูลาร์ออโตมานั้นมีความซับซ้อนมากกว่าเดิมยิ่งขึ้น จึงเป็นที่มาของการเสนอเซลลูลาร์ออโตมาตาในรูปแบบต่างๆที่มีการเพิ่มเติมคุณสมบัติลงไป มีงานวิจัยที่เสนอการเพิ่มหน่วยความจำให้กับเซลลูลาร์ออโตมาตาซึ่งโมเดลดังกล่าวมีกฎที่ใช้ในการส่งผ่านย้อนกลับได้มากขึ้นและถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลายๆงานวิจัย เช่น วิทยาการเข้ารหัสลับ การนำกฎเวกเตอร์ถูกนำมาใช้ในการส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาหรือเรียกว่าเซลลูลาร์ออโตมาชนิดไม่สม่ำเสมอ ซึ่งเดิมเป็นชนิดสม่ำเสมอ ทำให้เกิดลักษณะของกฎการส่งผ่านที่หลากหลายกว่าเดิมมาก

ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงได้ปรับปรุงและพัฒนาโมเดลการส่งผ่านเพื่อหาอัลกอริทึมที่ใช้ในการทวนสอบกฎเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติที่มีความสามารถในการย้อนกลับได้โดยอัลกอริทึมที่ได้สามารถตรวจสอบได้ว่ากฎใดเป็นกฎที่ใช้ส่งผ่านย้อนกลับได้ ซึ่งสามารถหากฎที่มีคุณสมบัติดังกล่าวได้เป็นจำนวนที่มากขึ้นเมื่อเทียบกับรูปแบบเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดก่อนหน้า อีกทั้งยังเสนอคุณสมบัติที่จำเป็นในการย้อนกลับได้ของกฎการส่งผ่านอีกด้วย

ภาควิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ....

ปีการศึกษา 2554

5270477821 : MAJOR COMPUTER SCIENCE

KEYWORDS : REVERSIBLE CELLULAR AUTOMATA / VECTOR RULE / PERIODIC BOUNDARY CONDITION

WORAYOOT WONGNIN: REVERSIBILITY VERIFICATION OF ONE-DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA USING VECTOR TRANSITIONS. ADVISOR: ASST.PROF.ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 46 pp.

A problem in a reversibility of the one-dimensional Cellular Automata (CA) concerns about a less number of a transition rule of CA. Many researchers studied and focused on introducing a model with the reversible property for more complexity. Therefore, some classes of CA were proposed by adjust some feature of CA. Later, the CA with memory was introduced and could increase the number of the transition rules for the reversible CA. This CA model was applied in another computer fields such as cryptographic etc. The transition by a vector rules (non-uniform CA) was illustrated for handle the least number of the transition rule and the vector rule could generate the large number of the transition rule.

Thus, this thesis introduces the improved model and proposes an algorithm for verifying the reversibility property of CA. The alrithm could detect if the CA is reversible. From our result, the reversed CA can be construct if there exists. Furthermore, the necessary property of the reversible rule is included in the research.

Department : Computer Engineering Student's Signature ....

Field of Study : Computer Science Advisor's Signature ....

Academic Year : 2011

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความอนุเคราะห์และความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาผู้ให้คำปรึกษา ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่องานวิจัย ทั้งยังช่วยตรวจแก้ไขในส่วนที่บกพร่องต่างๆ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ออกมาเป็นงานวิจัยที่สมบูรณ์ได้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิษณุ คนองชัยยศ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงทั้งในด้านของเนื้อหาและรูปแบบการเขียนวิทยานิพนธ์ในส่วนที่ยังบกพร่องเพื่อให้งานมีความสมบูรณ์ที่สุด

ขอขอบพระคุณท่านคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ช่วยสอนทั้งความรู้และประสบการณ์อันมีค่ายิ่งต่อตัวข้าพเจ้า

ขอขอบพระคุณบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ให้การสนับสนุน “ทุนอุดหนุนวิทยานิพนธ์สำหรับนิสิต” ขอขอบพระคุณมูลนิธินิสิตเก่าจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับ “ทุนอุดหนุนการศึกษา” ซึ่งได้ให้ทุนการศึกษาถึงสองปีด้วยกัน ขอบพระคุณท่านอาจารย์และภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ที่ได้ให้โอกาสและการสนับสนุนด้วย “ทุนผู้ช่วยสอน” ตลอดระยะเวลาที่ข้าพเจ้าได้ศึกษาอยู่ ณ ที่แห่งนี้และขอขอบคุณน้องๆนักเรียนโรงเรียนต่างๆที่ได้ให้โอกาสข้าพเจ้าได้เป็นติวเตอร์สอนพิเศษวิชาต่างๆซึ่งเป็นกำลังทุนสำคัญในการศึกษาและทำวิจัย

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์เผ่า สุวรรณศักดิ์ศรีและรองศาสตราจารย์เพ็ญพรรณ ยังคง อนุสาสกหอพักนิสิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้ให้แหล่งพักพิงในหอพัก ให้คำแนะนำและแนวคิดในการใช้ชีวิตในการเรียนตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาที่นี่ อีกทั้งยังให้ไว้วางใจให้ข้าพเจ้าได้ทำงานช่วยงานหอพักในการดูแลน้องๆประจำชั้นอีกด้วย ขอบพระคุณท่านอาจารย์ บุคลากร พี่ๆ น้องๆ และเพื่อนชาวหอพักที่ได้ให้กำลังใจและแรงผลักดันในการทำงานวิจัยเสมอมา

ขอขอบคุณพี่ๆน้องๆสมาชิกห้องปฏิบัติการทางวิศวกรรมระบบนับได้เชิงทฤษฎี (Engineering Laboratory in Theoretical Enumerable System : ELITE) ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ข้อเสนอแนะ และให้คำปรึกษาในเรื่องต่างๆ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์สำเร็จด้วยดี

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณคนที่สำคัญที่สุดในชีวิตคือ บิดาและมารดาของข้าพเจ้า ที่คอยเป็นกำลังใจและเฝ้าห่วงใยข้าพเจ้าอยู่เสมอมารวมทั้งพี่น้องของข้าพเจ้าด้วย และขอบคุณสำหรับกำลังใจ ความห่วงใยและเอาใจใส่อย่างดีจากคนสำคัญของข้าพเจ้าแม้จะอยู่ห่างไกลก็ตาม

สารบัญ

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญรูป

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

เนื้อหาในบทนี้นำเสนอที่มาและความสำคัญของปัญหาวัตถุประสงค์ขอบเขตข้อจำกัด ขั้นตอนการศึกษาวิธีการดำเนินงานและประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

เซลลูลาร์ออโตมาตาถือเป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่มีการทำงานแบบขนานคือทุกเซลล์จะทำงานไปพร้อมๆกันและมีการเปลี่ยนค่าสถานะของแต่ละเซลล์โดยจะขึ้นอยู่กับเซลล์ที่อยู่รอบตัว [1]โดยแต่ละเซลล์จะมองเป็นออโตมาตาที่มีสถานะแบบจำกัดซึ่งเซลล์ที่เป็นสถานะใหม่จะใช้ฟังก์ชันในการส่งผ่านที่มีการพิจารณาสถานะของเซลล์ที่อยู่ใกล้เคียง จากที่เซลลูลาร์ออโตมาตามีการทำงานโดยใช้พื้นที่และเวลาแบบดิสครีต จึงทำให้มีสถานะรวมซึ่งเกิดจากการส่งผ่านของสถานะย่อยๆทุกสถานะ

เนื่องจากแต่ละเซลล์มีการทำงานพร้อมๆกันแบบขนาน ดังนั้นเซลลูลาร์ออโตมาตาจึงได้ถูกนำไปใช้ในวงการคอมพิวเตอร์หลายๆแขนง เช่น การสร้างรูปแบบ (pattern formation) การคำนวณ (computation) การดำเนินการรูปภาพ (image processing) การจำลอง (simulation) วิทยาการเข้ารหัสลับ (cryptography) เป็นต้น ทั้งนี้ชนิดของเซลลูลาร์ออโตมาตานั้นได้ถูกจัดกลุ่มตามมิติของลักษณะโครงสร้างเซลล์ ซึ่งชนิดอย่างง่ายของเซลลูลาร์ออโตมาตาคือชนิดหนึ่งมิติ โดยเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติชนิดสม่ำเสมอ เซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์ได้ถูกเสนอโดย วูล์ฟแฟรม (Wolfram) [2] ซึ่งเซลลูลาร์ออโตมาตาในลักษณะดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า อีลีเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมา ถึงแม้จะถือว่าเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดที่ง่ายที่สุด แต่มันสามารถส่งผ่านด้วยความซับซ้อนสูง

ในปัจจุบันหลายๆงานวิจัยได้ศึกษาถึงความสามารถในการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตา โดยที่ผ่านมาเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้ โดยก่อนหน้านี้คุณสมบัติในการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาได้ถูกนำไปปรับใช้กับงานที่มีการทำงานแบบขนานและมีการคำนวณสูง แต่ก็ไม่ได้มีจำนวนของตัวกฎที่ใช้ในการส่งผ่านมากนัก จึงทำให้มีงานวิจัย [3] ได้เสนอเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้แบบใช้หน่วยความจำ ซึ่งการเกิดสถานะใหม่จะไม่ได้ขึ้นจากการพิจารณาจากเซลล์ปัจจุบันเพียงอย่างเดียว หากแต่ให้พิจารณาสถานะก่อนหน้าด้วย จึงทำให้กฎที่ใช้ในการ

ส่งผ่านเพื่อให้เซลลูลาร์ออโตมาตามีคุณสมบัติในการย้อนกลับได้นั้นมีจำนวนมากถึง 256 คู่ในการส่งผ่าน

งานวิจัยหลายชิ้นให้ความสนใจไปที่คุณสมบัติในการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตา เช่นเดียวกับ แดสและซิกดาร์ [4] ได้เสนอคุณลักษณะของการเข้าถึงได้ของแต่ละเซลล์ในเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีเซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์ (reachable cellular automata) โดยงานวิจัยนี้ได้นำเสนอเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้โดยใช้การส่งผ่านด้วยกฎเวกเตอร์ซึ่งเป็นแบบไม่สม่ำเสมอ นั่นคือแต่ละเซลล์ไม่จำเป็นต้องต้องถูกส่งผ่านด้วยกฎเดียวกันทั้งหมดหรือบางงานวิจัยเรียกว่า เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบผสม (hybrid cellular automata) ซึ่งงานวิจัยนี้ได้พิสูจน์ให้เห็นว่าหากกำหนดให้กฎการส่งผ่านเป็นแบบเวกเตอร์แล้วจะมีกฎการส่งผ่านมากมายที่มีคุณสมบัติในการเข้าถึงได้หรือกล่าวได้ว่ากฎการส่งผ่านบางกฎเมื่อทราบข้อมูลจำนวนครั้งของการส่งผ่านด้วยกฎข้างต้นแล้วออโตมาตาจะสามารถคำนวณการส่งผ่านกลับมาให้อยู่ที่สถานะเริ่มต้นได้

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นที่จะทวนสอบกฎเวกเตอร์ในการส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาที่สามารถย้อนกลับได้และมีจำนวนของกฎมากกว่าที่มีอยู่ในปัจจุบัน ดังนั้นในงานนี้จึงปรับปรุงโมเดลการส่งผ่านเพื่อหาอัลกอริทึมที่ใช้ในการหากฎเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติที่มีความสามารถในการย้อนกลับได้ อีกทั้งยังต้องการให้หาความสัมพันธ์ของกฎที่สามารถย้อนกลับได้เพื่อที่จะสามารถนำทฤษฎีดังกล่าวไปใช้ในงานอื่น ๆ ต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อสร้างอัลกอริทึมที่ใช้ในการทวนสอบกฎเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติที่มีความสามารถในการย้อนกลับได้พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ของการเกิดกรณีการย้อนกลับได้ของกฎดังกล่าว

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1) ระบบอัลกอริทึมที่ใช้ในการทวนสอบกฎเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีความสามารถในการย้อนกลับได้ใช้ได้กับเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติและเป็นขอบเขตแบบรอบเท่านั้น
2) ความสัมพันธ์ของกฎที่สามารถย้อนกลับได้อาจจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขบางอย่าง

1.4 ขั้นตอนการศึกษาและวิธีการดำเนินงาน

1) ศึกษางานวิจัยทางด้านเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้
2) วิเคราะห์ปัญหาของงานวิจัยที่มีความสอดคล้องกับงานวิจัยที่สนใจ
3) วิเคราะห์คุณลักษณะของเซลลูลาร์ออโตมาตาในแบบต่างๆ
4) ออกแบบอัลกอริทึมในทวนสอบกฎในการย้อนกลับได้
5) พิสูจน์อัลกอริทึมที่ได้ออกแบบไว้
6) สรุปผลและเรียบเรียงวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้อัลกอริทึมที่สามารถทวนสอบกฎการส่งผ่านที่มีความสามารถในการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ ซึ่งจะทำให้สามารถนำกฎดังกล่าวไปประยุกต์ใช้เพื่อส่งผ่านข้อมูลใดๆต่อไป
2) ได้ความสัมพันธ์ของการย้อนกลับได้ของกฎที่ใช้ในการส่งผ่านอันจะทำให้การพิจารณาถึงคุณสมบัติของการย้อนกลับได้เป็นไปได้สะดวกมากขึ้น

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นบทความทางวิชาการในหัวเรื่องดังต่อไปนี้

Wongnin, W., Surarerks, A., **"Reversible Cellular Automata Verification".** Proceeding of the 16th International Annual Symposium on Computational Science and Engineering: ANSCSE16, Chiang Mai, Thailand, May 23-25, 2012, Pages 305-310.

