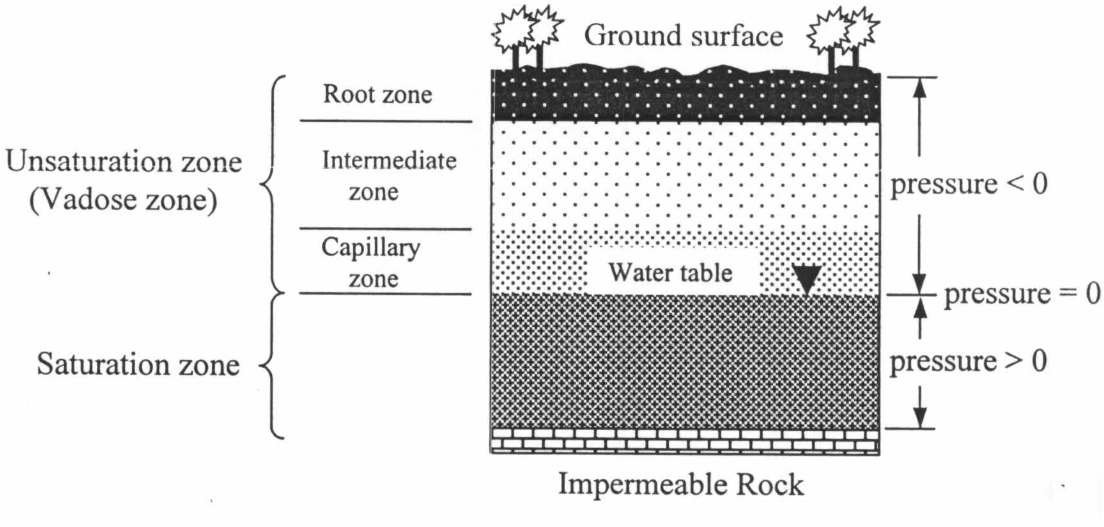
บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการซึมของความชื้นในตัวกลางพรุน

น้ำใต้ดินถูกแบ่งออกเป็นโซนโดย Todd [10] รูปที่ 2.1 แสดงให้ทราบว่าระดับน้ำใต้ดิน (water table) เป็นเสมือนเส้นแบ่งเขตระหว่างโซนไม่อิ่มตัว (unsaturated zone) และโซนอิ่มตัว (saturated zone)

โซนไม่อิ่มตัวเป็นโซนที่มีน้ำขังอยู่บางส่วนของช่องว่างในดิน โดยอดีตถูกเรียกว่า vadose zone มาจากภาษาลาตินแปลว่าตื้น ซึ่งนิยมแบ่งออกเป็น 3 ชั้นได้แก่ ชั้นรากไม้ (root zone) ชั้นกลาง (intermediate zone) และชั้นแคปพิลารี (capillary zone) ชั้นรากไม้เป็นชั้นที่รากของต้นไม้หยั่งไปถึงทำให้การเคลื่อนที่ของน้ำส่วนใหญ่ในชั้นนี้เกิดจากการดูดน้ำของต้นไม้เป็นส่วนใหญ่ ชั้นแคปพิลารีเป็นชั้นซึ่งอยู่ติดกับระดับน้ำใต้ดินจึงพบแรงแคปพิลารีที่ทำให้มีการดึงน้ำขึ้นมาจากน้ำใต้ดิน ชั้นนี้จึงมีความเปียกชื้นมากกว่าชั้นอื่น ชั้นกลางเป็นชั้นซึ่งมีขนาดกว้างที่สุด และไม่ถูกผลกระทบของรากไม้และแรงแคปพิลารี

โซนอิ่มตัวเป็นโซนที่มีน้ำขังอยู่เต็มช่องว่างในดินและอยู่ต่ำกว่าระดับน้ำใต้ดิน โดยมีทิศทางการไหลที่แน่นอน การจะพาน้ำออกจากโซนอิ่มตัวกระทำได้เพียงวิธีเดียวคือสูบน้ำออกทางบ่อน้ำเนื่องจากความดันของของไหลมีค่ามากกว่าความดันบรรยากาศ สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับโซนอิ่มตัวจะอยู่ในรูปสมการเชิงเส้น แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับโซนไม่อิ่มตัวสมการจะอยู่ในรูปไม่เชิงเส้น ดังนั้นการศึกษาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาภายในโซนอิ่มตัวและชั้นกลางของโซนไม่อิ่มตัว

