ขอบข่ายงานระบบเพียร์สันอย่างเป็นหนึ่งเดียวกันสำหรับการลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต

นาย พิชิต กิตติสุวรรณ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2553

A UNIFIED PEARSON SYSTEM FRAMEWORK FOR IMAGE DENOISING IN WAVELET DOMAIN

Mr. Pichid Kittisuwan

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2010

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ขอบข่ายงานระบบเพียร์สันอย่างเป็นหนึ่งเดียวกันสำหรับการลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต
โดย	นาย พิชิต กิตติสุวรรณ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทยากร อัศดรวิเศษ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	ดร. สรรพฤทธิ์ มฤคทัต

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทยากร อัศดรวิเศษ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(ดร.สรรพฤทธิ์ มฤคทัต)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.สุพัฒนา เอื้อทวีเกรียรติ)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร.ธิติพร จันทร์วิเมลือง)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริญญา สงวนสัตย์)

พิชิต กิตติสุวรรณ์ : ขอบข่ายงานระบบเพียร์สันอย่างเป็นหนึ่งเดียวกันสำหรับการลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต (A UNIFIED PEARSON SYSTEM FRAMEWORK FOR IMAGE DENOISING IN WAVELET DOMAIN) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ.ดร. วิทยากร อัศดรวิเศษ, อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม: ดร. สรรพฤทธิ์ มฤคทัต, 99 หน้า

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอกระบวนการใหม่ในการลดสัญญาณรบกวนภาพ ในปริภูมิเวฟเล็ต ด้วยวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ วิธีที่นำเสนอนี้อาศัยหลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกลร่วมกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นซึ่งสร้างได้จากระบบเพียร์สันในการหาฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรเพื่อใช้ในการลดสัญญาณรบกวนภาพ นอกจากนี้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ยังได้ใช้วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ในการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติเพื่อใช้ร่วมกับฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรที่คำนวณได้ด้วย ซึ่งวิธีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนภาพเป็นที่น่าพอใจ ทั้งในด้านคุณภาพของภาพที่ได้หลังการลดสัญญาณรบกวนและเวลาที่ใช้ในการประมวลผล

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต Wa
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2010 ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

5171820421 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEYWORDS : IMAGE DENOISING / BAYESIAN METHODS / PEARSON SYSTEM / WAVELET TRANSFORM.

PICHID KITTISUWAN: A UNIFIED PEARSON SYSTEM FRAMEWORK FOR IMAGE DENOISING IN WAVELET DOMAIN. ADVISOR: ASST. PROF. WIDHYAKORN ASDORNWISED, Ph.D, CO-ADVISOR : SANPARITH MARUKATAT, Ph.D, 99 pp.

This dissertation has introduced an innovative image denoising approach in wavelet domain by applying Bayes' Risk method. In order to estimate the multivariate shrinkage function, we employ both the parent-and-child relation of the wavelet coefficients and the Probability Density Function (PDF) which is obtained from Pearson system. In addition, this work has proposed the use of Bayes' Risk method to estimate the statistical parameters of the multivariate shrinkage function. The proposed technique has demonstrated promising denoising results, and at the same time, it can retain the computational simplicity.

Department : Electrical Engineering	Student's Signature
Field of Study : Electrical Engineering	Advisor's Signature
Academic Year : 2010	Co-advisor's Signature

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้ามั่นใจว่าจะไม่มีวิทยานิพนธ์ฉบับนี้หากปราศจากบุคคลเหล่านี้ ในระดับปริญญาตรี ผศ.ดร. ชูเกรียติ การะเกด ผู้ที่ให้คำปรึกษาและเซ็นใบคำร้องให้ข้าพเจ้าเสมอ รศ.ดร. ณัฏฐกา หอมทรัพย์ ผู้แนะนำช่องทางทุกๆเรื่องให้ข้าพเจ้า ผศ. ดร. ธีรสิทธิ์ เกษตรเกษม ผู้ที่ไม่เคยปฏิเสธข้าพเจ้าเลย ในระดับปริญญาโท ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ผศ.ดร. วิทยากร อัศดรวิเศษ ผู้ที่รับข้าพเจ้าเป็นลูกศิษย์ในขณะที่ข้าพเจ้าไม่มีความรู้ทางด้านใดเลย แต่ท่านก็เมตตาช่วยหาเอกสารวิชาการที่ดีให้ข้าพเจ้าอ่าน และเริ่มต้นศึกษาหัวข้อใหม่กับข้าพเจ้า สำหรับระดับปริญญาเอก ดร. สรรพฤทธิ์ มฤคทัต อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ผู้ให้คำปรึกษาและความรู้ดีๆ ทางสถิติรวมทั้งความฉลาดที่ข้าพเจ้าชื่นชม ดร. ธิติพร จันทร์วิเมลือง ผู้ที่สละเวลาอันมีค่ายิ่งในการขัดเกลาภาษาอังกฤษและให้ความเห็นเกี่ยวกับวิทยานิพนธ์ ทั้งๆที่ท่านไม่ใช่อาจารย์ที่ปรึกษาข้าพเจ้า อีกครั้งกับ ผศ.ดร. วิทยากร อัศดรวิเศษ ที่ปรึกษาหลักของข้าพเจ้ากับการยอมรับฟังความเห็นต่างในเชิงวิชาการ รวมทั้งยังมีความเมตตาต่อข้าพเจ้าทุกด้าน สำหรับข้าพเจ้าแล้ว ความสัมพันธ์กับท่านนั้นมากกว่าคำว่าอาจารย์ที่ปรึกษาแน่นอนและ รศ.ดร. เจษฎา ชินรุ่งเรือง ครูในการดำเนินชีวิตของข้าพเจ้าๆ ท่านมีความเมตตาต่อข้าพเจ้าอย่างยิ่ง แม้ข้าพเจ้าจะไม่เคยตอบแทนคุณใดๆท่านเลย นาย รัฐพล ทูลแสงงาม ผู้ที่มีนิสัยรวมทั้งหน้าตาที่ดีจริงใจและยังมีมิตรสหายมากมายด้วย แต่สำหรับข้าพเจ้าเค้าเป็นพี่น้อง เค้าช่วยเหลือข้าพเจ้าทุกๆด้าน ในขณะที่ข้าพเจ้ามืดมน ทุกวันนี้และตลอดไปข้าพเจ้าจะระลึกถึงเค้าอยู่เสมอ Prof. Ivan W. Selesnick, Ph.D แห่ง New York University ผู้ทำงานวิจัยที่ทรงคุณค่า โปรแกรมและวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้าได้แนวคิดจากท่าน และ Prof. Karl Pearson, Ph.D ผู้ยิ่งใหญ่ด้านสถิติกับแนวคิดที่ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ใช้สร้าง PDF ได้ น้อยคนจะรู้ว่าท่านเป็นผู้คิดทฤษฎี PCA เมื่อ 100 ปีก่อนแต่ยังมีประยุกต์ใช้แพร่หลาย ท่านสอนให้ข้าพเจ้ารู้ว่างานวิจัยที่ดีเป็นเช่นไร สุดท้าย คือ คุณแม่ ผศ. สุวิมล กิตติสุวรรณ์ (พิทักษ์สุธีพงศ์) ผู้ซึ่งเคยร้องไห้เพื่อข้าพเจ้ามาแล้วนับครั้งไม่ถ้วนและอดทนต่อข้าพเจ้าเสมอมา พ่อสมเกียรติ กิตติสุวรรณ์ ผู้ที่ร่วมทุกข์และสุขต่างๆพร้อมแม่และข้าพเจ้า คุณย่า สุวรรณี กิตติสุวรรณ์ ผู้ซึ่งข้าพเจ้ารู้ว่าท่านรักข้าพเจ้ามากเสมอ น้องสาว วิมลพรรณ กิตติสุวรรณ์ คุณยาย คุณน้า คุณอา รวมทั้งญาติพี่น้องทั้งหมดของข้าพเจ้า ซึ่งมีพระคุณต่อข้าพเจ้ามากเกินคำบรรยายใดๆ สุดท้ายขอขอบคุณทุนสถาบันบัณฑิตวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีไทย (TGIST) สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ (สัญญารับทุนเลขที่ TG-44-09-51-072D) ซึ่งให้ทุนการศึกษา อันเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้ข้าพเจ้าสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย…………………………………………………………………………………ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ……………………………………………………………………...............จ
กิตติกรรมประกาศ…………………………………………………………………………………ฉ
สารบัญ………………………………………………………………………………………………ช
สารบัญตาราง………………………………………………………………………………………ญ
สารบัญภาพ…………………………………………………………………………………………ฎ
บทที่ 1 บทนำ………………………………………………………………………………………..1
1.1 ความสำคัญของปัญหา…………………………………………………………………..1
1.2 วัตถุประสงค์…………………………………………………………………………………2
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์…………………………………………………………………..2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ……………………………………………………………….2
1.5 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการ………………………………………………………………...2
บทที่ 2 ภูมิหลัง……………………………………………………………………………………….4
2.1 การประมาณแบบเบส์……………………………………………………………………….4
2.1.1 การประมาณแบบภายหลังสูงสุด…………………………………………………5
2.1.2 การประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด………………………….6
2.1.3 การประมาณแบบความน่าเป็นจริงสูงสุด……………………………………...6
2.2 การลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต……………………………………….7
2.2.1 การแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต………………………………………………….7
2.2.2 ความเสี่ยงแบบเบส์………………………………………………………………8
2.2.2.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า…………………..9
2.2.2.2 ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล……………..10
2.2.2.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นชนิดหลายตัวแปร………..11
บทที่ 3 ระบบเพียร์สัน………………………………………………………………………………...14
3.1 นิยาม……………………………………………………………………………………….14
3.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นบนพื้นฐานระบบเพียร์สัน…………………14
3.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าที่ใช้สำหรับลดสัญญาณรบกวนภาพในงานวิจัยในอดีต..20

หน้า

บทที่ 4 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าบนพื้นฐานระบบเพียร์สันสำหรับหาฟังก์ชันหดตัว........22
4.1 วิธีประมาณแบบภายหลังสูงสุด........24
4.1.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 7........24
4.1.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าแกมมาสองฝั่ง........27
4.2 วิธีประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด........28
4.2.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า Radial-Exponential......28
บทที่ 5 การประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติสำหรับฟังก์ชันหดตัว........32
5.1 ความแปรปรวนท้องถิ่น........32
5.1.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเงื่อนไข........35
5.1.1.1 กรณี ลาปลาซ-แกมมา........37
5.1.1.2 กรณี เกาส์-แกมมา........38
5.1.2 การประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นที่ขึ้นกับความแปรปรวนสัญญาณรบกวน........40
5.2 ภาวะยอดมน........41
บทที่ 6 ผลการทดลอง........43
บทที่ 7 วิธีลดสัญญาณรบกวนโดยการประมาณฟังก์ชันหดตัวและพารามิเตอร์ทางสถิติด้วยกัน........64
7.1 วิธีฟังก์ชันผกพัน........64
7.2 วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง........72
7.3 ผลการทดลอง........76
บทที่ 8 บทสรุปและข้อเสนอแนะ........85
8.1 บทสรุป........85
8.2 งานวิจัยต่อไปในอนาคต........85
รายการอ้างอิง........87
ภาคผนวก........90
ภาคผนวก ก ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขและการกระจายตัวของสัญญาณรบกวนแบบบวก........91
ภาคผนวก ข ระเบียบวิธีการคาร์ดาโน (Cardano’s method)........92

หน้า

ภาคผนวก ค การแปลงจาโคเบียน (Jacobian Transform)…………………………..93
ภาคผนวก ง Generalized Incomplete Gamma Function…………………………96
ภาคผนวก จ การประมาณพารามิเตอร์ภาวะยอดมน (Kurtosis)……………………..97
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์…………………………………………………………………99

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

3.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดต่างๆ กับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบอื่นๆ.....................................18

3.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง PDF ที่ใช้อธิบายสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในงานวิจัยในอดีต กับ PDF ที่สร้างจากระบบเพียร์สัน...21

4.1 การประยุกต์ใช้ Pearson Type I, Type III, Type VII PDF กับ วิธี MAP หรือ MMSE ใน งานวิจัยในอดีต...23

6.1 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Lena..46

6.2 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Lena เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform...46

6.3 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Boat..49

6.4 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Boat เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform.. 49

6.5 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Man...52

6.6 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Man เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform...52

6.7 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบน ภาพ Hill..55

6.8 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Hill เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform...55

6.9 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Cameraman..58

6.10 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Cameraman เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform...58

6.11 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอ บนภาพ Montage...60

ตารางที่ หน้า

6.12 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Montage เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform………………………………………………………………………… 60
6.13 แสดงค่าเฉลี่ย PSNR ของทุกภาพที่ใช้ทดสอบ……………………………………… 62
6.14 แสดงค่าเฉลี่ยเวลาของทุกภาพที่ใช้ทดสอบเมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform..63
7.1 PSNR ภาพ Lena…………………………………………………………………….. 77
7.2 PSNR ของBoat……….……………………………………………………………… 79
7.3 PSNR ภาพ Man……………………………………………………………………….80
7.4 PSNR ของ Hill……….………………………………………………………………….81
7.5 PSNR ภาพ Cameraman…………………………………………………………… 82
7.6 PSNR ของ Montage...………………………………………………………………… 83
7.7 ค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้งหมด...84

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

2.1 แสดงฟังก์ชันหดตัว Soft-Thresholding และ Hard-Thresholding ตามลำดับ............7

2.2 ตัวอย่าง ฮิสโทแกรมภาพ Man (Pirate) ใน HH1, Cauchy PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF............9

2.3 ลักษณะความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (Parent and Child Relation)............10

2.4 ลักษณะฮิสโทแกรมของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในกรณี 2 ตัวแปร (Bivariate) ในฐานข้อมูลภาพ Corel............12

2.5 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ Radial Exponential Random Vectors ในกรณี $d = 2$ ตัวแปร............12

2.6 ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรในสมการที่ 2.13 กรณี 2 ตัวแปร (BiShrink)............12

3.1 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมา (Gamma PDF) และเลขชี้กำลัง (Exponential PDF)............15

3.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma PDF) และ Radial-Exponential (Laplacian) PDF เมื่อ $\sigma^2 = 4$............16

3.3 ส่วนหนึ่งของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นบนพื้นฐานระบบเพียร์สัน (ก) Beta PDF (Pearson Type I PDF) (ข) Gamma PDF หรือ Exponential PDF ในกรณีที่ $\alpha = 1$ (Pearson Type III PDF) (ค) Chi-Square PDF (Pearson Type III PDF) (ง) Pearson Type IV PDF (จ) Inverse Gamma PDF (Pearson Type V PDF) (ฉ) F PDF (Pearson Type VI PDF) (ช) Cauchy PDF (Pearson Type VII) (ซ) T-PDF (Pearson Type VII) (ฌ) Gaussian PDF (Pearson Type VII PDF) (ญ) Pearson Type VII PDF............20

4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเบ้ (Skewness) กับ ภาวะยอดมน (Kurtosis) ของ PDF จากระบบเพียร์สัน............23

4.2 ฮิสโทแกรมภาพ Lena มาตราส่วนลอการิทึม (Logarithm Scale) ในระดับการแปลงย่อย HH1 และ Pearson Type VII PDF, Two-Sided Gamma PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF (ข) ฮิสโทแกรมภาพ Hill ในระดับการแปลงย่อย HH1 และ Pearson Type VII PDF, Two-Sided Gamma PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF............24

ภาพที่ หน้า

4.3 (ซ้าย) ฟังก์ชันหดตัว PearsonShrink ในกรณี 1-Dimension เมื่อเทียบกับ ฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง (Linear Shrinkage) (ขวา) ฟังก์ชันหดตัว PearsonShrink กรณี 2-Dimension เมื่อ $\sigma_n^2 = 4, \sigma^2 = 8$ และ $m = 4$ 26

4.4 (ซ้าย) ฟังก์ชันหดตัว GammaShrink ในกรณี 1-Dimension เมื่อเทียบกับฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง (ขวา) ฟังก์ชันหดตัว GammaShrink กรณี 2-Dimension เมื่อ....27

5.1 ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (Local Noisy Variance)....33

5.2 ฮิสโทแกรมของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) ที่ LH1 ภาพ Lena ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นลาปลาซ และ เกาส์ (ก) $\sigma_n = 5$ (ข) $\sigma_n = 20$ 36

6.1 แสดงภาพตัวอย่างที่ใช้ในการทดสอบ (ก) Lena (ข) Boat (ค) Man (Pirate) (ง) Hill (จ) Cameraman (ฉ) Montage....44

6.2 แสดง PSNR ที่ระดับ Dimension d = 2, 3 และ 4 บนภาพ Lena โดยรูป (ก) วิธี PearsonShrink โดยใช้ DWT (ข) วิธี PearsonShrink โดยใช้ DT-CWT (ค) วิธี GammaShrink โดยใช้ DWT (ง) วิธี GammaShrink โดยใช้ DT-CWT....45

6.3 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Lena (ข) Lena ทีกำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 30.32 dB (ง) PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 30.44 dB 47

6.4 (ก) Lena บางส่วน (ข) Lena ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี MLAP_MMSE (DWT) PSNR = 28.30 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 29.38 (จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 30.32 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 30.44.... 48

6.5 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Boat (ข) Boat ทีกำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 28.13 dB (ง) GammaShrink (DT-CWT) PSNR = 28.26 dB 50

6.6 (ก) Boat บางส่วน (ข) ที่ $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี BiShrink (DWT) PSNR = 27.23 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 27.47 (จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 28.13 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 28.51....51

ภาพที่ หน้า

6.7 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Man (ข) Man ทีกำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 40$ (ค) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 27.01 dB (ง) GammaShrink (DT-CWT) PSNR = 27.10 dB ……………………………………………………………………………..53

6.8 (ก) Man บางส่วน (ข) Man ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 40$ (ค) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 26.38 (ง) วิธี GammaShrink (DWT) PSNR = 26.08 (จ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 27.01 (ฉ) วิธี GammaShrink (DT-CWT) PSNR = 27.10………………………………………………………………………………54

6.9 ตัวอย่างภาพที่ได้ (ก) Hill (ข) Hill ทีกำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ (ค) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 26.59 dB (ง) PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 26.60 dB ……………………………………………………………………………...56

6.10 (ก) Hill บางส่วน (ข) Hill ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ (ค) วิธี LAWMAP (DWT) PSNR = 25.57 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 26.08 (จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 26.59 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 26.60 ……………………………………………………………………………... 57

6.11 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Cameraman (ข) Cameraman ทีกำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ (ค) วิธี BLS-GSM PSNR = 23.71 (ง) PearsonShrink PSNR = 24.10 dB (จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 24.51 dB (ฉ) PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 24.81 dB………………………………………………………………………59

6.12 (ก) Montage (ข) Montage ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ (ค) วิธี BLS-GSM (DWT) PSNR = 24.68 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 25.11 (จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 25.47 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 25.65………………………………………………………………………………61

6.13 (ก) ค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธี BLS-GSM และวิธีที่นำเสนอทั้งหมด ใน DWT (ข) ค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธี BLS-GSM และวิธีที่นำเสนอทั้งหมด ใน Redundant Wavelet Transform ………………………………………………………………………………63

6.14 ค่าเฉลี่ยเวลาในการลดสัญญาณรบกวนของวิธี BLS-GSM และวิธีที่นำเสนอทั้งหมด ใน Redundant Wavelet Transform ……………………………………………………..63

7.1 แสดงลักษณะฟังก์ชันของสมการ 7.6 ………………………………………………….66

ภาพที่ หน้า

7.2 แสดงลักษณะฟังก์ชันหดตัวของสมการที่ 7.7..66

7.3 ฟังก์ชันหดตัวกรณีผลเฉลยจริงในสมการ 7.7 และผลเฉลยที่ได้จากการประมาณในสมการ 7.11 เมื่อ $\sigma_n^2 = 20, \gamma = 0.02$ 68

7.4 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Lena (ข) Lena ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ (ค) วิธี LAWMAP PSNR = 26.42 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Gaussian PDF PSNR = 26.88 dB 78

7.5 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Boat (ข) Boat ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี PearsonShrink PSNR = 27.47 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Pearson Type VII Random Vectors PSNR = 26.95 dB...79

7.6 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Man (ข) Man ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี PearsonShrink PSNR = 27.57 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Pearson Type VII Random Vectors PSNR = 26.96 dB...80

7.7 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Hill (ข) Hill ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี GammaShrink PSNR = 27.60 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Two-Sided Gamma Random Vectors PSNR = 26.75 dB..81

7.8 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Cameraman (ข) Cameraman ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 20$ (ค) วิธี RadialExpoShrink PSNR = 27.46 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Radial Exponential Random Vectors PSNR = 28.09 dB.............82

7.9 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Montage (ข) Montage ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี PearsonShrink PSNR = 27.72 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Pearson Type VII Random Vectors PSNR = 27.37 dB...83

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหา

เป็นที่ทราบกันดีว่าในกรรมวิธีประมวลผลสัญญาณภาพ (Image Processing) นั้นจะมีปัญหาสำคัญที่เกิดขึ้นเสมอ คือ ปัญหาสัญญาณรบกวนภาพ ดังนั้นที่ผ่านมาในอดีตจึงมีงานวิจัยมากมายที่มุ่งเน้นความพยายามที่จะแก้ไขปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นวิธีการดั่งเดิม คือ วิธีตัวกรองวีนเนอร์ (Wiener Filter) หรือ วิธีลดสัญญาณรบกวนบนปริภูมิจุดภาพ (Pixel Domain) เป็นต้น

แต่ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมานี้มีวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพอีกวิธีหนึ่งที่ได้รับความนิยมอย่างมาก คือ วิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต (Wavelet Domain) เมื่อประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีทางสถิติ (Statistical Method) ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 วิธี คือ วิธีการแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต (Wavelet Thresholding) และอีกวิธีหนึ่ง คือ *วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ (Bayesians' Risk)* ซึ่งใช้*หลักการประมาณแบบเบส์ (Bayesian Estimation)* ในการหาฟังก์ชันที่จะใช้ลดสัญญาณรบกวนหรือฟังก์ชันหดตัว (Shrinkage Function) ซึ่งหลักการประมาณแบบเบส์นี้ยังสามารถใช้ประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติเพื่อใช้ร่วมกับฟังก์ชันหดตัวด้วย เช่น ความแปรปรวน นอกจากนี้วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ยังเป็นวิธีที่มีความชัดเจนในการลดสัญญาณรบกวน มากกว่าวิธีแรก ที่ยังมีความไม่ชัดเจนในวิธีหาขีดเริ่มเปลี่ยน (Thresholding) อย่างไรก็ตามหลักการประมาณแบบเบส์นั้นต้องการ *ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า (Prior Probability Density Function, Prior PDF)* ที่เหมาะสมในการกำกับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต ซึ่งงานวิจัยในอดีตนั้นส่วนใหญ่จะใช้ PDF ที่มีพารามิเตอร์ทางสถิติเพียงแค่ ค่าเฉลี่ย (Mean) และ ความแปรปรวน (Variance) เท่านั้นทำให้เป็นแบบจำลองทางสถิติในกำกับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ไม่ดีเท่าที่ควร

จากเหตุผลข้างต้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต ด้วย วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ โดยใช้ Prior PDF ที่สร้างจาก PDF บนพื้นฐานระบบเพียร์สันในการหาฟังก์ชันหดตัว สำหรับสาเหตุที่เลือกใช้ PDF บนพื้นฐานระบบเพียร์สันนั้น เพราะ PDF ชนิดนี้ครอบคลุม PDF เกือบทุกชนิดที่ใช้เป็น Prior PDF ในงานวิจัยในอดีต นอกจากนี้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอวิธีประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติที่แม่นยำด้วยหลักการประมาณแบบเบส์ เพื่อใช้กับฟังก์ชันหดตัวเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนด้วย

1.2 วัตถุประสงค์

1 คิดค้นวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ตที่มีประสิทธิภาพสูง ทั้งด้านคุณภาพของภาพที่ได้หลังการลดสัญญาณรบกวน (พิจาณาค่า PSNR เป็นสำคัญ) และความเร็วในการประมวลผล บนพื้นฐานหลักการที่สำคัญ คือ วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ ร่วมกับ หลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (Parent and Child Relation) และ PDF บนพื้นฐานระบบเพียร์สัน

2 สรุปและพิมพ์เผยแพร่ผลงานในวารสารวิชาการระดับชาติและนานาชาติ

1.3 ขอบเขตวิทยานิพนธ์

1 ลดสัญญาณรบกวนภาพเมื่อมีสัญญาณรบกวนเกาส์เชียนสีขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise, AWGN)

2 พัฒนาระเบียบวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพโดยอาศัย วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ในปริภูมิเวฟเล็ตให้ได้วิธีที่ มีประสิทธิภาพทั้งในด้านคุณภาพของภาพ (พิจาณาค่า PSNR เป็นสำคัญ) และเวลาที่ใช้ในการประมวลผล

3 เปรียบเทียบประสิทธิภาพและพิจารณาข้อดี ข้อเสีย ของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพที่นำเสนอกับวิธีอื่นที่นิยมใช้ในปัจจุบันโดยใช้โปรแกรม MATLAB ในการทดลองกับภาพต้นแบบมาตรฐานจำนวนหนึ่ง

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1 ศึกษาและเข้าใจแนวทางพัฒนาของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในอดีตเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพที่มีประสิทธิภาพต่อไปในอนาคต

2 นำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ตวิธีใหม่ที่มีประสิทธิภาพ

3 พิมพ์เผยแพร่วิทยานิพนธ์รวมทั้งนำเสนองานทั้งในวารสารวิชาการระดับประเทศและต่าง-ประเทศเพื่อเผยแพร่ความรู้ต่อไปในอนาคต

1.5 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงาน

1 ศึกษาวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ตวิธีต่างๆในอดีต

2 ศึกษาวิธีทางสถิติและการแปลงเวฟเล็ต (Wavelet Transform) เพื่อลดสัญญาณรบกวนภาพ

3 ศึกษารูปแบบและหลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล

4 คิดค้นวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ตแบบใหม่ที่มีประสิทธิภาพที่ดี

5 สรุปและเขียนวิทยานิพนธ์พร้อมทั้งพิมพ์เผยแพร่ผลงานในวารสารทางวิชาการทั้งในระดับ-ชาติและนานาชาติ

บทที่ 2

ภูมิหลัง

ในบทนี้เราจะศึกษาถึงวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพที่นำเสนอในอดีต ด้วยวิธีทางสถิติแบบต่างๆในปริภูมิเวฟเล็ต เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาวิธีลดสัญญาณรบกวนในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ต่อไป สำหรับวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพด้วยวิธีทางสถิตินั้นจะแบ่งเป็น 2 วิธีที่สำคัญ คือ วิธีขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต (Wavelet Thresholding) และ วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ (Bayes' Risk) โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเน้นพัฒนาวิธีลดสัญญาณรบกวนด้วย วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ เป็นสำคัญ สำหรับวิธีความเสี่ยงแบบเบส์นั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องเข้าใจถึง *การประมาณแบบเบส์ (Bayesian Estimation)* ซึ่งเป็นหลักการที่จะใช้ในการสร้างฟังก์ชันสำหรับลดสัญญาณรบกวนและพารามิเตอร์ที่จะใช้กับฟังก์ชันนี้ ซึ่งจะอธิบายหลักการนี้ ต่อไปดังนี้

2.1 **การประมาณแบบเบส์** (Bayesian Estimation)

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราจะประยุกต์ใช้หลักการประมาณแบบเบส์ในการหาตัวแปรหรือพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า โดยสามารถสรุปลักษณะของปัญหาได้ดังนี้ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{a}=[a_1,a_2,\ldots,a_d]^T$ เป็นตัวแปรหรือพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า และ $\mathbf{b}=[b_1,b_2,\ldots,b_d]^T$ เป็นตัวแปรหรือพารามิเตอร์ที่สังเกตได้ (ทราบค่า) ในกรณีที่เราต้องการหาฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b})=[d_1(\mathbf{b}),d_2(\mathbf{b}),\ldots,d_d(\mathbf{b})]^T$ เพื่อใช้ในการทำนาย $\mathbf{a}$ ให้แม่นยำที่สุด

เมื่อประยุกต์ใช้การประมาณแบบเบส์ในการหาฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b})$ เราจะพิจารณาให้ $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ เป็นค่าของเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{A}=[A_1,A_2,\ldots,A_d]^T$ และ $\mathbf{B}=[B_1,B_2,\ldots,B_d]^T$ ตามลำดับ ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นชนิดหลายตัวแปร (Multivariate Probability Density Function, Multivariate PDF) คือ $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ และ $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b})$ จากนั้นจึงเลือกฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b})$ ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข (Condition Expected Loss) $R(\mathbf{d})$ ที่นิยามดังต่อไปนี้มีค่าต่ำสุด [1]

$$R(\mathbf{d})=\int\int\ldots\int L(\mathbf{a},\mathbf{d}(\mathbf{b}))\, f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right| \tag{2.1}$$

เมื่อ $L(\mathbf{a},\mathbf{d}(\mathbf{b}))$ คือ ฟังก์ชันการสูญเสีย (Loss Function)

$f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Probability Density Function, Conditional PDF) $\mathbf{A}=\mathbf{a}$ ต่อเมื่อ $\mathbf{B}=\mathbf{b}$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $d_i(\mathbf{b})$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,d$ ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไขต่ำที่สุด คือ การแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$d_1(\mathbf{b}) = \arg\min_{d_1}\left[R(\mathbf{d})\right]$$
$$d_2(\mathbf{b}) = \arg\min_{d_2}\left[R(\mathbf{d})\right]$$
$$\vdots$$
$$d_d(\mathbf{b}) = \arg\min_{d_d}\left[R(\mathbf{d})\right]$$

2.1.1 **การประมาณแบบภายหลังสูงสุด** (Maximum a Posterior, MAP)

วิธีนี้จะนิยามฟังก์ชันการสูญเสียอยู่ในรูป $L_{0/1}(\mathbf{a},\mathbf{d}(\mathbf{b}))$ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

$$L_{0/1}(\mathbf{a},\mathbf{d}(\mathbf{b})) = \begin{cases} 0, a_1 = d_1(\mathbf{b}), a_2 = d_2(\mathbf{b}),\ldots,a_d = d_d(\mathbf{b}) \\ 1, a_1 \neq d_1(\mathbf{b}), a_2 \neq d_2(\mathbf{b}),\ldots,a_d \neq d_d(\mathbf{b}) \end{cases}$$

คำนวณค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข (Condition Expected Loss)

$$R(\mathbf{d}) = \int\limits_{\substack{a_1 \neq \\ d_1(\mathbf{b})}} \int\limits_{\substack{a_2 \neq \\ d_2(\mathbf{b})}} \cdots \int\limits_{\substack{a_d \neq \\ d_d(\mathbf{b})}} f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b}) \left| da_1 da_2 \ldots da_d \right|$$
$$= 1 - f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}\left(\left(a_1 = d_1(\mathbf{b}), a_2 = d_2(\mathbf{b}),\ldots,a_d = d_d(\mathbf{b})\right)|\,\mathbf{b}\right)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $d_i(\mathbf{b})$ ที่ทำให้ $R(\mathbf{d})$ ต่ำที่สุด คือ การแก้ระบบสมการ ต่อไปนี้

$$d_1(\mathbf{b}) = \arg\max_{a_1}\left[f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\right]$$
$$d_2(\mathbf{b}) = \arg\max_{a_2}\left[f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\right]$$
$$\vdots$$
$$d_d(\mathbf{b}) = \arg\max_{a_d}\left[f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\right]$$

หรือเขียนในรูป

$$\mathbf{d}(\mathbf{b}) = \arg\max_{\mathbf{a}}\left[f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\right] \tag{2.2}$$

จากกฎของเบส์ (Bayes' Rule)

$$f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b}) = \frac{f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a})\, f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})}{f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b})} \tag{2.3}$$

เมื่อ $f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a})$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีเงื่อนไข $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ เมื่อ $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ดังนั้น

$$\mathbf{d}(\mathbf{b}) = \arg\max_{\mathbf{a}}\left[f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a})\, f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})\right] \tag{2.4}$$

ซึ่งสมการที่ 2.4 คือ สมการที่ใช้ประมาณตัวแปรหรือพารามิเตอร์แบบภายหลังสูงสุด (MAP)

2.1.2 **การประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด** (Minimum Mean Square Error, MMSE)

วิธีนี้จะนิยามฟังก์ชันการสูญเสียอยู่ในรูปของ $L_2\left(\mathbf{a},\mathbf{d}(\mathbf{b})\right)$ ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

$$L_2\left(\mathbf{a},\mathbf{d}(\mathbf{b})\right)=\left(a_1-d_1(\mathbf{b})\right)^2+\left(a_2-d_2(\mathbf{b})\right)^2+\ldots+\left(a_d-d_d(\mathbf{b})\right)^2$$