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยจะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องที่เป็นพื้นฐานของงานวิจัยนี้ ซึ่งแบ่งออกเป็นห้าส่วน ประกอบด้วย ส่วนที่หนึ่งกล่าวถึงเซลลูลาร์ออโตมาตา (theory of cellular automata) ส่วนที่สองกล่าวถึงเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ (one-dimensional cellular automata) ส่วนที่สามกล่าวถึงเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้ (reversible cellular automata) ส่วนที่สี่กล่าวถึงเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้โดยใช้หน่วยความจำ (reversible cellular automata with memory) ส่วนที่ห้ากล่าวถึงการส่งผ่านด้วยกฎเวกเตอร์สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตา (vector rule transition of the cellular automata) และส่วนที่หกกล่าวถึงเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้โดยเซลล์ที่เข้าถึงได้ (reversible cellular automata by reachable cells)

2.1 เซลลูลาร์ออโตมาตา (Theory of Cellular Automata)

ออโตมาตาประกอบด้วยห้าส่วนคือ $\{X, Y, S, f, g\}$ เมื่อ X คือเซตของอักขระที่เป็นตัวนำเข้า, Y คือ เซตของอักขระที่เป็นผลลัพธ์, S คือสถานะภายใน, f คือฟังก์ชันของผลลัพธ์เขียนได้เป็น $f: X \times S \rightarrow Y$ และ g คือฟังก์ชันของการส่งผ่าน เขียนโดย $g: X \times S \rightarrow S$ ซึ่งในช่วงปี ค.ศ. 1950-1960 นิวแมนน์ (Neumann) [1] ได้เสนอแนวคิดเซลลูลาร์ออโตมาตา โดยเป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบไปด้วยเซลล์หลายๆเซลล์เชื่อมต่อกันอย่างเป็นระบบ แต่ละเซลล์เปรียบเสมือนว่าเป็นออโตมาตาแบบจำกัด ซึ่งทุกเซลล์ที่สถานะใหม่จะขึ้นอยู่กับเซลล์ที่สถานะปัจจุบันและเซลล์ที่อยู่รอบๆ โดยเรียกว่าเซลล์เพื่อนบ้าน (neighborhood) โดยเซลลูลาร์ออโตมาตาประกอบด้วยสี่ส่วนหลักคือ $\{D, K, N, f\}$ ซึ่ง

D คือ จำนวนมิติของเซลลูลาร์ออโตมาตา

K คือ เซตของสถานะทั้งหมดที่เซลล์สามารถเป็นไปได้

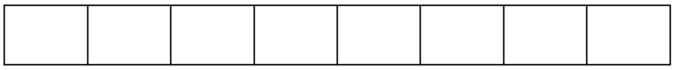
N คือ เซตของเซลล์เพื่อนบ้าน

f คือ ฟังก์ชันในการส่งผ่าน (ในบางครั้งเรียกกฎในการส่งผ่าน)

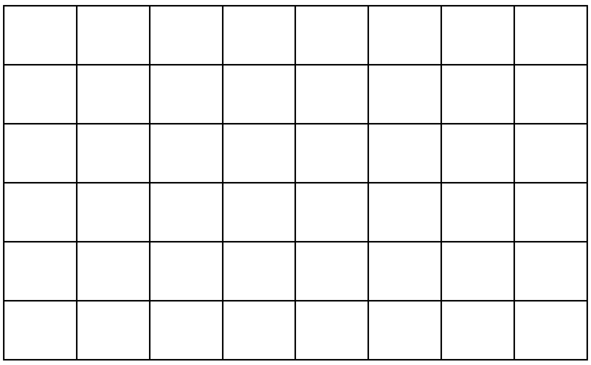
ทั้งนี้แต่ละเซลล์จะส่งผ่านไปสู่สถานะใหม่พร้อมๆกัน จึงถือได้ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตามีการทำงานแบบขนาน

เซลลูลาร์ออโตมาตาได้ถูกนำไปใช้ในหลายๆแขนงของวงการคอมพิวเตอร์ เช่น การทำแบบจำลอง (simulation), วิทยาการเข้ารหัสลับ (cryptography), การจัดการรูปภาพ (image processing), การคำนวณ (computation), การบีบอัดข้อมูล (data compression) เป็นต้น

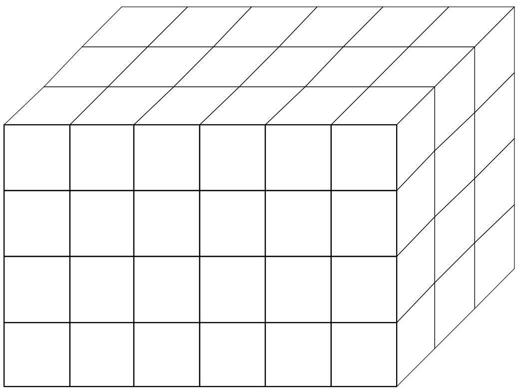
เซลลูลาร์ออโตมาตาได้ถูกแบ่งประเภทตามมิติของเซลลูลาร์ออโตมาตานั่นคือ แบ่งตามลักษณะการจัดเรียงตัวของเซลล์ ยกตัวอย่างดังรูปที่ 2.1, 2.2, 2.3



รูปที่ 2.1 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ



รูปที่ 2.2 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบสองมิติ



รูปที่ 2.3 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบสามมิติ

2.2 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบหนึ่งมิติ (One-Dimensional Cellular Automata)

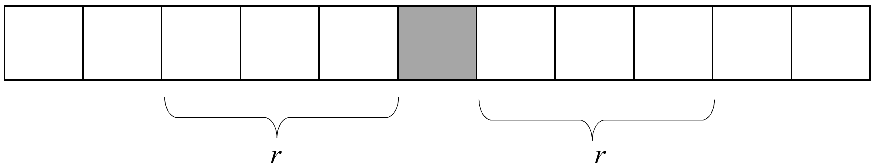
ในกรณีของเซลลูลาร์ออโตมาตาที่ถือว่าเป็นพื้นฐานที่สุดคือเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติ ซึ่งเรียกได้ว่ามีลักษณะเป็นตารางแถวยาวแถวเดียว ดังรูปที่ 2.1 นั่นคือ

$$S^t = (S_1^t, S_2^t, ..., S_n^t)$$

เมื่อ S_i^t คือสถานะของเซลล์ที่ i ที่เวลา t และจะได้ว่า S^t คือสถานะปัจจุบันทั้งหมดที่เวลา t ซึ่งเซลล์ที่สถานะที่ถัดจากสถานะปัจจุบัน (เวลาเป็น t+1) เกิดได้จากการส่งผ่านย่อย (local transition) ของเซลล์เพื่อนบ้านเพื่อให้ได้เซลล์ที่สถานะใหม่ เขียนได้เป็น

$$S_i^{t+1} = f_i(S_{i-r}^t, ..., S_{i-1}^t, S_i^t, S_{i+1}^t ..., S_{i+r}^t)$$

เมื่อ f_i คือ ฟังก์ชันการส่งผ่านย่อย (local transition function) ของเซลล์เพื่อนบ้านของเซลล์ที่ i และ r คือรัศมีของเซลล์เพื่อนบ้าน ดังแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 เซลล์เพื่อนบ้านเมื่อรัศมี r = 3

จะเห็นได้ว่าจำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านที่ใช้ในการส่งผ่านย่อยในแต่ละเซลล์มีจำนวนเป็น 2r+1 ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.4 จะพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านจำนวนเจ็ดเซลล์

เนื่องจากเซลลูลาร์ออโตมาตาเป็นสถานะแบบจำกัดขนาด n เซลล์ ทำให้ต้องมีการกำหนดข้อตกลงของเซลล์ที่จะเป็นเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายของเซลล์ซ้ายสุด และเซลล์เพื่อนบ้านทางขวาของเซลล์ขวาสุด ซึ่งมีวิธีกำหนดที่เป็นที่นิยมอยู่สองรูปแบบ วิธีแรกคือ การกำหนดให้เซลล์ที่อยู่นอกขอบเขตของเซลลูลาร์ออโตมาตาเป็นค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง เช่น กำหนดให้ $S_k^t = 0$ เมื่อ $k < 1$ หรือ $k > n$ ซึ่งหากกำหนดเงื่อนไขในลักษณะดังกล่าวจะเรียกว่าเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาขอบเขตแบบไม่มีค่า (Null boundary cellular automata) ดังในรูปที่ 2.5 และอีกวิธีคือการกำหนดให้แถวของเซลลูลาร์ออโตมาตามีลักษณะเป็นวง นั่นคือ $S_0^t = S_n^t$ และ $S_1^t = S_{n+1}^t$ ซึ่งเรียกว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบรอบ (Periodic boundary cellular automata) ดังรูปที่ 2.6 หรือในบางงานวิจัยเรียกว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาขอบเขตแบบวง (Cyclic boundary cellular automata)

…	0	0	S_1	S_2	…	S_n	0	0	…

รูปที่ 2.5 เซลลูลาร์ออโตมาตาขอบเขตแบบไม่มีค่า

…	S_{n-1}	S_n	S_1	S_2	…	S_n	S_1	S_2	…

รูปที่ 2.6 เซลลูลาร์ออโตมาตาขอบเขตแบบรอบ

ในปี ค.ศ.1986 วูล์ฟแฟรม (Wolfram) [2] ได้เสนอเซลลูลาร์ออโตมาตาโดยที่แต่ละเซลล์สามารถเป็นได้เพียงสองสถานะแบบสม่ำเสมอคือ ‘0’ หรือ ‘1’ เท่านั้น ซึ่งมีเรียกว่า อีลีเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมาตา (elementary cellular automata) ซึ่งถือได้ว่าเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดที่เป็นพื้นฐานที่สุด นั่นคือเซลล์เพื่อนบ้านจะกำหนดให้เป็นเซลล์ตนเอง เซลล์ทางซ้ายมือ และเซลล์ทางขวามือหรืออาจจะเรียกว่ามีเซลล์เพื่อนบ้านเป็น $r = 1$ เขียนฟังก์ชันการส่งผ่านย่อยได้เป็น

$$S_i^{t+1} = f_i(S_{i-1}^t, S_i^t, S_{i+1}^t)$$

จากรูปที่ 2.7 จะเห็นได้ว่าเมื่อเกิดกรณีที่เซลล์เพื่อนบ้านเป็น ‘010’ แล้วเซลล์ที่สถานะถัดไปจะกลายเป็น ‘1’ และเมื่อกรณีเซลล์เพื่อนบ้านเป็น ‘100’ จะได้เซลล์ ‘0’ ที่สถานะถัดไป เมื่อ r เป็นรัศมีของเซลล์เพื่อนบ้าน ดังนั้นจำนวนกรณีทั้งหมดของการลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านคือ $d = 2^{2r+1}$ ยกตัวอย่างเช่น เซลล์เพื่อนบ้านมีรัศมียาวหนึ่ง จะได้จำนวนกรณีของลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี

1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0

1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1

รูปที่ 2.7 ตัวอย่างการส่งผ่านของเซลล์ลูลาร์ออโตมาตา

เซลล์เพื่อนบ้าน :	111	110	101	100	011	010	001	000	กฎ
เซลล์ผลลัพธ์ :	0	0	1	1	0	1	0	1	53

รูปที่ 2.8 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ 53

จากกฎการส่งผ่านดังรูปที่ 2.8 จะเห็นว่าหากเซลล์เพื่อนบ้านทั้งสามเรียงกันแบบ ‘111’, ‘110’, ‘011’ และ ‘001’ ผลลัพธ์ที่ได้ที่เซลล์นั้น ณ สถานะถัดไปจะได้เป็น ‘0’ และหากเซลล์เพื่อนบ้านทั้งสามเรียงกันแบบ ‘101’, ‘110’, ‘010’ และ ‘000’ แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็น ‘1’ ทั้งนี้การสร้างกฎการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาเกิดจากการนำเหตุการณ์ของกรณีการส่งผ่านทั้งหมดของเซลล์เพื่อนบ้านทั้งสามมาเรียงจากค่ามากสุด (111) ไปจนถึงกรณีของเซลล์เพื่อนที่บ้านที่มีค่าน้อยที่สุด (000) ตามลำดับ แล้วจะได้ว่ากฎการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตานี้สามารถเขียนได้เป็น $(b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8)_2$ โดยที่ $b_i \in \{0, \quad 1\}$ จะเห็นได้ว่าการส่งผ่านของเซลล์เพื่อนบ้านดังรูปที่ 2.8 สามารถนำมาเขียนเป็นกฎได้เป็น $(00110101)_2$ ซึ่งคือเลขฐานสองของ 53 นั่นเอง จึงให้เรียกลักษณะการส่งผ่านดังกล่าวว่ากฎ 53

ดังนั้น เซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติชนิดที่เป็นพื้นฐานที่สุด คือ มีสองสถานะที่เป็นไปได้นั่นคือ ‘0’ หรือ ‘1’ และกำหนดให้เซลล์เพื่อนบ้านคือ เป็นเซลล์ตนเอง เซลล์ทางซ้ายมือ และเซลล์ทางขวามือซึ่งเรียกว่า อีลีเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมาตานั่นมีจำนวนกฎการส่งผ่านที่เป็นไปได้ทั้งหมดจำนวน $2^8 = 256$ แบบ เริ่มจากกฎ 0 ไปจนถึงกฎ 255

2.3 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้ (Reversible Cellular Automata)