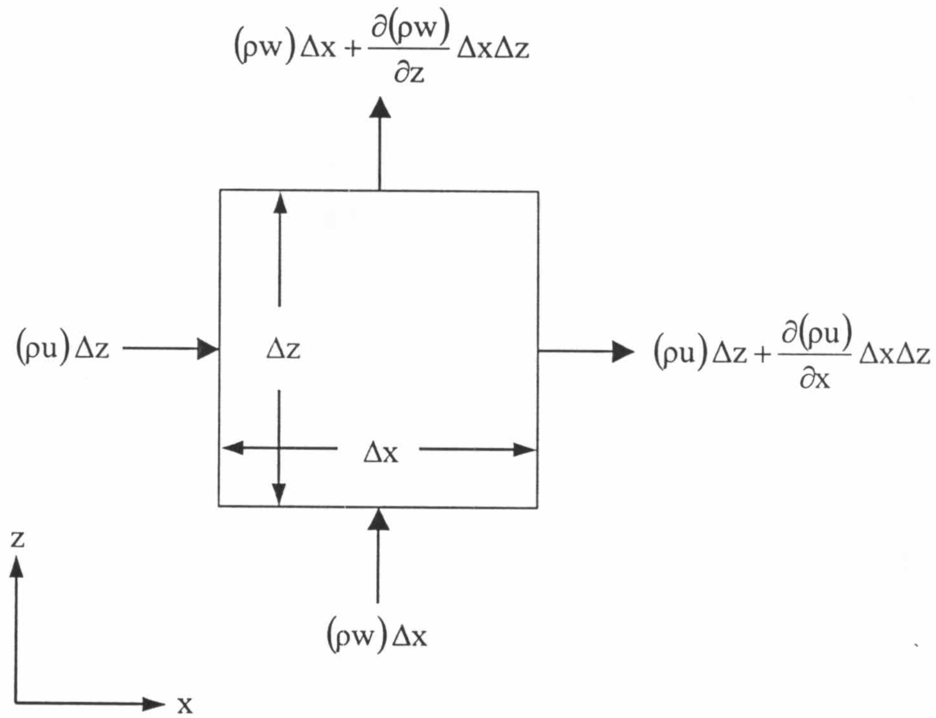


รูปที่ 2.1 การแบ่งโซนของน้ำใต้ดิน

2.1 สมการพื้นฐานการซึมผ่าน (Seepage)

ในการคำนวณลักษณะการซึมผ่านของน้ำในดินโดยทั่วไปนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกันสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้จากกฎของการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) และกฎของดาร์ซี (Darcy's law) [11] แต่ในการศึกษาครั้งนี้จะพิจารณาการซึมผ่านของน้ำใต้ดินแบบไม่อัดตัวในสองมิติ ดังนั้นความหนาแน่นของน้ำจึงถูกสมมติให้มีค่าคงที่ได้

2.1.1 กฎการอนุรักษ์มวล



รูปที่ 2.2 มวลของน้ำใต้ดินที่ซึมผ่านปริมาตรควบคุมในระบบพิกัดฉาก

พิจารณาการซึมผ่านในปริมาตรควบคุมโดยมีขนาดความกว้างเท่ากับ Δx และความสูงเท่ากับ Δz ซึ่งประกอบด้วยปริมาตรของดิน น้ำ และอากาศ $V = V_s + V_w + V_a$ โดยที่ V_s คือปริมาตรของดิน V_w คือปริมาตรของน้ำ และ V_a คือปริมาตรของอากาศ การซึมของน้ำผ่านปริมาตรควบคุมขนาดเล็กที่มีขนาด Δx และ Δz ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ในระบบแกนพิกัดฉากนั้น

จะกำหนดให้ u และ w แทนความเร็วของน้ำใต้ดินในแนวแกน x และ z ตามลำดับ และ ρ เป็นค่าความหนาแน่นของน้ำ จากรูปที่ 2.2 โดยสมมติให้มวลของดินในปริมาตรควบคุมมีค่าคงที่และมวลอากาศมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับมวลของดินและน้ำ จะได้ว่าผลลัพธ์ของมวลที่ซึมออกในแนวแกน x คือ

$$\left[(\rho u)\Delta z + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\Delta z\right] - (\rho u)\Delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\Delta z \tag{2.1}$$

ผลลัพธ์ของมวลที่ซึมออกในแนวแกน z คือ

$$\left[(\rho w)\Delta x + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\Delta x\Delta z\right] - (\rho w)\Delta x = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\Delta x\Delta z \tag{2.2}$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของมวลของน้ำใต้ดินที่ซึมออกจากปริมาตรควบคุมเท่ากับ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta z \tag{2.3}$$

สำหรับมวลของน้ำใต้ดินภายในปริมาตรควบคุมนั้นเท่ากับ ρV_w ดังนั้น

$$\text{อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลของน้ำใต้ดินภายในปริมาตรควบคุม} = \frac{\partial \rho V_w}{\partial t} \tag{2.4}$$

จากนิยามของกฎอนุรักษ์มวลที่ว่า "ผลลัพธ์ของมวลที่ซึมออกจากปริมาตรควบคุมที่พิจารณาจะเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในปริมาตรควบคุมนั้น" จากนิยามดังกล่าวสามารถเขียนในรูปของสมการการซึมในสองมิติได้ดังต่อไปนี้

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta z = -\frac{\partial \rho V_w}{\partial t} \tag{2.5}$$