ทำการคำนวณค่าเฉลี่ยการสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข

$$R(\mathbf{d})=\int\int\ldots\int\left(\left(a_1-d_1(\mathbf{b})\right)^2+\left(a_2-d_2(\mathbf{b})\right)^2+\ldots+\left(a_d-d_d(\mathbf{b})\right)^2\right)f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|$$

หาฟังก์ชัน $d_i(\mathbf{b})$ ที่ทำให้ $R(\mathbf{d})$ ต่ำที่สุด

$$\frac{\partial R(\mathbf{d})}{\partial d_i}=\frac{\partial}{\partial d_i}\int\int\ldots\int\left(\left(a_1-d_1(\mathbf{b})\right)^2+\left(a_2-d_2(\mathbf{b})\right)^2+\ldots+\left(a_d-d_d(\mathbf{b})\right)^2\right)f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|$$

$$=\int\int\ldots\int\frac{\partial}{\partial d_i}\left(\left(a_1-d_1(\mathbf{b})\right)^2+\left(a_2-d_2(\mathbf{b})\right)^2+\ldots+\left(a_d-d_d(\mathbf{b})\right)^2\right)f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|$$

$$=-2\int\int\ldots\int\left(a_i-d_i(\mathbf{b})\right)f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|$$

กำหนดให้

$$\frac{\partial R(\mathbf{d})}{\partial d_i}=0$$

$$-2\int\int\ldots\int\left(a_i-d_i(\mathbf{b})\right)f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|=0$$

$$d_i(\mathbf{b})=\frac{\int\int\ldots\int a_i\,f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|}{\int\int\ldots\int f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|}$$

โดย $\int\int\ldots\int f_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}(\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|=1$ และ จากกฎของเบส์ในสมการที่ (2.3) ดังนั้น

$$d_i(\mathbf{b})=\frac{1}{f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b})}\int\int\ldots\int a_i\,f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a})\,f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})\left|da_1da_2\ldots da_d\right| \tag{2.5}$$

เมื่อ $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{b})=\int\int\ldots\int f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a})\,f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})\left|da_1da_2\ldots da_d\right|$

ซึ่งสมการที่ 2.5 คือ สมการที่ใช้ในการประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (MMSE)

2.1.3 **การประมาณแบบความน่าเป็นจริงสูงสุด** (Maximum Likelihood, ML)

สำหรับการประมาณทางสถิติที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ถึงแม้จะ*ไม่ใช่การประมาณแบบเบส์* แต่ก็เป็นการประมาณที่ใช้หลักการคล้ายกัน กล่าวคือ ใช้หลักการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเงื่อนไข $f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a})$ ในการหาฟังก์ชัน $\mathbf{d}(\mathbf{b})$ ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{d}(\mathbf{b})=\arg\max_{\mathbf{a}}\left[f_{\mathbf{B}|\mathbf{A}}(\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a})\right] \tag{2.6}$$

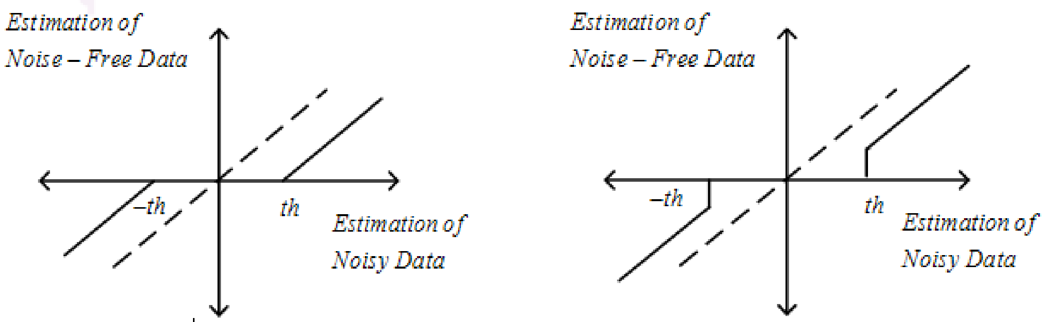
จะสังเกตเห็นว่าวิธีนี้เป็นวิธีที่มีหลักการประมาณตัวแปรคล้ายวิธีภายหลังสูงสุด (MAP) ดังสมการที่ 2.4 เพียงแต่สมมุติให้ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ มีค่าเป็นหนึ่ง (Uniform PDF) ซึ่งทำให้วิธีนี้เป็นวิธีประมาณตัวแปรที่ง่ายเพราะไม่ต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับลักษณะการกระจายตัวของตัวแปรที่จะประมาณนั้นเอง

2.2 การลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ต

สำหรับวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ตนั้นได้ถูกพัฒนาขึ้นในช่วง 10 ปีที่ผ่านมานี้ โดยกรรมวิธีส่วนมากจะอยู่ในรูปวิธีทางสถิติ (Statistical Method) ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ วิธีแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ตและวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ สำหรับวิธีหลังนี้จะได้กล่าวถึงหลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกลด้วย (Parent and Child Relation) ซึ่งนำเสนอในงานวิจัยที่ [2] อันจะเป็นหลักการสำคัญที่จะใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ต่อไป

2.2.1 การแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต (Wavelet Thresholding)

วิธีนี้จัดเป็นวิธีเริ่มแรกสุดของวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพบนปริภูมิเวฟเล็ตและยังเป็นวิธีที่มีขั้นตอนไม่ซับซ้อนอีกด้วย โดยเป็นวิธีที่ศึกษาและออกแบบ *ฟังก์ชันหดตัว (Shrinkage Function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการลดสัญญาณรบกวน โดยทำการเปลี่ยนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) ให้เป็นสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน (Noise-Free Wavelet Coefficient) (โดเมนของฟังก์ชัน คือ Noisy Wavelet Coefficient และเรจน์ คือ Noise-Free Wavelet Coefficient)* หรือทำการออกแบบขีดเริ่มเปลี่ยนหรือจุดเริ่มเปลี่ยน (Thresholding) ที่จะใช้กับ Shrinkage Function โดยที่ไม่ใช้หลักการความเสี่ยงแบบเบส์ (Bayes' Risk) สำหรับ Shrinkage Function เริ่มแรกที่นิยมใช้ในการออกแบบThresholding คือ ฟังก์ชัน Soft และ Hard-Thresholding [3] ต่อจากนั้นได้มีการพัฒนาฟังก์ชันหดตัวขึ้นอีกอย่างต่อเนื่อง เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวน เช่น ฟังก์ชัน Firm-Shrinkage [4] (ซึ่งเป็นฟังก์ชันหดตัวที่ต้องการขีดเริ่มเปลี่ยน 2 ตัวในการลดสัญญาณรบกวน จึงมีประสิทธิภาพมากกว่า ฟังก์ชัน Soft และ Hard-Thresholding ที่ต้องการขีดเริ่มเปลี่ยนตัวเดียว) และ



รูปที่ 2.1 แสดงฟังก์ชันหดตัว Soft-Thresholding และ Hard-Thresholding ตามลำดับ

ฟังก์ชัน Non-Negative Garrote Shrinkage [5] ซึ่งเป็นฟังก์ชันหดตัวที่มีความต่อเนื่อง ทำให้มีเสถียรภาพมากกว่า ฟังก์ชัน Hard-Thresholding โดยในรูปที่ 2.1 นั้นแสดงลักษณะของฟังก์ชันหดตัวชนิด Soft-Thresholding และ Hard-Thresholding ที่มีขีดเริ่มเปลี่ยน (Thresholding) แบบ Universal คือ $th = \sigma_n \sqrt{2\ln N}$ เมื่อ σ_n คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานสัญญาณรบกวน (Standard Deviation Noise) และ N คือ จำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละระดับการแปลง (Subband)

สำหรับข้อเสียของวิธีการแบ่งขีดเริ่มเปลี่ยนเวฟเล็ต คือ ยังมีความไม่ชัดเจนในการหาขีดเริ่มเปลี่ยน (Thresholding) สำหรับใช้กับฟังก์ชันหดตัวอยู่ [6]

2.2.2 ความเสี่ยงแบบเบส์ (Bayes' Risk)

สำหรับการลดสัญญาณรบกวนภาพด้วย *วิธีความเสี่ยงแบบเบส์* นั้นจะอาศัยหลักการทางสถิติ คือ *การประมาณแบบเบส์ (Bayesian Estimation)* ดังที่ได้กล่าวไปแล้ว ซึ่งวิธีนี้ส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของ วิธีภายหลังสูงสุด (วิธี MAP) หรือ วิธีค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (วิธี MMSE) โดยต่อไปนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดการประยุกต์ใช้ หลักการประมาณแบบภายหลังสูงสุดและการประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด เพื่อประยุกต์ใช้กับวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ ดังนี้

วิธีภายหลังสูงสุด (Maximum a Posterior, MAP)

วิธีนี้จะประยุกต์ใช้หลักการประมาณภายหลังสูงสุดในหัวข้อ 2.1.1 ในการลดสัญญาณรบกวนภาพในปริภูมิเวฟเล็ตโดยสมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตปราศจากสัญญาณรบกวน (Noise-Free Wavelet Coefficient) มีการแจกแจงตัวแปรสุ่ม $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_d]^T$ ซึ่ง X_1 คือ *ระดับการแปลงย่อย (Subband)* ที่จะพิจารณา และ d คือ จำนวนระดับความละเอียดของการแปลงเวฟเล็ตที่จะพิจารณา ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้ $d = 2$ และจะพิจารณาระดับการแปลง HH1 เราจะพิจารณาสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตใน HH1 และ HH2 เท่านั้น และมีสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่สังเกตได้ (Observed Wavelet Coefficient) หรือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) มีเวกเตอร์สุ่ม คือ $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_d]^T$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ และสัญญาณรบกวนมีเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{N} = [N_1, N_2, \ldots N_d]^T$ มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น คือ $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$ เราจะเรียกฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า (Prior PDF) เรียกฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นภายหลัง (Posterior PDF) และเรียก ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นอย่างมีเงื่อนไข $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบน่าเป็นจริงสูงสุด (Likelihood Function) ประยุกต์การประมาณแบบภายหลังสูงสุดในสมการ 2.4 จะได้วิธีประมาณตัวแปร $\mathbf{x}$ ดังนี้

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} \left[f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \right]$$

กรณีที่สัญญาณรบกวนมีลักษณะแบบบวก $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$ จะให้ฟังก์ชันเงื่อนไข (Conditional) ในรูป $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ (ภาคผนวก ก)

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} \left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \right] \tag{2.7}$$

วิธีผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด (Minimum Mean Square Error, MMSE)

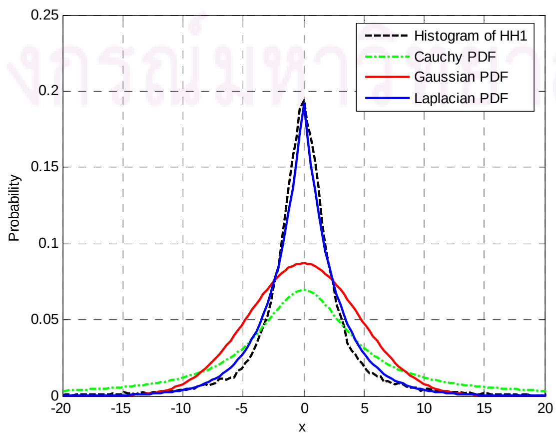
วิธีนี้จะประยุกต์ใช้หลักการประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดในหัวข้อ 2.1.2 ในสมการ 2.5 มาประมาณตัวแปร $\hat{x}_i$ ดังนั้นในกรณีที่สัญญาณรบกวนมีลักษณะแบบบวก จะพบว่า

$$\hat{x}_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \int_{R^d} x_i\, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \left| d\mathbf{x} \right| \tag{2.8}$$

เมื่อ $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{R^d} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \left| d\mathbf{x} \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, d$

2.2.2.1 **ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า**

จะสังเกตเห็นว่าในหัวข้อที่แล้วนั้น วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นชนิดหนึ่งที่สำคัญอย่างมากที่จะประยุกต์ใช้กับวิธีภายหลังสูงสุด หรือ วิธีผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า (Prior PDF) ของสัม-ประสิทธิ์เวฟเล็ต $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ นั่นเอง ซึ่งงานวิจัยส่วนใหญ่มักจะสมมุติให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นชนิดนี้มีโมเมนต์ทางสถิติเพียงแค่ ค่าเฉลี่ย (Mean) และ ความแปรปรวน (Variance) เท่านั้น [7-9] ในการอธิบายลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เช่น ในงานวิจัยที่ [7] ที่ใช้ Cauchy PDF ในการอธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในภาพ SAR (Synthetic Aperture Radar) หรือ งานวิจัยที่ [9] ที่ใช้ Gaussian PDF และงานวิจัยที่ [10] ที่ศึกษาการใช้ Laplacian PDF *โดยละเอียด*และ งานวิจัยที่ [11] ศึกษา

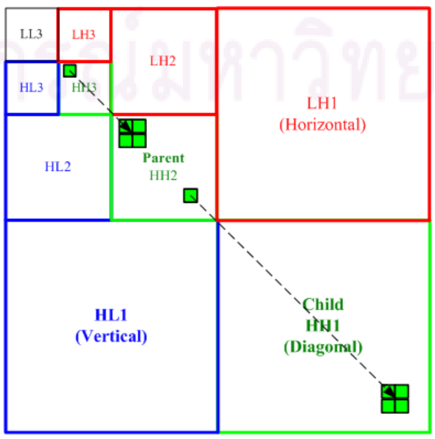


รูปที่ 2.2 ตัวอย่าง ฮิสโทแกรมภาพ Man (Pirate) ใน HH1, Cauchy PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF

Two-Sided Gamma PDF อธิบายการกระจายตัวของ Speech Coefficients ซึ่งรูปที่ 2.2 แสดงฮิสโทแกรมของรูป Man (Pirate) ใน HH1 และ Cauchy PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF ซึ่งเป็นตัวอย่างของ PDF ที่กล่าวมาข้างต้นที่ใช้ในงานวิจัยในอดีต จากลักษณะของ PDF ที่กล่าวมาเหล่านี้จะสังเกตเห็นว่ามีโมเมนต์ทางสถิติเพียง ความแปรปรวน เท่านั้น ดังนั้นน่าสนใจว่าถ้ามีการใช้ PDF ที่มีโมเมนต์ทางสถิติที่สูงกว่าความแปรปรวน (นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ผ่านระบบเพียร์สัน) จะทำให้กำกับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตได้ดีขึ้น ซึ่งทำให้ผลการลดสัญญาณรบกวนดีขึ้นด้วย อย่างไรก็ตามถ้าโมเมนต์ทางสถิติสูงขึ้นเกินไปความซับซ้อนของวิธีที่ใช้ลดสัญญาณรบกวนก็ย่อมเพิ่มขึ้นด้วยซึ่งไม่เป็นผลดี ดังงานวิจัยที่ [6] นอกจากนี้ในงานวิจัยส่วนใหญ่มักจะพิจารณาสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตเพียงแค่ระดับการแปลงย่อยที่สนใจเท่านั้นแล้วใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นตัวแปรเดียว (Univariate PDF) ในการอธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วสัมประ-สิทธิ์เวฟเล็ตจะมีความสัมพันธ์ในระดับการแปลงย่อยระหว่างกันด้วยซึ่งเรียกหลักการนี้ว่า หลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (Parent and Child Relation) ซึ่งงานวิจัยที่ [2] ได้ประยุกต์ใช้หลักการนี้กับวิธี MAP ในการลดสัญญาณรบกวนภาพและให้ประสิทธิภาพเป็นที่น่าพอใจยิ่ง ซึ่งจะได้อธิบายหลักการนี้ในหัวข้อถัดไป

2.2.2.2 **ความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล**

ในงานวิจัยที่ [2] ได้นำเสนอหลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างระดับการแปลงย่อย เพื่อประยุกต์ใช้กับวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ในการลดสัญญาณรบกวนภาพ ซึ่งวิธีนี้ได้รับความนิยมอย่างมากเพราะให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนภาพที่ดีและมีกรรมวิธีที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อน ทำให้ใช้เวลาในการลดสัญญาณรบกวนอย่างมีประสิทธิภาพโดยวิธีนี้จัดเป็นหลักการที่สำคัญที่สุด ของการนำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลยก็ว่าได้ สำหรับหลักการความสัมพันธ์ระหว่างสเกล (Parent and Child Relation) คือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตชนิดเดียวกัน เช่น แนวนอน (Horizontal) แนวตั้ง (Vertical) หรือ แนวทแยง (Diagonal) ที่ระดับ



รูปที่ 2.3 ลักษณะความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (Parent and Child Relation)

การแปลงย่อยความละเอียดน้อย (Low Resolution Subband) จะมีความสัมพันธ์ในลักษณะ Parent กับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ระดับการแปลงย่อยความละเอียดสูง (High Resolution Subband) ที่จะพิจารณา ซึ่งเรียกว่า Child ในระดับถัดไป ดังตัวอย่างในรูป 2.3 เมื่อต้องการพิจารณาระดับการแปลงย่อย HH1 *โดยพิจารณาแค่ 2 ระดับความละเอียด* จะเรียกสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต HH1 ว่า Child และมี Parent คือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตใน HH2

2.2.2.3 **ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นชนิดหลายตัวแปร**

ในงานวิจัยที่ [2] ได้เสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพ ด้วยวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ โดยใช้วิธี MAP ร่วมกับหลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกลในหัวข้อที่แล้ว ซึ่งวิธีนี้ต้องอาศัยเวกเตอร์สุ่ม (Random Vectors) ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นชนิดหลายตัวแปร (Multivariate Probability Density Function, Multivariate PDF) ในการอธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตทั้งในส่วนของ Parent และ Child ซึ่งในงานวิจัยที่ [2] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล ในฐานข้อมูลภาพ Corel โดยมีลักษณะฮิสโทแกรมของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในกรณี 2 ตัวแปร (Bivariate) ดังรูปที่ 2.4 และได้สมมุติให้เวกเตอร์สุ่มของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตดังกล่าวอยู่ในรูป Spherically Contoured Radial Exponential Random Vectors โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม ดังต่อไปนี้

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{K}{\sigma^d}\exp\left(\frac{-\sqrt{d+1}\|\mathbf{x}\|}{\sigma}\right) \tag{2.9}$$

เมื่อ σ^2 คือ ความแปรปรวน และ $K = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left((d+1)/2\right)}\left(\dfrac{d+1}{4\pi}\right)^{d/2}$ คือ ค่าพารามิเตอร์บรรทัดฐาน (Normalizing Constant Parameter)

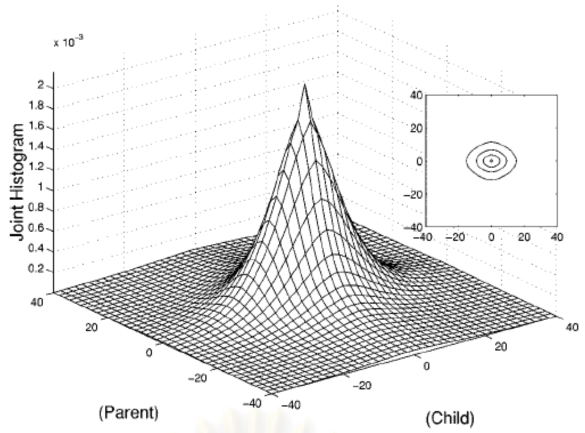
โดยรูปที่ 2.5 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ Radial Exponential Random Vectors ในกรณี $d=2$ ตัวแปร เมื่อกำหนดให้สัญญาณรบกวนในแต่ละสเกลการแปลงเวฟเล็ต มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเกาส์ ที่เป็นอิสระต่อกัน มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน σ_n^2 จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของสัญญาณรบกวน คือ

$$f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{d/2}}\exp\left(\frac{-\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right) \tag{2.10}$$

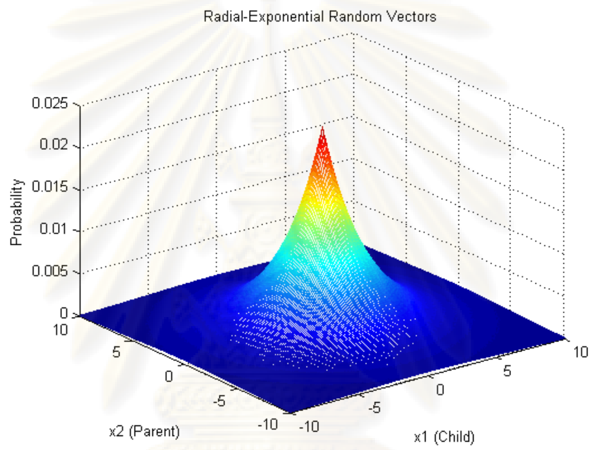
หา $\hat{x}_i$ จากการแก้สมการที่ 2.7 โดยใช้สมการที่ 2.9 และ 2.10

$$\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \ln\left(\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{d/2}}\right) - \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_n^2} + \ln\left(\frac{K}{\sigma^d}\right) - \frac{\sqrt{d+1}\|\mathbf{x}\|}{\sigma}$$

$$\frac{\partial\left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right]}{\partial x_i} = 0$$



รูปที่ 2.4 ลักษณะฮิสโทแกรมของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในกรณี 2 ตัวแปร (Bivariate) ในฐานข้อมูลภาพ Corel



รูปที่ 2.5 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ Radial Exponential Random Vectors ในกรณี $d = 2$ ตัวแปร

รูปที่ 2.6 ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรในสมการ 2.13 กรณี 2 ตัวแปร หรือ สมการ 2.14 (BiShrink)

$$\frac{y_i - x_i}{\sigma_n^2} - \frac{\sqrt{d+1}x_i}{\sigma\|\mathbf{x}\|} = 0$$

$$x_i = \frac{y_i}{\left(\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma\|\mathbf{x}\|}\right)+1}$$

กำหนดให้ $r_{BiShrink} = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{\left(\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma r_{BiShrink}}\right)+1} \tag{2.11}$$

สร้าง Norm จากสมการ 2.11 เมื่อ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\left(\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma r_{BiShrink}}\right)+1}$$

$$\frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma r_{BiShrink}} + 1 = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r_{BiShrink}} \tag{2.12}$$

หา $r_{BiShrink}$ จากสมการ 2.12 ดังนั้น

$$r_{BiShrink} = \|\mathbf{y}\| - \frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma}$$

นำสมการ 2.12 แทนในสมการ 2.11 กำหนด $i = 1$ จะได้ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร

$$\hat{x}_1 = \frac{\left(\|\mathbf{y}\| - \frac{\sigma_n^2\sqrt{d+1}}{\sigma}\right)_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1 \tag{2.13}$$

เมื่อ $g_+ = \max(0, g)$ ในงานวิจัยที่ [2] เรียกฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรในสมการ 2.13 กรณี $d = 2$ -Dimension $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ ว่า BiShrink ดังสมการ 2.14 และรูปฟังก์ชันหดตัวดังรูปที่ 2.6

$$\hat{x}_1 = \frac{\left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma}\right)_+}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} y_1 \tag{2.14}$$

บทที่ 3

ระบบเพียร์สัน

3.1 นิยาม

ระบบเพียร์สัน (Pearson System) ถูกนำเสนอครั้งแรกในงานวิจัยที่ [12] โดยใช้แนวคิดเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ในการหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function, PDF) ชนิดต่างๆ ที่สามารถเขียนได้ในรูปอย่างง่ายดังเช่น ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเกาส์ (Gaussian PDF) หรือ ลาปลาซ (Laplacian PDF) แต่มีโมเมนต์ทางสถิติที่สูงกว่ากล่าวคือมีค่าความเบ้ (Skewness) และ ภาวะยอดมน (Kurtosis) สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้หาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของระบบเพียร์สันนั้นมีลักษณะ ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x}{b_0+2b_1x+b_2x^2} \tag{3.1}$$

เมื่อ $f(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (PDF)

a_0, a_1, b_0, b_1 และ b_2 คือ ค่าคงที่จริง (Real Values)

ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบเพียร์สันนี้ สามารถใช้สร้าง PDF ที่เป็นประโยชน์ขึ้นมาใหม่หรือครอบคลุม PDF ที่มีการนำเสนอไว้แล้วในอดีตอย่างมากมาย ดังที่จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

3.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นบนพื้นฐานระบบเพียร์สัน

ดังที่กล่าวในหัวข้อที่แล้วว่าระบบเพียร์สันนั้นอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบ ดังสมการ 3.1 ในการสร้าง PDF ชนิดต่างๆ โดยต่อไปนี้เราจะมาพิจารณาตัวอย่าง PDF บางประเภทที่สร้างจากระบบเพียร์สัน คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดที่ 3 และ 4 ดังนี้

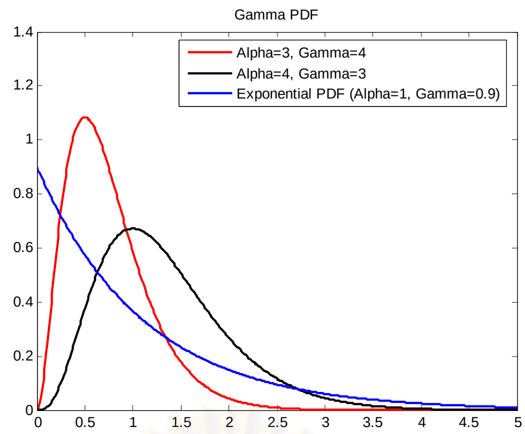
ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดที่ 3

เมื่อกำหนดให้ $P(x)=a_0+a_1x$, $Q(x)=x-\beta$ โดย $x\in[\beta,\infty)$ แก้สมการเชิงอนุพันธ์หาฟังก์ชัน $f(x)$ จากสมการที่ 3.1

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x}{x-\beta}$$

$$=a_1+\frac{a_0+a_1\beta}{x-\beta}$$

$$\int\frac{df(x)}{f(x)}=\int a_1dx+\int\frac{a_0+a_1\beta}{x-\beta}dx$$



รูปที่ 3.1 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมา (Gamma PDF) และเลขชี้กำลัง (Exponential PDF)

$$\ln f(x) = a_1 x + (a_0 + a_1\beta)\ln(x-\beta) + \ln C_0$$

C_0 คือ ค่าคงที่

$$f(x) = C_0 (x-\beta)^{(a_0+a_1\beta)} \exp(a_1 x)$$

ในกรณีให้ $x \in [\beta = 0, \infty)$

$$f(x) = C_0 x^{a_0} \exp(a_1 x)$$

เมื่อกำหนดให้ $a_0 = \alpha, \alpha > -1, a_1 = -\gamma, \gamma > 0$ และหา C_0 จาก $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมา (Gamma PDF) [13] โดยมีรูปสมการ PDF คือ

$$f(x) = \frac{\gamma^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \exp(-\gamma x) = Gamma(\alpha+1, \gamma) \tag{3.2}$$

หรือ

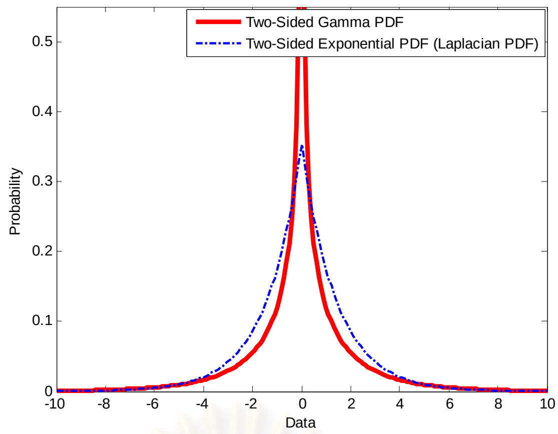
$$Gamma(\alpha, \gamma) = \frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\gamma x), \alpha, \gamma > 0 \tag{3.3}$$

ในกรณีที่กำหนดให้ $\alpha = 1$ ในสมการ 3.3 จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเลขชี้กำลัง (Exponential PDF) $f(x) = \gamma \exp(-\gamma x), \gamma > 0$ ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของ Gamma PDF นั่นเอง โดยรูปที่ 3.1 แสดง Gamma PDF และ Exponential PDF ที่พารามิเตอร์ต่างๆ

ในงานวิจัยที่ [11] ได้นำเสนอฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบแกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma PDF) ซึ่งสร้างมาจาก Gamma PDF นั่นเอง โดย PDF ชนิดนี้มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นที่สมมาตร (Symmetric) มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 มีความแปรปรวน σ^2 ดังสมการต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2\pi\sigma}} |x|^{\frac{-1}{2}} \exp\left(\frac{-\sqrt{3}|x|}{2\sigma}\right), x \in R \tag{3.4}$$

นอกจากนี้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น Radial-Exponential ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีความแปรปรวน σ^2 หรือ Laplacian PDF กรณีตัวแปรเดียว (Scalar) ก็คือ ฟังก์ชันความหนาแน่น



รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma PDF)
และ Radial-Exponential (Laplacian) PDF เมื่อ $\sigma^2 = 4$

ความน่าจะเป็นเลขชี้กำลังสองฝั่ง (Two-Sided Exponential PDF) ซึ่งสร้างได้จาก Exponential PDF นั้นเอง โดยมี PDF ดังต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{-\sqrt{2}|x|}{\sigma}\right), x \in R \tag{3.5}$$

ซึ่งรูปที่ 3.2 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบแกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma PDF) และ Radial-Exponential (Laplacian) PDF ในกรณีที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีความแปรปรวน σ^2

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดที่ 4

เมื่อกำหนดให้ $P(x) = a_0 + a_1 x$, $Q(x) = b_0 + 2b_1 x + x^2$ โดย $x \in R$ แก้สมการเชิงอนุพันธ์หาฟังก์ชัน $f(x)$ จากสมการ 3.1

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + 2b_1 x + x^2}$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{a_0}{b_0 + 2b_1 x + x^2}dx + \int \frac{a_1 x}{b_0 + 2b_1 x + x^2}dx$$

$$= a_0 \int \frac{dx}{(x+b_1)^2 + b_0 - b_1^2} + \frac{a_1}{2}\left[\int \frac{d\left(b_0 + 2b_1 x + x^2\right)}{b_0 + 2b_1 x + x^2} - 2b_1 \int \frac{dx}{(x+b_1)^2 + b_0 - b_1^2}\right]$$

$$= (a_0 - a_1 b_1)\int \frac{dx}{(x+b_1)^2 + b_0 - b_1^2} + \frac{a_1}{2}\int \frac{d\left(b_0 + 2b_1 x + x^2\right)}{b_0 + 2b_1 x + x^2}$$

$$\ln f(x) = \frac{(a_0 - a_1 b_1)}{\sqrt{b_0 - b_1^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x + b_1}{\sqrt{b_0 - b_1^2}}\right) + \frac{a_1}{2}\ln\left(b_0 + 2b_1 x + x^2\right) + \ln C_0$$

C_0 คือ ค่าคงที่

$$f(x)=C_0\left(\left(x+b_1\right)^2+b_0-b_1^2\right)^{\frac{a_1}{2}}\exp\left(\frac{-\left(a_1b_1-a_0\right)}{\sqrt{b_0-b_1^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+b_1}{\sqrt{b_0-b_1^2}}\right)\right)$$

เมื่อกำหนดให้ $a_1/2=-m,\alpha=\sqrt{b_0-b_1^2},\frac{a_1b_1-a_0}{\sqrt{b_0-b_1^2}}=\nu$ และหา C_0 จาก $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดที่ 4 (Pearson Type IV PDF) [13] คือ

$$f(x)=\frac{\left|\Gamma\left(m+\frac{\nu i}{2}\right)/\Gamma(m)\right|^2}{\alpha B\left(m-1/2,1/2\right)}\left[1+\left(\frac{x+b_1}{\alpha}\right)^2\right]^{-m}\exp\left(-\nu\tan^{-1}\left(\frac{x+b_1}{\alpha}\right)\right) \tag{3.6}$$

เมื่อ $\left|\Gamma(x+yi)/\Gamma(x)\right|^2=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{-1}$

ในกรณีที่กำหนดให้ $\nu=0,b_1=0$ ในสมการ 3.6 จะได้ PDF ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีลักษณะสมมาตร คือ

$$f(x)=\frac{1}{\lambda B\left(m-1/2,1/2\right)}\left[1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right]^{-m},\lambda=\sigma\sqrt{2m-3},m>3/2 \tag{3.7}$$

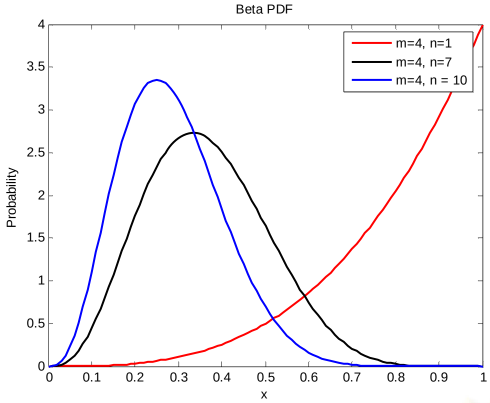
ซึ่งสมการที่ 3.7 คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดที่ 7 (Pearson Type VII PDF) ในกรณีมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 ความแปรปรวน σ^2 และพารามิเตอร์ภาวะยอดมน (Kurtosis) m