การส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาทำให้สถานะที่เป็นสถานะปัจจุบัน S^t เปลี่ยนเป็นสถานะถัดไป S^{t+1} เมื่อใช้กฎการส่งผ่าน R ทำให้เกิดการส่งผ่านโดยรวม F_R ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีตัวนำเข้าคือ S^t และมีผลลัพธ์เป็น S^{t+1} ทั้งนี้ เซลลูลาร์ออโตมาตาจะสามารถย้อนกลับได้ก็ต่อเมื่อถ้าทุกๆสถานะปัจจุบัน S^t ซึ่งถูกส่งผ่านด้วยกฎ R เปลี่ยนสถานะเป็นสถานะถัดไป S^{t+1} แล้วเซลลูลาร์ออโตมาตาสามารถทำให้สถานะ S^{t+1} ส่งผ่านกลับคืนมา ณ สถานะเดิม S^t ได้ด้วยกฎการส่งผ่าน R^{-1}

ด้วยคุณสมบัติการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาดังกล่าวทำให้เราทราบว่าหากเซลลูลาร์ออโตมาตาสามารถย้อนกลับได้จะได้ว่า เมื่อใช้กฎ R ในการส่งผ่านแถวเซลล์ใดๆเป็น

จำนวน n ขั้นตอน แล้วจะต้องมีกฎการส่งผ่าน R^{-1} ที่ดำเนินการจากสถานะสุดท้ายจากการส่งผ่าน R ให้ส่งผ่านไปยังสถานะเริ่มต้นได้ด้วยจำนวน n ขั้นตอนเช่นกัน

ตัวอย่างของการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตา เช่น ให้เซลลูลาร์ออโตมาตาส่งผ่านด้วยกฎ 170 เป็นจำนวนห้าขั้นตอนดังตารางที่ 2.1 แถวเซลล์ของผลลัพธ์สุดท้ายจากการส่งผ่านดังกล่าวได้เป็น 1100001101010010 และเมื่อนำผลลัพธ์สุดท้ายดังกล่าวส่งผ่านด้วยกฎ 240 ด้วยจำนวนห้าขั้นตอนเหมือนกันดังตารางที่ 2.2 จะเห็นได้ว่า กฎการส่งผ่าน 240 สามารถส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาให้ย้อนกลับไปที่สถานะตั้งต้นได้ สรุปได้ว่ากฎการส่งผ่าน 240 เป็นกฎย้อนกลับได้ของกฎ 170

ตารางที่ 2.1 การส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาด้วยกฎ 170

step0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
step1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
step2	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
step3	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
step4	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
step5	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

ตารางที่ 2.2 การส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาด้วยกฎ 240

step0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
step1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
step2	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
step3	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
step4	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
step5	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

จากคุณสมบัติของการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาด้วยกฎบางคู่จึงมีงานวิจัยที่นำคุณสมบัติดังกล่าวไปใช้ในวิทยาการเข้ารหัสลับ (cryptography) ซึ่งหลักการทำงานคือ ให้กฎการส่งผ่านเป็นกุญแจในการแปลงข้อความใดๆในเลขฐานสอง และใช้กฎที่เป็นคู่กันในการย้อนกลับได้

ของเซลลูลาร์ออโตมาตาให้การถอดรหัสด้วยจำนวนครั้งของการเข้ารหัสที่เท่ากัน โดยข้อความที่ถูกเข้ารหัสแล้วจะให้ความซับซ้อนและใช้เวลาทำงานในการเข้าและถอดรหัสแบบขนาน แต่ทั้งนี้ก็ยังมีข้อด้อยเมื่อศึกษาถึงจำนวนคู่ของกฎในการทำให้เซลลูลาร์ออโตมาตานั้นย้อนกลับได้ ซึ่งมีเพียงหกคู่เท่านั้น นั่นคือ 15 คู่กับ 85, 170 คู่กับ 240, 51 คู่กับ 51, 105 คู่กับ 105, 150 คู่กับ 150 และ 204 คู่กับ 204 จึงทำให้การเข้ารหัสด้วยลักษณะดังกล่าวยังไม่เป็นที่แพร่หลายนัก

2.4 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้โดยใช้หน่วยความจำ (Reversible Cellular Automata With Memory)

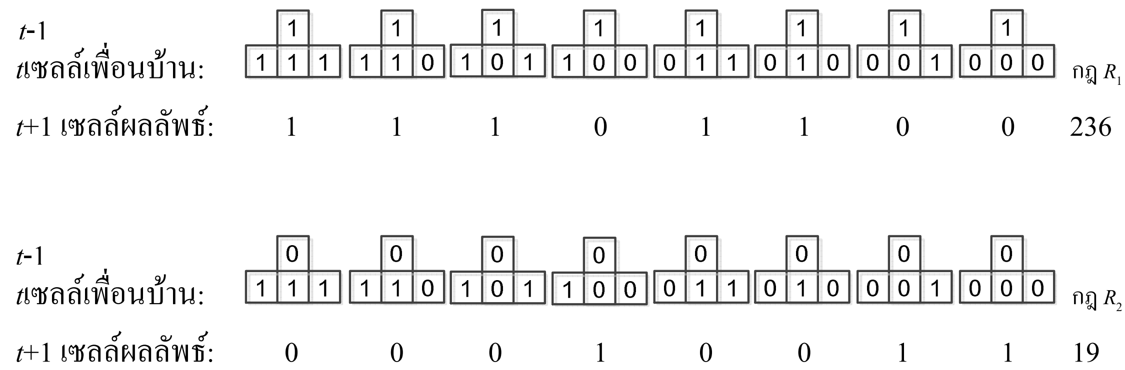
ในปี ค.ศ.1990 ทอฟโฟลี (Toffoli) [3] ได้เสนอแนวคิดของเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้โดยใช้หน่วยความจำ นั่นคือสถานะของเซลล์ถัดจากสถานะปัจจุบันจะไม่ขึ้นอยู่กับเพียงเซลล์ที่สถานะปัจจุบันเท่านั้น แต่ยังต้องพิจารณาเซลล์ที่สถานะก่อนหน้าด้วย สามารถเขียนได้เป็น

$$S_i^{t+1} = f_i(S_{i-r}^t, ..., S_{i-1}^t, S_i^t, S_i^{t-1}, S_{i+1}^t, ..., S_{i+r}^t)$$

ดังนั้น เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้โดยใช้หน่วยความจำประเภทที่เป็นพื้นฐานที่สุดจะพิจารณาฟังก์ชันการส่งผ่านโดยพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านคือเซลล์ตนเอง เซลล์ทางขวา เซลล์ทางซ้าย และเซลล์ตนเองในสถานะก่อนหน้าหนึ่งสถานะ เขียนโดย

$$S_i^{t+1} = f_i(S_{i-1}^t, S_i^t, S_i^{t-1}, S_{i+1}^t)$$

ซึ่งการกำหนดการส่งผ่านให้เป็นในลักษณะดังกล่าวจะต้องใช้กฎการส่งผ่านจำนวนสองกฎมาประกอบกันดังรูปที่ 2.9 เพื่อให้ครอบคลุมไปถึงการพิจารณาเซลล์ที่สถานะก่อนหน้าด้วย นั่นคือ หากเซลล์ก่อนหน้า (S_i^{t-1}) มีค่าเป็น ‘1’ ให้ใช้กฎ R_1 ในการส่งผ่าน และเมื่อมีค่าเป็น ‘0’ ให้ใช้กฎ R_2 ในการส่งผ่าน โดยให้เรียกกฎดังกล่าวว่ากฎ 236, 19 และการส่งผ่านในทางย้อนกลับก็เพียงแต่สลับกฎทั้งคู่นั่นคือให้ใช้กฎ 19, 236 ในการส่งผ่านย้อนกลับนั่นเอง



รูปที่ 2.9 การส่งผ่านด้วยกฎ 236, 19

การส่งผ่านด้วยกฎแบบคู่ดังกล่าวเกิดจากกฎที่เป็นกฎเติมเต็ม (complement) ซึ่งกันและกัน ทำให้เราสามารถเลือกกฎ R_1 ใดๆก็ได้ที่มีค่า $0 \le R_1 \le 255$ และคำนวณหากฎ R_2 ได้จาก

$$R_2 = 2^d - R_1 - 1$$

เมื่อ $d = 2^{2r+1}$

จากคุณสมบัติการย้อนกลับได้โดยใช้หน่วยความจำของเซลลูลาร์ออโตมาข้างต้น จะเห็นว่ามีกฎที่ใช้ในการส่งผ่านเพื่อให้ย้อนกลับได้จำนวนทั้งสิ้น 256 คู่ของกฎ ซึ่งทำให้หลายๆงานวิจัยทางด้านวิทยาการเข้ารหัสลับ [5-6] ได้นำคุณสมบัติดังกล่าวไปเข้ารหัสด้วยกฎการส่งผ่าน และถอดรหัสด้วยกฎที่เป็นคู่กัน

2.5 การส่งผ่านด้วยกฎเวกเตอร์สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตา (Vector Rule Transition of the Cellular Automata)

ในการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบทั่วไปจะใช้กฎการส่งผ่านที่ใช้กับทุกเซลล์ซึ่งเรียกการส่งผ่านดังกล่าวว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาส่งผ่านด้วยกฎแบบสม่ำเสมอ (uniform) แต่หากกฎการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาเป็นแบบไม่สม่ำเสมอ (non-uniform) แล้วจะเรียกว่าเป็นกฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ (vector rule) ซึ่งหมายความว่าแต่ละสถานะของเซลล์ไม่จำเป็นต้องมีกฎการส่งผ่านตัวเดียวกัน โดยสามารถนิยามได้ดังนี้

นิยาม 2.1 กฎเวกเตอร์ $R = <r_1,r_2,\ldots,r_i,\ldots,r_n>$ เมื่อ r_i คือกฎที่ใช้ในการส่งผ่านเซลล์ i ของเซลลูลาร์ออโตมาตา และถ้า $r_1 = r_2 = \ldots = r_i = \ldots = r_n$ จะกล่าวได้ว่าเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบสม่ำเสมอ

นิยาม 2.2 กฎที่สมดุล (balance) คือกฎที่ประกอบไปด้วยจำนวนของ '1' และจำนวนของ '0' ที่เท่ากันในรูปแบบการแสดงผลแบบแปดบิตในเลขฐานสอง นอกเหนือจากนั้นให้เรียกว่าเป็น กฎที่ไม่สมดุล (unbalance rule)

จากนิยาม 2.2 จะเห็นว่ากฎที่แสดงผลในรูปแปดบิตในเลขฐานสองจะเป็นกฎที่สมดุลเมื่อมีประกอบด้วย '1' จำนวนสี่ตัว และ '0' จำนวนสี่ตัวเช่นกัน ยกตัวอย่างเช่น กฎ 15 ซึ่งเขียนในรูปของเลขฐานสองคือ 00001111 จะเห็นว่าเป็นกฎที่สมดุล

2.6 เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้โดยเซลล์ที่เข้าถึงได้ (Reversible Cellular automata by the Reachable Cell)

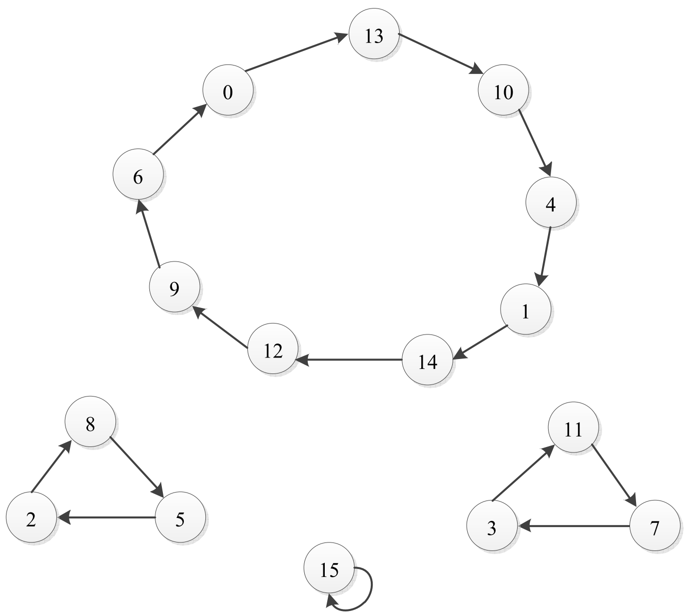
ในปี ค.ศ. 2004 แดส (Das) และ ซิกดาร์(Sikdar) [4] ได้นำเสนอคุณลักษณะใหม่ของอีลีเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมาตา นั่นคือลักษณะของเซลล์ที่เข้าถึงได้โดยได้นำเสนอการหาเวกเตอร์ย้อนกลับได้โดยการเข้าถึงได้ของเซลล์ซึ่งใช้วิธีในการตรวจสอบการเข้าถึงได้ของเซลล์ด้วยวิธีการสร้างต้นไม้ทวินาม (binary tree) โดยให้นิยามว่าต้นไม้ดังกล่าวจะต้องเป็นต้นไม้ทวินามสมบูรณ์ (complete binary tree) ที่แจงกรณีของผลลัพธ์ออกมาทั้งหมด ทั้งนี้ หากต้นไม้ดังกล่าวเป็นแบบทวินามสมบูรณ์แล้วจะสรุปได้ว่าเป็นเซลล์แบบเข้าถึงได้ และหากเป็นลักษณะอื่นๆจะสรุปว่าเป็นเซลล์แบบเข้าถึงไม่ได้

ซึ่งเมื่อกำหนดให้ตัวนำเข้าและผลลัพธ์มีขนาดความยาวสี่บิตและใช้กฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ด้วยการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า แล้วจะสามารถจำแนกลักษณะของเซลลูลาร์ออโตมาตาได้เป็นสองแบบ ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาเวกเตอร์ในการส่งผ่าน <105, 177, 170, 75> จะได้ว่าเกิดลักษณะของการส่งผ่านทั้งหมดดังรูปที่ 2.10