กำหนดให้ θ คือ ปริมาณความชื้น (moisture content) ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างปริมาตรของน้ำต่อปริมาตรทั้งหมด ดังแสดงในสมการ (2.6)

$$\theta = \frac{V_w}{V} = \frac{V_w}{\Delta x \Delta z} \tag{2.6}$$

จากความสัมพันธ์ในสมการ (2.6) ทำให้สมการ (2.5) กลายเป็น

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] = -\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} \tag{2.7}$$

หรือ

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] = 0 \tag{2.8}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\theta\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left[\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0 \tag{2.9}$$

จากที่ได้กล่าวในข้างต้นแล้วว่า การศึกษาครั้งนี้พิจารณาการซึมผ่านของน้ำใต้ดินแบบหนืดแต่ไม่มีการอัดตัว ซึ่งความหนาแน่นของอนุภาคของน้ำจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา และตำแหน่งต่างๆ ขณะที่เคลื่อนที่ไป ดังนั้น

$$\theta\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$

ดังนั้นสมการ (2.9) จึงลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.11}$$

2.1.2 กฎของดาร์ซี

$$u = -K_x \frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.12}$$

$$w = -K_z \frac{\partial H}{\partial z} \tag{2.13}$$

$$H = \psi + z_0 \tag{2.14}$$

โดยที่ K_x, K_z คือ สัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (hydraulic conductivity) ในทิศทาง x และ z, m/s

H คือ หัวน้ำรวม (total hydraulic head), m

ψ คือ หัวน้ำเนื่องจากความดัน หรือ หัวน้ำ (pressure head), m

z_0 คือ หัวน้ำเนื่องจากแรงโน้มถ่วง (elevation head), m

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์

เมื่อพิจารณาการซึมผ่านแบบสองมิติจึงเลือกใช้แกน x และแกน z โดยที่แกน x ขนานไปตามพื้นโลกส่วนแกน z อยู่ในแนวตั้งฉากกับพื้นโลกซึ่งกำหนดให้ทิศขึ้นเป็นบวก จากกฎของดาร์ซี สมการ (2.12) และ (2.13) แทนค่าลงในสมการการอนุรักษ์มวล (2.11) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial H}{\partial z}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{2.15}$$

จากสมการ (2.14)

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial z_0}{\partial \theta} \tag{2.16}$$

แต่เนื่องจาก $\partial z_0/\partial \theta = 0$ เพราะ z_0 ไม่ใช่ฟังก์ชันของ θ ดังนั้นพจน์ทางขวามือของสมการ (2.15) จึงกลายเป็น

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \psi}\frac{\partial H}{\partial t} = \theta^{*}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (2.17)$$

โดยที่ θ^{*} คือ ความชันของกราฟระหว่าง θ และ ψ (retention curve) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง θ และ ψ โดยได้มาจากการทดลองและสร้างแบบจำลองที่สอดคล้องกับการทดลองดังกล่าว

สมการ (2.15) จะจัดรูปใหม่ในรูปแบบของหัวน้ำรวมได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial H}{\partial z}\right) = \theta^{*}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (2.18)$$

ค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านเป็นค่าเฉพาะของดินแต่ละชนิด ซึ่งได้มาจากการทดลองโดยมีค่าขึ้นอยู่กับ ψ เท่านั้น จากนั้นจึงแทนค่าสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.18) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x(\psi)\frac{\partial(\psi + z_0)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z(\psi)\frac{\partial(\psi + z_0)}{\partial z}\right) = \theta^{*}(\psi)\frac{\partial(\psi + z_0)}{\partial t} \qquad (2.19)$$

เนื่องจากเราพิจารณา z ในแนวดิ่งตั้งฉากกับพื้นโลก และ z_0 แสดงถึงพลังงานต่อหนึ่งหน่วยมวลซึ่งวัดระยะตามแกน z จากระดับอ้างอิง ดังนั้น z_0 จึงเป็นฟังก์ชันของ z และมีค่าเท่ากับค่าที่วัดได้จากแกน z ดังนั้น $\partial z_0/\partial x = 0$, $\partial z_0/\partial z = 1$ สมการ (2.19) จะลดรูปเหลือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial K_z(\psi)}{\partial z} = \theta^{*}(\psi)\frac{\partial(\psi + z_0)}{\partial t} \qquad (2.20)$$

และเพราะว่า $\partial z_0/\partial t = 0$ ดังนั้นสมการ (2.20) จึงสามารถที่จะจัดรูปใหม่ในเทอมของหัวน้ำเนื่องจากแรงดันได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial K_z(\psi)}{\partial z} = \theta^{*}(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (2.21)$$

สมการ (2.21) เป็นที่รู้จักในชื่อว่า สมการของริชาร์ดในเทอมของหัวน้ำเนื่องจากแรงดัน (Head-Based Richards' equation) [12] และหากดินเกิดการอิ่มตัวค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านจะมีค่าคงที่ $K(\psi) = K_{sat} = \text{const.}$ สมการ (2.21) จะลดรูปลงเหลือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{sat}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{sat}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \theta^{*}(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{2.22}$$