สำหรับ Pearson Type VII PDF ซึ่งมีพารามิเตอร์ทางสถิติที่มากกว่า ค่าเฉลี่ย (Mean) และความแปรปรวน (Variance) คือ มี Kurtosis นั้นสามารถใช้สร้างการกระจายตัวชนิดต่างๆ ได้มากมาย ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบโคชี (Cauchy PDF) โดยการปรับ Kurtosis ให้ $m=1$ และ เกาส์ (Gaussian PDF) โดย $m\rightarrow\infty$ และ Students' T PDF หรือ T-PDF เป็นต้น

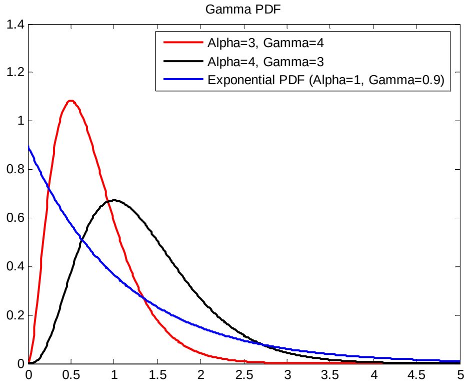
ซึ่งในงานวิจัยที่ [13] ได้รวบรวม PDF ชนิดต่างๆ ที่สร้างได้จากระบบเพียร์สัน ซึ่งมีทั้ง PDF ที่นำเสนอขึ้นใหม่หรือครอบคลุม PDF ที่มีการนำเสนอไว้แล้วในอดีต 7 ชนิดด้วยกัน คือ Pearson Type I PDF, Pearson Type II PDF,..., Pearson Type VII PDF โดยสามารถสรุปความสัมพันธ์ของ PDF ที่สร้างได้จากระบบเพียร์สันกับ PDF นำเสนอไว้แล้วในอดีตได้ดังตารางที่ 3.1 ส่วนรูปที่ 3.3 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดต่างๆ (ก) Beta PDF (Pearson Type I PDF) (ข) Gamma PDF (Pearson Type III PDF) (ค) Chi-Square PDF (Pearson Type III PDF) (ง) Pearson Type IV PDF (จ) Inverse Gamma PDF (Pearson Type V PDF) (ฉ) F Distribution (Pearson Type VI PDF) และ (ช) Cauchy PDF (Pearson Type VII) (ซ) T-PDF (Pearson Type VII) (ฌ) Gaussian PDF (Pearson Type VII PDF) (ญ) Pearson Type VII PDF

ตารางที่ 3.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดต่างๆ กับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบอื่นๆ [13]

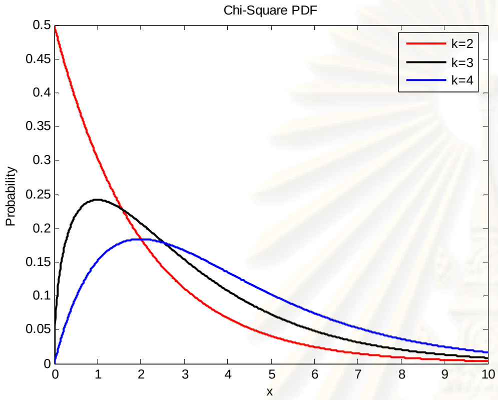
Pearson Type	Relation to other Distribution	ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (PDF)		
		$P(x)=a_0+a_1x, Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta), \alpha\neq\beta$		
I	Beta	$\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{B(m,n)}$	$m,n>0$	$(0,1)$
		$P(x)=a_0+a_1x, Q(x)=x-\beta$		
III	Chi-Square	$\frac{x^{\frac{k}{2}-1}\exp\left(\frac{-x}{2}\right)}{(2)^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$	$k\in N$	$[0,\infty)$
	Gamma	$\frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\gamma x)$	$\alpha,\gamma>0$	$[0,\infty)$
		$P(x)=a_0+a_1x, Q(x)=b_0+2b_1x+x^2$		
IV	Pearson Type IV	$\frac{\left\lvert\Gamma\left(m+\frac{\nu i}{2}\right)/\Gamma(m)\right\rvert^{2}}{\alpha B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left[1+\left(\frac{x-b_1}{\alpha}\right)^2\right]^{-m}\exp\left(-\nu\tan^{-1}\left(\frac{x-b_1}{\alpha}\right)\right)$	$m>1/2$ $b_1\in R$	R
	Pearson Type VII	$\frac{1}{\lambda B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left[1+\left(\frac{x-b_1}{\lambda}\right)^2\right]^{-m}, \lambda=\sigma\sqrt{2m-3}$	$\lambda>0$ $m>3/2$ $b_1\in R$	R
		$P(x)=a_0+a_1x, Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta), \alpha=\beta$		
V	Inverse Chi-Square	$\frac{2^{\frac{-\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)}x^{\frac{-\nu}{2}-1}\exp\left(\frac{-1}{2x}\right)$	$\nu>0$	$(0,\infty)$
	Inverse Gamma	$\frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{-\gamma}{x}\right)$	$\alpha,\gamma>0$	$(0,\infty)$
		$P(x)=a_0+a_1x, Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta), \alpha\neq\beta$		
VI	F-PDF	$\frac{(m/n)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}}$	$m,n\in N$	$[0,\infty)$
	Beta Prime	$\frac{x^{m-1}(1+x)^{-m-n}}{B(m,n)}$	$m,n>0$	$(0,\infty)$
		$P(x)=a_1x, Q(x)=\beta^2+x^2$		
VII	Cauchy	$\frac{1}{\pi\sigma}\left(1+\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$	$\sigma>0$ $\mu\in R$	R
	T-PDF	$\frac{1}{\sqrt{\nu}B\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$	$\nu\in N$	R
	Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\sigma>0$ $\mu\in R$	R


Beta PDF
m=4, n=1
m=4, n=7
m=4, n = 10
Probability
x

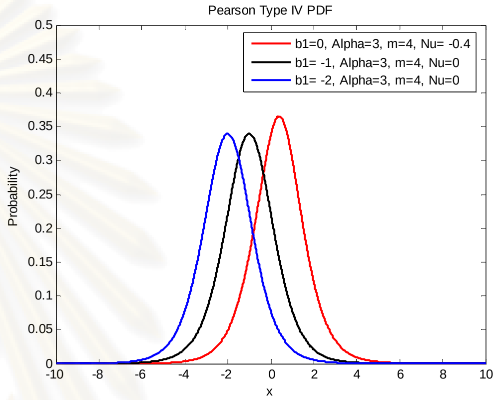
(ก)


Gamma PDF
Alpha=3, Gamma=4
Alpha=4, Gamma=3
Exponential PDF (Alpha=1, Gamma=0.9)

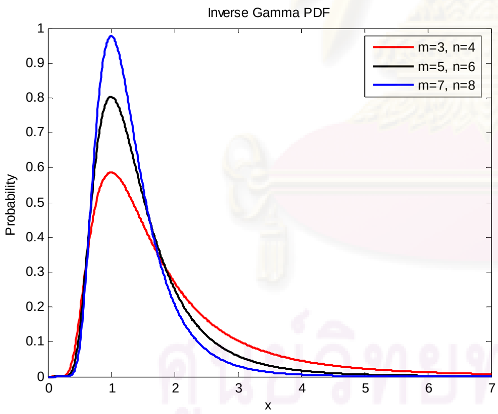
(ข)


Chi-Square PDF
k=2
k=3
k=4
Probability
x

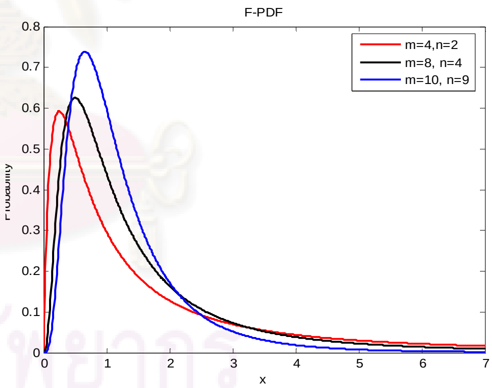
(ค)


Pearson Type IV PDF
b1=0, Alpha=3, m=4, Nu= -0.4
b1= -1, Alpha=3, m=4, Nu=0
b1= -2, Alpha=3, m=4, Nu=0
Probability
x

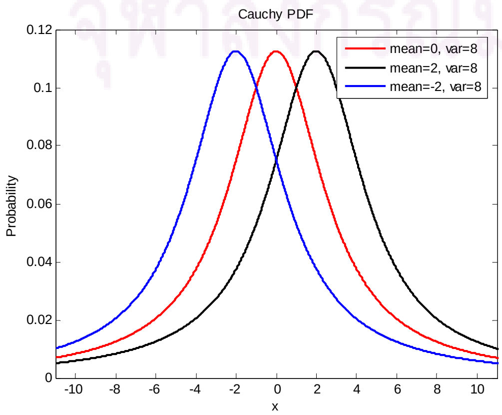
(ง)


Inverse Gamma PDF
m=3, n=4
m=5, n=6
m=7, n=8
Probability
x

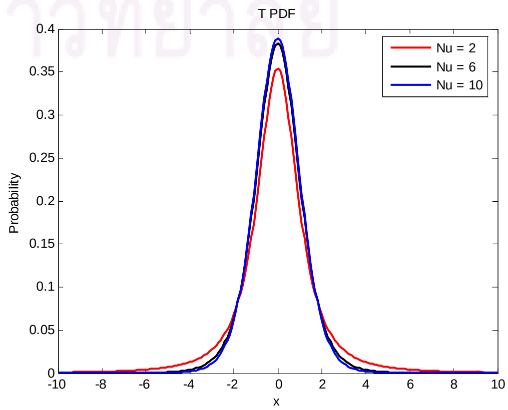
(จ)


F-PDF
m=4,n=2
m=8, n=4
m=10, n=9
x

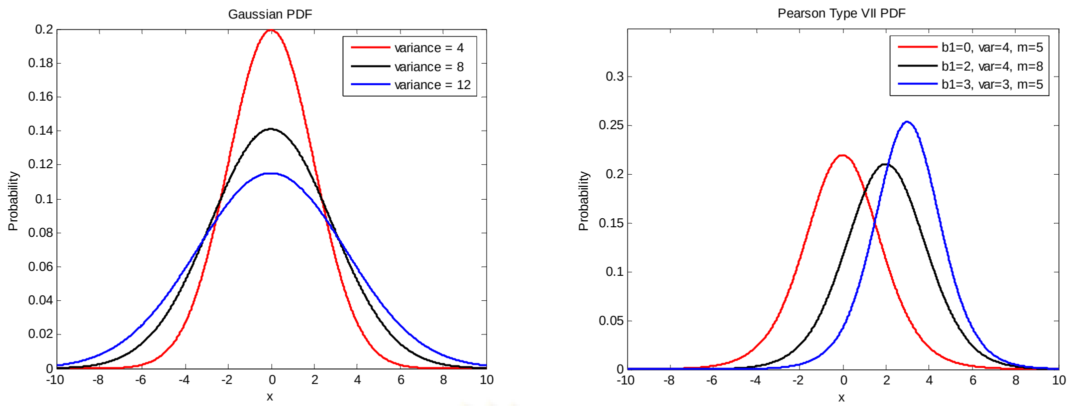
(ฉ)


Cauchy PDF
mean=0, var=8
mean=2, var=8
mean=-2, var=8
Probability
x

(ช)


T PDF
Nu = 2
Nu = 6
Nu = 10
Probability
x

(ซ)



(ฌ) (ญ)

รูปที่ 3.3 ส่วนหนึ่งของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นบนพื้นฐานระบบเพียร์สัน (ก) Beta PDF (Pearson Type I PDF) (ข) Gamma PDF หรือ Exponential PDF ในกรณีที่ $\alpha=1$ (Pearson Type III PDF) (ค) Chi-Square PDF (Pearson Type III PDF) (ง) Pearson Type IV PDF (จ) Inverse Gamma PDF (Pearson Type V PDF) (ฉ) F PDF (Pearson Type VI PDF) (ช) Cauchy PDF (Pearson Type VII) (ซ) T-PDF (Pearson Type VII) (ฌ) Gaussian PDF (Pearson Type VII PDF) (ญ) Pearson Type VII PDF

3.3 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าที่ใช้สำหรับลดสัญญาณรบกวนภาพในงานวิจัยในอดีต

สำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า (Prior PDF) ที่ใช้อธิบายลักษณะสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนที่ใช้ใน *วิธีความเสี่ยงแบบเบส์* นั้นงานวิจัยในอดีตได้นำเสนอไว้มากมายหลายชนิด ซึ่งส่วนใหญ่จะมีพารามิเตอร์ทางสถิติเพียงแค่ Mean และ Variance เท่านั้น เช่น ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมา 2 ฝั่ง (Two-Sided Gamma PDF) [13] และ Radial-Exponential (Laplacian) PDF ซึ่งถูกใช้อธิบายลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตอย่างกว้างขวางในงานวิจัยในอดีต ตัวอย่าง เช่น งานวิจัยที่ [2, 10, 14, 15] เพราะเป็น PDF ที่มีลักษณะคล้ายกับการกระจายตัวสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต อีกทั้งยังมีรูปแบบ PDF ที่ไม่ซับซ้อนด้วย ส่วน Cauchy PDF ถูกใช้ในงานวิจัยที่ [16] T-PDF ในงานวิจัยที่ [17] และ Gaussian PDF ในงานวิจัยที่ [9] ซึ่งตารางที่ 3.2 ได้สรุป PDF ชนิดต่างๆ ที่ถูกใช้อธิบายลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตทั้งในกรณีตัวแปรเดียว (Univariate) และหลายตัวแปร (Multivariate) ของงานวิจัยชิ้นใดบ้างในอดีตและจากตารางจะสังเกตเห็นว่า PDF ในตารางที่ 3.2 นี้รวมอยู่ใน PDF ที่สร้างบนพื้นฐานระบบเพียร์สันทั้งสิ้น ดังนั้นจะพบว่าหากศึกษา PDF บนพื้นฐานระบบเพียร์สันแล้ว ก็จะครอบคลุม Prior PDF ชนิดต่างๆที่ใช้ในงานวิจัยลดสัญญาณรบกวนภาพในอดีตเกือบทั้งหมด

ตารางที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่าง PDF ที่ใช้อธิบายสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในงานวิจัยในอดีต กับ PDF ที่สร้างจากระบบเพียร์สัน

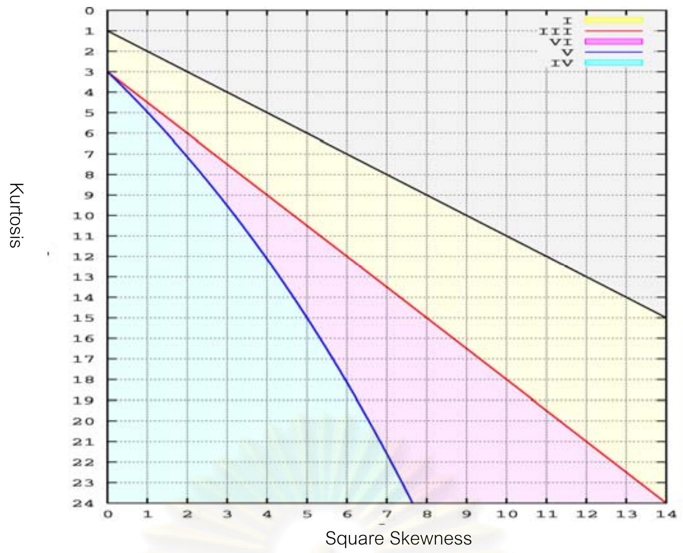
PDF จากระบบเพียร์สัน	Pearson Type	มิติของตัวแปรสุ่ม	Prior PDF ที่ได้รับ $f(\mathbf{x})$	อ้างอิงในงานวิจัย
แกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma PDF)	Type III	Univariate	$\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2\pi\sigma}}\lvert x\rvert^{\frac{-1}{2}}\exp\left(\frac{-\sqrt{3}\lvert x\rvert}{2\sigma}\right)$	[11]
		Multivariate	--	--
Radial-Exponential (Laplacian) PDF	Type III	Univariate	$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(\frac{-\sqrt{2}\lvert x\rvert}{\sigma}\right)$	[2]
		Multivariate	$\frac{K}{\sigma^{d}}\exp\left(\frac{-\sqrt{d+1}\lVert\mathbf{x}\rVert}{\sigma}\right)$, $K=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\left(d+1\right)/2\right)}\left(\frac{d+1}{4\pi}\right)^{d/2}$	[2, 10, 14, 15]
โคชี (Cauchy PDF)	Type VII	Univariate $(m=1)$	$\frac{1}{\sigma\pi}\left(1+\frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{-1}$	[7]
		Multivariate	$\frac{\sigma}{K(\sigma)\left(\lVert x\rVert^2+\sigma^2\right)^{d+1/2}}$	[16]
ที (T- PDF)	Type VII	Univariate $\left(m=\frac{\nu+1}{2},\ \lambda=\sqrt{\nu}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\nu}B(\nu/2,1/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$	[10]
		Multivariate	--	--
เกาส์ (Gaussian PDF)	Type VII	Univariate $(m\to\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$	[9]
		Multivariate	--	--

บทที่ 4

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น ก่อนหน้าบนพื้นฐานระบบเพียร์สันสำหรับหาฟังก์ชันหดตัว

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาแล้วว่าระบบเพียร์สันนั้นสามารถสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นที่เป็นประโยชน์ได้หลากหลายชนิด ซึ่งต่อไปนี้เราจะศึกษาถึง PDF ที่สร้างได้จากระบบเพียร์สันว่ามี PDF ชนิดใดบ้างที่เหมาะสมในการใช้อธิบายลักษณะการการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต กล่าวคือ *มีความหนาแน่นมากที่บริเวณ 0 และมีความหนาแน่นกว่าปกติที่ส่วนหาง (More Peak and Heavy Tails) และมีลักษณะสมมาตร (Symmetric) หรือไม่มีโมเมนต์ทางสถิติ คือ ความเบ้ (Skewness) [14-15]* พิจารณารูปที่ 4.1 ซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ทางสถิติในแนวแกนตั้งและนอน คือ ภาวะยอดมน (Kurtosis) และ ความเบ้ ตามลำดับ สังเกตที่ความเบ้มีค่าเป็นศูนย์ หรือ PDF มีลักษณะสมมาตร (Symmetric) จะสามารถอธิบายเหตุผลว่า PDF จากระบบเพียร์สันชนิดใดบ้างที่เหมาะสมหรือไม่เหมาะสมในการใช้อธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต ดังนี้

Pearson Type (PDF)	ความเหมาะสมในการใช้อธิบายลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต
I	จากกราฟพบว่าค่าภาวะยอดมนอยู่ในช่วง 1-3 ทำให้ PDF มีลักษณะไม่ยืดหยุ่นแต่มีงานวิจัยในอดีตที่ได้ศึกษา PDF ที่มีลักษณะคล้ายกันไว้แล้ว คือ Generalized Gaussian PDF
II	เป็น Subset ของ Pearson Type I PDF ดังนั้น การศึกษา Pearson Type I PDF ก็เป็นการเพียงพอ
III	จากกราฟพบว่ามีภาวะยอดมนเป็น 3 ทำให้ PDF ที่มีลักษณะไม่ยืดหยุ่น แต่จากการศึกษาพบว่า PDF ชนิดนี้ครอบคลุม PDF ที่ถูกใช้อธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในงานวิจัยในอดีตมากมาย เช่น Laplacian PDF หรือ Two-Sided Gamma PDF ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงพิจารณาว่าเหมาะสม
IV	เป็น Superset ของ Pearson Type VII PDF *แต่มีค่าความเบ้* ดังนั้นการศึกษา Pearson Type VII PDF เพียงชนิดเดียวจึงเป็นการเพียงพอ
V, VI	มีภาวะยอดมนเป็น 3 เช่นกัน จึงมีความยืดหยุ่นของ PDF เหมือน Pearson Type III PDF ดังนั้นการศึกษา Pearson Type III PDF จึงเป็นการเพียงพอ
VII	มีภาวะยอดมน คือ $\left[3,\infty\right)$ ทำให้เป็น PDF ที่มีความยืดหยุ่นสูง จึงเหมาะสมในศึกษา



รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างแกนตั้งและนอน คือ ภาวะยอดมน (Kurtosis) กับ ความเบ้ (Skewness) ของ PDF ระบบเพียร์สัน

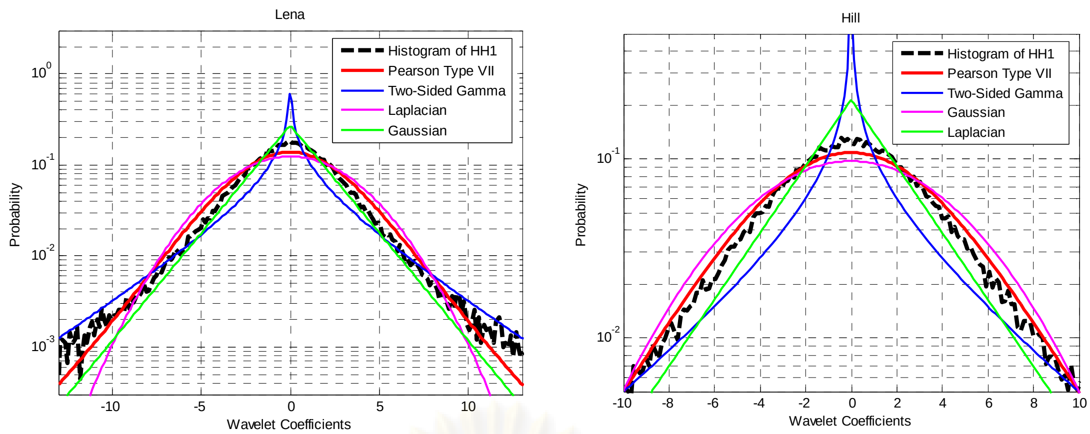
ตารางที่ 4.1 การประยุกต์ใช้ Pearson Type I, Type III, Type VII PDF กับ วิธี MAP หรือ MMSE ในงานวิจัยในอดีต

Pearson Type (PDF)	PDF ที่สร้างได้จาก ระบบเพียร์สัน	Bayes' Risk	
		วิธี MAP	วิธี MMSE
Type I	Generalized Gaussian PDF	[18]	[18]
Type III	Two-Sided Gamma PDF	นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้	[11]
	Radial-Exponential (Laplacian) PDF	[10, 14]	นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้
Type VII		นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้	ประมาณจากวิธี MAP

ต่อไปนี้เราจะมาพิจารณาว่างานวิจัยใดบ้างในอดีตที่ประยุกต์ใช้ PDF ที่สร้างจาก Pearson Type I, Type III หรือ Type VII PDF ร่วมกับวิธีความเสี่ยงแบบเบส์ คือ วิธี MAP หรือ MMSE และ มี PDF ชนิดใดที่ยังไม่ได้ประยุกต์ใช้ ซึ่งสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 4.1 โดย Two-Sided Gamma PDF และ Radial-Exponential (Laplacian) PDF ที่สร้างได้จาก Pearson Type III PDF นั้น มีในส่วนที่ยังไม่ได้ประยุกต์ใช้งาน คือ Two-Sided Gamma PDF กับ วิธี MAP และ Radial-Exponential PDF กับวิธี MMSE ส่วน Pearson Type VII นั้น ยังไม่มีผู้ประยุกต์ใช้กับทั้ง วิธี MAP และ MMSE

ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราจะศึกษา Pearson Type VII PDF กับวิธี MAP ในหัวข้อ 4.1.1 ส่วนวิธี MMSE จะใช้การประมาณจากวิธี MAP และทำการศึกษา Two-Sided Gamma PDF กับวิธี MAP รวมทั้ง Radial-Exponential PDF กับ วิธี MMSE ในหัวข้อ 4.1.2 และ 4.2.1 ตามลำดับ

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตกับ PDF ที่สร้างได้จากระบบเพียร์สัน รูปที่ 4.2 แสดงฮิสโทแกรมของภาพ Lena และ Hill ในมาตรส่วนลอการิทึม (Logarithm Scale) ในระดับการแปลงย่อย HH1 กับ Pearson Type VII PDF,



(ก) (ข)

รูปที่ 4.2 ฮิสโทแกรมภาพ Lena มาตราส่วนลอการิทึม (Logarithm Scale) ในระดับการแปลงย่อย HH1 และ Pearson Type VII PDF, Two-Sided Gamma PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF (ข) ฮิสโทแกรมภาพ Hill ในระดับการแปลงย่อย HH1 และ Pearson Type VII PDF, Two-Sided Gamma PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF

Two-Sided Gamma PDF, Gaussian PDF และ Laplacian PDF ซึ่งจะสังเกตเห็นว่า Pearson Type VII PDF ที่มีโมเมนต์ทางสถิติอันดับสูง คือ Kurtosis จะสามารถกำกับสัมประสิทธิ์ได้ดีกว่า PDF ชนิดอื่นๆ

4.1 วิธีประมาณแบบภายหลังสูงสุด

ในบทที่ 2 เมื่อเรากำหนดเวกเตอร์สุ่มของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต คือ $\mathbf{X}=[X_1, X_2,\ldots, X_d]^T$ และสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่สังเกตได้ (Observed Wavelet Coefficient) หรือ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) ในส่วนของ Parent และ Child มีการแจกแจงเวกเตอร์สุ่ม คือ $\mathbf{Y}=[Y_1, Y_2,\ldots,Y_d]^T$ และสัญญาณรบกวนมีเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{N}=[N_1, N_2,\ldots N_d]^T$ มีความสัมพันธ์แบบบวก $\mathbf{Y}=\mathbf{X}+\mathbf{N}$ ประยุกต์วิธี MAP จะได้วิธีประมาณตัวแปร $\mathbf{x}$ ดังนี้

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} \left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right] \tag{4.1}$$

โดยต่อไปนี้เราจะใช้วิธี MAP ในสมการ 4.1 ในการหาฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรจากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 7 และ แกมมาสองฝั่ง ดังต่อไปนี้

4.1.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 7

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 คอนทัวร์ทรงกลม (Spherically Contoured Pearson Type VII Random Vectors) เพื่อใช้หาฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรโดยตั้งชื่อฟังก์ชันหดตัวชนิดนี้ว่า PearsonShrink สมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตหลายตัวแปรมีการ

กระจายตัวแบบ เวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 คอนทัวร์ทรงกลม โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม ดังต่อไปนี้ [19]

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = K\left(1+\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\lambda}\right)^2\right)^{-m} \tag{4.2}$$

เมื่อ K คือ พารามิเตอร์บรรทัดฐาน, $\lambda = \sigma\sqrt{2m-3},\ m$ คือ ค่าภาวะยอดมนและ $m > 5/2$ และ σ^2 คือ ความแปรปรวน

ให้สัญญาณรบกวนในแต่ละสเกลมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเกาส์ ที่เป็นอิสระต่อกัน มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนสัญญาณรบกวน σ_n^2 ดังบทที่ 2 จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของสัญญาณรบกวน คือ

$$f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{d/2}}\exp\left(\frac{-\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right) \tag{4.3}$$

แก้สมการ 4.1 หา $\hat{x}_i$ โดยใช้สมการ 4.2 และ 4.3

$$\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \ln\left(\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{\frac{d}{2}}}\right) - \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_n^2} + \ln(K) - m\ln\left(1+\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{\lambda}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial\left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right]}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{y_i - x_i}{\sigma_n^2} - \frac{2mx_i}{\lambda^2 + \|\mathbf{x}\|^2} = 0$$

$$x_i = \frac{y_i}{1+\left(\frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2+\|\mathbf{x}\|^2}\right)}$$

กำหนดให้ $r_{PearsonShrink} = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{1+\left(\frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2 + r_{PearsonShrink}^2}\right)} \tag{4.4}$$

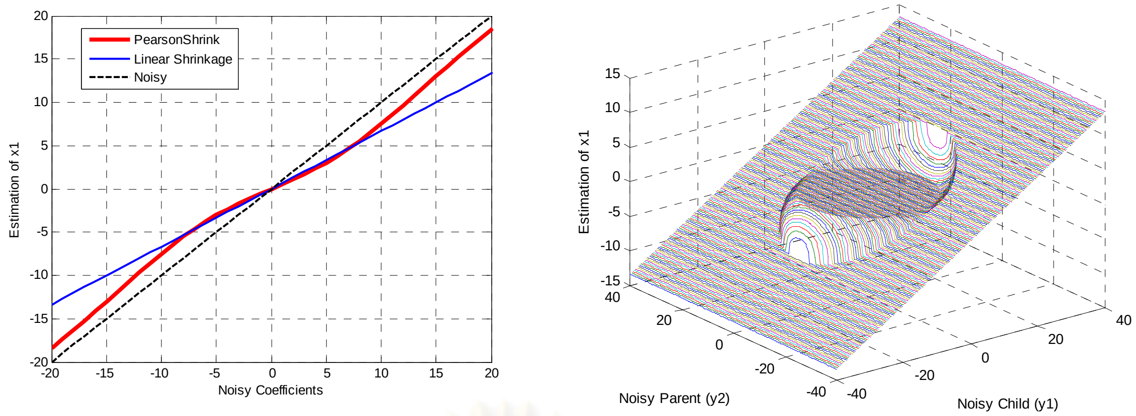
สร้าง Norm จากสมการ 4.4 เมื่อ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{1+\left(\frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2 + r_{PearsonShrink}^2}\right)}$$

$$1 + \frac{2m\sigma_n^2}{\lambda^2 + r_{PearsonShrink}^2} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r_{PearsonShrink}} \tag{4.5}$$

หาค่า $r_{PearsonShrink}$ จากสมการ 4.5 ดังนั้น

$$r_{PearsonShrink}^3 - \|\mathbf{y}\| r_{PearsonShrink}^2 + \left(\lambda^2 + 2m\sigma_n^2\right) r_{PearsonShrink} - \|\mathbf{y}\|\lambda^2 = 0$$



รูป 4.3 (ซ้าย) ฟังก์ชันหดตัว PearsonShrink ในกรณี 1-Dimension เมื่อเทียบกับ
ฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง (Linear Shrinkage) (ขวา) ฟังก์ชันหดตัว PearsonShrink กรณี 2-Dimension เมื่อ $\sigma_n^2 = 4, \sigma^2 = 8$ และ $m = 4$

ใช้วิธีการคาร์ดาโน (ภาคผนวก ข) หาค่า $r_{PearsonShrink}$ แล้วแทนสมการ 4.5 ในสมการ 4.4 กำหนดให้ $i = 1$ จะได้ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรที่นำเสนอใหม่ PearsonShrink คือ

$$\hat{x}_1 = \frac{\left(r_{PearsonShrink}\right)_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1 \tag{4.6}$$

เมื่อ

$$r_{PearsonShrink} = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{3}$$

$$A = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, B = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ ส่วนกรณี } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \text{ ให้ } A = B = 0$$

$$p = \lambda^2 + 2m\sigma_n^2 - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{3},$$

$$q = -\lambda^2 \|\mathbf{y}\| + \frac{\|\mathbf{y}\|\left(\lambda^2 + 2m\sigma_n^2\right)}{3} - \frac{2\left(\|\mathbf{y}\|\right)^3}{27} \quad \lambda = \sqrt{(2m-3)\sigma^2}$$

สำหรับฟังก์ชันหดตัว PearsonShrink ในกรณี 1-Dimension เมื่อเทียบกับฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง (Linear Shrinkage) [20] และ ในกรณี 2-Dimension มีลักษณะดังรูปที่ 4.3

4.1.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 หรือ แกมมาสองฝั่ง

ต่อไปนี้เราจะศึกษาเวกเตอร์สุ่มแกมมาสองฝั่งคอนทัวร์ทรงกลม (Spherically-Contoured Two-Sided Gamma Random Vectors) เพื่อใช้ในการสร้างฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร โดยตั้งชื่อฟังก์ชันหดตัวชนิดนี้ว่า GammaShrink สมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตหลายตัวแปรมีการกระจายตัวแบบเวกเตอร์สุ่มแกมมาสองฝั่งคอนทัวร์ทรงกลมโดยมี ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม ดังต่อไปนี้ [11]

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = K\|\mathbf{x}\|^{-1/2}\exp\left(\frac{-\sqrt{3}\|\mathbf{x}\|}{2\sigma}\right) \tag{4.7}$$