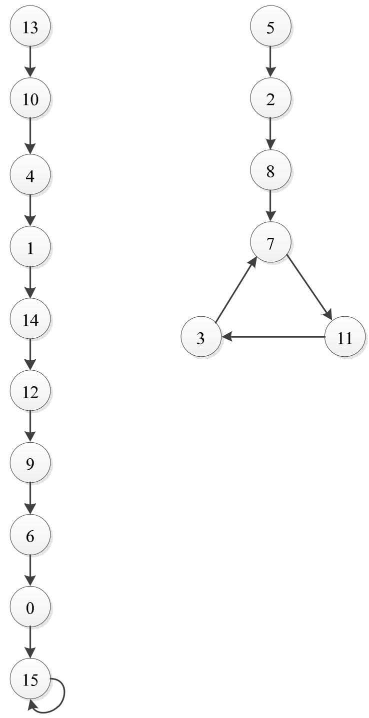
$0000 \rightarrow 1101$	$1000 \rightarrow 0101$
$0001 \rightarrow 1110$	$1001 \rightarrow 1010$
$0010 \rightarrow 1000$	$1010 \rightarrow 0100$
$0011 \rightarrow 1011$	$1011 \rightarrow 0111$
$0100 \rightarrow 0001$	$1100 \rightarrow 1001$
$0101 \rightarrow 0010$	$1101 \rightarrow 1010$
$0110 \rightarrow 0000$	$1110 \rightarrow 1100$
$0111 \rightarrow 0011$	$1111 \rightarrow 1111$

รูปที่ 2.10 การส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาขนาดความยาวสี่ด้วยกฎ <105, 177, 170, 75>

ซึ่งเมื่อเขียนให้การส่งผ่านด้วยกฎ <105, 177, 170, 75> อยู่ในรูปของกราฟของการส่งผ่านทั้ง 16 แบบและให้ตัวเลขที่ปรากฏในแต่ละโหนดของกราฟแสดงเลขที่แปลงมาจากเลขฐานสองของการส่งผ่านแต่ละตัวนำเข้าไปเป็นเลขในฐานสิบจะเห็นลักษณะการส่งผ่านดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 กราฟแสดงการส่งผ่านของกฎ <105, 177, 170, 75>



รูปที่ 2.12 กราฟแสดงการส่งผ่านของกฎ <105, 177, 171, 75>

จากรูปที่ 2.11 จะสังเกตเห็นว่าลักษณะของการส่งผ่านของแต่ละสถานะสามารถส่งผ่านให้วนกลับมาที่สถานะเริ่มต้นได้ด้วยจำนวนขั้นตอนจำนวนหนึ่ง จึงกล่าวได้ว่ากฎ <105, 177, 170, 75> เป็นกฎแบบย้อนกลับได้ ซึ่งทุกเซลล์เป็นเซลล์ที่เข้าถึงได้ จึงเรียกว่าเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบเข้าถึงได้ (reachable cellular automata) นั่นคือ ที่สถานะใดๆ จะมีสถานะก่อนหน้าเสมอ และเมื่อพิจารณากฎ <105, 177, 171, 75> ซึ่งพิจารณาในลักษณะเดียวกันจากรูปที่ 2.12 จะเห็นว่ามีบางสถานะเท่านั้นที่สามารถส่งผ่านให้วนกลับมาที่สถานเดิมได้ (สถานะ 3, 7, 11 และ 15) และในบางสถานะไม่มีสถานะก่อนหน้า (สถานะ 5 และ 13) จึงกล่าวได้ว่ากฎ <105, 177, 171, 75> เป็นกฎที่ย้อนกลับไม่ได้และให้เรียกว่าเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาแบบเข้าถึงไม่ได้ (non-reachable cellular automata)

ทั้งนี้งานวิจัยดังกล่าวได้เสนออัลกอริทึมในการหาคำตอบของการเป็นกฎที่สามารถเข้าถึงได้กับเข้าถึงไม่ได้เมื่อให้กฎ $R = \langle r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle$ จึงทำให้กฎที่ใช้ในการทำให้เซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้นั้นมีจำนวนเพิ่มขึ้นไปกว่าเดิมอันเนื่องมาจากคุณสมบัติของกฎเวกเตอร์ แต่การย้อนกลับของงานวิจัยนี้มีข้อเสียตรงที่การย้อนกลับไม่ได้กลับด้วยเส้นทางในการส่งผ่านเดิม เพียงแต่อาศัยคุณสมบัติของกฎเดิมในการส่งผ่านให้วนกลับไปสู่สถานะเริ่มต้น

บทที่ 3

การทวนสอบการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติโดยใช้การส่งผ่านเวกเตอร์

ในบทนี้จะกล่าวถึง การทวนสอบการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติโดยใช้การส่งผ่านเวกเตอร์ โดยเริ่มต้นจากการนิยามฟังก์ชันและศึกษาคุณสมบัติของการทวนสอบการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติโดยใช้การส่งผ่านเวกเตอร์พร้อมทั้งนำเสนออัลกอริทึมในการหากฎการส่งผ่านที่ทำให้เซลลูลาร์ออโตมาตาสามารถย้อนกลับได้ รวมไปถึงบทการพิสูจน์ทำงานของอัลกอริทึมดังกล่าว และยังมีตัวอย่างประกอบความเข้าใจ

3.1 การส่งผ่านแบบเวกเตอร์สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตา

นิยาม 3.1 เซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติขนาด n ชนิดสม่ำเสมอเซลล์เพื่อนบ้านขนาด N เซลล์ เขียนได้เป็น $\{D, K, S, N, F_R\}$ เมื่อ

D คือ จำนวนมิติของเซลลูลาร์ออโตมาตา $D = 1$,

K คือ เซตของสถานะทั้งหมดที่เซลล์สามารถเป็นไปได้ $K = \{0, 1\}$,

S คือ เซตของสายอักขระขนาดความยาว n

N คือ ขนาดของเซลล์เพื่อนบ้าน $\{x_{i-r},\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots, x_{i+r}\}$ โดย r คือรัศมีของเซลล์เพื่อนบ้าน, จะเห็นว่า $N = 2r+1$

และ F_R คือ ฟังก์ชันในการส่งผ่าน $F_R{:}S\times N\rightarrow S$ เขียนได้เป็น $F_R((x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n), N) =$

$$\underbrace{f_{r_1}\left(\mathrm{x}_{1-r}\ldots x_0x_1x_2\ldots \mathrm{x}_{1+r}\right) f_{r_2}\left(\mathrm{x}_{2-r}\ldots x_1x_2x_3\ldots \mathrm{x}_{2+r}\right)\ldots f_{r_i}\left(x_{i-r}\ldots x_{i-1}x_ix_{i+1}\ldots \mathrm{x}_{i+r}\right)\ldots f_{r_n}\left(x_{n-r}\ldots x_{n-1}x_nx_{n-1}\ldots x_{n+r}\right)}_{n \text{ ครั้ง}}$$

เนื่องจากเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดสม่ำเสมอ ดังนั้นจะได้ว่า $r_1 = r_2 = \ldots = r_i = \ldots = r_n$

โดยที่

$$f_{r_i}(x_{i-r}\ldots x_{i-1}x_ix_{i+1}\ldots \mathrm{x}_{i+r}) = b_{i,j}$$

เมื่อ

$$2^{2r+1} - \sum_{k=i-r}^{i+r} x_k \cdot 2^{i+r-k} = j$$

และ

$$r_i = \sum_{j=1}^{2^{2r+1}} b_{i,j} \cdot 2^{2^{2r+1}-j} \qquad \text{เมื่อ } b_{i,j} \in \{0,1\}$$

จะเห็นได้ว่า

$$0 \le r_i \le 2^{2^{2r+1}} - 1$$

และจาก

$$f_{r_i}(x_{i-r}\ldots x_{i-1}x_ix_{i+1}\ldots \mathrm{x}_{i+r}) = y_i$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$F_R((x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n), N) = y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n = Y$$

นิยาม 3.2 เซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติขนาด n ชนิดไม่สม่ำเสมอเซลล์เพื่อนบ้านขนาด N เซลล์ ส่งผ่านด้วยกฎเวกเตอร์ $R = <r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n>$ คือเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีบางเซลล์ไม่ได้ใช้กฎเดียวกันในการส่งผ่าน ซึ่งแต่ละเซลล์สามารถเขียนได้เป็น

$$f_{r_i}(x_{i-r}\ldots x_{i-1}x_ix_{i+1}\ldots \mathrm{x}_{i+r}) = y_i$$

ทฤษฎีบทที่ 3.1 อีลีเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติขนาด n ชนิดไม่สม่ำเสมอเซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์ (เซลล์ซ้าย, เซลล์กลาง, เซลล์ขวา) ส่งผ่านด้วยกฎเวกเตอร์

$R = <r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n>$ เขียนได้เป็น $\{D, K, S, N, F_R\}$ เมื่อ

D คือ จำนวนมิติของเซลลูลาร์ออโตมาตา $D = 1$,

K คือ เซตของสถานะทั้งหมดที่เซลล์สามารถเป็นไปได้ $K = \{0, 1\}$,

S คือ เซตของสายอักขระขนาดความยาว n

N คือ ขนาดของเซลล์เพื่อนบ้าน $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ โดย r คือรัศมีของเซลล์เพื่อนบ้านและ $r = 1$, จะเห็นว่า $N = 2r+1= 3$

และ F_R คือ ฟังก์ชันในการส่งผ่าน F_R: $S \times N \rightarrow Y$ เขียนได้เป็น $F_R((x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n), 3) =$

$f_{r_1}(x_0x_1x_2)\, f_{r_2}(x_1x_2x_3)\ldots f_{r_i}(x_{i-1}x_ix_{i+1})\ldots f_{r_n}(x_{n-1}x_nx_{n-1})$

โดยที่

$$f_{r_i}(x_{i-1}x_ix_{i+1}) = b_{i,j}$$

เมื่อ

$$2^{2r+1} - \sum_{k=i-1}^{i+1} x_k \cdot 2^{i+1-k} = j$$

และสำหรับทุก i จะได้ว่า

$$r_i = \sum_{j=1}^{2^3} b_{i,j} \cdot 2^{2^{2r+1}-j} \qquad \text{เมื่อ } b_{i,j} \in \{0,1\}$$

หรือสามารถเขียนได้เป็น

$$f_{r_i}(x_{i-1}x_ix_{i+1}) = \begin{cases} b_{i,1};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 111 \\ b_{i,2};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 110 \\ b_{i,3};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 101 \\ b_{i,4};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 100 \\ b_{i,5};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 011 \\ b_{i,6};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 010 \\ b_{i,7};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 001 \\ b_{i,8};\, x_{i-1}x_ix_{i+1} = 000 \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่า

$$0 \le r_i \le 255 \qquad \text{สำหรับทุก } i$$

และจาก

$$f_{r_i}(x_{i-1}x_ix_{i+1}) = y_i$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$F_R((x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n), 3) = y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n = Y$$

จะเห็นได้ว่ากฎการส่งผ่านจะเป็นตัวกำหนดว่าเมื่อเซลล์เพื่อนบ้านอยู่ในรูปใดแล้วจะให้ผลลัพธ์ในการส่งผ่านเป็นอะไร ซึ่งสามารถเขียนกฎการส่งผ่าน $R = < r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_n >$ แปลงให้อยู่ในรูปของตารางค่าความจริงได้ดังรูปที่ 3.1 โดยแต่ละหลักคือลักษณะแต่ละแบบของเซลล์เพื่อนบ้าน และแต่ละแถวคือกฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์เรียงตามลำดับ ในที่นี้ *RMT* (rule min term) คือการเขียนเซลล์เพื่อนบ้านให้อยู่ในรูปของเลขฐานสิบเพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา

เซลล์เพื่อนบ้าน	: 111	110	101	100	011	010	001	000	กฎ
RMT	: (7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)	
เซลล์ผลลัพธ์	: $b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{1,4}$	$b_{1,5}$	$b_{1,6}$	$b_{1,7}$	$b_{1,8}$	(r_1)
เซลล์ผลลัพธ์	: $b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$b_{2,3}$	$b_{2,4}$	$b_{2,5}$	$b_{2,6}$	$b_{2,7}$	$b_{2,8}$	(r_2)
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
เซลล์ผลลัพธ์	: $b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$b_{n,3}$	$b_{n,4}$	$b_{n,5}$	$b_{n,6}$	$b_{n,7}$	$b_{n,8}$	(r_n)

รูปที่ 3.1 ส่งผ่านของกฎเวกเตอร์ขนาดความยาว *n*

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้สายอักขระเลขบิต $X = 1101$ และกำหนดฟังก์ชันการส่งผ่าน F_R ซึ่ง $R = <15, 51, 204, 153>$ ส่งผ่าน X ด้วย F_R เป็นจำนวนห้าครั้ง

วิธีทำ เขียนตารางค่าความจริงของกฎ R ได้รูปที่ 3.2 ดังนี้

เซลล์เพื่อนบ้าน	: 111	110	101	100	011	010	001	000	กฎ
RMT	: (7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)	
เซลล์ผลลัพธ์	: 0	0	0	0	1	1	1	1	(15)
เซลล์ผลลัพธ์	: 0	0	1	1	0	0	1	1	(51)
เซลล์ผลลัพธ์	: 1	1	0	0	1	1	0	0	(204)
เซลล์ผลลัพธ์	: 1	0	0	1	1	0	0	1	(153)

รูปที่ 3.2 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ R = <15, 51, 204, 153>

จากงานวิจัยนี้ได้กำหนดขอบเขตของเซลลูลาร์ออโตมาตาให้เป็นขอบเขตแบบรอบ (periodic boundary condition) นั่นหมายความว่า $x_0 = x_n$ และ $x_{n+1} = x_1$ โดยเมื่อเริ่มส่งผ่านด้วยตัวนำเข้า $X = 1101$ นั่นคือ จะต้องพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านที่ทุกๆตำแหน่ง หรือที่เรียกว่าการส่งผ่านย่อย ซึ่งเมื่อส่งผ่านเป็นจำนวนห้าขั้นตอนจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : $F_R((1101),3) = f_1(111)\, f_2(110)\, f_3(101)\, f_4(011) = 0001,$

ขั้นตอนที่ 2 : $F_R((0001),3) = f_1(100)\, f_2(000)\, f_3(001)\, f_4(010) = 0100,$

ขั้นตอนที่ 3 : $F_R((0100),3) = f_1(000)\, f_2(010)\, f_3(100)\, f_4(000) = 1001,$

ขั้นตอนที่ 4 : $F_R((1001),3) = f_1(110)\, f_2(100)\, f_3(001)\, f_4(011) = 0101,$

ขั้นตอนที่ 5 : $F_R((0101),3) = f_1(101)\, f_2(010)\, f_3(101)\, f_4(010) = 0000,$

จากตัวอย่างที่ 3.1 จะเห็นได้ว่าความยาวของสายอักขระเลขบิตที่เป็นตัวนำเข้าตั้งต้น (1101) จะมีขนาดเท่ากับความยาวของกฎเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการส่งผ่านย่อยของแต่ละตำแหน่งเสมอ ซึ่งผลลัพธ์ของแต่ละขั้นตอนก็จะมีขนาดความยาวเท่ากันหมดนั่นคือสี่อักขระทำให้เขียนได้ว่า $F_R^5((1101),3) = 0000$

3.2 คุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

จากการใช้กฎเวกเตอร์สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตานั้นเราพบว่าเวกเตอร์ของกฎนั้นสามารถสร้างกฎการส่งผ่านได้เป็นจำนวนมากขึ้นอยู่กับขนาดความยาวของเซลลูลาร์ออโตมาตา โดยเมื่อ

เซลลูลาร์ออโตมาตามาขนาดความยาว n จะทำให้ได้ว่าจำนวนกฎของการส่งผ่านนี้ เป็น 255^n ซึ่งส่วนใหญ่แล้วจะเป็นกฎที่สามารถส่งผ่านได้เพียงทางเดียว หรือเรียกว่าเป็นกฎการส่งผ่านที่ไม่สามารถย้อนกลับได้ ดังนั้นการทราบถึงคุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตานั้นจะทำให้เราคัดแยกกฎที่มีคุณสมบัติในการย้อนกลับไม่ได้ออกได้

บทตั้งที่ 3.1 เซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติชนิดไม่สม่ำเสมอเซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์ โดย F_R เป็นฟังก์ชันบนเซตของทุกสายอักขระเลขบิตขนาดยาว n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งฟังก์ชัน F_R มีเวกเตอร์ $R = <r_1, r_2,\dots, r_i,\dots, r_n>$ ในการส่งผ่าน เมื่อ $0 \le r_i \le 255$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม i ถ้ามี r_i เป็นกฎที่ไม่สมดุล (unbalance rule) แล้วจะถือว่ากฎ $R = <r_1, r_2,\dots, r_i,\dots, r_n>$ ไม่สามารถส่งผ่านให้เซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

พิสูจน์ ให้เซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติชนิดไม่สม่ำเสมอเซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์มีกฎการส่งผ่าน

$$R = <r_1, r_2,\dots,r_i,\dots, r_n>$$ ซึ่งเป็นกฎที่ไม่สมดุล

พิจารณาเซลล์ที่ i ซึ่งถูกส่งผ่านด้วยกฎ r_i

ให้ d_i เป็นสถานะถัดไปของเซลล์ที่ i ซึ่งสอดคล้องกับจำนวน k กรณีของการเกิดเซลล์เพื่อนบ้านจะได้ว่า

$$d_i = 0/1 \text{ และ } k > 4$$

ดังนั้นจะมีจำนวนสถานะของเซลล์ปัจจุบันเป็น

$$k \cdot 2^{n-3}$$

ที่มีสถานะถัดไปอยู่ในรูป

$$S = y_1 y_2 \dots y_{i-1} d_i y_{i+1} \dots y_n$$

จะเห็นว่าจำนวนสถานะถัดมากที่สุดที่สามารถเป็นไปได้คือ 2^{n-1}

และจาก

$$k \cdot 2^{n-3} > 2^{n-1} \text{ เมื่อ } k > 4$$

จะได้ว่าจำนวนสถานะถัดไปนั้นมีน้อยกว่าจำนวนของสถานะปัจจุบันที่จะส่งไป

ดังนั้นบางสถานะใน S มีจำนวนสถานะก่อนหน้ามากกว่าหนึ่งสถานะ

จะได้ว่า เซลลูลาร์ออโตมาตานี้มีการส่งผ่านที่ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งจึงสรุปได้ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีการส่งผ่านด้วยกฎที่ไม่สมดุลเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาที่ไม่สามารถย้อนกลับได้

จะเห็นได้ว่าเมื่อใช้นิยามของการเป็นกฎแบบสมดุลและไม่สมดุลจะทำให้เราสามารถพิจารณาของกฎการส่งผ่านที่ไม่สามารถย้อนกลับได้ทันทีเมื่อมีกฎที่ส่งผ่านบางตำแหน่งของเวกเตอร์ที่ไม่สมดุล ทั้งนี้จากจำนวนกฎของแต่ละตำแหน่งสามารถเป็นไปได้ทั้งหมดคือ $0 \le r_i \le 255$ นั่นคือมีจำนวน 255 กฎแต่จะพบว่ากฎที่สมดุลมีจำนวนเท่ากับ $C_k^n = C_4^8 = 70$ กฎเท่านั้นที่มีสิทธิ์ใช้เป็นกฎสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

3.3 อัลกอริทึมในการทวนสอบกฎสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

จากตัวอย่างที่ 3.1 ทำให้เกิดคำถามว่ากฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ดังกล่าวสามารถทำให้เซลลูลาร์ออโตมาตาส่งผ่านย้อนกลับได้หรือไม่ ซึ่งถ้าหากว่าย้อนกลับได้แล้ว จะต้องหาได้ว่ากฎที่ใช้ในการส่งผ่านเพื่อให้เกิดลักษณะดังกล่าวคือกฎใด

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ปัญหาในการทวนสอบความสามารถในการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติชนิดไม่สม่ำเสมอเซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์เป็นปัญหาที่สามารถหาคำตอบได้

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นจะพิสูจน์ด้วยการเสนออัลกอริทึมในการหากฎในการส่งผ่านย้อนกลับได้ (F_R^{-1}) เมื่อกำหนดกฎการส่งผ่าน F_R ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติชนิดไม่สม่ำเสมอเซลล์เพื่อนบ้านขนาดสามเซลล์ ดังนี้

อัลกอริทึมที่ 3.1: อัลกอริทึมการส่งผ่านย่อยของเซลลูลาร์ออโตมาตา (f_r)

input rule r (when r is the given decimal value from 0 to 255)

Neighborhood $x_1x_2x_3$

output bit-string y

begin

01: Convert r to be the bit-string and put in the r[8]

02: for i = 1 to 3 do

03: $RMT \leftarrow RMT + x_i \cdot 2^{3-i}$

04: enddo

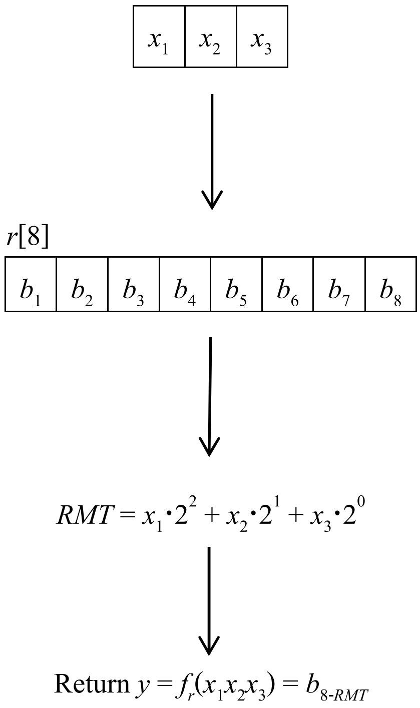
05: $y = r[8 - RMT]$

end

จากอัลกอริทึมที่ 3.1 จะเห็นว่าการส่งผ่านย่อยจะมีตัวนำเข้าประกอบด้วยกฎ r เมื่อ r เป็นตัวเลขในฐานสิบและมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 255 และตัวนำเข้าที่เป็นเซลล์เพื่อนบ้านคือ $x_1x_2x_3$ โดยมีผลลัพธ์คือ y มีการทำงานดังรูปที่ 3.3

input :rule r (when r is the decimal value from 0 to 255)

Neighborhood $x_1x_2x_3$



รูปที่ 3.3 การทำงานของการส่งผ่านย่อยของเซลลูลาร์ออโตมาตา

อัลกอริทึมที่ 3.2: อัลกอริทึมการส่งผ่านรวมด้วยกฎเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตา (F_R)

input $R = <r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n>$

Message $X = x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n$

output bit-string $Y = y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n$

begin

for $i = 1$ to n do

if $i = 1$ do

$x_{i-1} \leftarrow x_n$

else if $i = n$ do

$x_{i+1} \leftarrow x_1$

$y_i \leftarrow f_{r_i}(x_{i-1}x_ix_{i+1})$

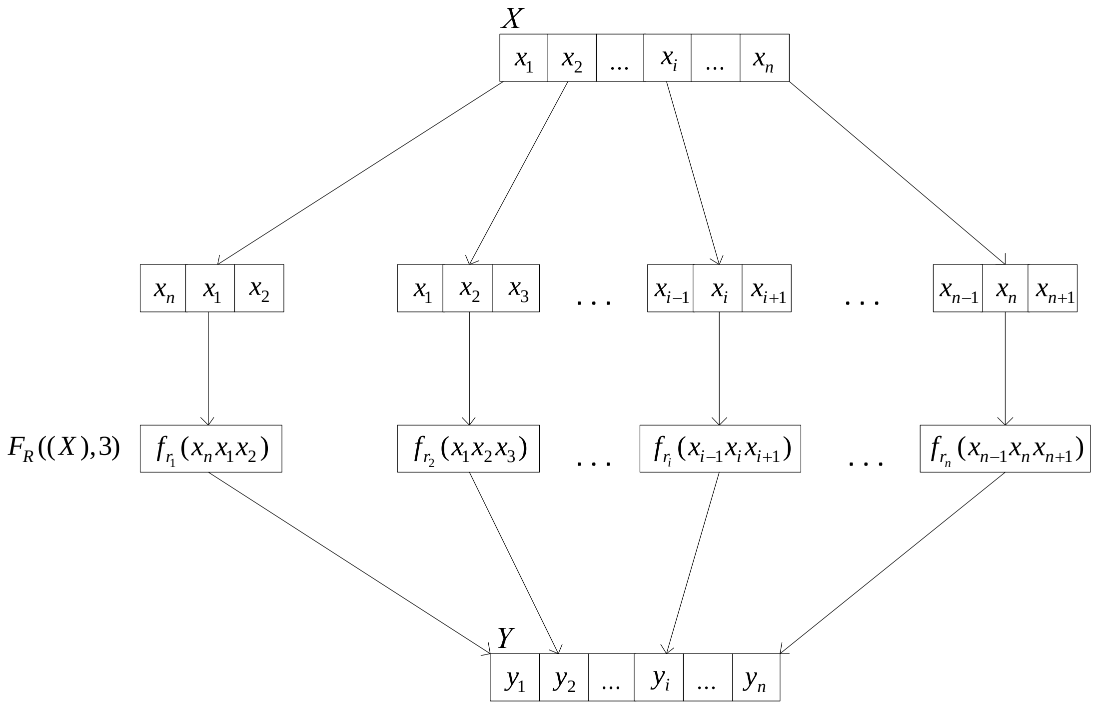
enddo

let $Y = y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n$

end

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 จะเห็นว่าการส่งผ่านรวมแบบเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตามีตัวนำเข้าประกอบด้วยกฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ $R = <r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n>$ เมื่อแต่ละ r_i เป็นตัวเลขในฐานสิบและมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 255 และตัวนำเข้าเป็นสายอักขระ $X = x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n$ เมื่อ $x_i \in \{0,1\}$ มีผลลัพธ์เป็นสายอักขระ $Y = y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n$ ที่ถูกกฎ R ส่งผ่าน เมื่อ $y_i \in \{0,1\}$ ทั้งนี้สามารถอธิบายการทำงานได้ดังรูปที่ 3.4

input :$R = \langle r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n \rangle$, $X = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n$



รูปที่ 3.4 แสดงการส่งผ่านรวมด้วยกฎเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตา $F_R((X), 3)$