เมื่อ σ^2 คือ ความแปรปรวน และ K คือ ค่าพารามิเตอร์บรรทัดฐาน

กำหนดให้สัญญาณรบกวนแต่ละสเกลมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม ดังสมการ 4.3 แก้สมการ 4.1 หา $\hat{x}_i$ โดยใช้สมการ 4.3 และ 4.7

$$\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \ln\left(\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{\frac{d}{2}}}\right) - \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_n^2} + \ln(K) - \frac{1}{2}\ln\left(\|\mathbf{x}\|\right) - \frac{\sqrt{3}\|\mathbf{x}\|}{2\sigma}$$

$$\frac{\partial\left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right]}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{y_i - x_i}{\sigma_n^2} - \frac{x_i}{2\|\mathbf{x}\|^2} - \frac{\sqrt{3}x_i}{2\sigma\|\mathbf{x}\|} = 0$$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \frac{\sigma_n^2}{2\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma\|\mathbf{x}\|}}$$

กำหนดให้ $r_{GammaShrink} = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \frac{\sigma_n^2}{2r_{GammaShrink}^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma r_{GammaShrink}}} \tag{4.8}$$

สร้าง Norm จากสมการ 4.8 เมื่อ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{1 + \frac{\sigma_n^2}{2r_{GammaShrink}^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma r_{GammaShrink}}}$$

$$1 + \frac{\sigma_n^2}{2r_{GammaShrink}^2} + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma r_{GammaShrink}} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r_{GammaShrink}} \tag{4.9}$$

หาค่า $r_{GammaShrink}$ จากสมการ 4.9

$$r_{GammaShrink}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2\sigma} - \|\mathbf{y}\|\right) r_{GammaShrink} + \frac{\sigma_n^2}{2} = 0$$

ดังนั้น

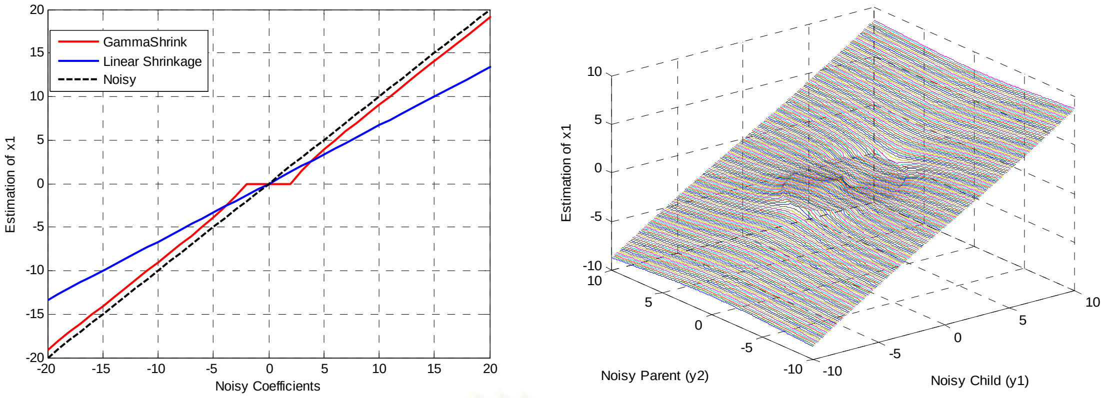
$$r_{GammaShrink} = \frac{-a + \sqrt{\left(a^2 - 2\sigma_n^2\right)_+}}{2}$$

เมื่อ

$$a = \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma} - \|\mathbf{y}\|$$

นำสมการ 4.9 แทนในสมการ 4.8 กำหนด $i = 1$ จะได้ฟังก์ชันหดตัวที่นำเสนอ GammaShrink คือ

$$\hat{x}_1 = \frac{\left(r_{GammaShrink}\right)_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1 \tag{4.10}$$



รูป 4.4 (ซ้าย) ฟังก์ชันหดตัว GammaShrink ในกรณี 1-Dimension
เมื่อเทียบกับฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง (ขวา) ฟังก์ชันหดตัว GammaShrink กรณี 2-Dimension เมื่อ $\sigma_n^2 = 2, \sigma^2 = 4$

สำหรับฟังก์ชันหดตัว GammaShrink ในกรณี 1-dimension เมื่อเทียบกับฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง (Linear Shrinkage) และ ในกรณี 2-dimension มีลักษณะดังรูปที่ 4.4 ตามลำดับ

4.2 วิธีประมาณแบบกำลังสองผิดพลาดน้อยสุด

เมื่อประยุกต์ใช้วิธี MMSE ในบทที่ 2 กับการลดสัญญาณรบกวนจะได้วิธีประมาณตัวแปร $\hat{x}_i$ ด้วยวิธีประมาณแบบกำลังสองผิดพลาดน้อยสุด คือ

$$\hat{x}_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \int_{R^d} x_i \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \left| d\mathbf{x} \right| \qquad (4.11)$$

เมื่อ $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{R^d} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \left| d\mathbf{x} \right|$

โดยต่อไปนี้จะใช้วิธี MMSE ในสมการ 4.11 ในการหาฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรจากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า Radial-Exponential ดังต่อไปนี้

4.2.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 หรือ Radial-Exponential

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเวกเตอร์สุ่มร่วม Radial-Exponential เพื่อใช้ในการประมาณตัวแปร $\hat{x}_i$ ด้วยวิธีประมาณแบบกำลังสองผิดพลาดน้อยสุด (วิธี MMSE) โดยสมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตแบบหลายตัวแปรมีการกระจายตัวแบบ Radial-Exponential d มิติ คือ $\mathbf{X}$ ซึ่งสามารถสร้างได้จากเวกเตอร์สุ่ม Gaussian d มิติที่อิสระต่อกัน $\mathbf{S} \sim N\left(0, \sigma^2 \mathbf{I}\right)$ และตัวแปรสุ่ม Z ~ Gamma 1 มิติ (Scalar) ที่อิสระต่อกันกับ $\mathbf{S}$ ด้วย ดังนี้

$$\mathbf{X} = \sqrt{z}\mathbf{S}$$

โดย

$$f_{z,\mathbf{S}}(z,\mathbf{s}) = f_z(z)\, f_{\mathbf{S}}(\mathbf{s})$$

เมื่อ

$$f_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{s}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad f_z(z) = 4z\exp(-2z)\ , z > 0$$

กำหนดให้ $a = \sqrt{z}$ และเปลี่ยนตัวแปรจาก $(z,\mathbf{S}) \rightarrow (a,\mathbf{X})$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} |J|\, f_z\left(a^2\right) f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) da \tag{4.12}$$

เมื่อ J คือ ตัวแปลงจาโคเบียน (ภาคผนวก ค) $J = 2a\left(1/a^d\right)$ ดังนั้น

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} 2a\left(\frac{1}{a^d}\right) f_z\left(a^2\right) f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) da \tag{4.13}$$

หา $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ จาก

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{R^d} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) |d\mathbf{x}|$$

จากสมการ 4.13

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{R^d} \left[\int_0^{\infty} 2a\left(\frac{1}{a^d}\right) f_z\left(a^2\right) f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) da\right] f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) |d\mathbf{x}|$$

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_0^{\infty} 2af_z\left(a^2\right)\left[\int_{R^d} \left(\frac{1}{a^d}\right) f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) |d\mathbf{x}|\right] da \tag{4.14}$$

จากงานวิจัยที่ [10]

$$\int_{R^d} \frac{1}{a^d} f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) |d\mathbf{x}| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\right) \tag{4.15}$$

นำสมการ 4.15 แทนใน 4.14 ดังนั้น

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_0^{\infty} 2af_z\left(a^2\right)\left[\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\right)\right] da$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{8a^3}{(2\pi)^{d/2}\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)^{d/2}} \exp\left(-2a^2 - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\right) da$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $a \rightarrow t$ เมื่อ $t = 2a^2 + 2\sigma_n^2/\sigma^2, dt = 4ada$

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{\exp\left(2\sigma_n^2/\sigma^2\right)}{\left(\pi\sigma^2\right)^{d/2}} \int_{\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}}^{\infty} \frac{\left(t-2\sigma_n^2/\sigma^2\right)}{t^{d/2}} \exp\left(-t - \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2 t}\right) dt$$

เขียน $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ ใหม่ในรูป Generalized Incomplete Gamma Function (ภาคผนวก ง) ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

$$\Gamma(\alpha,x;b)=\int_x^{\infty} t^{\alpha-1}\exp\left(-t-b/t\right)dt$$

เมื่อกำหนดให้ $\alpha=\{\ldots,-3/2,-1/2\}$ และ $x,b>0$ ซึ่งมีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$\Gamma(\alpha-1,x;b)=\frac{1}{b}\left[\Gamma\left(\alpha+1,x;b\right)-\alpha\Gamma\left(\alpha,x;b\right)-x^{\alpha}\exp\left(-x-b/x\right)\right].$$

ดังนั้น

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})=\frac{\exp\left(2\sigma_n^2/\sigma^2\right)}{(\pi\sigma^2)^{d/2}}\left[\Gamma\left(2-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)-\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}\Gamma\left(1-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)\right] \tag{4.16}$$

หาค่า $A=\int_{R^d} x_i\, f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\, f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})|d\mathbf{x}|$ จากสมการ 4.13

$$A=\int_{R^d} x_i\left[\int_0^{\infty} 2a\left(\frac{1}{a^d}\right) f_z\left(a^2\right) f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right)da\right] f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})|d\mathbf{x}|$$

$$A=\int_0^{\infty} 2af_z\left(a^2\right)\left[\int_{R^d} x_i\left(\frac{1}{a^d}\right) f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})|d\mathbf{x}|\right]da \tag{4.17}$$

จากงานวิจัยที่ [10]

$$\int_{R^d} x_i\frac{1}{a^d} f_{\mathbf{S}}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) f_{\mathbf{N}}\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}\right)|d\mathbf{x}|=\frac{y_i a^2\sigma^2}{\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\frac{1}{\left(2\pi\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)\right)^{d/2}}\exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\right) \tag{4.18}$$

นำสมการ 4.18 แทนในสมการ 4.17 ดังนั้น

$$A=\int_0^{\infty} 2af_z\left(a^2\right)\frac{y_i a^2\sigma^2}{\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\frac{1}{\left(2\pi\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)\right)^{d/2}}\exp\left(\frac{-\|\mathbf{y}\|^2}{2\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\right)da$$

$$A=\int_0^{\infty}\frac{8a^5 y_i\sigma^2}{\left(2\pi\right)^{d/2}\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)^{d/2+1}}\exp\left(-2a^2-\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2\left(a^2\sigma^2+\sigma_n^2\right)}\right)da$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $a\rightarrow t$

$$A=\frac{4\exp\left(2\sigma_n^2/\sigma^2\right)y_i}{\left(\pi\sigma^2\right)^{d/2}}\int_{\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}}^{\infty}\frac{\left(t^4/4-\left(\sigma_n^2/\sigma^2\right)t+\left(\sigma_n^2/\sigma^2\right)^2\right)}{t^{d/2+1}}\exp\left(-t-\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2 t}\right)dt$$

เขียน A ในรูป Generalized Incomplete Gamma Function

$$A=\frac{\exp\left(2\sigma_n^2/\sigma^2\right)y_i}{(\pi\sigma^2)^{d/2}}\left[\Gamma\left(2-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{4\sigma_n^2}{\sigma^2}\Gamma\left(1-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)+4\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}\right)^2\Gamma\left(-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)\right] \tag{4.19}$$

แก้สมการ 4.11 ด้วยสมการ 4.16 และ 4.19 จะพบว่า

$$\hat{x}_i = y_i \frac{\left[\Gamma\left(2-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)-\frac{4\sigma_n^2}{\sigma^2}\Gamma\left(1-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)+4\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}\right)^2\Gamma\left(-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)\right]}{\left[\Gamma\left(2-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)-\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}\Gamma\left(1-\frac{d}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)\right]}$$

กำหนดให้ $i=1$ และ $d=3$ ใช้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด Generalized Incomplete Gamma Function จะพบว่า

$$\hat{x}_1 = y_1 \frac{\left[\begin{array}{c}\left(1+\frac{4\left(\sigma_n^2\right)^2}{\sigma^2\|\mathbf{y}\|^2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{2\left(\sigma_n^2\right)^2}{\sigma^2\|\mathbf{y}\|^2}-\frac{4\sigma_n^2}{\sigma^2}\right)\Gamma\left(\frac{-1}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)\\ -\frac{\left(2\sigma_n^2\right)^{3/2}}{\left(\sigma^2\right)^{1/2}\|\mathbf{y}\|^2}\exp\left(-\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}-\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2\sigma_n^2}\right)\end{array}\right]}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)-\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2}\Gamma\left(-\frac{1}{2},\frac{2\sigma_n^2}{\sigma^2};\frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\sigma^2}\right)\right]} \quad (4.20)$$

เราจะเรียก ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรในสมการ 4.20 ว่า RadialExpoShrink

นอกจากนี้จะนำเสนอวิธีหาฟังก์ชันหดตัวจากวิธี MMSE ด้วยการประมาณจากฟังก์ชันหดตัวที่คำนวณได้จากวิธี MAP เพราะการหาฟังก์ชันหดตัวจากวิธี MMSE โดยตรงนั้นมีความยุ่งยากซับซ้อนกว่าการหาจากวิธี MAP เป็นอย่างมากทั้งนี้เนื่องจากการอินทิเกรตในวิธี MMSE นั้นเอง ดังนั้นในงานวิจัยที่ [15] จึงได้เสนอหลักการประมาณฟังก์ชันหดตัวที่หาจากวิธี MMSE ดังนี้

ในกรณีที่มีฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรที่คำนวณด้วยวิธี MAP คือ $\hat{x}_{1,MAP}$ *และฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง (Linear Shrinkage) [20]* $\hat{x}_{1,Lin} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_n^2}y_1$ *จะสามารถประมาณฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรที่คำนวณด้วยวิธี MMSE ได้ดังนี้*

$$\hat{x}_{1,MMSE} = \begin{cases}\hat{x}_{1,Lin}, \left|\hat{x}_{1,Lin}\right| > \left|\hat{x}_{1,MAP}\right| \\ \hat{x}_{1,MAP}, Otherwise\end{cases}$$

ดังนั้นจากฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร PearsonShrink $\left(\hat{x}_{1,MAP}\right)$ ในสมการที่ 4.6 และ GammaShrink ในสมการ 4.10 และฟังก์ชันหดตัวเส้นตรง$\left(\hat{x}_{1,Lin}\right)$ จะสามารถประมาณฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรที่สร้างจากวิธี MMSE ในกรณีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า คือ Pearson Type VII Random Vectors และ Two-Sided Gamma Random Vectors ได้

อย่างไรก็ตามผลการลดสัญญาณรบกวนที่ได้จากฟังก์ชันหดตัวที่หาจากวิธี MAP หรือวิธีประมาณ MMSE นี้ก็ให้ผลที่ไม่ต่างกันนัก

บทที่ 5

การประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติสำหรับฟังก์ชันหดตัว

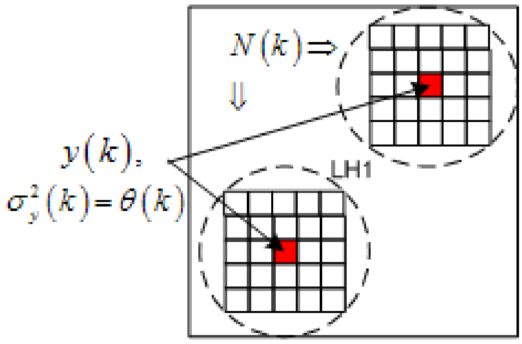
ในบทที่แล้วเราได้นำเสนอฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรแบบใหม่ 3 ชนิด เพื่อใช้ลดสัญญาณรบกวนภาพ คือ ฟังก์ชัน PearsonShrink ดังสมการ 4.6 และ GammaShrink ดังสมการ 4.10 และ RadialExpoShrink ดังสมการ 4.20 โดยจะสังเกตเห็นว่าฟังก์ชันหดตัวที่นำเสนอทั้ง 3 ชนิดนั้น ต้องการพารามิเตอร์ทางสถิติเพื่อใช้งาน ดังนี้ ฟังก์ชัน PearsonShrink ต้องการ ความแปรปรวนสัญญาณรบกวน (Noise Variance, σ_n^2) ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน (Noise-Free Variance, σ^2) และ พารามิเตอร์ภาวะยอดมน (Kurtosis, m) ส่วนฟังก์ชัน GammaShrink และ RadialExpoShrink นั้นต้องการพารามิเตอร์ทางสถิติ คือ ความแปรปรวนสัญญาณรบกวนและความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน เท่านั้น สำหรับบทนี้เราจะศึกษาและนำเสนอวิธีประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติเพื่อใช้กับฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรทั้ง 4 ชนิด ดังต่อไปนี้

5.1 ความแปรปรวนท้องถิ่น (Local Variance)

สำหรับการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติให้แม่นยำ โดยเฉพาะความแปรปรวนนั้นจัดเป็นขั้นตอนที่สำคัญในการลดสัญญาณรบกวนภาพด้วย *วิธีความเสี่ยงแบบเบส์* เลยก็ว่าได้ โดยงานวิจัยที่ [9] และ [21] ได้นำเสนอหลักการประมาณความแปรปรวนชนิดใหม่ที่สามารถทำให้ประสิทธิภาพในการลดสัญญาณรบกวนภาพดีขึ้นอย่างมาก โดยต่อไปนี้จะขอนำเสนอวิธีประมาณความแปรปรวนสัญญาณรบกวน (Noise Variance) σ_n^2 ก่อน กล่าวคือ ในงานวิจัยที่ [22] ได้นำเสนอสูตรในการประมาณความแปรปรวนสัญญาณรบกวนที่คำนวณจากสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในระดับการแปลงย่อย $HH1$ ดังต่อไปนี้

$$\hat{\sigma}_n^2 = \left(median\left|HH_1\right|/0.6745\right)^2 \tag{5.1}$$

สำหรับการประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน σ^2 นั้นจากสมมุติฐาน ที่ว่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตและสัญญาณรบกวนมีความสัมพันธ์แบบบวก (Additive Noise) และเป็นอิสระต่อกัน (Independent) ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน ในรูปความแปรปรวนของ



รูปที่ 5.1 ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (Local Noisy Variance)

สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Variance) σ_y^2 ร่วมกับ ความแปรปรวนสัญญาณรบกวน ได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\hat{\sigma}_y^2 - \hat{\sigma}_n^2\right)_+ \tag{5.2}$$

ซึ่งสมการที่ 5.2 แสดงให้เห็นว่าเราสามารถประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนผ่านความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนและความแปรปรวนสัญญาณรบกวนได้

ต่อไปนี้จะกล่าวถึง *หลักการประมาณความแปรปรวนท้องถิ่น* ในงานวิจัยที่ [9] ได้เสนอวิธีประมาณความแปรปรวนท้องถิ่น ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) ใน Subband ที่กำลังพิจารณา แต่ละตัว $y(k)$ เมื่อ $k = 1,2,\ldots,N$ และ N คือ จำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละ Subband มีความแปรปรวนแต่ละค่า $\sigma_y^2(k)$ ภายใต้กรอบหน้าต่างสี่เหลี่ยม (Square Window) $N(k)$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $y(k)$ *เราจะเรียกความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนแต่ละค่า* $\sigma_y^2(k)$ *ว่า ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (Local Noisy Variance)* ดังแสดงในรูปที่ 5.1 และใช้สัญลักษณ์ $\theta(k)$ แทนสัญลักษณ์ $\sigma_y^2(k)$ เพื่อให้สะดวกต่อการเขียนสัญลักษณ์

เมื่อสมมุติให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าของความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (Local Noisy Variance Prior PDF) $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)$ มีอยู่จริง เราสามารถประยุกต์ใช้วิธี MAP ในบทที่ 2 ในการประมาณ $\theta(k)$ ได้ดังต่อไปนี้ [12]

$$\hat{\sigma}_y^2(k) = \hat{\theta}(k) = \underset{\theta(k)\geq 0}{\arg\max}\left[\ln\left(\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta(k)\right)\right) f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)\right)\right] \tag{5.3}$$

เมื่อ $f\left(y_j \mid \theta(k)\right),\ j \in N(k)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficients PDF) ภายใต้พารามิเตอร์ $\theta(k)$

ต่อจากนั้นเราจะประยุกต์ใช้สมการ 5.2 ในการประมาณ ความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (Local Noise-Free Variance) $\sigma^2(k)$ ดังนี้

$\hat{\sigma}^2(k) = \left(\hat{\theta}(k) - \hat{\sigma}_n^2\right)_+$ ซึ่งในงานวิจัยที่ [9] ได้สมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนมี PDF แบบเกาส์ที่มีค่าเฉลี่ย 0 มีความแปรปรวน $\theta(k)$, $f\left(y_j \mid \theta(k)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta(k)}} \exp\left(\frac{-y_j^2}{2\theta(k)}\right)$ ส่วนฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าของความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น $\theta(k)$ เป็น Exponential PDF โดย $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right) = \gamma \exp\left(-\gamma\theta(k)\right)$ $\alpha, \gamma > 0$ คำนวณ $\theta(k)$ ด้วยสมการที่ 5.3 ดังนั้น

$$\left(\prod_{j \in N(k)} f\left(y_j \mid \theta(k)\right)\right) f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta(k)}}\right)^M \exp\left(\frac{-\sum_{j \in N(k)} y_j^2}{2\theta(k)}\right) \gamma \exp\left(-\gamma\theta(k)\right)$$

$$\ln\left(\left(\prod_{j \in N(k)} f\left(y_j \mid \theta(k)\right)\right) f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)\right) = M \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{M}{2} \ln\left(\theta(k)\right) - \frac{\sum_{j \in N(k)} y_j^2}{2\theta(k)}$$

$$+ \ln(\gamma) - \gamma\theta(k)$$

หา $\theta(k)$ จาก

$$\frac{\partial \ln\left(\left(\prod_{j \in N(k)} f\left(y_j \mid \theta(k)\right)\right) f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)\right)}{\partial\theta(k)} = 0$$

$$\left(\theta(k)\right)^2 + \left(\frac{M}{2\gamma}\right)\theta(k) - \frac{\sum_{j \in N(k)} y_j^2}{2\gamma} = 0$$

ดังนั้น

$$\theta(k) = \frac{-\left(\frac{M}{2\gamma}\right) + \sqrt{\left(\frac{M}{2\gamma}\right)^2 + \frac{2\sum_{j \in N(k)} y_j^2}{\gamma}}}{2} \tag{5.4}$$

เมื่อ M คือ จำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในหน้าต่าง $N(k)$

เมื่อมาถึงขั้นนี้เราจะสังเกตเห็นว่ามีพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าในการประมาณ $\theta(k)$ คือ พารามิเตอร์ของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)$ ซึ่งก็คือ γ นั้นเอง ซึ่งงานวิจัยที่ [12] ได้แก้ปัญหานี้โดยการหาความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่นด้วยวิธี ML $\left(\hat{\theta}_{ML}(k)\right)$ ก่อน จากนั้นใช้ $\hat{\theta}_{ML}(k)$ เป็นข้อมูลของ $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)$ เพื่อใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ของ PDF นี้ต่อไป สำหรับวิธี ML ที่ใช้ในการประมาณความแปรปรวนนั้นก็มีสูตรที่ใช้ในการประมาณเหมือนวิธี MAP ในสมการ 5.3 ทุกประการเพียงแต่สมมุติให้ $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right) = 1$ (Uniform PDF) ดังนั้นการประมาณความแปรปรวนแบบ ML ในกรณีนี้ คือ

$$\hat{\sigma}^2_{y,ML}(k)=\hat{\theta}_{ML}(k)=\underset{\theta_{ML}(k)\geq 0}{\arg\max}\left[\ln\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_{ML}(k)\right)\right)\right] \tag{5.5}$$

จาก $f\left(y_j \mid \theta_{ML}(k)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{ML}(k)}}\exp\left(\frac{-y_j^2}{2\theta_{ML}(k)}\right)$ ดังนั้น

$$\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_{ML}(k)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{ML}(k)}}\right)^M \exp\left(\frac{-\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{2\theta_{ML}(k)}\right)$$

$$\ln\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_{ML}(k)\right)\right)=M\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)-\frac{M}{2}\ln\left(\theta_{ML}(k)\right)-\frac{\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{2\theta_{ML}(k)}$$

ใช้สมการที่ 5.5 คำนวณ $\theta_{ML}(k)$

$$\frac{\partial \ln\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_{ML}(k)\right)\right)}{\partial \theta_{ML}(k)}=0$$

$$\hat{\theta}_{ML}(k)=\frac{\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{M}$$

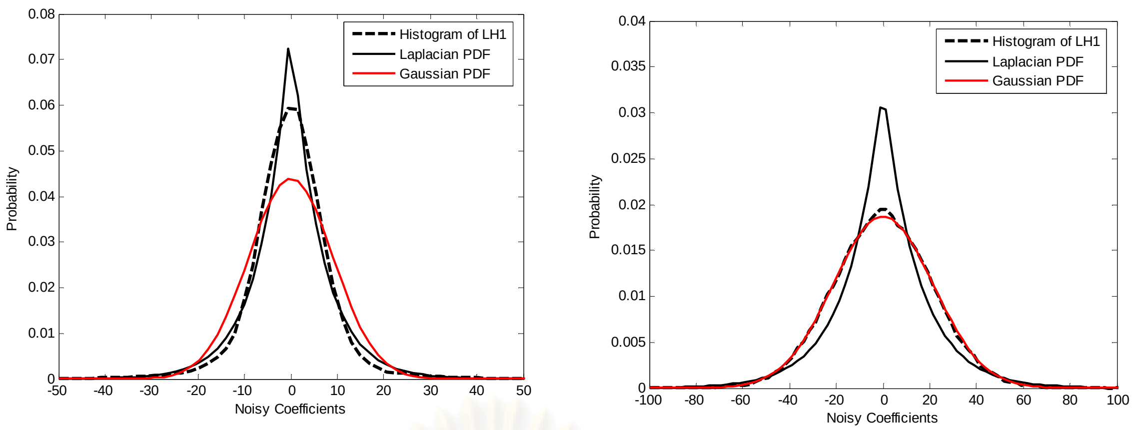
จากนั้นใช้ $\hat{\theta}_{ML}(k)$ แทนสมาชิกของ $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)$ เพื่อใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ของ PDF นี้ ซึ่งสำหรับ Exponential PDF จะมีวิธีประมาณพารามิเตอร์ γ แต่ละระดับความละเอียด (Subband) [9] ดังนี้

$$\hat{\gamma}=\frac{N}{\sum_{K=1}^{N}\hat{\theta}_{ML}(k)} \tag{5.6}$$

นำค่า $\hat{\gamma}$ กลับไปแทนในสมการ 5.4 เพื่อหา $\hat{\theta}(k)$ ต่อไป จากนั้นหาความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (Local Noise-Free Variance) โดย $\hat{\sigma}^2(k)=\left(\hat{\theta}(k)-\hat{\sigma}_n^2\right)_+$

5.1.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเงื่อนไข

จะสังเกตเห็นว่าวิธีประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่นด้วยวิธี MAP ในสมการที่ 5.3 นั้นความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน $f\left(y_j \mid \theta(k)\right)$ และฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าของความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น (Local Noisy Variance Prior PDF) $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)$ มีความสำคัญอย่างมาก ดังนั้นในหัวข้อนี้จะศึกษาถึง



(ก) (ข)

รูปที่ 5.2 ฮิสโทแกรมของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) ที่ LH1 ภาพ Lena ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นลาปลาซ และ เกาส์ (ก) $\sigma_n = 5$ (ข) $\sigma_n = 20$

เงื่อนไขของ PDF ต่างๆ ที่จะใช้กับสมการที่ 5.3 เพื่อหาสูตรในการประมาณความแปรปรวนต่อไป จากรูปที่ 5.2 แสดงฮิสโทแกรมของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) ที่ LH1 ของภาพ Lena ร่วมกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นลาปลาซ (Laplacian PDF) และ เกาส์ (Gaussian PDF) ที่ระดับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 5$ และ $\sigma_n = 20$ ตามลำดับ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ที่ความแปรปรวนสัญญาณรบกวนต่ำ (σ_n มีค่าน้อย) สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนจะมีฮิสโทแกรมที่เหมือน Laplacian PDF ที่มีค่าเฉลี่ย 0 และ ความแปรปรวน $\theta(k)$, $f\left(y_j \mid \theta(k)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\theta(k)}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\theta(k)}}\left|y_j\right|\right)$ ในทางตรงกันข้ามเมื่อความแปรปรวนสัญญาณรบกวนสูง (σ_n มีค่ามาก) สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนจะมีฮิสโทแกรมที่เหมือน Gaussian PDF ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีความแปรปรวน $\theta(k)$, $f\left(y_j \mid \theta(k)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta(k)}} \exp\left(\frac{-y_j^2}{2\theta(k)}\right)$ ดังนั้นเราจะศึกษาวิธีการประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น ในกรณีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนมีการกระจายตัวแบบ Laplacian PDF และ Gaussian PDF ตามลำดับ

ส่วนกรณีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า $f_{\theta(k)}\left(\theta(k)\right)$ นั้น ในงานวิจัยที่ [9] ได้สมมุติให้เป็นการกระจายตัวแบบ Exponential PDF เนื่องจากเป็น PDF ที่อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีวิธีที่ไม่ซับซ้อนในการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติที่จะใช้ร่วมกันดังตัวอย่างในสมการที่ 5.6 แต่ในงานวิจัยนี้จะใช้ Gamma PDF แทนก็ด้วยสาเหตุ ดังต่อไปนี้ คือ Exponential PDF เป็น PDF รูปแบบเฉพาะของ Gamma PDF ทำให้ Gamma PDF ซึ่งมีพารามิเตอร์มากกว่า สามารถกำกับลักษณะความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่น ได้ดีกว่า

Exponential PDF ในทำนองเดียวกัน Gamma PDF สามารถที่จะหาพารามิเตอร์ ได้ง่ายเหมือน Exponential PDF

5.1.1.1 กรณี ลาปลาซ-แกมมา

ในกรณีนี้จะสมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน มี PDF แบบลาปลาซ ค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน $\theta_1(k)$, $f\left(y_j \mid \theta_1(k)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\theta_1(k)}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\theta_1(k)}}\left|y_j\right|\right)$ ส่วนฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า (Prior PDF) เป็น Gamma PDF โดย $f_{\theta_1(k)}\left(\theta_1(k)\right)=\frac{\gamma_1^{\alpha_1}\left(\theta_1(k)\right)^{\alpha_1-1}\exp\left(-\gamma_1\theta_1(k)\right)}{\Gamma(\alpha_1)}$ $\alpha_1,\gamma_1>0$ คำนวณ $\theta_1(k)$ จากสมการที่ 5.3

$$\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_1(k)\right)\right) f_{\theta_1(k)}\left(\theta_1(k)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\theta_1(k)}}\right)^M \exp\left(\frac{-\sqrt{2}\sum_{j\in N(k)}\left|y_j\right|}{\sqrt{\theta_1(k)}}\right)\frac{\gamma_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left(\theta_1(k)\right)^{\alpha_1-1}\exp\left(-\gamma_1\theta_1(k)\right)$$

$$\ln\left(\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_1(k)\right)\right) f_{\theta_1(k)}\left(\theta_1(k)\right)\right)=M\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{M}{2}\ln\left(\theta_1(k)\right)-\sqrt{\frac{2}{\theta_1(k)}}\sum_{j\in N(k)}\left|y_j\right|$$
$$+\ln\left(\frac{\gamma_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\right)+(\alpha_1-1)\ln\left(\theta_1(k)\right)-\gamma_1\theta_1(k)$$

หา $\theta_1(k)$ จาก

$$\frac{\partial\ln\left(\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_1(k)\right)\right) f_{\theta_1(k)}\left(\theta_1(k)\right)\right)}{\partial\theta_1(k)}=0$$

$$\left(\theta_1(k)\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{M-2\alpha_1+2}{2\gamma_1}\right)\left(\theta_1(k)\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sum_{j\in N(k)}\left|y_j\right|}{\sqrt{2}\gamma_1}=0$$

จากนั้นใช้วิธีคาร์ดาโน (ภาคผนวก ข) ในการค่า $\theta_1(k)$ จะพบว่า

$$\left(\theta_1(k)\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{C(k)}+\sqrt[3]{D(k)} \tag{5.7}$$

เมื่อ

$$C(k)=\frac{\sum_{j\in N(k)}\left|y_j\right|}{2\sqrt{2}\gamma_1}+\sqrt{\frac{\left(\sum_{j\in N(k)}\left|y_j\right|\right)^2}{8\gamma_1^2}+\frac{\left(M-2\alpha_1+2\right)^3}{216\gamma_1^3}},$$

$$D(k)=\frac{\sum_{j\in N(k)}\left|y_j\right|}{2\sqrt{2}\gamma_1}-\sqrt{\frac{\left(\sum_{j\in N(k)}\left|y_j\right|\right)^2}{8\gamma_1^2}+\frac{\left(M-2\alpha_1+2\right)^3}{216\gamma_1^3}}$$

คำนวณหา $\theta_{1,ML}(k)$ จากสมการ 5.5 เพื่อเป็นข้อมูลของ $f_{\theta_1(k)}(\theta_1(k))$ ในการหาพารามิเตอร์ α_1,γ_1 ต่อไปโดย $f(y_j \mid \theta_{1,ML}(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\theta_{1,ML}(k)}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\theta_{1,ML}(k)}}|y_j|\right)$ จะพบว่า [21]

$$\hat{\theta}_{1,ML}(k) = \left(\sqrt{2}\,\frac{\sum_{j\in N(k)}|y_j|}{M}\right)^2 \tag{5.8}$$

ทำการหาพารามิเตอร์ α_1,γ_1 จาก [23]

$$\hat{s}_1 = \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{\theta}_{1,ML}(k)\right) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln\left(\hat{\theta}_{1,ML}(k)\right)$$

โดย

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{3-\hat{s}_1+\sqrt{(\hat{s}_1-3)^2+24\hat{s}_1}}{12\hat{s}_1} \tag{5.9}$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\hat{\alpha}_1 N}{\sum_{k=1}^{N}\hat{\theta}_{1,ML}(k)} \tag{5.10}$$

นำพารามิเตอร์ $\hat{\alpha}_1,\hat{\gamma}_1$ ไปแทนในสมการ 5.7 เพื่อประมาณ $\hat{\theta}_1(k)$ และนำไปคำนวณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนท้องถิ่น $\hat{\sigma}^2(k)$ จะได้ว่า $\hat{\sigma}^2(k) = \left(\hat{\theta}_1(k) - \hat{\sigma}_n^2\right)_+$

5.1.1.2 กรณี เกาส์-แกมมา

ในกรณีนี้เราสมมุติให้สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน มี PDF แบบเกาส์ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และมีความแปรปรวน $\theta_2(k)$, $f(y_j \mid \theta_2(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2(k)}}\exp\left(\frac{-y_j^2}{2\theta_2(k)}\right)$ ส่วน Prior PDF คือ Gamma PDF $f_{\theta_2(k)}(\theta_2(k)) = \frac{\gamma_2^{\alpha_2}(\theta_2(k))^{\alpha_2-1}\exp(-\gamma_2\theta_2(k))}{\Gamma(\alpha_2)}$ $\alpha_2,\gamma_2 > 0$ คำนวณ $\theta_2(k)$ จากสมการที่ 5.3

$$\left(\prod_{j\in N(k)} f(y_j \mid \theta_2(k))\right) f_{\theta_2(k)}(\theta_2(k)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2(k)}}\right)^M \exp\left(\frac{-\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{2\theta_2(k)}\right)\frac{\gamma_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}(\theta_2(k))^{\alpha_2-1}\exp(-\gamma_2\theta_2(k))$$

$$\ln\left(\left(\prod_{j\in N(k)} f(y_j \mid \theta_2(k))\right) f_{\theta_2(k)}(\theta_2(k))\right) = M\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{M}{2}\ln(\theta_2(k)) - \frac{\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{2\theta_2(k)}$$

$$+\ln\left(\frac{\gamma_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\right) + (\alpha_2-1)\ln(\theta_2(k)) - \gamma_2\theta_2(k)$$

หา $\theta_2(k)$ โดย

$$\frac{\partial \ln\left(\left(\prod_{j\in N(k)} f\left(y_j \mid \theta_2(k)\right)\right) f_{\theta_2(k)}\left(\theta_2(k)\right)\right)}{\partial \theta_2(k)} = 0$$

$$\left(\theta_2(k)\right)^2 + \left(\frac{M-2\alpha_2+2}{2\gamma_2}\right)\theta_2(k) - \frac{\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{2\gamma_2} = 0$$

ดังนั้น

$$\theta_2(k) = \frac{-\left(\frac{M-2\alpha_2+2}{2\gamma_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{M-2\alpha_2+2}{2\gamma_2}\right)^2 + \frac{2\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{\gamma_2}}}{2} \quad (5.11)$$

คำนวณหา $\theta_{2,ML}(k)$ เพื่อเป็นข้อมูลของ $f_{\theta_2(k)}\left(\theta_2(k)\right)$ ในการหาพารามิเตอร์ α_2,γ_2 ต่อไป จากสมการ 5.5 เมื่อ $f\left(y_j \mid \theta_{2,ML}(k)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{2,ML}(k)}}\exp\left(\frac{-y_j^2}{2\theta_{2,ML}(k)}\right)$ จะได้วิธีคำนวณ $\theta_{2,ML}(k)$ คือ

$$\hat{\theta}_{2,ML}(k) = \frac{\sum_{j\in N(k)} y_j^2}{M} \quad (5.12)$$

ทำการหาพารามิเตอร์ α_2,γ_2 จาก

$$\hat{s}_2 = \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{\theta}_{2,ML}(k)\right) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\ln\left(\hat{\theta}_{2,ML}(k)\right)$$

โดย

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{3-\hat{s}_2+\sqrt{\left(\hat{s}_2-3\right)^2+24\hat{s}_2}}{12\hat{s}_2} \quad (5.13)$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\hat{\alpha}_2 N}{\sum_{k=1}^{N}\hat{\theta}_{2,ML}(k)} \quad (5.14)$$

นำพารามิเตอร์ $\hat{\alpha}_2,\hat{\gamma}_2$ ไปแทนในสมการ 5.11 เพื่อประมาณ $\hat{\theta}_2(k)$ และนำไปคำนวณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนท้องถิ่น $\hat{\sigma}^2(k) = \left(\hat{\theta}_2(k) - \hat{\sigma}_n^2\right)_+$

สำหรับวิธีประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นวิธีนี้ หากเรากำหนดให้ $\alpha_2 = 1$ ทำให้พารามิเตอร์ γ_2 เป็นพารามิเตอร์เพียงตัวเดียวที่ต้องประมาณ จะได้วิธีประมาณ $\sigma^2(k)$ *เหมือนงานวิจัยที่ [9]* ซึ่งกำหนดให้ $f_{\theta_2(k)}\left(\theta_2(k)\right)$ เป็น Exponential PDF ซึ่งเป็นรูปแบบเฉพาะของ Gamma PDF ที่ใช้ในหัวข้อนี้นั้นเอง

5.1.2 การประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นที่ขึ้นกับความแปรปรวนสัญญาณรบกวน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง ขั้นตอนที่ใช้ประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นที่เสนอขึ้นใหม่ จากรูปที่ 5.2 แสดงให้เห็นแล้วว่าที่ความแปรปรวนสัญญาณรบกวนต่ำ สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวน (Noisy Wavelet Coefficient) จะมีฮิสโทแกรมที่ใกล้เคียงกับ Laplacian PDF ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 ซึ่งตรงกับสมมุติฐานในหัวข้อ 5.1.1.1 ซึ่งในความเป็นจริงแล้วในกรณีนี้ Noisy Wavelet Coefficient ควรจะมี PDF ที่ใกล้เคียงกับ Pearson Type VII PDF ที่ถูกสมมุติให้แทนลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน (Noise-Free Wavelet Coefficient) ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มากกว่า แต่จากรูปที่ 5.2 จะสังเกตเห็นว่าในกรณีที่ใช้ Laplacian PDF แทน Pearson Type VII PDF ก็สามารถกำกับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตมีสัญญาณรบกวนได้ใกล้เคียงกัน ทำให้เราสามารถใช้ Laplacian PDF แทน Pearson Type VII PDF ได้ ส่วนกรณีความแปรปรวนสัญญาณรบกวนสูง สัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนจะมีฮิสโทแกรมที่เหมือน Gaussian PDF ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 ซึ่งตรงกับสมมุติฐานในหัวข้อ 5.1.1.2 ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอขั้นตอนการประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นขึ้นมาใหม่ดังต่อไปนี้

อัลกอริทึม

1) *ประมาณความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน $\hat{\sigma}_n^2$ ด้วยสมการที่ 5.1*
2) *ในกรณีที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนต่ำกว่าขีดเริ่มเปลี่ยน (Threshold) ที่ตั้งไว้ จะคำนวณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่นด้วยสมการ 5.7 ในหัวข้อ 5.1.1.1*
3) *ในกรณีที่ความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนสูงกว่าขีดเริ่มเปลี่ยน (Threshold) ที่ตั้งไว้ จะคำนวณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่มีสัญญาณรบกวนท้องถิ่นด้วยสมการ 5.11 ในหัวข้อ 5.1.1.2*
4) *ประมาณความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวนท้องถิ่นจาก $\hat{\sigma}^2(k) = \left(\hat{\theta}(k) - \hat{\sigma}_n^2\right)_+$*

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้กำหนดขีดเริ่มเปลี่ยน (Threshold) ในการกำหนดว่าภาพมีความแปรปรวนสัญญาณรบกวนสูงหรือต่ำไว้ คือ ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสัญญาณรบกวน $\hat{\sigma}_n$ ที่คำนวณได้จากสมการ 5.1 มีค่าต่ำกว่า 10.5 แสดงว่าภาพนั้นมีความแปรปรวนสัญญาณรบกวนต่ำนอกนั้นจะสมมุติให้เป็นภาพที่มีความแปรปรวนสัญญาณรบกวนสูง

5.2 ภาวะยอดมน (Kurtosis)

สำหรับการประมาณ Kurtosis (m) ซึ่งจะมีใช้ก็แต่ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปรแบบ PearsonShrink, ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะประยุกต์ใช้วิธี ML โดยใช้ร่วมกับ Pearson Type VII PDF ดังนี้ $f(x)=\frac{1}{\lambda B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2\right)^{-m}$ เมื่อ $\lambda = \sigma\sqrt{2m-3}$ ดังนั้นสมการที่จะใช้ประมาณพารามิเตอร์ m ด้วยวิธี ML คือ

$$\hat{m}=\underset{m\geq 5/2}{\arg\max}\left[\ln\left(\prod_{j=1}^{N} f\left(y_j \mid m\right)\right)\right] \tag{5.15}$$

สำหรับสมการ 5.15 นั้นเราไม่มีสูตรรูปแบบปิดในการประมาณพารามิเตอร์ภาวะยอดมน ดังนั้นจำเป็นต้องใช้กรรมวิธีเชิงตัวเลขในการหาค่าประมาณแทน ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราเลือกใช้ วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) ในการประมาณค่า m โดยมีสมการขั้นตอนวิธีดังต่อไปนี้ โดย i คือ แต่ละ State ที่ Update ไปเรื่อยๆ (ภาคผนวก จ)

$$m(i+1)=m(i)-\frac{g(m(i))}{g'(m(i))}$$

$$g(m(i))=\frac{N}{2m(i)-3}+\frac{N}{B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\frac{dB\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\ln\left(1+\left(\frac{y_j}{\sigma\sqrt{2m(i)-3}}\right)^2\right)-\frac{2m(i)}{2m(i)-3}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\left(\sigma\sqrt{2m(i)-3}\right)^2+y_j^2}$$

$$g'(m(i))=\frac{-2N}{\left(2m(i)-3\right)^2}+\frac{N}{B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{dB\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}\right)^2$$

$$-\left(\frac{N}{B^2\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{dB\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}\right)^2\right)-\left(\frac{2}{2m(i)-3}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\left(\sigma\sqrt{2m(i)-3}\right)^2+y_j^2}$$

$$+\frac{6}{\left(2m(i)-3\right)^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\left(\sigma\sqrt{2m(i)-3}\right)^2+y_j^2}+\frac{4m(i)\sigma^2}{2m(i)-3}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\left(\left(\sigma\sqrt{2m(i)-3}\right)^2+y_j^2\right)^2}$$

เมื่อ

$$\frac{dB\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}=B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{d\ln\left(B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)}{dm}$$

$$\frac{d^2B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm^2}=\frac{dB\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}\frac{d\ln\left(B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)}{dm}$$
$$+B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{d^2\ln\left(B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)}{dm^2}$$

จาก

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

ดังนั้น

$$B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(m(i)-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma(m(i))$$
$$\frac{d\ln\left(B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)}{dm}=\psi\left(m(i)-\frac{1}{2}\right)-\psi\left(m(i)\right)$$
$$\frac{d^2\ln\left(B\left(m(i)-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)}{dm^2}=\frac{d\psi\left(m(i)-\frac{1}{2}\right)}{dm}-\frac{d\psi\left(m(i)\right)}{dm}$$

เมื่อ $\psi(m):=d\left(\ln\Gamma(m)\right)/dm$ คือ ฟังก์ชันพาย (Psi Function) และ $\Gamma(m):=\int_0^\infty t^{m-1}\exp(-t)\,dt$ คือ ฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function)

ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้วิธีคำนวณความแปรปรวนแบบ *วิธีความแปรปรวนรวม (Global Variance)* สำหรับการประมาณภาวะยอดมน (m) นี้โดยให้ $\hat{\sigma}^2 = \left(\left(\sum_{j=1}^{N} y_j^2 \Big/ N\right)-\hat{\sigma}_n^2\right)_+$ และทำการวนซ้ำจนกว่าค่าผิดพลาด $e=\left|m(i+1)-m(i)\right|$ จะมีค่าน้อยพอที่ต้องการ สุดท้ายจากประสบการณ์การทดลองในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกำหนดให้ค่า $m=4.5$ เมื่อ $m<5/2$ (สมการที่ 5.15 มีเงื่อนไขที่ว่า $m\geq 5/2$)

บทที่ 6

ผลการทดลอง

6.1 ผลการลดสัญญาณรบกวนภาพ

สำหรับการทดสอบวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนแรกจะใช้การแปลงเวฟเล็ตวิยุต (Discrete Wavelet Transform, DWT) ในการทดสอบวิธีที่นำเสนอ คือ PearsonShrink, GammaShrink ที่ระดับ Dimension d = 2 และ RadialExpoShrink ที่ระดับ d = 3 สำหรับสาเหตุที่ทดสอบในระดับ Dimension ที่กล่าวมาทั้งหมดนั้น เนื่องจากถ้าระดับ Dimension เพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ จะทำให้ประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนของวิธีที่นำเสนอลดลง อันเนื่องจากความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละระดับการแปลงย่อยนั้นเอง [2] แต่สำหรับ RadialExpoShrink นั้นต้องใช้ d = 3 เนื่องจากไม่มีผลเฉลยของ Generalized Incomplete Gamma Function ที่ d = 2 โดยใช้ขนาดหน้าต่าง $N(k)$ คือ 7×7 จากนั้น นำวิธีที่นำเสนอทั้งหมดเปรียบเทียบกับวิธี CauchyShrink [16] BayeShrink [18] LAWMAP [9] MLAP-MAP [10], MLAP-MMSE [10] BiShrink [14] และ BLS-GSM [24]ส่วนที่สอง จะใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด Redundant Wavelet Transform โดยเปรียบเทียบระหว่าง วิธี BLS-GSM ซึ่งใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด Steerable Pyramid [24] และวิธีที่นำเสนอทั้งหมด โดยใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด Dual Tree-Complex Wavelet Transform (DT-CWT) สำหรับภาพที่ใช้ในการทดสอบนั้นจะใช้ภาพมาตรฐานทั่วไป ขนาด 512×512 จุดภาพ จำนวน 4 ภาพ คือ ภาพ Lena, Boat, Man (Pirate), Hill และ ขนาด 256×256 จุดภาพ จำนวน 2 ภาพ คือ ภาพ Cameraman, Montage ซึ่งแสดงลักษณะรูปที่ใช้ทดสอบทั้งหมดดังรูป 6.1 ซึ่งเป็นภาพชุดเดียวกับงานวิจัยที่ [25] โดยทำการทดสอบที่ระดับสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 5,10, \quad 20\ldots,50$ ตามลำดับ และใช้ค่า PSNR เป็นตัววัดประสิทธิภาพวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพต่างๆ [2]

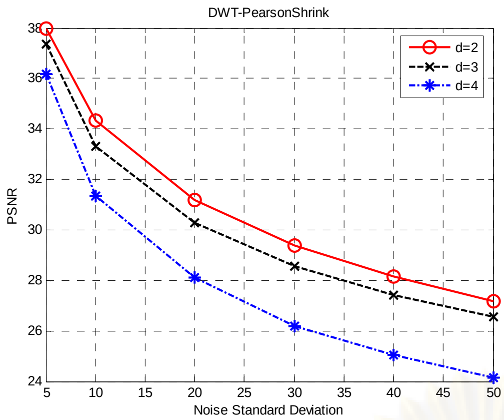
สำหรับรูปที่ 6.2 แสดงกราฟเปรียบเทียบ PSNR ของภาพ Lena ในวิธี PearsonShrink, GammaShrink ที่ d = 2, 3, 4 บนการแปลงเวฟเล็ตชนิด DWT และ DT-CWT ซึ่งจะสังเกตเห็นว่า PSNR เมื่อ d = 2 จะสูงที่สุดและ PSNR จะลดลงเรื่อยๆ เมื่อ Dimension เพิ่มขึ้น [2] ตามที่ได้ให้เหตุผลข้างต้น จากนั้นจะกล่าวถึงผลการทดลองวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพวิธีต่างๆ บนภาพต้นแบบที่ใช้ทดสอบโดยละเอียดต่อไป

(ก) (ข)

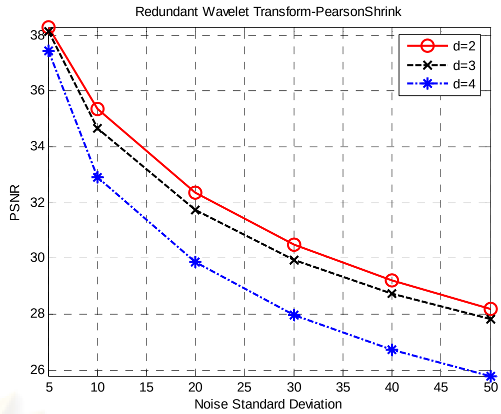
(ค) (ง)

(จ) (ฉ)

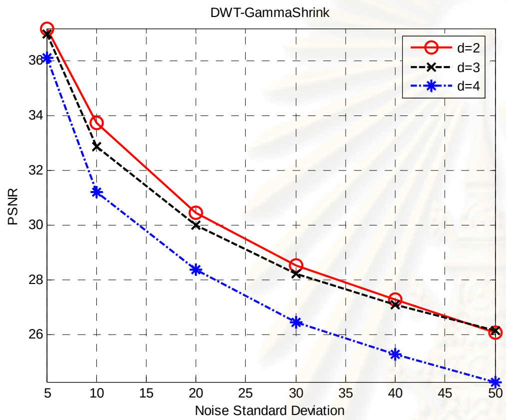
รูปที่ 6.1 แสดงภาพตัวอย่างที่ใช้ในการทดสอบ (ก) Lena (ข) Boat (ค) Man (Pirate) (ง) Hill (จ) Cameraman (ฉ) Montage



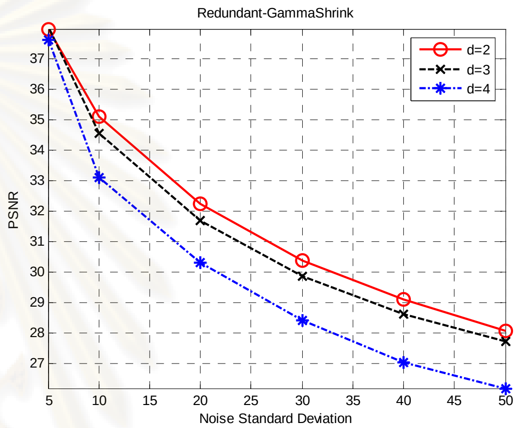
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 6.2 แสดง PSNR ที่ระดับ Dimension d = 2, 3 และ 4 บนภาพ Lena โดยรูป
(ก) วิธี PearsonShrink โดยใช้ DWT (ข) วิธี PearsonShrink โดยใช้ DT-CWT (ค) วิธี GammaShrink โดยใช้ DWT
(ง) วิธี GammaShrink โดยใช้ DT-CWT

ภาพ Lena

ภาพ Lena จะแสดงด้วยตาราง PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ในตารางที่ 6.1 และ เวลาในการประมวลผล *ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้หน่วยเป็นวินาที (Second) เสมอ* ของวิธีที่ใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด Redundant Wavelet Transform ในตารางที่ 6.2 โดยแสดงตัวอย่างภาพที่ได้จาก วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) กับ PearsonShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ ในรูปที่ 6.3 ส่วนรูปที่ 6.4 แสดงภาพบางส่วน (Crop) ที่ได้จากวิธี MLAP_MMSE กับ วิธี PearsonShrink เมื่อใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด DWT และ วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) กับ วิธี PearsonShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$

จะสังเกตพบว่าภาพจากวิธี BLS-GSM ในรูปที่ 6.3 – 6.4 จะมีความราบเรียบ (Smoot) มากจนรายละเอียดของภาพไม่ชัดเจน เช่นบริเวณใบหน้าของภาพ โดยจะสังเกตได้อย่างชัดเจนจากรูปที่ Crop ดังรูปที่ 6.4 ซึ่งต่างจากวิธีที่นำเสนอที่ยังคงความชัดเจนอยู่

ตารางที่ 6.1 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Lena

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
Discrete Wavelet Transform (DWT)						
CauchyShrink [16]	33.83	32.20	29.82	28.24	27.20	26.13
BayeShrink [18]	37.46	34.26	30.82	28.83	27.52	26.31
LAWMAP [9]	37.74	34.43	31.02	28.95	27.62	26.42
MLAP-MAP [10]	37.37	34.34	31.19	29.29	28.08	27.10
MLAP-MMSE [10]	37.48	33.78	30.15	28.30	28.07	27.10
BiShrink [14]	37.42	34.31	31.16	29.25	28.14	27.17
BLS-GSM [24]	37.90	34.64	31.41	29.52	28.16	27.15
Proposed Method						
PearsonShrink	37.97	34.35	31.22	29.38	28.17	27.20
GammaShrink	37.65	34.06	30.94	29.11	27.93	26.90
RadialExpoShrink	37.64	33.60	30.69	28.75	27.58	26.57
Redundant Wavelet Transform						
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	38.49	35.61	32.66	30.32	29.01	28.03
Proposed Method						
PearsonShrink (DT-CWT)	38.31	35.35	32.33	30.44	29.20	28.22
GammaShrink (DT-CWT)	38.23	35.34	32.41	30.56	29.34	28.38
RadialExpoShrink (DT-CWT)	38.29	34.74	31.86	29.78	28.39	27.57

ตารางที่ 6.2 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Lena โดยใช้ Redundant Wavelet Transform

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	80.63	79.34	88.92	94.63	98.95	99.64
Proposed Method						
PearsonShrink (DT_CWT)	37.77	45.55	41.74	48.36	50.75	53.53
GammaShrink (DT-CWT)	9.78	9.83	5.14	5.11	5.13	5.11
RadialExpoShrink (DT-CWT)	9.80	9.84	5.15	5.12	5.12	5.13

รูปที่ 6.3 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Lena (ข) Lena ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$

(ค) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 30.32 dB (ง) PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 30.44 dB

(ก)

(ข)

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

รูปที่ 6.4 (ก) Lena บางส่วน (ข) Lena ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$

(ค) วิธี MLAP_MMSE (DWT) PSNR = 28.30 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 29.38

(จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 30.32 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 30.44

ภาพ Boat

ในตารางที่ 6.3 แสดงค่า PSNR ของภาพ Boat และ เวลาในการประมวลผลของวิธีที่ใช้ Redundant Wavelet Transform ในตารางที่ 6.4 โดยแสดงตัวอย่างภาพที่ได้จาก วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) กับ GammaShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ ในรูปที่ 6.5 ส่วนรูปที่ 6.6 แสดงภาพบางส่วน (Crop) ที่ได้จากวิธี BiShrink กับ วิธี PearsonShrink เมื่อใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด DWT และ วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) กับ วิธี PearsonShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ จะพบว่าภาพที่ได้จากวิธี BLS-GSM ในรูป 5.5-5.6 จะไม่ตางจากวิธีที่นำเสนอมากนัก แต่วิธี BLS-GSM ก็ใช้เวลาในการประมวลผลที่มากกว่าวิธีที่นำเสนออย่างชัดเจน ดังตารางที่ 6.4

ตารางที่ 6.3 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Boat

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
Discrete Wavelet Transform (DWT)						
CauchyShrink [16]	33.03	31.08	28.49	26.77	25.49	24.68
BayeShrink [18]	35.45	32.39	29.03	27.05	25.65	24.70
LAWMAP [9]	35.72	32.57	29.19	27.24	25.86	24.94
MLAP-MAP [10]	35.21	32.33	29.16	27.30	26.11	25.14
MLAP-MMSE [10]	35.93	32.35	28.66	26.68	26.04	25.16
BiShrink [14]	35.34	32.35	29.13	27.23	26.10	25.23
BLS-GSM [24]	36.60	32.79	29.46	27.59	26.32	25.39
Proposed Method						
PearsonShrink	36.19	32.76	29.33	27.47	26.26	25.33
GammaShrink	35.90	32.48	29.09	27.19	25.98	25.06
RadialExpoShrink	36.29	32.37	28.97	27.18	25.86	25.04
Redundant Wavelet Transform						
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	36.97	33.58	30.38	28.13	26.88	25.95
Proposed Method						
PearsonShrink (DT-CWT)	35.65	33.17	29.96	28.11	26.94	25.98
GammaShrink (DT-CWT)	35.68	33.25	30.10	28.26	27.07	26.10
RadialExpoShrink (DT-CWT)	35.84	33.14	29.91	27.95	26.58	25.65

ตารางที่ 6.4 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Boat เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	80.09	79.50	86.00	91.84	95.08	97.78
Proposed Method						
PearsonShrink (DT_CWT)	44.22	45.30	42.81	45.39	44.19	45.75
GammaShrink (DT-CWT)	9.75	9.79	5.09	5.11	5.12	5.13
RadialExpoShrink (DT-CWT)	9.80	9.81	5.09	5.11	5.12	5.14

(ก) (ข)

(ค) (ง)

รูปที่ 6.5 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Boat (ข) Boat ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$

(ค) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 28.13 dB (ง) GammaShrink (DT-CWT) PSNR = 28.26 dB

(ก)

(ข)

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

รูปที่ 6.6 (ก) Boat บางส่วน (ข) Boat ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$

(ค) วิธี BiShrink (DWT) PSNR = 27.23 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 27.47

(จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 28.13 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 28.11

ภาพ Man

สำหรับรายละเอียดผลการทดลองภาพ Man นั้น จะแสดงด้วยตาราง PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ในตารางที่ 6.5 และ เวลาในการประมวลผลเมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform ในตารางที่ 6.6 และ โดยแสดงตัวอย่างภาพที่ได้จาก วิธี PearsonShrink (DT-CWT) กับ GammaShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 40$ ในรูปที่ 6.7 ส่วนรูปที่ 6.8 แสดงภาพบางส่วน (Crop) ที่ได้จากวิธี PearsonShrink กับ วิธี GammaShrink เมื่อใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด DWT และ DT-CWT ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 40$

ตารางที่ 6.5 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Man

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
Discrete Wavelet Transform (DWT)						
CauchyShrink [16]	33.56	31.21	28.40	26.83	25.65	24.80
BayeShrink [18]	36.48	32.51	28.91	27.08	25.77	24.81
LAWMAP [9]	36.61	32.71	29.15	27.30	26.24	25.05
MLAP-MAP [10]	36.36	32.50	29.09	27.39	26.19	25.34
MLAP-MMSE [10]	36.53	32.33	28.63	26.73	26.15	25.33
BiShrink [14]	36.51	32.59	29.08	27.36	26.20	25.38
BLS-GSM [24]	36.87	32.79	29.26	27.43	26.26	25.41
Proposed Method						
PearsonShrink	36.95	32.81	29.30	27.57	26.38	25.53
GammaShrink	36.69	32.49	28.98	27.23	26.08	25.24
RadialExpoShrink	36.71	32.32	28.93	27.23	26.01	25.04
Redundant Wavelet Transform						
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	37.18	33.25	29.80	28.01	26.84	25.99
Proposed Method						
PearsonShrink (DT-CWT)	36.83	33.40	29.90	28.22	27.01	26.13
GammaShrink (DT-CWT)	36.97	33.49	30.01	28.32	27.10	26.23
RadialExpoShrink (DT-CWT)	37.11	33.20	29.69	27.79	26.55	25.64

ตารางที่ 6.6 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Man เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	79.72	79.73	88.97	88.97	95.19	97.30
Proposed Method						
PearsonShrink (DT_CWT)	34.34	36.22	42.34	46.06	52.39	41.95
GammaShrink (DT-CWT)	9.80	9.70	5.20	5.11	5.09	5.09
RadialExpoShrink (DT-CWT)	9.81	9.75	5.21	5.12	5.10	5.11

(ก)

(ข)

(ค)

(ง)

รูปที่ 6.7 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Man (ข) Man ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 40$

(ค) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 27.01 dB (ง) GammaShrink (DT-CWT) PSNR = 27.10 dB

(ก)

(ข)

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

รูปที่ 6.8 (ก) Man บางส่วน (ข) Man ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 40$

(ค) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 26.38 (ง) วิธี GammaShrink (DWT) PSNR = 26.08

(จ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 27.01 (ฉ) วิธี GammaShrink (DT-CWT) PSNR = 27.10

ภาพ Hill

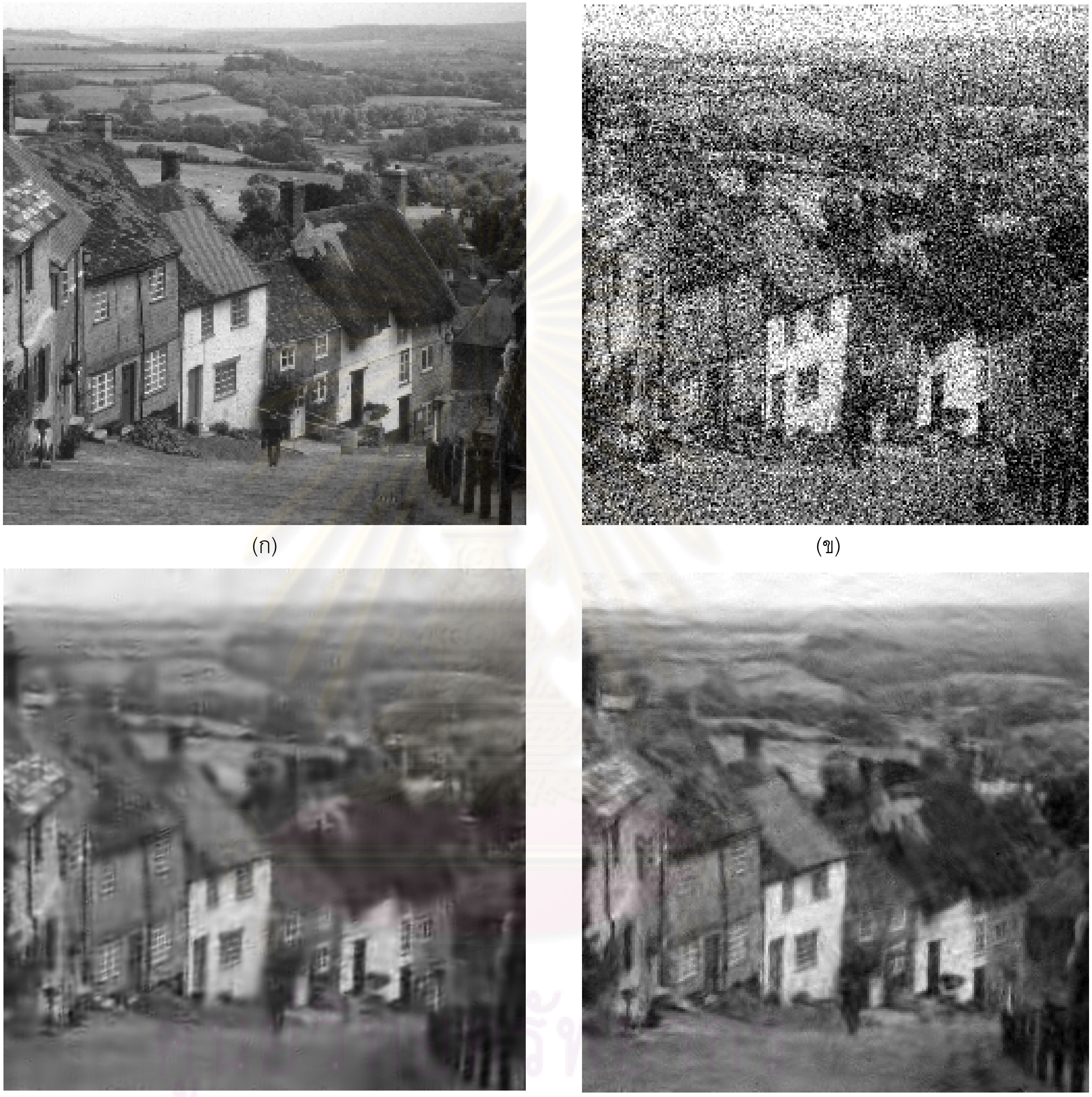
สำหรับรายละเอียดผลการทดลองภาพ Hill นั้น จะแสดงด้วยตาราง PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ในตารางที่ 6.7 และ เวลาในการประมวลผลของวิธีที่ใช้ Redundant Wavelet Transform ในตารางที่ 6.8 และ โดยแสดงตัวอย่างภาพที่ได้จาก วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) กับ PearsonShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ ในรูปที่ 6.9 ส่วนรูปที่ 6.10 แสดงภาพบางส่วน (Crop) ที่ได้จากวิธี LAWMAP กับ วิธี PearsonShrink เมื่อใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด DWT และ วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) กับ วิธี PearsonShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ จะสังเกตได้ชัดเจนว่าภาพที่ได้จากวิธี BLS-GSM ในรูป 6.9-6.10 มีลักษณะที่ราบเรียบจนรายละเอียดของภาพไม่ชัดเจนซึ่งต่างจากวิธีที่นำเสนอ

ตารางที่ 6.7 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Hill

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
Discrete Wavelet Transform (DWT)						
CauchyShrink [16]	34.10	31.54	28.83	27.26	26.27	25.24
BayeShrink [18]	35.69	32.23	29.06	27.35	26.28	25.20
LAWMAP [9]	36.02	32.56	29.36	27.71	26.52	25.57
MLAP-MAP [10]	35.42	32.21	29.21	27.64	26.63	25.84
MLAP-MMSE [10]	36.13	32.26	28.85	27.14	26.57	25.85
BiShrink [14]	35.58	32.22	29.23	27.68	26.64	25.92
BLS-GSM [24]	36.53	32.73	29.63	28.00	26.94	26.17
Proposed Method						
PearsonShrink	36.37	32.66	29.48	27.90	26.90	26.08
GammaShrink	36.04	32.29	29.13	27.60	26.61	25.75
RadialExpoShrink	36.36	32.33	29.23	27.59	26.54	25.53
Redundant Wavelet Transform						
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	36.80	33.06	29.93	28.36	27.34	26.59
Proposed Method						
PearsonShrink (DT-CWT)	35.95	33.13	29.97	28.42	27.40	26.60
GammaShrink (DT-CWT)	35.98	33.11	30.00	28.46	27.44	26.62
RadialExpoShrink (DT-CWT)	36.30	33.04	29.78	27.99	27.01	26.24

ตารางที่ 6.8 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Hill เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	79.66	79.48	89.00	88.89	99.06	98.92
Proposed Method						
PearsonShrink (DT_CWT)	29.86	35.78	36.14	34.81	38.52	42.41
GammaShrink (DT-CWT)	10.00	9.50	5.11	5.12	5.12	5.13
RadialExpoShrink (DT-CWT)	10.00	9.57	5.14	5.15	5.16	5.16



(ก) (ข)

(ค) (ง)

รูปที่ 6.9 ตัวอย่างภาพที่ได้ (ก) Hill (ข) Hill ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$

(ค) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 26.59 dB (ง) PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 26.60 dB

รูปที่ 6.10 (ก) Hill บางส่วน (ข) Hill ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$

(ค) วิธี LAWMAP (DWT) PSNR = 25.57 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 26.08

(จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 26.59 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 26.60

ภาพ Cameraman

สำหรับรายละเอียดผลการทดลองภาพ Cameraman นั้น จะแสดงด้วยตาราง PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ในตารางที่ 6.9 และ เวลาในการประมวลผลของวิธีที่ใช้ Redundant Wavelet Transform ในตารางที่ 6.10 โดยแสดงตัวอย่างภาพที่ได้จาก วิธี BLS-GSM กับ PearsonShrink ทั้ง DWT และ Redundant Wavelet Transform ในแบบ Steerable Pyramid ของ BLS-GSM และ DT-CWT ของ PearsonShrink ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ ในรูปที่ 6.11 จะสังเกตว่าวิธี BLS-GSM จะให้ภาพที่ราบเรียบ (Smoot) เกินไปเช่นเคยจนทำให้รายละเอียดของภาพลบเลือนดังตัวอย่างบริเวณใบหน้าของภาพที่ 6.11 ซึ่งต่างจากวิธีที่นำเสนอ

ตารางที่ 6.9 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Cameraman

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
Discrete Wavelet Transform (DWT)						
CauchyShrink [16]	32.24	30.18	27.40	25.63	24.32	23.40
BayeShrink [18]	36.79	32.33	28.23	26.09	24.60	23.58
LAWMAP [9]	36.80	32.33	28.26	26.20	24.78	23.82
MLAP-MAP [10]	36.57	32.28	28.39	26.45	24.98	24.08
MLAP-MMSE [10]	36.81	32.25	28.00	25.77	25.03	24.11
BiShrink [14]	36.75	32.22	28.19	26.21	25.13	24.22
BLS-GSM [24]	36.98	32.38	28.26	26.10	24.68	23.71
Proposed Method						
PearsonShrink	37.18	32.62	28.44	26.43	25.01	24.10
GammaShrink	37.00	32.39	28.17	26.24	24.81	23.83
RadialExpoShrink	36.95	32.17	27.46	25.22	24.10	23.24
Redundant Wavelet Transform						
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	37.16	32.81	28.87	26.88	25.55	24.51
Proposed Method						
PearsonShrink (DT-CWT)	37.24	33.04	29.02	27.10	25.73	24.81
GammaShrink (DT-CWT)	37.33	33.14	29.25	27.31	25.92	24.81
RadialExpoShrink (DT-CWT)	37.21	32.69	28.52	26.41	24.88	24.02

ตารางที่ 6.10 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Cameraman เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	17.34	17.34	17.31	19.61	20.25	20.89
Proposed Method						
PearsonShrink (DT_CWT)	6.55	8.83	8.48	11.14	11.28	11.64
GammaShrink (DT-CWT)	2.99	3.00	1.58	1.58	2.00	2.01
RadialExpoShrink (DT-CWT)	3.00	3.10	1.60	1.65	2.06	2.70

(ก)

(ข)

(ค)

(ง)

(จ)

(ฉ)

รูปที่ 6.11 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Cameraman (ข) Cameraman ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$

(ค) วิธี BLS-GSM PSNR = 23.71 (ง) PearsonShrink PSNR = 24.10 dB

(จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 24.51 dB (ฉ) PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 24.81 dB

ภาพ Montage

สำหรับรายละเอียดผลการทดลองภาพ Montage นั้น จะแสดงด้วยตาราง PSNR ของวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบต่างๆ ในตารางที่ 6.11 และ เวลาในการประมวลผลของวิธีที่ใช้ Redundant Wavelet Transform ในตารางที่ 6.12 และ โดยรูปที่ 6.12 แสดงภาพที่ได้จากวิธี BLS-GSM กับ วิธี PearsonShrink เมื่อใช้การแปลงเวฟเล็ตชนิด DWT และ วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) กับ วิธี PearsonShrink (DT-CWT) ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$ จะสังเกตพบว่าวิธี BLS-GSM จะให้ภาพที่ราบเรียบ (Smooth) เกินไปจนรายละเอียดของภาพไม่ชัดเจนสังเกตได้จากบริเวณปากนกแก้วในรูป 6.12 เป็นต้น

ตารางที่ 6.11 แสดงค่า PSNR ในการโปรแกรม 5 ครั้งกับวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอบนภาพ Montage

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
Discrete Wavelet Transform (DWT)						
CauchyShrink [16]	31.57	30.27	28.07	26.34	25.21	24.00
BayeShrink [18]	38.57	34.10	29.77	27.30	25.76	24.40
LAWMAP [9]	38.42	33.90	29.67	27.25	25.75	24.43
MLAP-MAP [10]	38.82	34.49	30.37	27.95	26.68	25.35
MLAP-MMSE [10]	38.84	34.45	30.31	27.93	26.54	25.47
BiShrink [14]	38.73	34.36	30.33	28.02	26.64	25.65
BLS-GSM [24]	38.46	33.95	29.77	27.48	25.89	24.68
Proposed Method						
PearsonShrink	38.70	33.99	30.09	27.72	26.42	25.11
GammaShrink	38.55	33.82	29.84	27.52	26.06	24.81
RadialExpoShrink	37.93	32.81	28.90	26.62	25.24	24.18
Redundant Wavelet Transform						
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	38.73	34.54	30.50	28.17	26.58	25.47
Proposed Method						
PearsonShrink (DT-CWT)	39.35	34.97	30.88	28.38	27.02	25.65
GammaShrink (DT-CWT)	39.55	35.23	31.21	28.75	27.38	25.91
RadialExpoShrink (DT-CWT)	38.97	34.51	29.90	27.14	26.65	25.25

ตารางที่ 6.12 แสดงเวลาเฉลี่ยในการประมวลผลของภาพ Montage เมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	18.73	18.19	19.64	20.28	21.92	21.91
Proposed Method						
PearsonShrink (DT_CWT)	7.05	9.09	9.41	9.83	11.58	10.17
GammaShrink (DT-CWT)	2.98	3.00	1.58	1.58	2.00	2.01
RadialExpoShrink (DT-CWT)	3.00	3.20	1.61	1.65	2.10	2.71

รูปที่ 6.12 (ก) Montage (ข) Montage ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$

(ค) วิธี BLS-GSM (DWT) PSNR = 24.68 (ง) วิธี PearsonShrink (DWT) PSNR = 25.11

(จ) วิธี BLS-GSM (Steerable Pyramid) PSNR = 25.47 (ฉ) วิธี PearsonShrink (DT-CWT) PSNR = 25.65

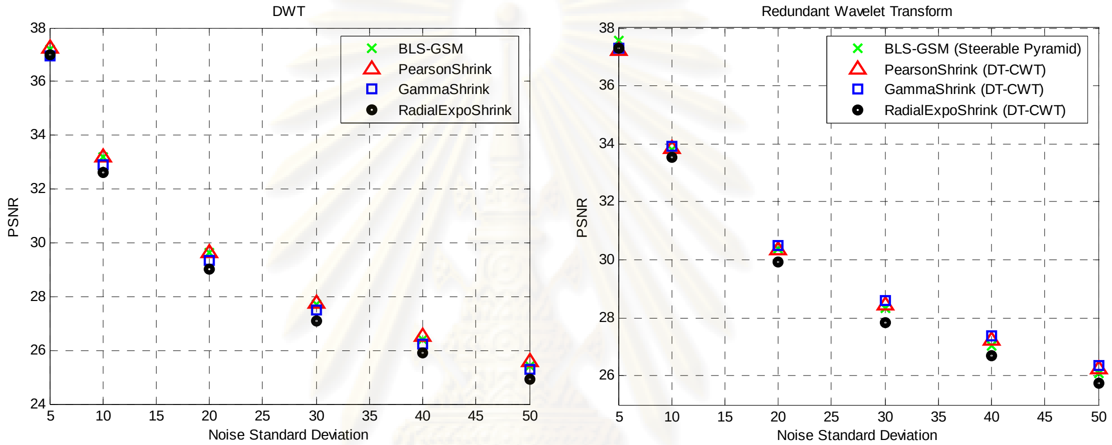
สำหรับค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้งหมดและเวลาที่ใช้ในการลดสัญญาณรบกวนเมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform ได้แสดงในตารางที่ 6.13 และ 6.14 ตามลำดับ ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าค่า PSNR เมื่อใช้การแปลงเวฟเล็ตแบบ DWT จะน้อยกว่าเมื่อใช้ Redundant Wavelet Transform ประมาณ 1 dB สำหรับรูปที่ 6.13 (ก) แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธี BLS-GSM กับวิธีที่นำเสนอทั้งหมด ใน DWT ส่วนรูปที่ 6.13 (ข) ใน Redundant Wavelet Transform สำหรับรูป 6.14 แสดงเวลาในการลดสัญญาณรบกวนใน Redundant Wavelet Transform ของวิธี BLS-GSM กับวิธีที่นำเสนอทั้งหมด **สำหรับการแปลงเวฟเล็ตแบบ DWT** นั้น วิธี PearsonShrink จะให้ค่า PSNR ที่สูงกว่าวิธี GammaShrink และ RadialExpoShrink แต่ใกล้เคียงกับวิธี BLS-GSM ส่วน**การแปลงเวฟเล็ตชนิด** Redundant Wavelet Transform ซึ่งวิธีที่นำเสนอทั้งหมดใช้ DT-CWT นั้น วิธี GammaShrink จะให้ค่า PSNR ที่ดีกว่าวิธี PearsonShrink และ RadialExpoShrink แต่ใกล้เคียงกับวิธี BLS-GSM ที่ใช้การแปลงชนิด Steerable Pyramid อย่างไรก็ตามวิธี BLS-GSM ก็ใช้เวลาในการลดสัญญาณรบกวนที่นานกว่าวิธีที่นำเสนอทั้งหมดอย่างชัดเจน

ตารางที่ 6.13 แสดงค่าเฉลี่ย PSNR ของทุกภาพที่ใช้ทดสอบ

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
Discrete Wavelet Transform (DWT)						
CauchyShrink [16]	33.06	31.08	28.50	26.85	25.69	24.71
BayeShrink [18]	36.74	32.97	29.30	27.28	25.93	24.83
LAWMAP [9]	36.89	33.08	29.44	27.44	26.13	25.04
MLAP-MAP [10]	36.63	33.03	29.57	27.67	26.45	25.48
MLAP-MMSE [10]	36.95	32.90	29.10	27.09	26.40	25.50
BiShrink [14]	36.72	33.01	29.52	27.63	26.48	25.60
BLS-GSM [24]	37.22	33.21	29.63	27.69	26.38	25.42
Proposed Method						
PearsonShrink	37.23	33.20	29.64	27.75	26.52	25.56
GammaShrink	36.97	32.92	29.36	27.48	26.25	25.27
RadialExpoShrink	36.98	32.60	29.03	27.10	25.89	24.93
Redundant Wavelet Transform						
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	37.56	33.81	30.36	28.31	27.03	26.09
Proposed Method						
PearsonShrink (DT-CWT)	37.22	33.84	30.34	28.45	27.22	26.23
GammaShrink (DT-CWT)	37.29	33.93	30.50	28.61	27.38	26.34
RadialExpoShrink (DT-CWT)	37.29	33.55	29.94	27.84	26.68	25.73

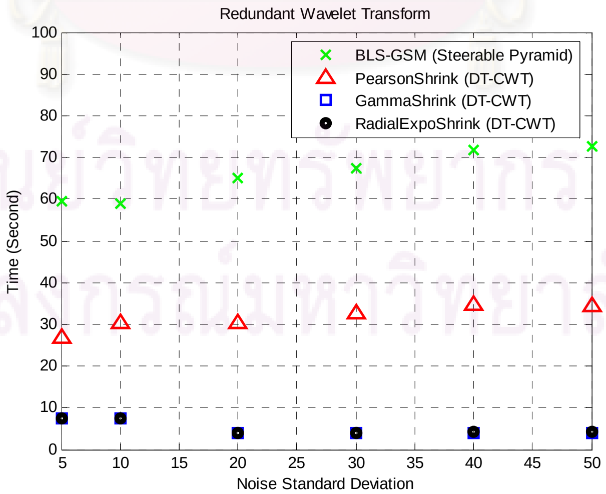
ตารางที่ 6.14 แสดงค่าเฉลี่ยเวลาของทุกภาพที่ใช้ทดสอบบน Redundant Wavelet Transform

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
BLS-GSM (Steerable Pyramid)	59.36	58.93	64.97	67.37	71.74	72.74
Proposed Method						
PearsonShrink (DT_CWT)	26.63	30.13	30.15	32.60	34.79	34.24
GammaShrink (DT-CWT)	7.55	7.47	3.95	3.94	4.08	4.08
RadialExpoShrink (DT-CWT)	7.57	7.55	3.97	3.97	4.11	4.33



รูปที่ 6.13 (ก) ค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธี BLS-GSM และวิธีที่นำเสนอทั้งหมด ใน DWT

(ข) ค่าเฉลี่ย PSNR ของวิธี BLS-GSM และวิธีที่นำเสนอทั้งหมด ใน Redundant Wavelet Transform



รูปที่ 6.14 ค่าเฉลี่ยเวลาในการลดสัญญาณรบกวน

ของวิธี BLS-GSM และวิธีที่นำเสนอทั้งหมด ใน Redundant Wavelet Transform

บทที่ 7

วิธีลดสัญญาณรบกวนโดยการประมาณ
ฟังก์ชันหดตัวและพารามิเตอร์ทางสถิติด้วยกัน

ในบทที่ 4 และ 5 นั้นเราได้ศึกษาวิธีลดสัญญาณรบกวนด้วย วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ โดยการหาฟังก์ชันหดตัวในบทที่ 4 และ ประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติในบทที่ 5 แยกจากกัน สำหรับบทนี้เราจะนำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนแบบใหม่โดยนำ 2 ขั้นตอนมารวมกัน กล่าวคือ การประมาณฟังก์ชันหดตัวและพารามิเตอร์ทางสถิติไปพร้อมกัน โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอด้วย *วิธีฟังก์ชันผกพัน* และ *วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Vectors)* อย่างไรก็ตามประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนของวิธีที่นำเสนอในบทนี้เมื่อเทียบกับวิธีดั่งเดิมที่นำเสนอในบทที่ 4 และ 5 ยังให้ประสิทธิภาพที่ต่ำกว่า ซึ่งจำเป็นต้องทำการวิจัยต่อไปในอนาคต

7.1 วิธีฟังก์ชันผกพัน

วิธีนี้จะรวมวิธีการหาฟังก์ชันหดตัวและวิธีประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติด้วย วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ เข้าไว้ด้วยกัน โดยใช้วิธี MAP ในการหาฟังก์ชันหดตัว (Shrinkage Function) และมองความแปรปรวน เป็นตัวแปรสุ่มในคราวเดียวกันแทนที่จะพิจารณาแยกดังบทที่ 4 และ 5 โดยมีรายละเอียด ดังนี้

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} \left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \right] \tag{7.1}$$

เมื่อ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty f_{\mathbf{X}|\theta_X}(\mathbf{x}\,|\,\theta_X)\, f_{\theta_X}(\theta_X) d\theta_X$ โดย θ_X คือ ความแปรปรวนของ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ที่ถูกมองในรูปตัวแปรสุ่มที่สามารถอธิบายได้โดย PDF $f_{\theta_X}(\theta_X)$

ต่อไปนี้จะนำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนด้วย *วิธีฟังก์ชันผกพัน* เมื่อฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน $f_X(x)$ เป็นเกาส์ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวน θ_X ในกรณี 1-Dimension ก่อน ดังนี้

$$f_{X|\theta_X}(x\,|\,\theta_X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_X}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\theta_X} \right)$$

มอง θ_X เป็นตัวแปรสุ่มแบบแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $\alpha, \gamma > 0$ ดังนี้

$$f_{\theta_X}(\theta_X) = \frac{\gamma^\alpha (\theta_X)^{\alpha-1} \exp(-\gamma\theta_X)}{\Gamma(\alpha)} \tag{7.2}$$

ดังนั้น

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\theta_X^{\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\theta_X}-\gamma\theta_X\right)d\theta_X$$

จาก [26]

$$\int_0^{\infty}x^{\nu-1}\exp\left(\frac{-\beta}{x}-\lambda x\right)dx=2\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{\nu}{2}}K_{\nu}\left(2\sqrt{\beta\lambda}\right)$$

เมื่อ $K_{\upsilon}(C)$ คือ Modified Bessel Function of the Second Kind, $K_{\nu}(C)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{I_{-\upsilon}(C)-I_{\upsilon}(C)}{\sin(\pi\upsilon)}\right)$

$I_{\upsilon}(C)=(C/2)^{\upsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(C^2/4\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$

ดังนั้น

$$f_X(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{2\alpha-1}{4}}K_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right),\ \beta=x^2/2$$

แก้สมการ 7.1 เมื่อ $f_N(n)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{d/2}}\exp\left(\frac{-n^2}{2\sigma_n^2}\right)$

$$\ln f_N(y-x)+\ln f_x(x)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\right)-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}+\ln\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{2\alpha-1}{4}}\right)+\left(\frac{2\alpha-1}{4}\right)\ln\beta$$
$$+\ln\left(K_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)\right)$$

$$\frac{\partial\left[\ln f_N(y-x)+\ln f_X(x)\right]}{\partial x}=0$$

$$\frac{y-x}{\sigma_n^2}+\left(\frac{2\alpha-1}{4}\right)\frac{\partial\ln(\beta)}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\ln\left(K_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)\right)}{\partial\left(K_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)\right)}\frac{\partial\left(K_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)\right)}{\partial\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)}\frac{\partial\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}=0$$

ดังนั้น

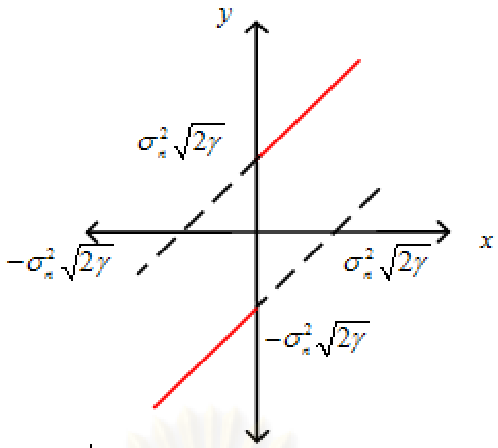
$$x=y+\left(\frac{2\alpha-1}{4}\right)\frac{\sigma_n^2x}{\beta}+\frac{\sigma_n^2\left(\sqrt{\gamma/\beta}\right)x}{K_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)}\frac{\partial\left(K_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)\right)}{\partial\left(2\sqrt{\gamma\beta}\right)}\qquad(7.3)$$

เมื่อ $\alpha\approx1$[26]

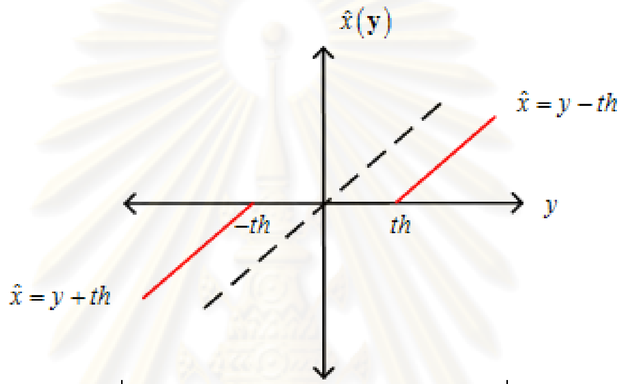
$$K_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(z^{-1/2}\right)\exp(-z)\qquad(7.4)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial K_{1/2}(z)}{\partial z}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(z^{-3/2}\right)\exp(-z)\left(\frac{1}{2}+z\right)\qquad(7.5)$$



รูปที่ 7.1 แสดงลักษณะฟังก์ชันของสมการ 7.6



รูปที่ 7.2 แสดงลักษณะฟังก์ชันหดตัวของสมการที่ 7.7

กำหนดให้ $z = 2\sqrt{\gamma\beta}$ และ $\alpha \approx 1$ ในสมการ 7.3 จากสมการ 7.4 และ 7.5 สามารถเขียนสมการ 7.3 ใหม่ได้ดังนี้

$$x = y - \frac{\left(\sigma_n^2\sqrt{2\gamma}\right)x}{|x|} \tag{7.6}$$

เขียนกราฟสมการ 7.6 ดังรูป 7.1 ซึ่งในทางปฏิบัติจะทราบค่าสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่สังเกตได้ y โดยต้องการประมาณสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน คือ x แทน ดังนั้นเมื่อทำการหาฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function) ของกราฟในรูป 7.1 เราจะเขียนสมการของฟังก์ชันหดตัวในการลดสัญญาณรบกวนได้ดังสมการ 7.7 ซึ่งสามารถแสดงลักษณะของฟังก์ชันได้ดังรูปที่ 7.2

$$\hat{x}(y) = \operatorname{sgn}(y)\left(|y| - th\right)_+ \tag{7.7}$$

เมื่อ $\operatorname{sgn}(y)$ คือ Sign Function [26] และ $th = \sigma_n^2\sqrt{2\gamma}$

อย่างไรก็ตามในกรณีที่ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้า $f_X(x)$ ไม่ใช่เกาส์ การหาฟังก์ชันผกพันจะทำได้ยากดังนั้นเราจะใช้ ***วิธีฟังก์ชันผกผันจากการประมาณ*** แทน โดยเริ่มจากการพิจารณาสมการหาค่า $\hat{x}_i$ จากสมการ 7.1 เมื่อ $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{d/2}}\exp\left(\frac{-\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right)$

หาผลเฉลยของ $\hat{x}_i$

$$\frac{\partial\left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})+\ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right]}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{y_i-x_i}{\sigma_n^2}+\frac{\partial\left(\ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{y_i-x_i}{\sigma_n^2}+\frac{1}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}\frac{\partial\left(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right)}{\partial x_i}=0$$

พิจารณา θ_X เป็นตัวแปรสุ่มร่วมกับ $f_X(x)$

$$x_i=y_i+\frac{\sigma_n^2}{f_{\mathbf{X}|\theta_X}(\mathbf{x}\,|\,\theta_X)}\frac{\partial f_{\mathbf{X}|\theta_X}(\mathbf{x}\,|\,\theta_X)}{\partial x_i}$$

ดังนั้น

$$x_i=y_i+\sigma_n^2\frac{\partial\left(\ln f_{\mathbf{X}|\theta_X}(\mathbf{x}\,|\,\theta_X)\right)}{\partial x_i}$$

กำหนดให้

$$C(\mathbf{x})=\frac{\partial\left(\ln f_{\mathbf{X}|\theta_X}(\mathbf{x}\,|\,\theta_X)\right)}{\partial x_i} \tag{7.8}$$

ดังนั้น

$$x_i=y_i+\sigma_n^2C(\mathbf{x}) \tag{7.9}$$

ในกรณีที่ ตัวแปร x_i และ y_i มีความสัมพันธ์กัน คือเป็นตัวแปรของสัญญาณต้นแบบและสัญญาณรบกวนเมื่อแตกอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) จะพบว่า

$$C(x_i)=C(y_i)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^{(k)}(y_i)}{k!}(x_i-y_i)^k$$

เมื่อ $C^{(k)}(y_i)$ คือ อนุพันธ์อันดับที่ k ของจุด y_i

ดังนั้นในกรณีที่สัญญาณรบกวนต่ำทำให้ $x_i\approx y_i$ เราสามารถประมาณ $C(\mathbf{x})$ ได้ด้วย $C(\mathbf{y})$ ที่ถูกต้องถึงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ในกรณีเราสามารถเขียนสมการที่ 7.9 ใหม่ได้ว่า

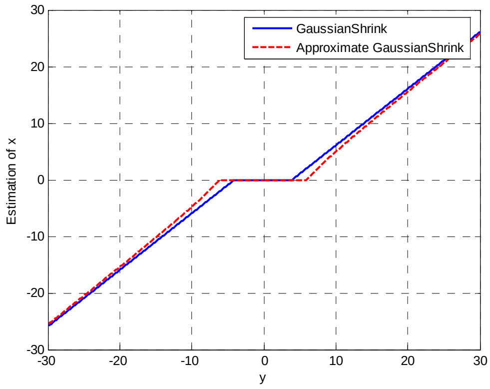
$$\hat{x}_i^*=y_i+\sigma_n^2C(\mathbf{y}) \tag{7.10}$$

จากงานวิจัยที่ [27] เพื่อแก้ปัญหาการหาอนุพันธ์ที่จุด 0 ของ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ในกรณีที่ไม่ใช่เกาส์ เราจะประมาณสมการ 7.10 ใหม่ว่า

$$\hat{x}_i^*=\operatorname{sgn}(y_i)\left(|y_i|-th\right)_+ \tag{7.11}$$

เมื่อ $th=\sigma_n^2|C(\mathbf{y})|$ (จะสังเกตว่ารูปกราฟฟังก์ชันหดตัวที่ได้จากสมการ 7.11 เหมือนรูปที่ 7.2 เพียงแต่เปลี่ยนค่า th) **จากนั้นหาฟังก์ชัน θ_X ใน** Subband **ที่กำลังพิจารณา**จากวิธี MAP เพื่อแทนใน $C(\mathbf{x})$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\theta_X(x)&=\arg\max_{\theta_X}\left[f_{\theta_X|X}(\theta_X\,|\,x)\right]\\&=\arg\max_{\theta_X}\left[f_{X|\theta_X}(x\,|\,\theta_X)\,f_{\theta_X}(\theta_X)\right]\end{aligned}$$



รูปที่ 7.3 ฟังก์ชันหดตัวกรณีผลเฉลยจริงในสมการ 7.7

และผลเฉลยที่ได้จากการประมาณในกรณี Gaussian PDF ตัวแปรเดียว เมื่อ $\sigma_n^2 = 20, \gamma = 0.02$

$$\theta_X = \arg\max_{\theta_X} \left[\ln f_{X|\theta_X}(x|\theta_X) + \ln f_{\theta_X}(\theta_X) \right] \tag{7.12}$$

โดยเราสามารถสรุป ***วิธีฟังก์ชันผกพันจากการประมาณ*** ได้ดังอัลกอริทึมต่อไปนี้

อัลกอริทึม

1) คำนวณ $C(\mathbf{x})$ จากสมการ 7.8

$$C(\mathbf{x}) = \frac{\partial\left(\ln f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x}|\theta_X)\right)}{\partial x_i}$$

2) หาฟังก์ชัน θ_X จากสมการ 7.12 เพื่อแทน $C(\mathbf{x})$

$$\theta_X = \arg\max_{\theta_X} \left[\ln f_{X|\theta_X}(x|\theta_X) + \ln f_{\theta_X}(\theta_X) \right]$$

3) ใช้ฟังก์ชันหดตัวจากสมการ 7.11 กรณี $i=1$ ในการลดสัญญาณรบกวน โดย

$$\hat{x}_1^* = \operatorname{sgn}(y_1)\left(|y_1| - th\right)_+ \text{ เมื่อ } th = \sigma_n^2 |C(\mathbf{y})|$$

ต่อไปนี้จะทดสอบเปรียบเทียบวิธีฟังก์ชันผกพันที่ได้ผลเฉลยจริงในกรณี Gaussian PDF ตัวแปรเดียว โดยมีฟังก์ชันหดตัวดังสมการ 7.7 และวิธีฟังก์ชันผกพันจากการประมาณ ดังอัลกอริทึม ข้างต้นว่ามีความแตกต่างกันอย่างไรบ้าง ดังนี้

Gaussian PDF ในกรณีตัวแปรเดียวคือ $f_{X|\theta_X}(x|\theta_X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_X}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\theta_X}\right)$

1) คำนวณ $C(\mathbf{x})$ จากสมการ 7.8

$$\ln f_{X|\theta_x}(x|\theta_x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_x}}\right) - \frac{x^2}{2\theta_x}$$

$$\frac{\partial\left(\ln f_{X|\theta_x}(x|\theta_x)\right)}{\partial\theta_x} = -\frac{x}{\theta_x}$$

ดังนั้น

$$C(x) = \frac{-x}{\theta_x} \tag{7.13}$$

2) หาฟังก์ชัน θ_X เมื่อ $f_{X|\theta_X}(x|\theta_X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_X}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\theta_X}\right)$ ให้ $f_{\theta_X}(\theta_X)$ คือ Gamma PDF ดังสมการ 7.2 ในกรณี $\alpha\approx 1$ ดังนั้น $f_{\theta_X}(\theta_X)=\gamma\exp(-\gamma\theta_X)$ จะพบว่า

$$\ln f_{X|\theta_x}(x|\theta_x)+\ln f_{\theta_x}(\theta_x)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)-\frac{\ln\theta_x}{2}-\frac{x^2}{2\theta_x}+\ln\gamma-\gamma\theta_x$$

แก้สมการหาฟังก์ชัน θ_X จากสมการ 7.12

$$\frac{\partial\left[\ln f_{X|\theta_X}(x|\theta_X)+\ln f_{\theta_X}(\theta_X)\right]}{\partial\theta_X}=0$$

$$\theta_X^2+\frac{\theta_X}{2\gamma}-\frac{x^2}{2\gamma}=0$$

ดังนั้น

$$\theta_X=\frac{-1+\sqrt{1+8\gamma x^2}}{4\gamma}$$

3) ใช้ฟังก์ชันหดตัว $\hat{x}^*=\mathrm{sgn}(y)(|y|-th)_+$ เมื่อ $th=\sigma_n^2|C(y)|$ ในการลดสัญญาณรบกวน

เมื่อเขียนกราฟเปรียบเทียบฟังก์ชันหดตัวที่ได้ผลเฉลยจริงดังสมการ 7.7 เปรียบเทียบกับผลเฉลยจากอัลกอริทึมการประมาณข้างต้นจะมีลักษณะกราฟดังรูป 7.3 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันหดตัวที่ได้จากผลเฉลยจริงและจากวิธีประมาณไม่ต่างกันมากนัก

ในส่วนการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติ คือ $\hat{\gamma},\hat{\sigma}_n^2$ เพื่อใช้งานจริงนั้นกรณีที่เราสมมุติให้ PDF ของ θ_X มีการกระจายตัวแบบแกมมาดังสมการ 7.2 เมื่อ $\alpha\approx 1$ เมื่อใช้วิธี ML เราจะได้วิธีประมาณ $\hat{\gamma}$ ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตแต่ละตัวภายในหน้าต่างจัตุรัส $N(k)$ [9] คือ

$$\hat{\gamma}(k)=\frac{M}{\left(\left(\sum_{j\in N(k)}y_j^2\Big/M\right)-\hat{\sigma}_n^2\right)_+} \tag{7.14}$$

เมื่อ M คือจำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตแต่ละหน้าต่าง $N(k)$ และหา $\hat{\sigma}_n^2$ จากสมการ 5.1

วิธีฟังก์ชันผกพันกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าจากระบบเพียร์สัน

ต่อไปนี้เราจะประยุกต์ใช้ *วิธีฟังก์ชันผกพันจากการประมาณ* กับ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าที่มาจากระบบเพียร์สัน คือ จากเวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 (Pearson Type VII Random Vectors) และ เวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 3 ทั้ง แกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma Random Vectors) และ Radial Exponential Random Vectors ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 7

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของเวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 (Pearson Type VII Random Vectors) เมื่อเขียนกรณีมีความแปรปรวน θ_X และพารามิเตอร์ภาวะยอดมน m คือ

$$f_{\mathbf{x}|\theta_X}\left(\mathbf{x}\,|\,\theta_X\right)=K\left(1+\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{(2m-3)\theta_X}\right)^{-m}$$

1) คำนวณ $C(\mathbf{x})$ จากสมการ 7.8

$$\ln f_{\mathbf{x}|\theta_X}\left(\mathbf{x}\,|\,\theta_X\right)=\ln(K)-m\ln\left(1+\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{(2m-3)\theta_X}\right)$$

$$\frac{\partial\left(\ln f_{\mathbf{x}|\theta_X}\left(\mathbf{x}\,|\,\theta_X\right)\right)}{\partial x_i}=\frac{-2mx_i}{(2m-3)\theta_X+\|\mathbf{x}\|^2}$$

ดังนั้น

$$C(\mathbf{x})=\frac{-2mx_i}{(2m-3)\theta_X+\|\mathbf{x}\|^2} \tag{7.15}$$

2) หาฟังก์ชัน θ_X เมื่อ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเพียร์สันชนิดที่ 7 กรณี 1-Dimension คือ $f_{X|\theta_X}\left(x\,|\,\theta_X\right)=\frac{1}{B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\sqrt{(2m-3)\theta_X}}\left(1+\frac{x^2}{(2m-3)\theta_X}\right)^{-m}$ โดย $f_{\theta_X}\left(\theta_X\right)=\gamma\exp\left(-\gamma\theta_X\right)$

จะพบว่า

$$\ln f_{X|\theta_X}\left(x\,|\,\theta_X\right)+\ln f_{\theta_X}\left(\theta_X\right)=\frac{-\ln\theta_X}{2}+\ln\left(\frac{1}{B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\sqrt{(2m-3)}}\right)-m\ln\left(1+\frac{x^2}{(2m-3)\theta_X}\right)$$

$$+\ln\gamma-\gamma\theta$$

แก้สมการหาฟังก์ชัน θ_X จากสมการ 7.12

$$\frac{\partial\left[\ln f_{X|\theta_X}\left(x\,|\,\theta_X\right)+\ln f_{\theta_X}\left(\theta_X\right)\right]}{\partial\theta_X}=0$$

$$\theta_X^2+\frac{\left(\frac{2m-3}{2}+\gamma x^2\right)}{\gamma(2m-3)}\theta_X-\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)x^2}{\gamma(2m-3)}=0$$

ดังนั้น

$$\theta_X(x)=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

เมื่อ $b=\frac{\left(\frac{2m-3}{2}+\gamma x^2\right)}{\gamma(2m-3)},c=-\frac{-\left(m-\frac{1}{2}\right)x^2}{\gamma(2m-3)}$

3) ใช้ฟังก์ชันหดตัว $\hat{x}_1^* = \operatorname{sgn}(y_1)(|y_1| - th)_+$ เมื่อ $th = \sigma_n^2 |C(\mathbf{y})|$ ในการลดสัญญาณรบกวนโดยประมาณ $\hat{m}$ จากหัวข้อ 5.2

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 แบบแกมมาสองฝั่ง

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของเวกเตอร์สุ่มแกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma Random Vectors) เมื่อเขียนในกรณีมีความแปรปรวน θ_X คือ

$$f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) = K \|\mathbf{x}\|^{-1/2} \exp\left(\frac{-\sqrt{3}\|\mathbf{x}\|}{2\sqrt{\theta_X}} \right)$$

1) คำนวณ $C(\mathbf{x})$ จากสมการ 7.8

$$\ln f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) = \ln(K) - \frac{\ln(\|\mathbf{x}\|)}{2} - \frac{\sqrt{3}\|\mathbf{x}\|}{2\sqrt{\theta_X}}$$

$$\frac{\partial\left(\ln f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X)\right)}{\partial x_i} = -\left(\frac{1}{2\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\theta_X}\,\|\mathbf{x}\|} \right) x_i$$

ดังนั้น

$$C(\mathbf{x}) = -\left(\frac{1}{2\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\theta_X}\,\|\mathbf{x}\|} \right) x_i \tag{7.16}$$

2) หาฟังก์ชัน θ_X เมื่อ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมาสองฝั่ง ในกรณี 1-Dimension คือ $f_{X|\theta_X}(x \mid \theta_X) = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2\pi}\,\theta_X^{1/4}} |x|^{-1/2} \exp\left(\dfrac{-\sqrt{3}|x|}{2\sqrt{\theta_X}} \right)$ และ $f_{\theta_X}(\theta_X) = \gamma \exp(-\gamma\theta_X)$ จะพบว่า

$$\ln f_{X|\theta_X}(x \mid \theta_X) + \ln f_{\theta_X}(\theta_X) = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{3}|x|^{-1/2}}{2\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{\ln\theta_X}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2(\theta_X)^{1/2}}|x| + \ln\gamma - \gamma\theta$$

แก้สมการหาฟังก์ชัน θ_X จากสมการ 7.12

$$\frac{\partial\left[\ln f_{X|\theta_X}(x \mid \theta_X) + \ln f_{\theta_X}(\theta_X)\right]}{\partial\theta_X} = 0$$

$$\theta_X^{3/2} + \frac{\theta_X^{1/2}}{4\gamma} - \frac{\sqrt{3}|x|}{4\gamma} = 0$$

ใช้วิธีการคาร์ดาโน (ภาคผนวก ข) จะพบว่า

$$\theta_X = \left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \right)^2$$

เมื่อ $A = \dfrac{-c}{2} + \sqrt{\dfrac{c^2}{4} + \dfrac{b^3}{27}}, B = \dfrac{-c}{2} - \sqrt{\dfrac{c^2}{4} + \dfrac{b^3}{27}}, b = \dfrac{1}{4\gamma}$ และ $c = \dfrac{-\sqrt{3}|x|}{4\gamma}$

3) ใช้ฟังก์ชันหดตัว $\hat{x}_1^* = \operatorname{sgn}(y_1)(|y_1| - th)_+$ เมื่อ $th = \sigma_n^2 |C(\mathbf{y})|$ ในการลดสัญญาณรบกวน

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 Radial Exponential

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของ Radial Exponential Random Vectors เมื่อเขียนในกรณีที่สมมุติมีความแปรปรวน θ_X คือ

$$f_{\mathbf{x}|\theta_X}\left(\mathbf{x}\,|\,\theta_X\right)=K\exp\left(\frac{-\sqrt{d+1}\|\mathbf{x}\|}{\sqrt{\theta_X}}\right)$$

1) คำนวณ $C(\mathbf{x})$ จากสมการ 7.8

$$\ln f_{\mathbf{x}|\theta_X}\left(\mathbf{x}\,|\,\theta_X\right)=\ln(K)-\sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}}\|\mathbf{x}\|$$

$$\frac{\partial\left(\ln f_{\mathbf{x}|\theta_X}\left(\mathbf{x}\,|\,\theta_X\right)\right)}{\partial x_i}=-\sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}}\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|}$$

ดังนั้น

$$C(\mathbf{x})=-\sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}}\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} \tag{7.17}$$

2) หาฟังก์ชัน θ_X เมื่อ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม Radial Exponential กรณี 1 Dimension $f_{X|\theta_X}\left(x\,|\,\theta_X\right)=\frac{1}{\sqrt{2\theta_X}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\theta_X}}|x|\right)$ โดย $f_{\theta_X}\left(\theta_X\right)=\gamma\exp(-\gamma\theta_X)$ ดังนั้น

$$\ln f_{X|\theta_X}\left(x\,|\,\theta_X\right)+\ln f_{\theta_X}\left(\theta_X\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\ln\theta_X}{2}-\sqrt{\frac{2}{\theta_X}}|x|+\ln\gamma-\gamma\theta$$

แก้สมการหาฟังก์ชัน θ_X จากสมการ 7.12

$$\frac{\partial\left[\ln f_{X|\theta_X}\left(x\,|\,\theta_X\right)+\ln f_{\theta_X}\left(\theta_X\right)\right]}{\partial\theta_X}=0$$

$$\theta_X^{3/2}+\frac{\theta_X^{1/2}}{2\gamma}-\frac{|x|}{\sqrt{2}\gamma}=0$$

ใช้วิธีการคาร์ดาโน (ภาคผนวก ข) จะพบว่า

$$\theta_X=\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)^2$$

เมื่อ $A=\frac{-c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}},B=\frac{-c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}},b=\frac{1}{2\gamma}$ และ $c=\frac{-|x|}{\sqrt{2}\gamma}$

3) ใช้ฟังก์ชันหดตัว $\hat{x}_1^*=\mathrm{sgn}(y_1)\left(|y_1|-th\right)_+$ เมื่อ $th=\sigma_n^2|C(\mathbf{y})|$ ในการลดสัญญาณรบกวน

7.2 วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง

วิธีนี้จะพิจารณาให้ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้า เป็นเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Vectors) จากนั้นจึงพิจารณาประมาณฟังก์ชันหดตัวและความแปรปรวนไปพร้อมกัน โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

พิจารณา $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ แบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง ดังนั้น

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{\theta_X \in N(k)} f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) W(\theta_X) \qquad (7.18)$$

เมื่อ $W(\theta_X) = \frac{1}{Z} f_{\theta_X}(\theta_X), Z = \sum_{\theta_X \in N(k)} f_{\theta_X}(\theta_X)$ โดย $f_{\theta_X}(\theta_X)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแกมมาดังสมการ 7.2 ในกรณี $\alpha \approx 1$

แทนสมการ 7.18 ในสมการ 7.1 ดังนั้น

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathbf{x}} \left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \ln\left(\sum_{\theta_X \in N(k)} f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) W(\theta_X) \right) \right]$$

จาก Jensen's Inequality

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \approx \arg\max_{\mathbf{x}} \left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \sum_{\theta_X \in N(k)} W(\theta_X) \ln\left(f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) \right) \right]$$

จากนั้นหาผลเฉลยของ $\hat{x}_i$

$$\frac{\partial \left[\ln f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \sum_{\theta_X \in N(k)} W(\theta_X) \ln\left(f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) \right) \right]}{\partial x_i} = 0$$

เมื่อ $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{d/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma_n^2} \right)$ ดังนั้น

$$\frac{y_i - x_i}{\sigma_n^2} + \sum_{\theta_X \in N(k)} W(\theta_X) \frac{\ln\left(f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) \right)}{\partial x_i} = 0$$

$$x_i = y_i + \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} W(\theta_X) \frac{\ln\left(f_{\mathbf{x}|\theta_X}(\mathbf{x} \mid \theta_X) \right)}{\partial x_i}$$

จากสมการ 7.8

$$x_i = y_i + \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) C(\mathbf{x}) \right) \qquad (7.19)$$

จากนั้นแก้สมการ 7.19 เพื่อหา $\hat{x}_i$

สำหรับการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติ คือ ความแปรปรวนที่ปราศจากสัญญาณรบกวน $\hat{\theta}_X$ ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตแต่ละตัวนั้นคำนวณจาก

$$\hat{\theta}_X(k) = \left(\left(\sum_{j \in N(k)} y_j^2 \Big/ M \right) - \hat{\sigma}_n^2 \right)_+$$

และคำนวณพารามิเตอร์ $\hat{\gamma}, \hat{\sigma}_n^2$ จากสมการ 7.14 และ 5.1 ตามลำดับ

ต่อไปนี้จะประยุกต์ใช้ วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง กับการกระจายตัวก่อนหน้าแบบเกาส์ใน 1 มิติก่อน เริ่มจากพิจารณาสมการ 7.19 โดยแทน $C(\mathbf{x})$ จากสมการ 7.13 จะพบว่า

$$x = y - \sigma_n^2 x \sum_{\theta_X \in N(k)} \frac{W(\theta_X)}{\theta_X}$$

ดังนั้น

$$\hat{x} = \frac{y}{1+\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \frac{W(\theta_X)}{\theta_X}} \tag{7.20}$$

โดยเราจะได้สมการที่ใช้ลดสัญญาณรบกวนของ วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง เมื่อประยุกต์ใช้กับการกระจายตัวต้นแบบเกาส์ใน 1 มิติ ดังสมการที่ 7.20

วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าจากระบบเพียร์สัน

ต่อไปนี้จะพิจารณาวิธีลดสัญญาณรบกวนด้วย *วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง* กับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมจากระบบเพียร์สัน คือ จากเวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 (Pearson Type VII Random Vectors) และ เวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 3 ทั้ง แกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma Random Vectors) และ Radial Exponential Random Vectors ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 7

พิจารณาสมการที่ 7.19 โดยการแทน $C(\mathbf{x})$ ด้วยสมการ 7.15 จะพบว่า

$$x_i = y_i - \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) \frac{2mx_i}{(2m-3)\theta_X + \|\mathbf{x}\|^2} \right)$$

$$x_i = \frac{y_i}{1+2m\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{(2m-3)\theta_X + \|\mathbf{x}\|^2} \right)} \tag{7.21}$$

กำหนดให้

$$K(\mathbf{x}) = 1+2m\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{(2m-3)\theta_X + \|\mathbf{x}\|^2} \right)$$

จากการประมาณอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) ที่ได้กล่าวไปแล้วก่อนหน้านี้ ในกรณีที่สัญญาณรบกวนต่ำเราสามารถประมาณ $K(\mathbf{x})$ ได้ด้วย $K(\mathbf{y})$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการ 7.21 โดยกำหนดให้ $i=1$ ใหม่ได้ ดังนี้

$$\hat{x}_1 = \frac{y_1}{K(\mathbf{y})}$$

เมื่อ $K(\mathbf{y}) = 1+2m\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{(2m-3)\theta_X + \|\mathbf{y}\|^2} \right)$

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 แบบแกมมาสองฝั่ง

พิจารณาสมการที่ 7.19 โดยการแทน $C(\mathbf{x})$ ด้วยสมการ 7.16 จะพบว่า

$$x_i = y_i - \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) \left(\frac{1}{2\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\theta_X}\,\|\mathbf{x}\|} \right) x_i \right)$$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) \left(\frac{1}{2\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\theta_X}\,\|\mathbf{x}\|} \right) \right)}$$

กำหนดให้ $r = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{1 + \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) \left(\frac{1}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\theta_X}\, r} \right) \right)} \tag{7.22}$$

สร้าง Norm จากสมการ 7.22 เมื่อ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{1 + \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) \left(\frac{1}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\theta_X}\, r} \right) \right)}$$

$$1 + \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) \left(\frac{1}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\theta_X}\, r} \right) \right) = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r} \tag{7.23}$$

จากสมการ 7.23 หาค่า r ดังต่อไปนี้

$$1 + \frac{\sigma_n^2}{2r^2} \left(\sum_{\theta_X \in N(k)} W(\theta_X) \right) + \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2r} \left(\sum_{\theta_X \in N(k)} \frac{W(\theta_X)}{\sqrt{\theta_X}} \right) = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r}$$

$$r^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2} \left(\sum_{\theta_X \in N(k)} \frac{W(\theta_X)}{\sqrt{\theta_X}} \right) - \|\mathbf{y}\| \right) r + \frac{\sigma_n^2}{2} \sum_{\theta_X \in N(k)} W(\theta_X) = 0$$

ดังนั้น

$$r = \frac{-b + \sqrt{\left(b^2 - 4c\right)_+}}{2}$$

เมื่อ $b = \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{2} \left(\sum_{\theta_X \in N(k)} \frac{W(\theta_X)}{\sqrt{\theta_X}} \right) - \|\mathbf{y}\|, c = \frac{\sigma_n^2}{2} \sum_{\theta_X \in N(k)} W(\theta_X)$

แทนค่าสมการ 7.23 ในสมการ 7.22 โดยกำหนดให้ $i = 1$ ดังนั้น

$$\hat{x}_1 = \frac{(r)_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าเพียร์สันชนิดที่ 3 Radial Exponential

พิจารณาสมการที่ 7.19 โดยการแทน $C(\mathbf{x})$ ด้วยสมการ 7.17 จะพบว่า

$$x_i = y_i - \sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(W(\theta_X) \sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}} \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} \right)$$

$$x_i = \frac{y_i}{1+\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{\|\mathbf{x}\|} \sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}} \right)}$$

กำหนดให้ $r = \|\mathbf{x}\|$

$$x_i = \frac{y_i}{1+\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{r} \sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}} \right)} \tag{7.24}$$

สร้าง Norm จากสมการ 7.24 เมื่อ $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$ ดังนั้น

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{y}\|}{1+\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{r} \sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}} \right)}$$

$$1+\sigma_n^2 \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{r} \sqrt{\frac{d+1}{\theta_X}} \right) = \frac{\|\mathbf{y}\|}{r} \tag{7.25}$$

จากสมการ 7.25 หาค่า r ดังต่อไปนี้

$$r = \|\mathbf{y}\| - \sigma_n^2 \sqrt{d+1} \sum_{\theta_X \in N(k)} \left(\frac{W(\theta_X)}{\sqrt{\theta_X}} \right)$$

แทนค่าสมการ 7.25 ในสมการ 7.24 และกำหนดให้ $i = 1$ ดังนั้น

$$\hat{x}_1 = \frac{(r)_+}{\|\mathbf{y}\|} y_1$$

โดยในหัวข้อถัดไปจะประยุกต์ใช้วิธีลดสัญญาณรบกวนด้วย *วิธีฟังก์ชันผกพัน* และ *วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง* ทั้งที่ประยุกต์ใช้กับการกระจายตัวแบบเกาส์ใน 1 มิติ และประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมตัวก่อนหน้าจากระบบเพียร์สัน คือ จากเวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 7 (Pearson Type VII Random Vectors) และ เวกเตอร์สุ่มเพียร์สันชนิดที่ 3 ทั้ง แกมมาสองฝั่ง (Two-Sided Gamma Random Vectors) และ Radial Exponential Random Vectors

7.3 ผลการทดลอง

ในบทนี้จะนำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนโดยการประมาณฟังก์ชันหดตัวและพารามิเตอร์ทางสถิติด้วยกันใน *วิธีฟังก์ชันผกพัน และ วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง* โดย *วิธีฟังก์ชันผกพัน* นั้นจะประยุกต์ใช้ทั้งแบบที่ได้ผลเฉลยจริง คือ เมื่อประยุกต์ใช้กับ Gaussian PDF หรือ แบบที่ได้จากการประมาณ คือ เมื่อประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมจากระบบเพียร์สัน คือ จาก Pearson Type VII Random Vectors, Two-Sided Gamma Random Vectors

และ Radial Exponential Random Vectors โดยเปรียบเทียบวิธีที่นำเสนอในบทนี้กับวิธีดั้งเดิม ที่แยกขั้นตอนการหาฟังก์ชันหดตัวและประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติออกจากกัน ที่มีการเสนอไว้แล้ว คือ LAWMAP และ PearsonShrink, GammaShrink, RadialExpoShrink ที่ dimension = 2 โดยใช้ขนาดหน้าต่าง $N(k)$ คือ 7×7 บนการแปลงเวฟเล็ตแบบ DWT โดยมีผลการทดลองแต่ละภาพ ดังตารางที่ 7.1-7.6 และค่าเฉลี่ย PSNR ในตารางที่ 7.7 และตัวอย่างภาพที่ได้ดังรูปที่ 7.4-7.9

ตาราง 7.1 PSNR ของภาพ Lena

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
LAWMAP	37.74	34.43	31.02	28.95	27.62	26.42
PearsonShrink (หัวข้อ 4.1.1)	37.97	34.35	31.22	29.38	28.17	27.20
GammaShrink (หัวข้อ 4.1.2)	37.65	34.06	30.94	29.11	27.93	26.90
RadialExpoShrink (หัวข้อ 4.2.1)	37.64	33.60	30.69	28.75	27.58	26.57
วิธีหาฟังก์ชันผกพันกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	37.21	34.18	30.98	29.11	27.88	26.88
Pearson Type VII Random Vectors	37.39	34.11	30.69	28.70	27.42	26.21
Two-Sided Gamma Random Vectors	37.53	33.94	30.13	27.94	26.53	25.04
Radial Exponential Random Vectors	37.43	34.24	30.88	28.94	27.69	26.54
วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	37.43	34.38	31.11	29.19	27.90	26.86
Pearson Type VII Random Vectors	37.90	34.13	30.15	27.73	25.81	24.38
Two-Sided Gamma Random Vectors	37.26	33.99	30.50	28.47	27.10	25.86
Radial Exponential Random Vectors	37.26	34.18	30.86	28.90	27.58	26.48

(ก) (ข)

(ค) (ง)

รูปที่ 7.4 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Lena (ข) Lena ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 50$

(ค) วิธี LAWMAP PSNR = 26.42 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Gaussian PDF PSNR = 26.88 dB

ตาราง 7.2 PSNR ของภาพ Boat

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
LAWMAP	35.72	32.57	29.19	27.24	25.86	24.94
PearsonShrink (หัวข้อ 4.1.1)	36.19	32.76	29.33	27.47	26.26	25.33
GammaShrink (หัวข้อ 4.1.2)	35.90	32.48	29.09	27.19	25.98	25.06
RadialExpoShrink (หัวข้อ 4.2.1)	36.29	32.37	28.97	27.18	25.86	25.04
วิธีหาฟังก์ชันผกพันกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	35.04	32.20	28.96	27.11	25.90	24.99
Pearson Type VII Random Vectors	35.40	32.29	28.89	26.95	25.62	24.59
Two-Sided Gamma Random Vectors	35.78	32.37	28.64	26.42	24.99	23.76
Radial Exponential Random Vectors	35.36	32.32	28.97	27.04	25.78	24.80
วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	35.14	32.36	29.16	27.28	26.00	25.04
Pearson Type VII Random Vectors	36.16	32.59	28.83	26.53	24.82	23.52
Two-Sided Gamma Random Vectors	35.20	32.20	28.78	26.70	25.33	24.25
Radial Exponential Random Vectors	35.08	32.24	28.96	27.04	25.71	24.73

(ก)

(ข)

(ค)

(ง)

รูปที่ 7.5 ภาพที่ได้จาก (ก) Boat (ข) Boat ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี PearsonShrink PSNR = 27.47 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Pearson Type VII Random Vectors PSNR = 26.95 dB

ตาราง 7.3 PSNR ของภาพ Man

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
LAWMAP	36.61	32.71	29.15	27.30	26.24	25.05
PearsonShrink (หัวข้อ 4.1.1)	36.95	32.81	29.30	27.57	26.38	25.53
GammaShrink (หัวข้อ 4.1.2)	36.69	32.49	28.98	27.23	26.08	25.24
RadialExpoShrink (หัวข้อ 4.2.1)	36.71	32.32	28.93	27.23	26.01	25.04
วิธีหาฟังก์ชันผกพันกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	36.18	32.27	28.83	27.15	26.00	25.16
Pearson Type VII Random Vectors	36.36	32.35	28.80	26.96	25.71	24.78
Two-Sided Gamma Random Vectors	36.61	32.39	28.57	26.51	25.06	23.94
Radial Exponential Random Vectors	36.42	32.40	28.87	27.09	25.89	25.00
วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	36.29	32.49	29.06	27.30	26.07	25.17
Pearson Type VII Random Vectors	36.84	32.66	28.77	26.58	24.93	23.66
Two-Sided Gamma Random Vectors	36.24	32.23	28.63	26.75	25.43	24.44
Radial Exponential Random Vectors	36.20	32.30	28.82	27.05	25.81	24.91


(ก)


(ข)


(ค)


(ง)

รูปที่ 7.6 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Man (ข) Man ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี PearsonShrink PSNR = 27.57 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Pearson Type VII Random Vectors PSNR = 26.96 dB

ตาราง 7.4 PSNR ของภาพ Hill

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
LAWMAP	36.02	32.56	29.36	27.71	26.52	25.57
PearsonShrink (หัวข้อ 4.1.1)	36.37	32.66	29.48	27.90	26.90	26.08
GammaShrink (หัวข้อ 4.1.2)	36.04	32.29	29.13	27.60	26.61	25.75
RadialExpoShrink (หัวข้อ 4.2.1)	36.36	32.33	29.23	27.59	26.54	25.53
วิธีหาฟังก์ชันผกผัน กับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	35.21	32.04	29.04	27.53	26.53	25.76
Pearson Type VII Random Vectors	35.49	32.11	28.94	27.26	26.17	25.23
Two-Sided Gamma Random Vectors	35.88	32.17	28.65	26.75	25.45	24.20
Radial Exponential Random Vectors	35.43	32.12	29.01	27.40	26.35	25.46
วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	35.62	32.39	29.29	27.69	26.61	25.76
Pearson Type VII Random Vectors	36.31	32.60	28.97	26.83	25.29	23.99
Two-Sided Gamma Random Vectors	35.56	32.08	28.77	27.07	25.90	24.83
Radial Exponential Random Vectors	35.40	32.13	29.01	27.41	26.31	25.41


(ก)


(ข)

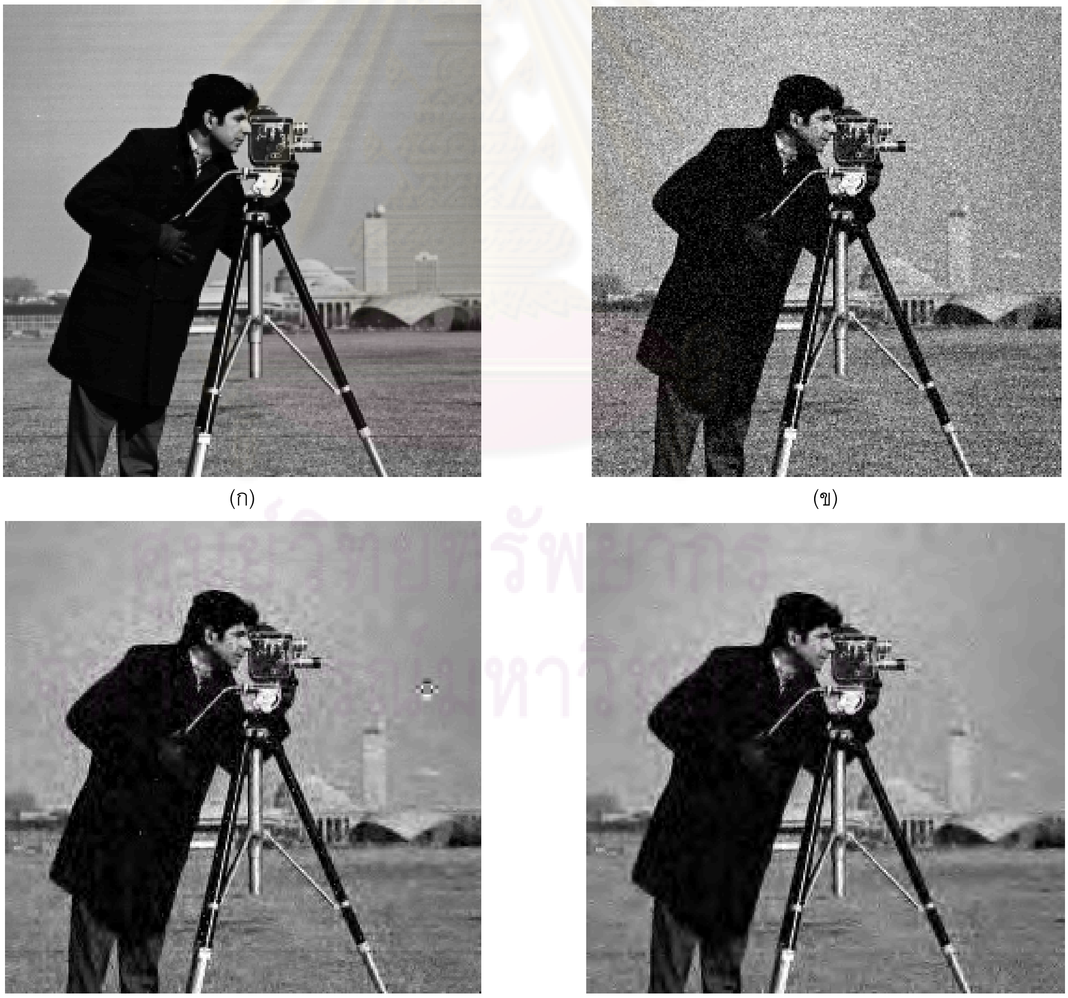

(ค)


(ง)

รูปที่ 7.7 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Hill (ข) Hill ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี GammaShrink PSNR = 27.60 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกผันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Two-Sided Gamma Random Vectors PSNR = 26.75 dB

ตาราง 7.5 PSNR ของภาพ Cameraman

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
LAWMAP	36.80	32.33	28.26	26.20	24.78	23.82
PearsonShrink (หัวข้อ 4.1.1)	37.18	32.62	28.44	26.43	25.01	24.10
GammaShrink (หัวข้อ 4.1.2)	37.00	32.39	28.17	26.24	24.81	23.83
RadialExpoShrink (หัวข้อ 4.2.1)	36.95	32.17	27.46	25.22	24.10	23.24
วิธีหาฟังก์ชันผกผันกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	36.62	32.09	27.97	26.09	24.68	23.70
Pearson Type VII Random Vectors	36.60	32.13	28.04	26.12	24.58	23.53
Two-Sided Gamma Random Vectors	36.87	32.25	28.03	25.90	24.19	23.04
Radial Exponential Random Vectors	36.60	32.15	28.09	26.19	24.70	23.69
วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	36.33	32.20	28.00	26.08	24.61	23.62
Pearson Type VII Random Vectors	36.89	32.26	27.93	25.72	23.96	22.76
Two-Sided Gamma Random Vectors	36.36	32.03	27.79	25.74	24.19	23.12
Radial Exponential Random Vectors	36.29	31.98	27.85	25.93	24.45	23.46

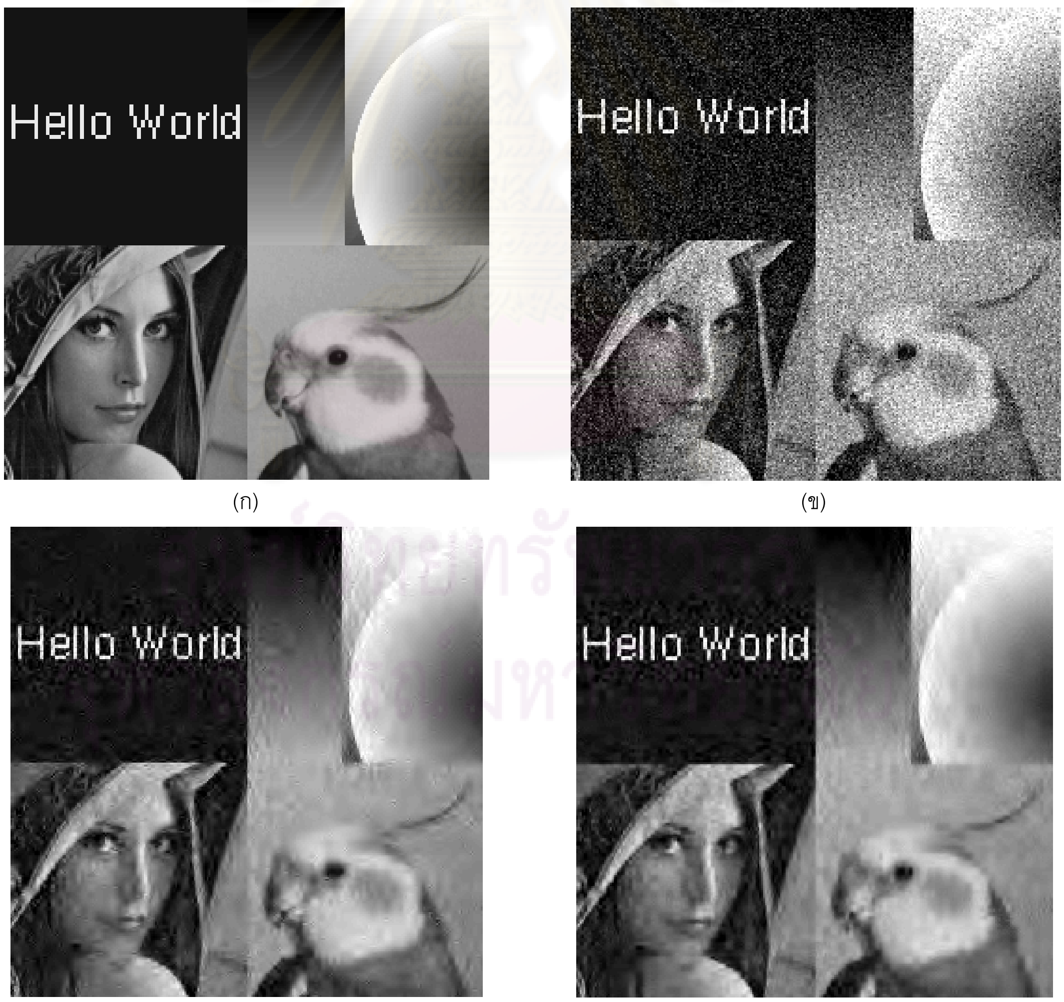


(ก) (ข) (ค) (ง)

รูปที่ 7.8 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Cameraman (ข) Cameraman ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 20$ (ค) วิธี RadialExpoShrink PSNR = 27.46 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกผันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Radial Exponential Random Vectors PSNR = 28.09 dB

ตาราง 7.6 PSNR ของภาพ Montage

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
LAWMAP	38.42	33.90	29.67	27.25	25.75	24.43
PearsonShrink (หัวข้อ 4.1.1)	38.70	33.99	30.09	27.72	26.42	25.11
GammaShrink (หัวข้อ 4.1.2)	38.55	33.82	29.84	27.52	26.06	24.81
RadialExpoShrink (หัวข้อ 4.2.1)	37.93	32.81	28.90	26.62	25.24	24.18
วิธีหาฟังก์ชันผกพันกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	38.34	33.92	29.86	27.44	26.06	24.80
Pearson Type VII Random Vectors	38.52	33.99	29.73	27.37	25.76	24.45
Two-Sided Gamma Random Vectors	38.38	33.70	29.26	26.84	25.09	23.68
Radial Exponential Random Vectors	38.53	34.11	29.89	27.54	26.01	24.72
วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	38.62	34.27	30.11	27.65	26.23	24.89
Pearson Type VII Random Vectors	38.30	33.69	29.35	26.67	24.85	23.31
Two-Sided Gamma Random Vectors	38.39	33.96	29.64	27.12	25.54	24.13
Radial Exponential Random Vectors	38.46	34.14	29.94	27.45	25.95	24.63



(ก) (ข)

รูปที่ 7.9 ตัวอย่างภาพที่ได้จาก (ก) Montage (ข) Montage ที่กำลังสัญญาณรบกวน $\sigma_n = 30$ (ค) วิธี PearsonShrink PSNR = 27.72 dB (ง) วิธีฟังก์ชันผกพันเมื่อประยุกต์ใช้กับ Pearson Type VII Random Vectors PSNR = 27.37 dB

ตารางค่า 7.7 ค่าเฉลี่ย PSNR ของภาพทั้งหมด

Noise Standard Deviation (σ_n)	5	10	20	30	40	50
LAWMAP	36.89	33.08	29.44	27.44	26.13	25.04
PearsonShrink (หัวข้อ 4.1.1)	37.23	33.20	29.64	27.75	26.52	25.56
GammaShrink (หัวข้อ 4.1.2)	36.97	32.92	29.36	27.48	26.25	25.27
RadialExpoShrink (หัวข้อ 4.2.1)	36.98	32.60	29.03	27.10	25.89	24.93
วิธีหาฟังก์ชันผกพันกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	36.43	32.78	29.27	27.41	26.18	25.22
Pearson Type VII Random Vectors	36.63	32.83	29.18	27.23	25.89	24.80
Two-Sided Gamma Random Vectors	36.84	32.80	28.88	26.73	25.22	23.94
Radial Exponential Random Vectors	36.63	32.89	29.29	27.37	26.07	25.04
วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่องกับการกระจายตัวก่อนหน้าชนิดต่างๆ						
Gaussian PDF	36.57	33.03	29.46	27.53	26.24	25.22
Pearson Type VII Random Vectors	37.07	32.99	29.00	26.68	24.94	23.60
Two-Sided Gamma Random Vectors	36.50	32.75	29.02	26.98	25.58	24.44
Radial Exponential Random Vectors	36.45	32.83	29.24	27.30	25.97	24.94

จากผลการทดลอง จะสังเกตเห็นว่าประสิทธิภาพการลดสัญญาณรบกวนของวิธีที่นำเสนอในบทนี้ คือ *วิธีหาฟังก์ชันหดตัวและประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติไปด้วยกัน* ด้วย *วิธีฟังก์ชันผกพัน* และ *วิธีประมาณแบบเวกเตอร์สุ่มไม่ต่อเนื่อง* เมื่อประยุกต์ใช้กับ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นก่อนหน้าแบบต่างๆ เช่น Gaussian PDF ใน 1 มิติ หรือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมก่อนหน้าจากระบบเพียร์สัน คือ จาก Pearson Type VII Random Vectors, Two-Sided Gamma Random Vectors และ Radial Exponential Random Vectors เมื่อเทียบกับวิธีดั่งเดิมที่นำเสนอในบทก่อนหน้านี้ ยังให้ประสิทธิภาพที่ต่ำกว่าอยู่ อันเนื่องมาจากวิธีลดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอในบทนี้อยู่ในรูปประมาณเป็นส่วนใหญ่ ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องพัฒนาและวิจัยวิธีที่นำเสนอในบทนี้ต่อไปในอนาคตเพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพให้ดีขึ้น

บทที่ 8

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ นำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพเมื่อสมมุติให้สัญญาณรบกวนอยู่ในรูปเกาส์สีขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise, AWGN) โดยใช้ *วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ (Bayes' Risk)* บนปริภูมิเวฟเล็ตและใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นที่สร้างได้จาก *ระบบเพียร์สัน (Pearson System)* ในการอธิบายลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตร่วมกับ *หลักการความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตระหว่างสเกล (Parent and Child Relation)* ส่วนสาเหตุที่เลือก PDF ที่สร้างได้จาก Pearson System เพราะ PDF ที่สร้างจากระบบนี้สามารถใช้สร้าง PDF ที่ถูกสมมุติให้อธิบายลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตอย่างมากมายในงานวิจัยในอดีต นอกจากนี้เรายังใช้ วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ (Bayes' Risk) ในการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติด้วย เพื่อใช้ร่วมกับ ฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร (Multivariate Shrinkage Function) โดยเราสามารถสรุปวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังต่อไปนี้

1) ใช้ PDF ที่สร้างได้จากระบบเพียร์สันประยุกต์ใช้กับ วิธีความเสี่ยงแบบเบส์ เพื่อใช้สร้างฟังก์ชันหดตัวชนิดหลายตัวแปร ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำเสนอไว้ 3 ชนิด ดังต่อไปนี้ PearsonShrink , GammaShrink, และ RadialExpoShrink
2) เสนอกระบวนการประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติเพื่อใช้กับฟังก์ชันหดตัวทั้ง 3 ชนิด ดังนี้
   2.1) วิธีประมาณความแปรปรวนในรูปความแปรปรวนท้องถิ่น (Local Variance) โดยนำเสนอไว้ 2 วิธี ขึ้นกับความแปรปรวนสัญญาณรบกวน ดังนี้
   - การประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นในกรณีความแปรปรวนสัญญาณรบกวนต่ำ
   - การประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นในกรณีความแปรปรวนสัญญาณรบกวนสูง

   2.2) วิธีประมาณภาวะยอดมน (Kurtosis) ซึ่งใช้กับฟังก์ชันหดตัวแบบ PearsonShrink
3) นำเสนอวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพโดยหาฟังก์ชันหดตัวและประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติด้วยกัน

8.2 งานวิจัยต่อไปในอนาคต

สำหรับวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นั้น เป็นวิธีที่ให้คุณภาพของ

ภาพที่ได้หลังการลดสัญญาณรบกวนที่ดีกว่าหลายวิธีที่นำเสนอในอดีต แต่อย่างไรก็ตามมีบางวิธีที่ให้ประสิทธิภาพที่ใกล้เคียงกับวิธีที่นำเสนอใหม่ เช่น วิธี BLS-GSM [24] *แต่วิธีนี้ก็ใช้เวลาในการลดสัญญาณรบกวนภาพนานกว่าวิธีที่นำเสนออย่างชัดเจน* เพราะมีขั้นตอนวิธีที่ซับซ้อนซึ่งในทางปฏิบัติแล้ววิธีที่ใช้เวลาลดสัญญาณรบกวนภาพนานจะไม่เหมาะสมในการใช้งานจริงมากนัก

ดังนั้นในงานวิจัยต่อไปในอนาคตจะมุ่งเน้นพัฒนาวิธีลดสัญญาณรบกวนภาพ ซึ่งจะต้องยังคงข้อดีของวิธีที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอไว้ กล่าวคือ เป็นวิธีที่ให้คุณภาพของภาพที่ได้หลังการลดสัญญาณรบกวนที่ดีและใช้เวลาในการประมวลผลไม่มากจนเกินไป โดยมีแนวทางที่จะพัฒนางานวิจัยต่อไป ดังต่อไปนี้

1) พัฒนาวิธีประมาณความแปรปรวนท้องถิ่นในกรณีความแปรปรวนสัญญาณรบกวนต่ำ ที่นำเสนอในหัวข้อ 5.1.1.1 โดยสมมุติให้ Pearson Type VII PDF เป็นการกระจายตัวของ Noisy Wavelet Coefficient แทน Laplacian PDF เพราะในความเป็นจริงแล้วในกรณีที่ความแปรปรวนสัญญาณรบกวนต่ำ Noisy Wavelet Coefficient ควรจะมี PDF ที่ใกล้เคียงกับ Pearson Type VII PDF ที่ถูกสมมุติให้แทนลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน (Noise-Free Wavelet Coefficient) ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มากกว่า
2) ประยุกต์ใช้เวกเตอร์สุ่มคอนทัวร์ทรงรี (Elliptically Contoured Random Vectors) ในการอธิบายลักษณะการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ปราศจากสัญญาณรบกวน แทนการใช้ เวกเตอร์สุ่มคอนทัวร์ทรงกลม (Spherically Contoured Random Vectors) ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งเวกเตอร์สุ่มคอนทัวร์ทรงรีนี้น่าจะกำกับสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตได้ดีกว่าเพราะ มีรูปแบบที่ใกล้เคียงกับคอนทัวร์ฮิสโทแกรมของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ต ในฐานข้อมูลภาพ Corel ซึ่งเป็นฐานข้อมูลภาพขนาดใหญ่ [28]
3) ทดลองใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบผสม (Mixture Model Probability Density Function) ในการอธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตซึ่งน่าจะอธิบายการกระจายตัวของสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตได้ดีขึ้น

รายการอ้างอิง

[1] Scott, C. Bayesian Estimation [Online]. 2003. Available from: http://cnx.org/content/m11660/1.2/ [2010, July]

[2] Sendur, L., and Selesnick, I. W. Bivariate Shrinkage Functions for Wavelet-Based Denoising Exploiting Interscale Dependency. IEEE Trans. Signal Processing. 50, 11 (November 2002): 2744-2756.

[3] Donoho, D. L. Denoising by Soft-Thresholding. IEEE Trans. Info. Theory. 41, 3 (Mar 1995): 613-627.

[3] Gao, H. Y., and Bruce, A. G. Waveshrink with Firm Shrinkage. Stat. Sinica. 7, 4 (1997): 855-874.

[4] Gao, H. Y. Wavelet Shrinkage Denoising using The Non-Negative Garrote. J. Computation Graph Stat. 7, 4 (1998): 469-488.

[5] Rahman, S. M. M., Ahmad, M. O., and Swamy, M. N. S. Bayesian Wavelet-Based Image Denoising using the Gauss-Hermite Expansion. IEEE Trans. Image Processing. 17, 10 (October 2008): 1755-1771.

[7] Bhuiyan, M. I. H., Ahmad, M. O., and Swamy, M. N. S. Spatially Adaptive Wavelet Based Method using Cauchy Prior for Denoising the SAR Images. IEEE Trans. Circuit Syst. Video Technology. 17, 4 (April 2007): 500-507.

[8] Guleryuz, O. G. Optimal Linear Processing for Image and Video Coding. Doctor of Philosophy in Electrical Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003.

[9] Mihcak, M. K., Kozintsev, I., Ramchandran, K., and Moulin, P. Low-Complexity Image Denoising based on Statistical Modeling of Wavelet Coefficients. IEEE Signal Processing Letters. 6, 12 (December, 1999): 300 -303.

[10] Selesnick, I. W. The Estimation of Laplace Random Vectors in Additive White Gaussian Noise. IEEE Trans. Signal Processing. 56, 8 (August 2008): 3482-3496.

[11] Martin, R. Speech Enhancement based on Minimum Mean-Square Error Estimation and Super Gaussian Priors. IEEE Trans. Speech and Audio Processing. 13, 5, 2 (September 2005): 845-856.

[12] Kerl, P. Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. Philosophical Trans. of the Royal Society of London. 186 (1895): 343-414.

[13] Andriy, A., Kanto, A., and Malo, P. Simple Approach for Distribution Selection in the Pearson System. Helsinki School of Economics, 2005.

[14] Sendur, L., and Selesnick, I. W. Bivariate Shrinkage with Local Variance Estimation. IEEE Signal Processing Letters. 9, 12 (December 2002): 438-441.

[15] Shi, F., and Selesnick, I. W. Multivariate Quasi-Laplacian Mixture Models for Wavelet Based Image Denoising. in Proc. ICIP 2006, Image Processing. (2006): 2625-2628.

[16] Rabbani, H., Vafadust, M., Gazor, S., and Selesnick, I. W. Image Denoising Employing a Bivariate Cauchy Distribution with Local Variance in Complex Wavelet Domain. in Proc. IEEE International, Biomedical Image. (May 2006): 203-208.

[17] Vidakoic, B. Nonlinear Wavelet Shrinkage with Baye Factors. J. Amer. Stat. As soc. 93 (1998): 173-179.

[18] Chang, S., Yu, B., and Vetterli, M. Adaptive Wavelet Thresholding for Image denoising and Compression, IEEE Trans. Image Processing. 9 (2000): 1532-1546.

[19] Heinrich, J. A Guide to the Pearson Type IV Distribution. University of Pennsylvania, 2004.

[20] Rangarajan, R., Venkataramanan, R., and Shah, S. Image Denoising using Wavelets. Wavelets & Time Frequencies, 2004.

[21] Jun, L., Guangmeng, C., and Bo, H. Image Denoising Based on Fuzzy in Wavelet Domain. in Proc. IEEE international, Instrument and Measurement Technology. (May 2002): 2019-2023.

[22] Donoho, D. L., and Johnstone, I. M. Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage. Biometrika. 81, 3 (1994): 425-455.

[23] Choi, S. C., and Wette, R. Maximum Likelihood of the Parameter of the Gamma Distribution and Their Bias. Technometrics. 11 (1969): 683-690.

[24] Portilla, J., Strela, V., Wainwright, M., and Simoncelli, E. P. Image Denoising using Scale Mxtures of Gaussian in the Wavelet Domain. IEEE Trans. Image Processing. 12, 11 (November 2003): 1338-1351.

[25] Dabov, K., Foi, A., Katkovnik, V., and Egiazarian, K. Image Denoising by Sparse 3D Transform-Domain Collaborative Filtering, IEEE Trans. Image Processing. 16 (2007): 2080-2095.

[26] Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M. Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press, 2000.

[27] Hyverinen, A. Sparse Code Shrinkage: Denoising of Non-Gaussian Data by Maximum Likelihood Estimation, Neural. Comput. 11, 7 (1999): 1739-1768.

[28] Shi, F., and Selesnick, I. W. An Elliptically Contoured Exponential Mixture Model for Wavelet Based Image Denoising, Appl. Comput. Harmon. Anal. 23 (2007): 131–151.

[29] Spiegel, M. R. Theory and Problems of Probability and Statistics. McGraw-Hill, 1992.

[30] Yates, R. D., and Goodman, D. J. Probability and Stochastic Processes. Wiley, 1999.

[31] Nickalls, R. W. D. A New Approach to Solving the Cubic: Cardan's Solution Revealed. The Math. Gazette. 77 (1993): 354-359.

[32] Stark, H., and Woods, J. W. Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing. Prentice Hall, 2002.

[33] Selesnick, I. W. The Estimation of Laplace Random Vectors in AWGN and the Generalized Incomplete Gamma Function [Online]. 2007. Available from: http://taco.poly.edu/selesi/LaplaceRandomVectors/EstLapRandVectors.pdf [2007, March]

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขในสัญญาณรบกวนแบบบวก

ทฤษฎีบท ถ้ามีเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{Y}=[Y_1,Y_2,\ldots,Y_d]^T$, $\mathbf{X}=[X_1,X_2,\ldots,X_d]^T$ และ $\mathbf{N}=[N_1,N_2,\ldots,N_d]^T$ ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม คือ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ และ $f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$ โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์สุ่ม คือ $\mathbf{Y}=\mathbf{X}+\mathbf{N}$ และ $\mathbf{X},\mathbf{N}$ เป็นอิสระต่อกัน จะพบว่าฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขจะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})=f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

บทพิสูจน์

เมื่อ $\mathbf{X},\mathbf{N}$ เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{N}}(\mathbf{x},\mathbf{n})=f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,f_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$$

ทำการเปลี่ยนตัวแปรจาก $\mathbf{n}$ ไป $\mathbf{y}$ เพื่อหา $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ จาก $f_{\mathbf{X},\mathbf{N}}(\mathbf{x},\mathbf{n})$ ดังนี้

จากความสัมพันธ์ $\mathbf{Y}=\mathbf{X}+\mathbf{N}$ ดังนั้น

$$[n_1,n_2,\ldots,n_d]^T=[y_1,y_2,\ldots,y_d]^T-[x_1,x_2,\ldots,x_d]^T$$

หาจาโคเบียน (ภาคผนวก ค) ของการเปลี่ยนตัวแปรจาก $\mathbf{n}$ ไป $\mathbf{y}$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial n_1}{\partial y_1} & \frac{\partial n_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial n_d}{\partial y_1}\\ \frac{\partial n_1}{\partial y_2} & \frac{\partial n_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial n_d}{\partial y_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial n_1}{\partial y_d} & \frac{\partial n_2}{\partial y_d} & \cdots & \frac{\partial n_d}{\partial y_d}\end{vmatrix}=1$$

ดังนั้น

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=|J|\,f_{\mathbf{X},\mathbf{N}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

จากสมการ ก.1

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

เทียบกับสมการกฎของเบส์

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})$$

ดังนั้น

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})=f_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

ภาคผนวก ข

ระเบียบวิธีการคาร์ดาโน (Cardano's method)

กำหนดให้ ฟังก์ชันกำลังสาม (Cubic Function) อยู่ในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

$$f\left(x\right)=c_4x^3+c_3x^2+c_2x+c_1$$

เมื่อ $c_1,c_2,c_3,c_4 \in R, c_4 \neq 0$

นำสัมประสิทธิ์พจน์แรกหารตลอดเพื่อปรับสมการให้อยู่ในรูปแบบใหม่ ดังนี้

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

เมื่อใช้วิธีการคาร์ดาโนจะหาค่ารากที่อยู่ในรูปจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนได้ ดังนี้ [31]

$$x=\begin{cases} \sqrt[3]{E}+\sqrt[3]{F}-\dfrac{a}{3} \\ \dfrac{-1}{2}\left(\sqrt[3]{E}+\sqrt[3]{F}\right)\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}j\left(\sqrt[3]{E}+\sqrt[3]{F}\right)-\dfrac{a}{3} \end{cases}$$

เมื่อ

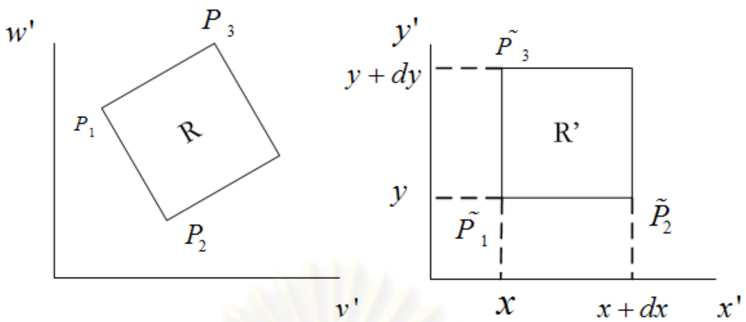
$$p=b-\frac{a^2}{3}, q=c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}$$

$$E=\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, F=\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

โดยในหัวข้อวิทยานิพนธ์นี้ใช้เฉพาะค่ารากที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น

ภาคผนวก ค

การแปลงจาโคเบียน (Jacobian Transform)



รูป ค.1 การที่ใช้ในการพิสูจน์การแปลงจาโคเบียน

การแปลงจาโคเบียนกรณี 2 ตัวแปร

ในกรณีเปลี่ยนโดเมนจาก $v-w$ ไป $x-y$ ดังรูป ค.1 โดยต้องการรักษาพื้นที่ให้เท่าเดิม เราจำเป็นต้องทราบ ตัวแปลงจาโคเบียน ซึ่งก็คือ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่เก่าต่อพื้นที่ใหม่ $J = A(R)/A(R')$ ซึ่งสามารถหาค่าได้ ดังต่อไปนี้

ถ้า $v=\phi(x,y)$, $w=\varphi(x,y)$

พิจารณาจุด $P_1:(v_1,w_1)=(\phi(x,y),\varphi(x,y))$

$P_2:(v_2,w_2)=(\phi(x+dx,y),\varphi(x+dx,y))$

$P_3:(v_3,w_3)=(\phi(x,y+dy),\varphi(x,y+dy))$

พิจารณาจุด P_2

พิจารณาฟังก์ชัน $\phi(x+dx,y),\varphi(x+dx,y)$ ด้วยอนุกรม Taylor รอบจุด x ดังนั้น

$$\phi(x+dx,y)\approx\phi(x,y)+\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}dx$$

$$\varphi(x+dx,y)\approx\varphi(x,y)+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}dx$$

พิจารณาจุด P_3

พิจารณาฟังก์ชัน $\phi(x,y+dy),\varphi(x,y+dy)$ ด้วยอนุกรม Taylor รอบจุด y ดังนั้น

$$\phi(x,y+dy)\approx\phi(x,y)+\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}dy$$

$$\varphi(x,y+dy)\approx\varphi(x,y)+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dy$$

ดังนั้นสามารถเขียนจุด P_2 และ P_3 ใหม่ได้ว่า

$$P_2:(v_2,w_2)=\left(\phi(x,y)+\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}dx,\varphi(x,y)+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}dx\right)$$

$$P_3:(v_3,w_3)=\left(\phi(x,y)+\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}dy,\varphi(x,y)+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dy\right)$$

สร้างเวกเตอร์ $\mathbf{v_1}$ จากจุด P_1 ไป P_2

$$\mathbf{v_1} = \left[\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}dx, \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}dx\right]^T$$

สร้างเวกเตอร์ $\mathbf{v}_2$ จากจุด P_1 ไป P_3

$$\mathbf{v}_2 = \left[\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}dy, \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dy\right]^T$$

หาพื้นที่ $A(R)$ โดยใช้วิธีเวกเตอร์

$$A(R) = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}dx & \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}dx \\ \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}dy & \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy$$

เราทราบว่าพื้นที่ $A(R') = dxdy$

จาโคเบียน (Jacobian) คือ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่เก่า $A(R)$ และใหม่ $A(R')$ ดังนี้

$$J = \frac{A(R)}{A(R')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ประยุกต์การแปลงจาโคเบียนกับ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (PDF) เพราะโอกาสความน่าจะเป็น (อินทิเกรตพื้นที่กราฟ) จะต้องเท่ากันเสมอไม่ว่าโดเมนใดๆก็ตาม สำหรับกรณีที่เปลี่ยนโดเมนจาก $v-w$ ไป $x-y$ จะพบว่า

$$\iint_R f_{V,W}(v,w)dvdw \neq \iint_{R'} f_{V,W}(\phi(x,y),\varphi(x,y))dxdy$$

เพราะ $dvdw \neq dxdy$ แต่ $dvdw = |J|dxdy$ ดังนั้น

$$\iint_R f_{V,W}(v,w)dvdw = \iint_{R'} |J| f_{V,W}(\phi(x,y),\varphi(x,y))dxdy$$

ดังนั้น PDF $f_{X,Y}(x,y)$ เมื่อพิจารณาจาก PDF $f_{V,W}(v,w)$ คือ

$$f_{X,Y}(x,y) = |J| f_{V,W}(\phi(x,y),\varphi(x,y))$$

<u>การแปลงจาโคเบียนกรณี d – Dimension</u>

เมื่อต้องการเปลี่ยนโดเมน $s_1, s_2, \ldots s_d$ ไป $x_1, x_2, \ldots, x_d$ เมื่อ $s_1 = h_1(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, และ $s_2 = h_2(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $s_d = h_d(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ จะได้ว่า

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial s_d}{\partial x_1} \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial s_d}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_d} & \frac{\partial s_2}{\partial x_d} & \cdots & \frac{\partial s_d}{\partial x_d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_d}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_d}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_d} & \frac{\partial h_2}{\partial x_d} & \cdots & \frac{\partial h_d}{\partial x_d} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น PDF ของ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ เมื่อพิจารณาจาก $f_{\mathbf{S}}(\mathbf{s})$ คือ

$$f_{\mathbf{X}}(x)=|J|\,f_{\mathbf{S}}\left(h_1(x_1,x_2,\ldots,x_d),h_2(x_1,x_2,\ldots,x_d),\ldots,h_d(x_1,x_2,\ldots,x_d)\right)$$

ภาคผนวก ง

Generalized Incomplete Gamma Function

สำหรับ Generalized Incomplete Gamma Function ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้วิธีที่นำเสนอและแนวทางในการคำนวณโดยงานวิจัยที่ [33] กล่าวคือ กำหนดให้ ฟังก์ชันพิเศษชนิดนี้อยู่ในรูป

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \exp\left(-t - \frac{b}{t}\right) dt$$

เมื่อกำหนดให้ $\alpha = \{\ldots, -3/2, -1/2\}$ และ $x, b > 0$ ซึ่งมีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ

$$\Gamma(\alpha-1, x; b) = \frac{1}{b}\left[\Gamma(\alpha+1, x; b) - \alpha\Gamma(\alpha, x; b) - x^{\alpha} \exp\left(-x - \frac{b}{x}\right)\right].$$

เมื่อ

$$\Gamma(1/2, x; b) = 0.5\sqrt{\pi} \exp(-x)\,(A+B),\ \ \Gamma(-1/2, x; b) = 0.5\sqrt{\pi/b} \exp(-x)\,(A-B)$$

ในกรณีที่ $x \geq 2\sqrt{b}$, $A = \exp(-b/x)\, erfcx\left(\sqrt{x} - \sqrt{b/x}\right)$

$x < 2\sqrt{b}$, $A = \exp\left(x - 2\sqrt{b}\right) erfc\left(\sqrt{x} - \sqrt{b/x}\right)$

และใช้ $B = \exp(-b/x) erfcx\left(\sqrt{x} + \sqrt{b/x}\right)$ กับทั้งสองกรณี

ภาคผนวก จ

การประมาณพารามิเตอร์ภาวะยอดมน (Kurtosis)

จากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบเพียร์สันชนิดที่ 7

$$f(y)=\frac{1}{\lambda B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{2}\right)^{-m} \quad \text{เมื่อ} \quad \lambda=\sigma\sqrt{2m-3}$$

ดังนั้น

$$\prod_{j=1}^{N} f\left(y_j \mid m\right)=\left(\frac{1}{\lambda B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right)^{N}\prod_{j=1}^{N}\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^{2}\right)^{-m}$$

$$\ln\left(\prod_{j=1}^{N} f\left(y_j \mid m\right)\right)=-N\ln(\lambda)-N\ln\left(B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)-m\sum_{j=1}^{N}\ln\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^{2}\right)$$

เมื่อ N คือ จำนวนสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตในแต่ละระดับการแปลงย่อย (Subband)

ใช้สมการที่ 5.15 ในการหาค่า m โดย

$$\frac{\partial\ln\left(\prod_{j=1}^{N} f\left(y_j \mid m\right)\right)}{\partial m}=0$$

$$-N\frac{\partial\ln(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial m}-\frac{N}{B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\frac{dB\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}$$

$$-\left[\sum_{j=1}^{N}\ln\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^{2}\right)+m\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial\ln\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^{2}\right)}{\partial\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^{2}\right)}\frac{\partial\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^{2}\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial m}\right]\right]=0$$

แทน $\frac{\partial\lambda}{\partial m}=\frac{\sigma}{\sqrt{2m-3}}=\frac{\sigma^{2}}{\lambda}$

$$\frac{-N}{\lambda}\left(\frac{\sigma^{2}}{\lambda}\right)-\frac{N}{B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\frac{dB\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}-\sum_{j=1}^{N}\ln\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^{2}\right)-m\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{-2y_j^{2}}{\lambda\left(\lambda^{2}+y_j^{2}\right)}\left(\frac{\sigma^{2}}{\lambda}\right)\right)=0$$

ดังนั้น

$$\frac{N}{2m-3}+\frac{N}{B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\frac{dB\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}+\sum_{j=1}^{N}\ln\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^2\right)-\left(\frac{2m}{2m-3}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\lambda^2+y_j^2}=0 \quad (\text{จ}.1)$$

ทำให้ปัญหาในการประมาณค่า m ลดรูปเป็นสมการ จ.1 กำหนดให้ $g(m)$ มีค่าเท่ากับค่าทางด้านซ้ายมือของสมการ จ.1 และหาค่าอนุพันธ์ของ $g(m)$ เทียบกับค่า m จะพบว่า

$$g'(m)=\frac{\partial g(m)}{\partial m}$$

$$=\frac{-2N}{(2m-3)^2}+N\left[\frac{B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{d^2B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm^2}-\left(\frac{dB\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}\right)^2}{B^2\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\ln\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^2\right)}{\partial\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^2\right)}\frac{\partial\left(1+\left(\frac{y_j}{\lambda}\right)^2\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial m}\right)$$

$$-\left[\frac{\partial\left(\frac{2m}{2m-3}\right)}{\partial m}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{y_j^2}{\lambda^2+y_j^2}\right)+\frac{2m}{2m-3}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\left(\frac{y_j^2}{\lambda^2+y_j^2}\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial m}\right)\right]$$

แทน $\frac{\partial\lambda}{\partial m}=\frac{\sigma}{\sqrt{2m-3}}=\frac{\sigma^2}{\lambda}$

$$g'(m)=\frac{-2N}{(2m-3)^2}+\frac{N}{B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\frac{d^2B\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm^2}-\frac{N}{B^2\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{dB\left(m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{dm}\right)^2$$

$$-\left(\frac{2}{2m-3}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\lambda^2+y_j^2}+\frac{6}{(2m-3)^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\lambda^2+y_j^2}+\frac{4m\sigma^2}{2m-3}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{\left(\lambda^2+y_j^2\right)^2}$$

จากนั้นแทนค่า $\lambda=\sigma\sqrt{2m-3}$ เพื่อใช้ในการหา m ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ต่อไป

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพิชิต กิตติสุวรรณ์ เกิดวันที่ 27 เมษายน พ.ศ. 2526 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาในระดับปริญญาตรี ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ปีการศึกษา 2547 และ ปริญญาโท สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2550 หลังจากนั้นเข้าศึกษาต่อที่ สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในระดับปริญญาเอก โดยเน้นทำวิทยานิพนธ์ทางด้านเทคนิคการลดสัญญาณรบกวนภาพ (Image Denoising) ในปริภูมิเวฟเล็ต

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารวิชาการ

บทความที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติที่อยู่ในฐานข้อมูล ISI และมี Impact Factor

1. P. Kittisuwan, T. Chuanwimaluang, S. Marukatat, and W. Asdornwised. Image and Audio-Speech Denoising Based on Higher-Order Statistical Modeling of Wavelet Coefficients and Local Variance Estimation. <u>Int. J. Wavelets, Multiresolution and Info. Processing</u>. 8, 6 (November 2010): 987–1017. (Impact Factor: 1.168)

บทความที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติที่ไม่มี Impact Factor

2. P. Kittisuwan, S. Marukatat, and W. Asdornwised. The Estimation of Radial Exponential Random Vectors in Additive White Gaussian Noise. <u>Int. J. Wireless Sensor Network</u>. 1, 4 (November 2009): 284-292.
3. P. Kittisuwan, T. Chuanwimaluang, S. Marukatat, and W. Asdornwised. Image Denoising Employing Two-Sided Gamma Random Vectors with Cycle-Spinning in Wavelet Domain. To be published in <u>ECTI Trans. EEC</u>. (2011).