อัลกอริทึมที่ 3.3: อัลกอริทึมในการทวนสอบกฎสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาย้อนกลับได้

input $R = < r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_n >$

Message $x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n$

output $R^{-1} = < r_1^{-1}, r_2^{-1}, ...r_i^{-1}, ..., r_n^{-1} >$

begin

for $i = 1$ to n do

    for $j = 1$ to 8 do

        $b[i][j] \leftarrow d$ // set default value at the b table

    enddo

enddo

for $i = 1$ to n do

    if r_i is the unbalance, return R is not reversible

    for $j = 0$ to 7 do

        for $k = 0$ to 2^n do

            if f_i^{-1}(three-bits binary representation of j) is unique x_i,

                then $b[i][8-j] \leftarrow x_i$

                otherwise R is not reversible

        enddo

    enddo

    let $r_i^{-1} \leftarrow CONCATENATE(b[i][1], b[i][2], b[i][3], b[i][4], b[i][5], b[i][6], b[i][7], b[i][8])$

enddo

let $R^{-1} = < r_1^{-1}, r_2^{-1}, ..., r_n^{-1} >$

end

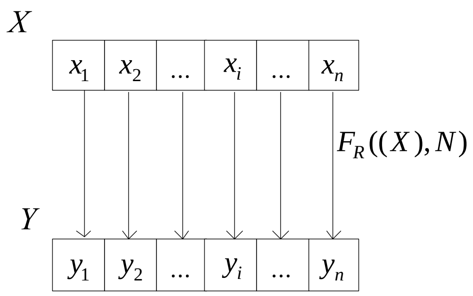
จากอัลกอริทึมที่ 3.3 จะเห็นว่าอัลกอริทึมในการทวนสอบกฎสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาย้อนกลับได้มีตัวนำเข้าประกอบด้วยกฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ $R = <r_1, r_2,\ldots, r_i,\ldots, r_n>$ เมื่อแต่ละ r_i เป็นตัวเลขในฐานสิบและมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 255 และตัวนำเข้าที่เป็นสายอักขระ $X = x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n$ เมื่อ $x_i \in \{0,1\}$ หากกฎ R เป็นกฎที่สามารถส่งผ่านให้เซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้ อัลกอริทึมจะคืนค่าผลลัพธ์เป็นกฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ $R^{-1} = <r_1^{-1}, r_2^{-1},\ldots, r_i^{-1},\ldots, r_n^{-1}>$ แต่หากกฎ R เป็นกฎที่ไม่สามารถส่งผ่านให้เซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้จะเรียกว่ากฎดังกล่าวเป็นกฎที่ไม่สามารถย้อนกลับได้

ทั้งนี้ในขั้นแรก สมมุติว่ากฎการส่งผ่าน R เป็นกฎที่สามารถส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้ จะได้ว่ามีกฎการส่งผ่าน $R^{-1} = <r_1^{-1}, r_2^{-1},\ldots, r_i^{-1},\ldots, r_n^{-1}>$ ที่ใช้ในการส่งผ่านในทางย้อนกลับของกฎการส่งผ่าน $R = <r_1, r_2,\ldots, r_i,\ldots, r_n>$ ซึ่งจะขอตั้งค่าเริ่มต้นสำหรับ r_i^{-1} เป็น d โดยเขียนกฎ R^{-1} ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 การตั้งค่าเริ่มต้นให้กับตารางที่จะเป็นกฎการส่งผ่าน R^{-1}

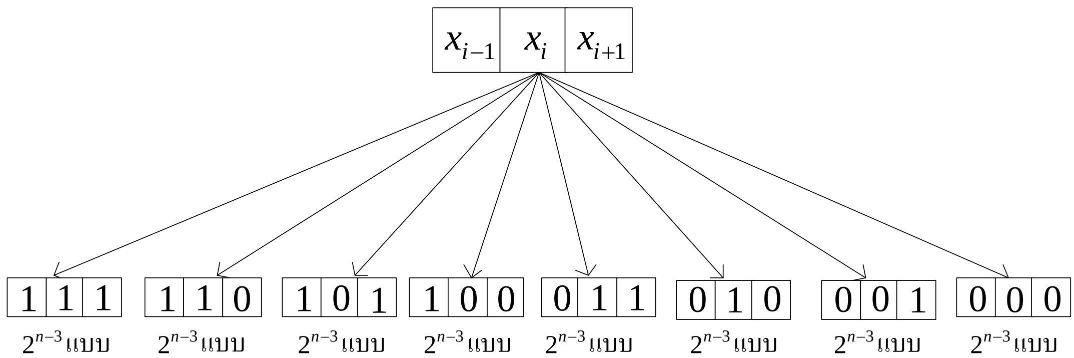
PS	111	110	101	100	011	010	001	000
r_1^{-1}	d	d	d	d	d	d	d	d
r_2^{-1}	d	d	d	d	d	d	d	d
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r_i^{-1}	d	d	d	d	d	d	d	d
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r_n^{-1}	d	d	d	d	d	d	d	d

เมื่อพิจารณาการส่งผ่านที่เกิดขึ้นจาก $F_R((X),\mathrm{N}) = Y$ จะได้ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 แสดงการส่งผ่านรวมของเซลลูลาร์ออโตมาตา $F_R((X), N)$

จะเห็นว่า มีจำนวนการส่งผ่านที่เป็นไปได้ทั้งหมด 2^n แบบ และเมื่อพิจารณาหากสามารถส่งผ่านย้อนกลับได้ ลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านที่ตำแหน่งเซลล์ i ใดๆที่ส่งผ่านจะเป็นไปได้ทั้งหมดแปดกรณี (จากบทนิยามของกฎสมดุล) ดังนี้



รูปที่ 3.6 แสดงจำนวนรูปแบบของผลลัพธ์ที่ส่งผ่านด้วยเซลล์เพื่อนบ้าน $(x_{i-1}x_ix_{i+1})$

จากรูปที่ 3.6 จะเห็นว่าแต่ละรูปแบบของเซลล์เพื่อนบ้านในทางย้อนกลับมีกรณีที่ซ้ำกันเป็นจำนวน $\frac{2^n}{8} = 2^{n-3}$ แบบ และจากสมมติฐาน R เป็นกฎที่สามารถย้อนกลับได้ จะได้ว่าการส่งผ่านของเซลล์เพื่อนบ้านแต่ละแบบตั้งส่งไปยังที่เดียวกัน นั่นคือ x_i หากเกิดเหตุการณ์ของเซลล์เพื่อนบ้าน

ส่งผ่านในทางย้อนกลับมีชุดใดชุดหนึ่งส่งกลับไปคนละตัว จะสรุปได้ว่ากฎ R ไม่สามารถส่งผ่านแบบย้อนกลับได้

ทั้งนี้จะได้ว่า $b_{i,8-j} = x_i$ เมื่อ j คือเลขในฐานสิบของเซลล์เพื่อนบ้าน และเมื่อกระทำในลักษณะเดียวกันจะได้ว่า $r_i^{-1} = (b_{i,1}b_{i,2}b_{i,3}b_{i,4}b_{i,5}b_{i,6}b_{i,7}b_{i,8})_2$ ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 แสดงกฎย้อนกลับได้ r_i^{-1} เมื่อทราบ $b_{i,j}$

PS	111	110	101	100	011	010	001	000
r_1^{-1}	d	d	d	d	d	d	d	d
r_2^{-1}	d	d	d	d	d	d	d	d
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_i^{-1}	$b_{i,1}$	$b_{i,2}$	$b_{i,3}$	$b_{i,4}$	$b_{i,5}$	$b_{i,6}$	$b_{i,7}$	$b_{i,8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_n^{-1}	d	d	d	d	d	d	d	d

และสุดท้ายเมื่อทำจนครบทุกตำแหน่ง เราจะได้ว่า $R^{-1} =< r_1^{-1}, r_2^{-1}, ...r_i^{-1}, ..., r_n^{-1} >$ ซึ่งเป็นกฎที่สามารถทำให้เซลลูลาร์ออโตมาตาที่ถูกส่งผ่านด้วยกฎเวกเตอร์ R ส่งผ่านย้อนกลับได้

พิสูจน์อัลกอริทึมที่ 3.1 สมมติให้ $R = <r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n>$ และสายอักขระของเลขบิต $X = x_1x_2...x_i...x_n$ ซึ่งถูกส่งผ่านด้วย F_R ทำให้ได้ว่า

$$F_R((X), 3) = Y$$

ซึ่ง

$$Y = y_1y_2...y_i...y_n$$

พิจารณา y_i สำหรับทุกๆจำนวนเต็ม i ทำให้ได้ว่า

$$f_{r_i}(x_{i-1}x_ix_{i+1}) = y_i$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงการส่งผ่านที่เกิดขึ้นทั้งหมดของ $y_{i-1}y_iy_{i+1}$ จะต้องส่งผ่านไปยังตัวเดียวกันนั่นคือ x_i โดยหากเกิดลักษณะนี้ขึ้น เราจะสรุปว่าการส่งผ่าน ณ ตำแหน่งนั้นจะต้องเป็นไปตาม x_i แล้วนำค่าดังกล่าวไปเก็บไว้ในกฎการส่งผ่านที่จะเป็นคำตอบ คือ

$$b_{i,8-j}^{-1} = x_i$$

เมื่อ

$$j = 2^2 \cdot y_{i-1} + 2^1 \cdot y_i + 2^0 \cdot y_{i+1}$$

โดยที่ $0 \le j \le 7$

ซึ่งเมื่อพิจารณาทุกกรณีของ x_i แล้วจะทำให้ได้ $b_{i,j+1}^{-1}$ ซึ่งรวมกันเป็น ครบทุกตำแหน่ง นั่นคือ r_i^{-1} และเมื่อทำในลักษณะเดียวกันทุกๆ i เป็นจำนวน n ครั้ง จะทำให้ได้ r_i^{-1} ครบทุก i นั่นคือ

$$R^{-1} = < r_1^{-1}, r_2^{-1}, \ldots, r_i^{-1}, \ldots, r_n^{-1} >$$

และเมื่อนำกฎ R^{-1} มาใช้ในการส่งผ่านตัวผลลัพธ์ Y ซึ่งเขียนได้ว่า

$F_{R^{-1}}((Y),3)$ โดย $Y = y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n$ สำหรับทุกๆจำนวนเต็ม i

จะทำให้ได้ว่า

$$f_{r_i^{-1}}(y_{i-1}y_iy_{i+1}) = x_i$$

และเขียนได้ว่า

$$F_{R^{-1}}((y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n),3) = x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n$$

นั่นคือ

$$F_{R^{-1}}((Y),3) = X$$

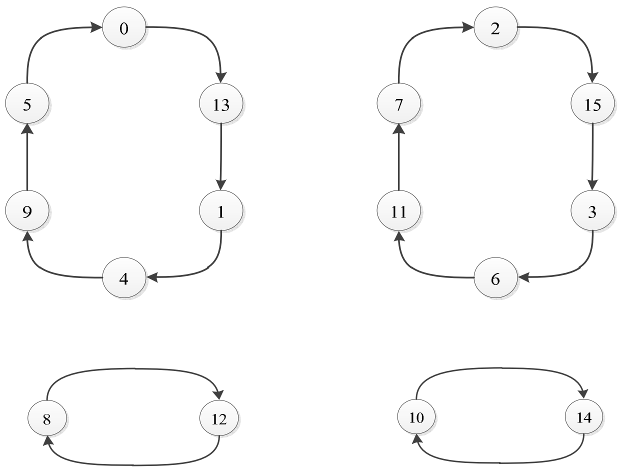
ตัวอย่างที่ 3.2 เซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีกฎการส่งผ่านคือ <15, 51, 204, 153> เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้หรือไม่

วิธีทำ ตารางค่าความจริงของกฎ R = <15, 51, 204, 153> สามารถดูได้ที่รูปที่ 3.2 และเมื่อเขียนการส่งผ่านทั้งหมดที่เกิดขึ้นจะได้ดังรูปที่ 3.7 ดังนี้

$0000 \rightarrow 1101$	$1000 \rightarrow 1100$
$0001 \rightarrow 0100$	$1001 \rightarrow 0101$
$0010 \rightarrow 1111$	$1010 \rightarrow 1110$
$0011 \rightarrow 0110$	$1011 \rightarrow 0111$
$0100 \rightarrow 1001$	$1100 \rightarrow 1000$
$0101 \rightarrow 0000$	$1101 \rightarrow 0001$
$0110 \rightarrow 1011$	$1110 \rightarrow 1010$
$0111 \rightarrow 0010$	$1111 \rightarrow 0011$

รูปที่ 3.7 การส่งผ่านของสายอักขระยาวสี่ด้วยกฎ <15, 51, 204, 153>

ซึ่งเมื่อเขียนการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาด้วยกฎ <15, 51, 204, 153> ให้อยู่ในรูปของกราฟของการส่งผ่านทั้ง 16 แบบและให้ตัวเลขที่ปรากฏในแต่ละโหนดของกราฟแสดงเลขที่แปลงมาจากเลขฐานสองของการส่งผ่านแต่ละตัวนำเข้าไปเป็นเลขในฐานสิบจะเห็นลักษณะการส่งผ่านไปยังสถานะถัดไปดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 กราฟแสดงการส่งผ่านของกฎ <15, 51, 204, 153> ในรูปของเลขฐานสิบ

วิธีการในการหากฎที่จะใช้ในการส่งแบบย้อนกลับมีดังนี้

พิจารณาตำแหน่ง $i = 1$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 000</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$0101 \rightarrow \underline{00}0\underline{0}$

$0111 \rightarrow \underline{00}1\underline{0}$

จะได้ว่า $b_{1,8} = 0$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 001</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$0001 \rightarrow \underline{01}0\underline{0}$

$0011 \rightarrow \underline{01}1\underline{0}$

จะได้ว่า $b_{1,7} = 0$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 010</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$1100 \rightarrow \underline{10}0\underline{0}$

$1110 \rightarrow \underline{10}1\underline{0}$

จะได้ว่า $b_{1,6} = 1$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 011</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$1000 \rightarrow \underline{11}0\underline{0}$

$1010 \rightarrow \underline{11}1\underline{0}$

จะได้ว่า $b_{1,5} = 1$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 100</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$1101 \rightarrow \underline{00}0\underline{1}$

$1111 \rightarrow \underline{00}1\underline{1}$

จะได้ว่า $b_{1,4} = 1$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 101</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$1001 \rightarrow \underline{01}0\underline{1}$

$1011 \rightarrow \underline{01}1\underline{1}$

จะได้ว่า $b_{1,3} = 1$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 110</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$0100 \rightarrow \underline{10}0\underline{1}$

$0110 \rightarrow \underline{10}1\underline{1}$

จะได้ว่า $b_{1,2} = 0$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 111</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีดังกล่าวคือ

$0000 \rightarrow \underline{11}0\underline{1}$

$0010 \rightarrow \underline{11}1\underline{1}$

จะได้ว่า $b_{1,1} = 0$

ดังนั้นจะทำให้ได้ว่า $r_1^{-1} = (b_{1,1}b_{1,2}b_{1,3}b_{1,4}b_{1,5}b_{1,6}b_{1,7}b_{1,8})_2 = (00111100)_2 = 60$ นั่นเอง

นั่นคือ เมื่อพิจารณาที่ $i = 2, 3, 4$ ในลักษณะเดียวกันนี้จะทำให้ได้ว่า

$$r_2^{-1} = (b_{2,1}b_{2,2}b_{2,3}b_{2,4}b_{2,5}b_{2,6}b_{2,7}b_{2,8})_2 = (00110011)_2 = 51$$

$$r_3^{-1} = (b_{3,1}b_{3,2}b_{3,3}b_{3,4}b_{3,5}b_{3,6}b_{3,7}b_{3,8})_2 = (11001100)_2 = 204$$

$$r_4^{-1} = (b_{4,1}b_{4,2}b_{4,3}b_{4,4}b_{4,5}b_{4,6}b_{4,7}b_{4,8})_2 = (01010101)_2 = 85$$

ดังนั้น จะได้ว่าเซลลูลาร์ออโตมาตาสามารถย้อนกลับได้ด้วย

$R^{-1} = < r_1^{-1}, r_2^{-1}, ..., r_n^{-1} > = < 60, 51, 204, 85 >$

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้สายอักขระของเลขบิต $Y = 0000$ และกำหนดฟังก์ชันการส่งผ่าน F_R ซึ่ง $R = < 60, 51, 204, 85 >$ ส่งผ่าน X ด้วย F_R เป็นจำนวนห้าครั้ง

วิธีทำ เขียนตารางค่าความจริงของกฎ R ได้รูปที่ 3.9 ดังนี้

เซลล์เพื่อนบ้าน :	111	110	101	100	011	010	001	000	กฎ
RMT :	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)	
เซลล์ผลลัพธ์ :	0	0	1	1	1	1	0	0	(60)
เซลล์ผลลัพธ์ :	0	0	1	1	0	0	1	1	(51)
เซลล์ผลลัพธ์ :	1	1	0	0	1	1	0	0	(204)
เซลล์ผลลัพธ์ :	0	1	0	1	0	1	0	1	(85)

รูปที่ 3.9 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ R = <60, 51, 204, 85>

โดยเมื่อเริ่มส่งผ่านด้วยตัวนำเข้า $Y = 0000$ นั่นคือ จะต้องพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านที่ทุกๆตำแหน่ง หรือที่เรียกว่าการส่งผ่านย่อย ซึ่งเมื่อส่งผ่านเป็นจำนวนห้าขั้นตอนจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : $F_R((0000),3) = f_1(000)\, f_2(000)\, f_3(000)\, f_4(000) = 0101,$

ขั้นตอนที่ 2 : $F_R((0101),3) = f_1(101)\, f_2(010)\, f_3(101)\, f_4(010) = 1001,$

ขั้นตอนที่ 3 : $F_R((1001),3) = f_1(110)\, f_2(100)\, f_3(001)\, f_4(011) = 0100,$

ขั้นตอนที่ 4 : $F_R((0100),3) = f_1(000)\, f_2(010)\, f_3(100)\, f_4(000) = 0001,$

ขั้นตอนที่ 5 : $F_R((0001),3) = f_1(100)\, f_2(000)\, f_3(001)\, f_4(010) = 1101$

ดังนั้นจะได้ว่า $F_R^5((0000),3) = 1101$

จากตัวอย่างที่ 3.1 จะเห็นได้ว่า $F_R^5((1101),3) = 0000$ เมื่อ R = <15,51,204, 153>และเมื่อเราใช้กฎการส่งผ่านที่เป็นกฎย้อนกลับของกฎข้างต้นนั่นคือ R = <60, 51, 204, 85> มาใช้ในการ

ส่งผ่านผลลัพธ์สุดท้ายในตัวอย่างที่ 3.1 ด้วยจำนวนขั้นตอนที่เท่ากันดังที่ปรากฏในตัวอย่างที่ 3.3 ทำให้ได้ว่า $F_R^5((0000),3) = 1101$ ซึ่งได้เป็นอักขระที่เป็นตัวนำเข้าตั้งแต่ต้น หรือที่เรียกว่าทำให้เซลลูลาร์ออโตมาตาสามารถย้อนกลับได้ นอกจากนี้ยังสามารถสังเกตได้ว่าลักษณะในการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตายังเป็นการย้อนกลับในเส้นทางเดิมดังนี้

$F_R^5((1101),3) = 0000$ เมื่อ $R = <15, 51, 204, 153>$ (ดังตัวอย่างที่ 3.1)

นั่นคือ $1101 \to 0001 \to 0100 \to 1001 \to 0101 \to 0000$

$F_R^5((0000),3) = 1101$ เมื่อ $R = <60, 51, 204, 85>$ (ดังตัวอย่างที่ 3.3)

นั่นคือ $0000 \to 0101 \to 1001 \to 0100 \to 0001 \to 1101$

ตัวอย่างที่ 3.4 เซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีกฎการส่งผ่านคือ <240, 170, 225, 156> เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้หรือไม่

วิธีทำ ตารางค่าความจริงของกฎ <240, 170, 225, 156> สามารถเขียนได้ดังรูปที่ 3.10

เซลล์เพื่อนบ้าน :	111	110	101	100	011	010	001	000	กฎ
RMT :	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)	
เซลล์ผลลัพธ์ :	1	1	1	1	0	0	0	0	(240)
เซลล์ผลลัพธ์ :	1	0	1	0	1	0	1	0	(170)
เซลล์ผลลัพธ์ :	1	1	1	0	0	0	0	1	(225)
เซลล์ผลลัพธ์ :	1	0	0	1	1	1	0	0	(156)

รูปที่ 3.10 แสดงฟังก์ชันของการส่งผ่านด้วยกฎ <204, 170, 225, 156>

จากตารางค่าความจริงของกฎ <204, 170, 225, 156> จะเห็นว่ากฎการส่งผ่านประกอบไปด้วยกฎย่อยๆที่สมดุลทุกตำแหน่ง จึงยังไม่สามารถได้ว่าเป็นกฎที่สามารถส่งผ่านให้ย้อนกลับได้หรือไม่ วิธีการในการหากฎที่จะใช้ในการส่งแบบย้อนกลับมีดังนี้

พิจารณาตำแหน่ง $i = 1$

<u>กรณีเซลล์เพื่อนบ้าน 000</u> จะเห็นได้ว่าเกิดกรณีคือ

$0000 \rightarrow \underline{00}1\underline{0}$

เกิดข้อขัดแย้งในการส่งผ่านย้อนกลับ

$1100 \rightarrow \underline{00}0\underline{0}$

จะเห็นได้ว่าเกิดข้อขัดแย้งที่ตำแหน่ง i = 1 เซลล์เพื่อนบ้าน 000 จะได้ว่ากฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ <240, 170, 225, 156>ไม่มีกฎที่ใช้ในการส่งผ่านย้อนกลับ จึงถือว่าไม่เป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

บทที่ 4

วิเคราะห์เซลลูลาร์ออโตมาตา

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงบทวิเคราะห์เกี่ยวกับการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ย้อนกลับได้สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้ ซึ่งแบ่งออกเป็นสองส่วน ประกอบด้วย ส่วนที่หนึ่งกล่าวถึงเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติเดิมที่ลักษณะของเซลล์เพื่อนบ้านอยู่ในรูปแบบสมมาตร ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป (generic form) นั่นคือ จำนวนของการพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายอาจจะไม่เท่ากับจำนวนของการพิจารณาเซลล์ทางขวาของแต่ละเซลล์สถานะ กล่าวได้อีกทางหนึ่งคือเป็นเซลล์เพื่อนบ้านชนิดไม่สมมาตร ส่วนที่สองกล่าวถึงการเปรียบเทียบจำนวนของกฎการส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

4.1 การส่งผ่านแบบเวกเตอร์สำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดเซลล์เพื่อนบ้านไม่สมมาตร

จะเห็นว่าการส่งผ่านแต่ละครั้งสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตานั้นจะพิจารณาจากเซลล์เพื่อนบ้านที่มาจากเซลล์ตนเอง เซลล์ทางด้านซ้ายและเซลล์ทางด้านขวาในจำนวนที่เท่ากัน (เรียกว่าขนาดรัศมี r) ซึ่งอยู่ในรูปแบบสมมาตรกันทั้งสองด้าน แต่ในบางกรณีของเซลลูลาร์ออโตมาตาการพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านไม่จำเป็นต้องเป็นตามรูปแบบข้างต้น โดยจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายอาจจะไม่เท่ากับจำนวนเซลล์ทางขวา ซึ่งเรียกได้ว่าเป็นเซลลูลาร์ออโตมาตาชนิดเซลล์เพื่อนบ้านไม่สมมาตร ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการกำหนดรัศมีของเซลล์ทางซ้าย (l) และรัศมีของเซลล์ทางขวา (r) ดังนี้

นิยาม 4.1 เซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติขนาด nชนิดสม่ำเสมอ เซลล์เพื่อนบ้านไม่สมมาตร เขียนได้เป็น $\{D, K, X, Y, N, F_R\}$ เมื่อ

D คือ จำนวนมิติของเซลลูลาร์ออโตมาตา $D=1$,

K คือ เซตของสถานะทั้งหมดที่เซลล์สามารถเป็นไปได้ $K = \{0, 1\}$,

S คือ เซตของสายอักขระขนาดความยาว n

N คือ ขนาดของเซลล์เพื่อนบ้าน $\{x_{i-l},\ldots,x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots,x_{i+r}\}$ โดย l คือรัศมีของเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้าย, r คือรัศมีของเซลล์เพื่อนบ้านทางขวา,

จะเห็นได้ว่าจำนวนเซลล์เพื่อนบ้านทั้งหมดคือ $N = l + r + 1$

และฟังก์ชันในการส่งผ่าน $F_R: S \times N \to S$ สามารถเขียนได้เป็น $F_R((x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n), N) =$

$$\underbrace{f_{r_1}\left(\mathrm{x}_{1-l}\ldots x_0x_1x_2\ldots \mathrm{x}_{1+r}\right) f_{r_2}\left(\mathrm{x}_{2-l}\ldots x_1x_2x_3\ldots \mathrm{x}_{2+r}\right)\ldots f_{r_i}\left(x_{i-l}\ldots x_{i-1}x_ix_{i+1}\ldots \mathrm{x}_{\mathrm{i}+r}\right)\ldots f_{r_n}\left(x_{n-l}\ldots x_{n-1}x_nx_{n-1}\ldots x_{n+r}\right)}_{n \text{ ครั้ง}}$$

โดยที่

$$f_{r_i}\,(x_{i\text{-}l}\ldots x_{i\text{-}1}x_ix_{i+1}\ldots \mathrm{x}_{\mathrm{i}+r}) = b_{i,j}$$

เมื่อ

$$2^{l+r+1} - \sum_{k=i-l}^{i+r} x_k \cdot 2^{i+r-k} = j$$

และ

$$r_i = \sum_{j=1}^{2^{l+r+1}} b_{i,j} \cdot 2^{2^{l+r+1}-j} \qquad \text{เมื่อ } b_{i,j} \in \{0,1\}$$

จะเห็นได้ว่า

$$0 \le r_i \le 2^{2^{l+r+1}} - 1$$

และจาก

$$f_{r_i}\,(x_{i\text{-}l}\ldots x_{i\text{-}1}x_ix_{i+1}\ldots \mathrm{x}_{\mathrm{i}+r}) = y_i$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$F_R((x_1x_2\ldots x_i\ldots x_n), N) = y_1y_2\ldots y_i\ldots y_n = Y$$

จากนิยามที่ 4.1 ข้างต้นแสดงให้เห็นว่าการกำหนดให้การพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านของเซลลูลาร์ออโตมาตาให้เป็นแบบไม่สมมาตร นั่นคือ การที่จำนวนของเซลล์เพื่อนบ้านทางซ้ายและจำนวนของเซลล์ทางขวาไม่เท่ากันนั้นจะทำให้การนำไปประยุกต์ใช้กับงานอื่นๆมีความยืดหยุ่นมาก

ขึ้น เพราะไม่ได้จำกัดอยู่ที่การพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านที่มีความสมมาตรเพียงอย่างเดียว อีกทั้งยังช่วยให้เกิดความซับซ้อนในส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาอันเนื่องมาจากการคาดเดาถึงจำนวนและรูปแบบของเซลล์เพื่อนบ้านนั้นจะเป็นไปได้ยาก

4.2 การเปรียบเทียบจำนวนของกฎการส่งผ่านสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

จากคุณสมบัติของการส่งผ่านย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิตินั้นเกิดขึ้นกับกฎเพียงบางกฎเท่านั้น และจากการศึกษาเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติชนิดที่ง่ายที่สุด คือ อิลิเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมาตาซึ่งได้ถูกพิสูจน์แล้วว่าสามารถส่งผ่านด้วยความซับซ้อนสูงแต่ก็ยังมีข้อจำกัดเรื่องของจำนวนกฎที่ใช้ในการส่งผ่านได้นั้นมีจำนวนน้อยเกินไป จึงได้มีการพัฒนาในด้านส่วนขยายของเซลลูลาร์ออโตมาตาในรูปแบบต่างๆดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 ซึ่งสามารถสรุปจำนวนของกฎการส่งผ่านสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้ดังตารางที่ 4.1 ดังนี้

ตารางที่ 4.1 การเปรียบเทียบจำนวนกฎการส่งผ่านสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้

ชนิดของเซลลูลาร์ออโตมาตา	จำนวนของกฎที่ส่งผ่านย้อนกลับได้	
	ขอบเขตแบบไม่มีค่า	ขอบเขตแบบรอบ
อีลีเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมาตา	2	6
เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบย้อนกลับได้โดยใช้หน่วยความจำ	-	256
เซลลูลาร์ออโตมาตาโดยการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ (ขนาดความยาวสาม)	512	40,320
เซลลูลาร์ออโตมาตาโดยการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ (ขนาดความยาวสี่)	1,968	7,264

จากการกำหนดให้เซลลูลาร์ออโตมาตามีกฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์นั้นทำให้มีจำนวนของกฎในการการส่งผ่านเป็นจำนวนมาก แต่กฎที่สามารถส่งผ่านให้เซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้นั้นยังต้องถือว่ามีเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น แต่เมื่อเทียบกับชนิดเดิมที่ผ่านมาต้องถือว่ามีจำนวนมากกว่าอย่างมีนัยสำคัญดังตารางที่ 4.1 ซึ่งจากการทดลองหากฎที่มีขนาดความยาวสามและสี่ยังสามารถทำให้เราทราบได้ว่าการเลือกลักษณะของขอบเขตของเซลลูลาร์ออโตมาตามีผลต่อจำนวนของกฎที่ใช้ย้อนกลับได้เช่นกัน ทั้งนี้กฎที่ได้จากการคำนวณยังสามารถนำไปใช้ส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาได้จริง

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

เซลลูลาร์ออโตมาตาย้อนกลับได้ในหนึ่งมิติ [1] นั้น เป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับความสนใจมาอย่างยาวนาน ด้วยคุณสมบัติของการทำงานด้วยเซลล์ที่เรียงต่อกันเป็นจำนวนมาก แต่ละเซลล์มีการทำงานแบบสถานะจำกัดที่ทำงานไปพร้อมกันแบบขนาน การมีโครงสร้างและกฎในการส่งผ่านอย่างง่ายของอีลีเมนทารีเซลลูลาร์ออโตมาตา [2] (การพิจารณาเซลล์เพื่อนเพียงเซลล์ตนเอง เซลล์ทางซ้าย เซลล์ทางขวา และการสร้างกฎจากตัวเลขฐานสองขนาดความยาวแปดเท่านั้น) แต่สามารถสร้างรูปแบบในการส่งผ่านที่ซับซ้อนได้ ทำให้งานวิจัยต่างๆได้นำโมเดลดังกล่าวไปใช้แก้ปัญหาและประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ ซึ่งคุณสมบัติการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาได้ถูกศึกษาและนำมาประยุกต์ใช้ในหลายๆงานวิจัย แต่เนื่องจากคุณสมบัติที่จำเป็นดังกล่าวสามารถเกิดขึ้นกับเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีกฎในการส่งผ่านที่มีลักษณะที่เฉพาะเจาะจงมากเกินไปหรืออาจกล่าวได้ว่ามีกฎที่ใช้ในการส่งผ่านย้อนกลับได้น้อยเกินไป ซึ่งปัญหาการหากฎที่สามารถส่งผ่านย้อนกลับได้ยังเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจเพื่อสร้างเซลลูลาร์ออโตมาตาที่มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ในงานวิจัยนี้ประยุกต์ใช้กฎการส่งผ่านชนิดไม่สม่ำเสมอซึ่งมีอยู่ในงานวิจัยของแดสและซิกดาร์ [4] นั่นคือการให้เซลลูลาร์ออโตมาตาส่งผ่านด้วยกฎเวกเตอร์ (แต่ละเซลล์ส่งผ่านด้วยกฎที่แตกต่างกัน) แทนการส่งผ่านด้วยกฎเดียวกันตลอดทุกเซลล์และการกำหนดขอบเขตแบบรอบด้วยสมมติฐานที่ว่าหากการเพิ่มคุณลักษณะที่ทำให้การส่งผ่านของเซลลูลาร์ออโตมาตามีความหลากหลายมากขึ้นจะทำให้กฎที่สามารถส่งผ่านย้อนกลับได้นั้นมีจำนวนมากขึ้นอีกทั้งการส่งผ่านแต่ละครั้งจะสามารถเพิ่มความซับซ้อนให้มีมากขึ้นกว่าเดิม ทั้งนี้ เพื่อแก้ปัญหาของจำนวนกฎการส่งผ่านเดิมที่มีอยู่น้อยดังที่ได้กล่าวข้างต้นนั้น งานวิจัยนี้จึงได้เสนออัลกอริทึมในการตรวจสอบกฎการส่งผ่านแบบเวกเตอร์ย้อนกลับได้ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการกำหนดกฎการส่งผ่านให้เป็นแบบเวกเตอร์สามารถสร้างกฎการส่งผ่านเป็นจำนวนมาก อัลกอริทึมที่เสนอได้ใช้วิธีการขยายและจำกัดเขต (branch and bound) ประกอบกับการพิจารณาถึงคุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับเซลลูลาร์ออโตมาตาแล้วจะทำให้ทราบได้ว่ากฎที่ใช้ส่งผ่านใดบ้างเป็นกฎที่สามารถส่งผ่านย้อนกลับได้

จากการให้อัลกอริทึมทดสอบกฎการส่งผ่านเวกเตอร์ทุกตัวที่มีขนาดความยาวสามและสี่อักขระ เห็นได้ชัดว่ากฎที่สามารถส่งผ่านย้อนกลับได้นั้นมีจำนวนมากขึ้นกว่าเดิมมาก อีกทั้งการ

กำหนดขอบเขตของเซลลูลาร์ออโตมาตาก็มีผลต่อจำนวนของกฎเช่นกัน นั่นคือเมื่อกำหนดให้ขอบเขตเป็นแบบรอบจะมีจำนวนกฎที่สามารถส่งผ่านย้อนกลับได้มากกว่าการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่า นั่นก็เพราะว่าการกำหนดขอบเขตแบบวงนั้นทำให้การพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านที่อยู่นอกขอบเขตของเซลลูลาร์ออโตมาตาออกมานั้นมีค่าได้หลายแบบขึ้นอยู่กับเซลล์ที่อยู่อีกฝั่ง ซึ่งต่างจากการกำหนดขอบเขตแบบไม่มีค่าที่จะกำหนดให้การพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านที่อยู่นอกขอบเขตออกมาเป็นค่าเพียงค่าเดียวเท่านั้น

แม้ว่าอัลกอริทึมที่ใช้ในการทวนสอบกฎการส่งผ่านแบบย้อนกลับได้จะมีอัตราการเติบโตของเวลาเป็นเลขเอกซ์โพเนนเชียล แต่หากอัลกอริทึมทวนสอบว่ากฎใดเป็นกฎที่มีคุณสมบัติในการส่งผ่านย้อนกลับได้แล้ว อัลกอริทึมจะคืนค่าของกฎที่เป็นคู่ในการส่งผ่านย้อนกลับได้กลับคืนมา ซึ่งกฎที่เป็นคู่กันนั้นจะมีคุณสมบัติในการส่งผ่านย้อนกลับสำหรับสายอักขระใดๆในจำนวนขั้นตอนที่เท่ากันกับการส่งผ่านด้วยกฎก่อนหน้าอีกทั้งเส้นทางในการส่งผ่านแบบย้อนกลับก็จะยังเป็นเส้นทางเดิมของการส่งผ่านในขั้นต้นอีกด้วย

ในงานวิจัยที่จำเป็นต้องอาศัยคุณสมบัติของการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาและพบปัญหาของจำนวนกฎการส่งผ่านที่น้อยเกินไปสามารถเพิ่มประสิทธิภาพการทำงานได้โดยวิธีที่ได้เสนอในงานวิจัยนี้ ซึ่งมีผลทำให้จำนวนกฎการที่สามารถส่งผ่านย้อนกลับได้มีความหลากหลายในงานด้านวิทยาการเข้ารหัสลับสามารถใช้โมเดลข้างต้นในการเข้ารหัสข้อมูลโดยที่กุญแจที่ใช้ในการเข้ารหัสและกุญแจที่ใช้ในการถอดรหัสเป็นคนละตัว อีกทั้งการที่จำนวนของกฎในการส่งผ่านมีเป็นจำนวนมาก ทำให้การถูกโจมตีด้วยวิธีค้นทั้งหมด (brute-force attack) จึงเป็นไปได้ยาก

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

จากงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเสนออัลกอริทึมที่ใช้ในการหากฎเวกเตอร์ของเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติที่มีความสามารถในการย้อนกลับได้ พบว่ายังสามารถทำงานวิจัยในการพัฒนาและปรับปรุงตามหัวข้อดังต่อไปนี้ได้

1) การพิจารณาเซลล์เพื่อนบ้านในการส่งผ่านของแต่ละเซลล์สถานะอาจจะพิจารณาเซลล์ที่มีรัศมีที่มากกว่าเดิมได้ ซึ่งการสร้างกฎในการส่งผ่านก็จะยิ่งมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นรวมถึงเวลาที่ใช้ในการหากฎที่มีคุณสมบัติในการส่งผ่านย้อนกลับก็จะใช้เวลาเพิ่มขึ้นตามไปด้วย อันจะทำให้สามารถเพิ่มความซับซ้อนได้มากยิ่งขึ้น
2) คุณสมบัติในการย้อนกลับได้ของเซลลูลาร์ออโตมาตาที่ได้เสนอ การใช้กฎการส่งผ่านเซลลูลาร์ออโตมาตาใดๆแล้ว การส่งผ่านในทางย้อนกลับสามารถทำได้โดยการส่งผ่าน

กฎที่เป็นคู่กันซึ่งเป็นกฎที่แตกต่างจากกฎที่ใช้ส่งผ่านในขั้นแรกด้วยจำนวนการส่งผ่านที่เท่ากันซึ่งถือว่าเป็นข้อจำกัดที่สำหรับงานวิจัยนี้ ซึ่งงานวิจัยในอนาคตอาจจะศึกษาและทำการหารูปแบบในการส่งผ่านที่สามารถใช้จำนวนของการส่งผ่านย้อนกลับที่ไม่เท่ากัน นั่นหมายความว่าอาจจะต้องหาความสำพันธ์ของจำนวนครั้งของการส่งผ่านทั้งคู่

3) จำนวนมิติของเซลลูลาร์ออโตมาตามีผลต่องานที่จะนำไปประยุกต์ใช้ หรือกล่าวได้ว่างานวิจัยนี้ได้ศึกษาเซลลูลาร์ออโตมาตาหนึ่งมิติซึ่งเหมาะต่อการประยุกต์ใช้กับโมเดลที่มีลักษณะเป็นสายอักขระ โดยต่อไปยังสามารถทำการวิจัยในมิติอื่นๆของเซลลูลาร์ออโตมาตา เช่น เซลลูลาร์ออโตมาตาแบบสองมิติ ซึ่งสามารถในรูปแบบตารางข้อมูลเปรียบเทียบได้กับรูปภาพสองมิติต่างๆ หรือหากเป็นแบบสามมิติ

รายการอ้างอิง

[1] Von Neumann, J., Theory of Self-Reproducing Automata. University of Illinois Press (edited and completed by A. W. Burks), 1966.

[2] Wolfram, S., Theory and Application of Cellular Automata. World Scientific, 1986.

[3] Toffoli, T. and Margolus, N., Invertible Cellular Automata: a review.Physical D45.(1990): 229-253.

[4] Das, S., Sikdar, B.K. and Chaudhuri, P.P., Characterization of Reachable/Nonreachable Cellular Automata States.Proceedings of Sixth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry.(2004) : 813-822.

[5] Seredynski, M. and Bouvry, P.,Block Encryption Using Reversible Cellular Automata. Proceedings of the International Conference on Cellular Automata for Research and Industry. LNCS vol.3305(2004) : 785-792.

[6] Xia, X., Li, Y., Xia, Z. and Wang, R., Data Encryption Based on Multi-granularity Reversible Cellular Automata.Computational Intelligence and Security'2009.Vol. 2, (2009) : 192-196.

[7] Mitchell, M., Computation in Cellular Automata : A Selected Review. In Nonstandard Computation. pp. 95-140. Weinheim : VCH Verlagsgesellschaft, 1998.

[8] Maleki, H. and Sadeghiyan, B., Compound of Reversible One-Dimensional CA Rules for Two-Dimensional CA with Cryptographic Applications.Proceedings of the 14th International CSI Computer Conference.(2009) : 287-292.

[9] Das, S. and Sikdar, B.K.,Characterization of Non-reachable State in Irreversible CA State Space.Proceedings of Sixth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry.LNCS vol.5191,(2008) : 160-167.

[10] Das, S. and Sikdar, B.K., Classification of CA Rules Targeting Synthesis of Reversible Cellular Automata.Proceedings of Sixth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry.LNCS vol.5191,(2006) : 160-167.

[11] Bingham, J. and Bingham, B., Hybrid One-Dimensional Reversible Cellular Automata are Regular.inDiscrete Applied Mathematics 155(2007) : 2555-2566.

[12] Krishna Kishore, M.P., Kiran, S.K., Bhavya, B.B. and Chaitanya, S.H., A Novel Encryption System using Layered Cellular Automata.Proceedings of the World Congress on Engineering.Vol 1 (July 2011) : 500-505.

[13] Wolfram, S., A New Kind of Science.Wolfram Media, 2002.

[14] Wongnin, W., Surarerks, A., Reversible Cellular Automata Verification.Proceeding of the 16th International Annual Symposium on Computational Science and Engineering: ANSCSE16. (May 2012) :305-310.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายวรยุทธ วงศ์นิล เกิดเมื่อวันที่ 16 กันยายน พ.ศ. 2527 จบการศึกษาระดับมัธยมตอนต้นและตอนปลายจากโรงเรียนวิจิตราพิทยา อำเภอวารินชำราบ จังหวัดอุบลราชธานี เข้ารับการศึกษาต่อในระดับปริญญาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จนสำเร็จการศึกษาในปี พ.ศ. 2551 และศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิตที่ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย