

บทที่ 2

การออกแบบและวิเคราะห์แขนกลแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระ

2.1 รูปแบบทั่วไปแขนกลแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระ

Pierrot [1999] ได้กล่าวถึงกลไกแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระไว้อย่างละเอียด ผู้วิจัยจะแสดงรายละเอียดบางส่วนที่เป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจกับกลไกประเภทนี้ กลไกแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระที่ไม่มี Passive Chain ประกอบด้วยกลไกข้อต่อขาสี่ชุด และอุปกรณ์ขับเคลื่อนสี่ชุด อุปกรณ์ขับเคลื่อนควรติดตั้งบนฐานนิ่งเพื่อลดแรงเฉื่อย และเพิ่มประสิทธิภาพด้านความเร็วของแขนกล อุปกรณ์ขับเคลื่อนจะเป็นแบบหมุน (Revolute, R) หรือเลื่อนเป็นเส้นตรง (Prismatic, P) ก็ได้ กำหนดให้

- L : จำนวนวงวนภายในกลไก
- F : จำนวนองศาอิสระของกลไก
- n : จำนวนก้านต่อภายในกลไกรวมถึงฐานด้วย
- j : จำนวนข้อต่อภายในกลไก
- j_i : จำนวนข้อต่อที่องศาอิสระเท่ากับ i
- f_i : องศาอิสระของข้อต่อที่ i
- λ : จำนวนองศาอิสระของมิติที่กลไกทำงาน

จำนวนองศาอิสระของกลไกสามารถหาได้จาก

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i \quad (2.1)$$

$$L = j - n + 1 \quad (2.2)$$

ความสัมพันธ์ (1) เรียกว่า Grübler criterion [Tsai, 1999] และ (2) คือสมการของ Euler แสดงให้เห็นว่าจำนวนวงวนภายในกลไกจะมากกว่าผลต่างระหว่างจำนวนข้อต่อกับก้านต่ออยู่หนึ่ง หากรวมสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\sum_i f_i = F + \lambda L \quad (2.3)$$

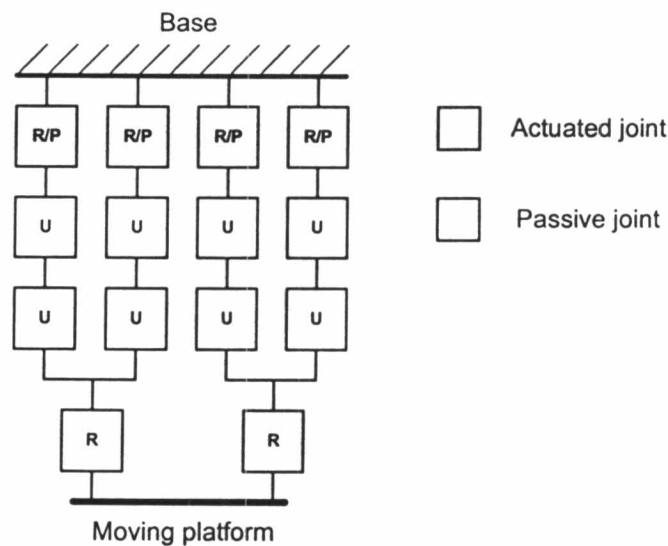
ในกรณีกลไกแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระพบว่า $L = 3$ และ $F = 4$ ดังนั้นจำนวนองศาอิสระรวมของข้อต่อทั้งหมดในกลไกจึงเป็น

$$\sum_i f_i = 4 + 6 \cdot 3 = 22$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นกลไกจะประกอบด้วยข้อต่อขาสี่จุด ดังนั้นจำนวนองศาอิสระในข้อต่อแต่ละชุด จึงเป็น

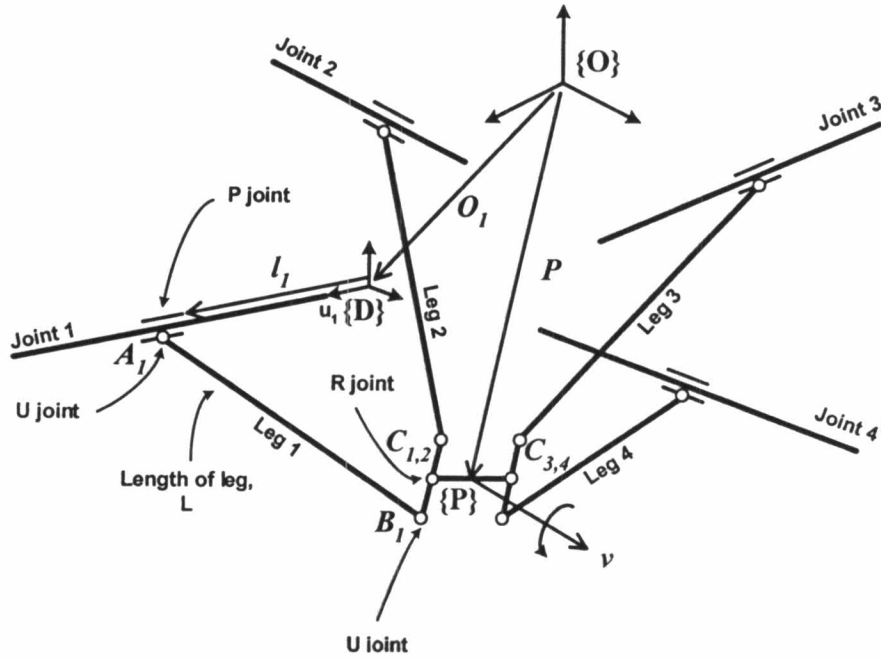
$$4 \cdot (5) + 2 = 22$$

แสดงว่าข้อต่อแต่ละชุดจะมีองศาอิสระรวมเป็นห้ารวมกับข้อต่อที่ตัว Moving platform อีกสององศาอิสระ เมื่อพิจารณาถึงความเป็นไปได้ในการออกแบบและสร้าง นอกเหนือจากข้อต่อที่มีตัวขับเคลื่อนแล้วยังเหลือข้อต่ออีกสี่องศาอิสระที่ปลายของขาทั้งสองด้าน ดังนั้นข้อต่อที่เป็นไปได้คือข้อต่อยูนิเวอร์แซล (Universal joint) ซึ่งมีสององศาอิสระ และข้อต่อหมุนอีกสองข้อต่อติดกับตัว Moving platform แผนผังการวางตัวของข้อต่อแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 [Pierrot, 1999] แสดงการเรียงตัวของข้อต่อตามเงื่อนไขของกลไกแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระ

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ได้ของข้อต่อแต่ละชุดและเงื่อนไขบังคับที่จะทำให้การเคลื่อนที่ที่จุดปลายแขนกลมีสามองศาอิสระในการเลื่อนตำแหน่งและหนึ่งองศาอิสระในการหมุนรอบแกนที่ต้องการ ได้แสดงไว้ใน Pierrot [1999] เช่นกัน ต่อไปจะกล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ด้านตำแหน่งของแขนกลขนานที่มีสี่องศาอิสระแบบทั่วไปก่อน โดยในกรณีนี้จะพิจารณาข้อต่อขับเคลื่อนแบบปริสมติกเท่านั้น



รูปที่ 2.2 รูปแบบทั่วไปของกลไกแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระ

ความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งระหว่างจุดปลายแขนกลแสดงด้วยเวกเตอร์ในรูปที่ 2.2 และระยะข้อต่อ
ขยับเคลื่อนทั้งสิ้นแสดงด้วยเวกเตอร์ เป็นดังนี้

พิจารณาชุดข้อต่อที่ i

$$\begin{aligned} B_i &= O_i + l_i + A_i B_i \\ B_i &= C_i B_i + C_i \\ C_i &= P + \text{Rot}(v, \theta) \cdot PC_i \end{aligned}$$

สามารถเขียนในรูป

$$\begin{aligned} O_i + l_i + A_i B_i &= C_i B_i + P + \text{Rot}(v, \theta) \cdot PC_i \\ A_i B_i &= P - l_i + \text{Rot}(v, \theta) \cdot PC_i + C_i B_i - O_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

กำหนดให้ u_i เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ l_i ดังนั้น

$$l_i = l_i u_i$$

และพจน์ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์คงที่ใน (2.4) เขียนใหม่ได้เป็น

$$K_i = C_i B_i - O_i$$

สมการ (2.4) เขียนได้ใหม่เป็น

$$L \left[\frac{A_i B_i}{\|A_i B_i\|} \right] = P - l_i u_i + \text{Rot}(v, \theta) \cdot PC_i + K_i$$

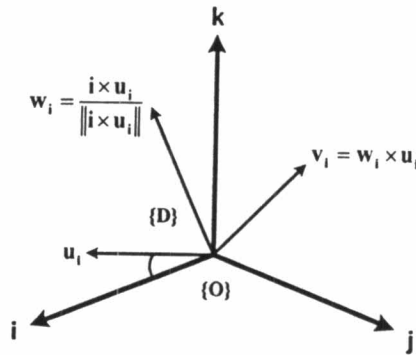
$$L \left[\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|} \right] = \begin{bmatrix} x + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \bullet \mathbf{PC}_i]_x + [\mathbf{K}_i]_x \\ y + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \bullet \mathbf{PC}_i]_y + [\mathbf{K}_i]_y \\ z + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \bullet \mathbf{PC}_i]_z + [\mathbf{K}_i]_z \end{bmatrix} - l_i \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

เมื่อพิจารณา (2.5) พบว่าการแก้สมการแบบสเกลลาเพื่อหาค่า ทำได้ยากเนื่องจากเวกเตอร์ ในระบบพิกัด $\{\mathbf{O}\}$ มีคอมโพเนนต์ทั้งในแนว x y และ z เพื่อแก้สมการจึงแปลงการอ้างอิงระบบพิกัด $\{\mathbf{O}\}$ เป็น $\{\mathbf{D}\}$ แทนโดยใช้โรเตชันเมตริกดังนี้

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^T \\ \mathbf{v}_i^T \\ \mathbf{w}_i^T \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{i} \times \mathbf{u}_i\|}, \mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i \times \mathbf{u}_i$$

เมตริก (2.6) จะหมุนพิกัด $\{\mathbf{O}\}$ ให้แกน x ไปทับแกน \mathbf{u}_i บนพิกัด $\{\mathbf{D}\}$ ทำให้เวกเตอร์ \mathbf{u} มีคอมโพเนนต์ในทิศทาง i ทิศเดียวในระบบพิกัด $\{\mathbf{D}\}$ ดังแสดงรูปที่ 4



รูปที่ 2.3 การหมุนพิกัด $\{\mathbf{O}\}$ ให้แกน i ทับกับแกน \mathbf{u}_i บนพิกัด $\{\mathbf{D}\}$

เมื่อแปลงเมตริกแล้วสมการ (2.5) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i L \left[\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|} \right] &= \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} x + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \bullet \mathbf{PC}_i]_x + [\mathbf{K}_i]_x \\ y + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \bullet \mathbf{PC}_i]_y + [\mathbf{K}_i]_y \\ z + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \bullet \mathbf{PC}_i]_z + [\mathbf{K}_i]_z \end{bmatrix} - l_i \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{ix} \cdot x_i + u_{iy} \cdot y_i + u_{iz} \cdot z_i \\ v_{ix} \cdot x_i + v_{iy} \cdot y_i + v_{iz} \cdot z_i \\ w_{ix} \cdot x_i + w_{iy} \cdot y_i + w_{iz} \cdot z_i \end{bmatrix} - l_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{LR}_i \left[\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|} \right] &= \begin{bmatrix} u_{ix} \cdot x_i + u_{iy} \cdot y_i + u_{iz} \cdot z_i - l_i \\ v_{ix} \cdot x_i + v_{iy} \cdot y_i + v_{iz} \cdot z_i \\ w_{ix} \cdot x_i + w_{iy} \cdot y_i + w_{iz} \cdot z_i \end{bmatrix} \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_i &= x + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \cdot \text{PC}_i]_x + [\mathbf{K}_i]_x \\y_i &= y + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \cdot \text{PC}_i]_y + [\mathbf{K}_i]_y \\z_i &= z + [\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \cdot \text{PC}_i]_z + [\mathbf{K}_i]_z\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}L^2 \left\| \mathbf{R}_i \left[\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|} \right] \right\|^2 &= \left\| \begin{array}{c} u_{ix} \cdot x_i + u_{iy} \cdot y_i + u_{iz} \cdot z_i - l_i \\ v_{ix} \cdot x_i + v_{iy} \cdot y_i + v_{iz} \cdot z_i \\ w_{ix} \cdot x_i + w_{iy} \cdot y_i + w_{iz} \cdot z_i \end{array} \right\|^2 \\L^2 &= (u_{ix} \cdot x_i + u_{iy} \cdot y_i + u_{iz} \cdot z_i - l_i)^2 + (v_{ix} \cdot x_i + v_{iy} \cdot y_i + v_{iz} \cdot z_i)^2 \\&\quad + (w_{ix} \cdot x_i + w_{iy} \cdot y_i + w_{iz} \cdot z_i)^2 \\u_{ix} \cdot x_i + u_{iy} \cdot y_i + u_{iz} \cdot z_i - l_i &= \pm \sqrt{L^2 - (v_{ix} \cdot x_i + v_{iy} \cdot y_i + v_{iz} \cdot z_i)^2} \\&\quad - (w_{ix} \cdot x_i + w_{iy} \cdot y_i + w_{iz} \cdot z_i)^2} \\จะได้ว่า \quad l_i &= u_{ix} \cdot x_i + u_{iy} \cdot y_i + u_{iz} \cdot z_i \pm \sqrt{L^2 - (v_{ix} \cdot x_i + v_{iy} \cdot y_i + v_{iz} \cdot z_i)^2} \\&\quad - (w_{ix} \cdot x_i + w_{iy} \cdot y_i + w_{iz} \cdot z_i)^2} \quad (2.8)\end{aligned}$$

สมการที่ (2.8) เป็นคำตอบของความสัมพันธ์อินเวิร์ตคิเนแมติกส์ของแขนกลแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระแบบทั่วไป ความสัมพันธ์ของข้อต่ออื่นๆสามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน เห็นได้ว่าหากทิศทางของข้อต่อขยับเคลื่อนที่ไปในทิศทางต่างๆ กันจะทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างจุดปลายแขนกลกับระยะข้อต่อมีความซับซ้อนมากขึ้น เมื่อพิจารณาองค์ประกอบหลายๆด้านพบว่าหากกำหนดให้ทิศทางของข้อต่อขยับเคลื่อนที่ทุกข้อต่อชี้ไปยังทิศทางเดียวกัน และเป็นทิศทางเดียวกับแกนหลักแกนใดแกนหนึ่งของระบบพิกัดหลักของแขนกลแล้ว นอกจากจะลดความซับซ้อนของความสัมพันธ์อินเวิร์ตคิเนแมติกส์แล้วยังเพิ่มปริมาตรการทำงานในทิศทางนั้นๆอย่าง “ไม่จำกัด” อีกด้วย แขนกลขนานที่มีหกองศาอิสระที่มีการวางตัวของข้อต่อขยับเคลื่อนที่ในลักษณะนี้คือ “Hexaglide” [Honegger และคณะ, 1997] ลักษณะของแขนกลที่จะสร้างขึ้นควรมีองศาอิสระของการหมุนที่จุดปลายของแขนกลในทิศทางแกน y หรือ x แต่ไม่ควรเป็นแกน z เนื่องจากการหมุนรอบแกน z ซึ่งเป็นแกนของเครื่องมือกักจะไม่มีประโยชน์ในงานกักหรือการควบคุมแรงกระทำบนพื้นผิวชิ้นงาน (หมายเหตุ: การหมุนรอบแกน z มีประโยชน์ในงานหยิบวาง) ในกรณีข้อต่อขยับเคลื่อนที่ทั้งสี่ชี้ไปในทิศทางเดียวกันพบว่า

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}$$

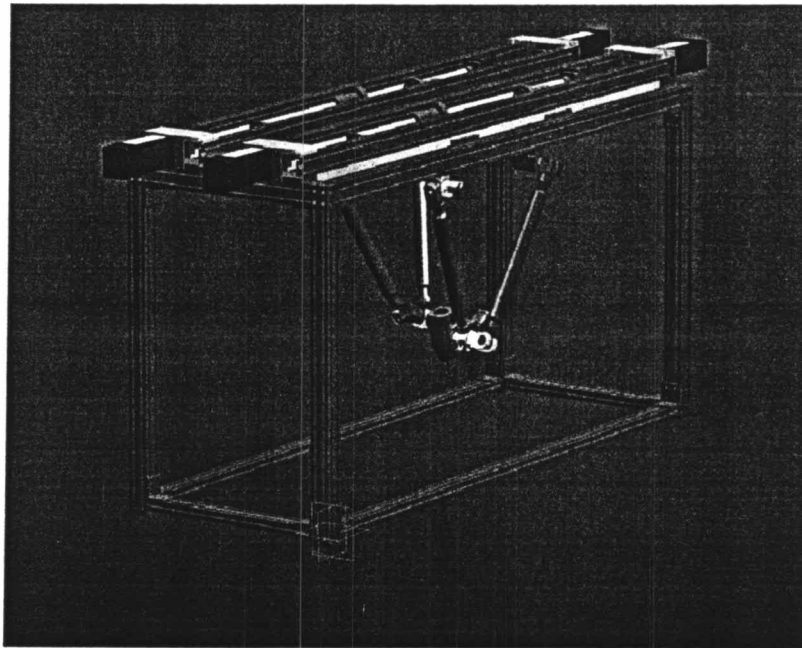
ดังนั้นความสัมพันธ์อินเวิร์ตคิเนแมติกส์ของแขนกลจึงลดรูปเป็นดังนี้

$$l_i = x_i \pm \sqrt{L^2 - y_i^2 - z_i^2} \quad (2.9)$$

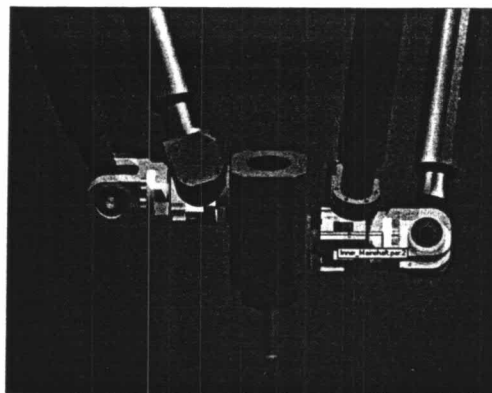
ในส่วนฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์ พิจารณาสมการ (2.9)

2.2. รูปแบบของแขนกลแบบขนานในงานวิจัยนี้

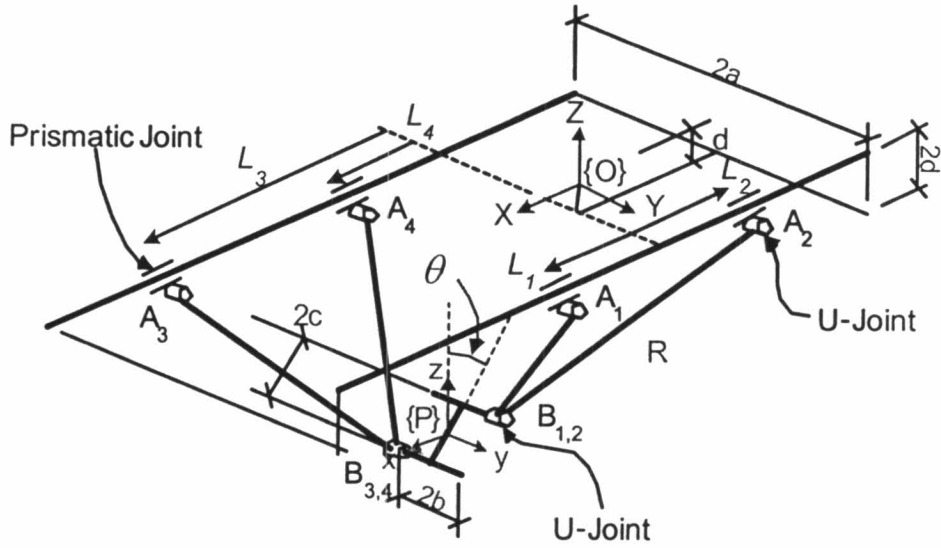
จากคุณสมบัติทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยเสนอแขนกลแบบขนานที่มีสี่องศาอิสระซึ่งมีรูปแบบดังแสดงในรูปที่ 2.5 ประกอบด้วยข้อต่อขับเคลื่อนสี่ข้อต่อคือ l_1 ถึง l_4 ซึ่งไปในแกน x ของพิกัดเครื่องโดยที่ l_1 และ l_2 จะทับซ้อนกันเช่นเดียวกับ l_3 และ l_4 มีกลไกขาสีจุด AB ซึ่งมีความยาว R ประกอบกันเป็นกลไก Metachain หรือกลไกย่อยที่มีข้อต่อแบบ PUU สองชุดเชื่อมต่อเข้ากับ moving platform ที่จุด B และ moving platform จะหมุนรอบแกน y



รูปที่ 2.5(1) รูปแบบของแขนกลขนานที่มีสี่องศาอิสระรวมถึงรายละเอียดบริเวณข้อต่อหมุนที่เสนอในงานวิจัยนี้ (ออกแบบโดยโปรแกรม SolidEdge®)



รูปที่ 2.5(2) รายละเอียดบริเวณข้อต่อหมุนที่เชื่อมต่อระหว่าง Metachain ทั้งสองข้างเข้ากับ Moving platform (ออกแบบโดยโปรแกรม SolidEdge®)



รูปที่ 2.5(3) รูปแบบการกำหนดตัวแปรและพารามิเตอร์ต่างๆของแขนกล

จากรูปแบบดังกล่าวพบว่าแขนกลจะมีปริมาตรการทำงานคงที่ตลอดแกน x และมีความสามารถในการเคลื่อนที่ (Mobility) เมื่อ platform ทำมุมต่าง ๆ กัน ใกล้เคียงกันเนื่องจากการเคลื่อนที่เชิงมุมของ platform อาจกล่าวได้ว่าเกิดจากการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกันในแนวแกน x ของชุดข้อต่อทั้งสองด้าน ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และมีความสามารถเคลื่อนที่ในแนวแกน x ได้มาก

2.2.1 การวิเคราะห์หอนิเวร์สติเนแมติกส์

จากรูปที่ 2.5 เมื่อเปรียบเทียบกับแขนกลขนานที่มีสี่องศาอิสระแบบทั่วไปดังรูปที่ 3 พบว่าจุด B₁ B₂ และ C₁ เป็นจุดเดียวกันและกำหนดให้เวกเตอร์ PB₁ = PB₂ = -PB₃ = -PB₄ เพื่อให้ platform มีความสมมาตร เนื่องจาก platform จะหมุนรอบแกน y ดังนั้น

$$\text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{PB}_1 = \mathbf{PB}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}, \mathbf{PB}_3 = \mathbf{PB}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$$

นอกจากนี้เวกเตอร์ K

$$\mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ d \end{bmatrix}, \mathbf{O}_3 = \mathbf{O}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -d \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการความสัมพันธ์อินเวิร์สคิเนแมติกส์ดังสมการที่ (2.9) สามารถแสดงได้ดังนี้
กำหนดให้

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{P} + \text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \cdot \mathbf{PB}_1 - \mathbf{O}_1 \\ &= \begin{bmatrix} x + c \cdot \sin(\theta) \\ b - a \\ z + c \cdot \cos(\theta) - d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกัน \mathbf{P}_2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P} + \text{Rot}(\mathbf{v}, \theta) \cdot \mathbf{PB}_3 - \mathbf{O}_3 \\ &= \begin{bmatrix} x - c \cdot \sin(\theta) \\ -b + a \\ z - c \cdot \cos(\theta) + d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นำทุกสมการมารวมกัน สำหรับข้อต่อที่ 1 จะได้

$$l_1 = x_1 \pm \sqrt{R^2 - y_1^2 - z_1^2}$$

แต่เมื่อพิจารณาลักษณะการวางข้อต่อแล้วพบว่า

$$l_1 = x_1 + \sqrt{R^2 - y_1^2 - z_1^2} \quad (2.10)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} x_1 &= x + c \cdot \sin(\theta) \\ y_1 &= y + b - a \\ z_1 &= z + c \cdot \cos(\theta) - d \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$l_2 = x_1 - \sqrt{R^2 - y_1^2 - z_1^2} \quad (2.11)$$

ในกรณีข้อต่อที่ 3 และ 4 พบว่า

$$\begin{aligned} l_3 &= x_2 + \sqrt{R^2 - y_2^2 - z_2^2} \\ l_4 &= x_2 - \sqrt{R^2 - y_2^2 - z_2^2} \end{aligned} \quad (2.12-2.13)$$

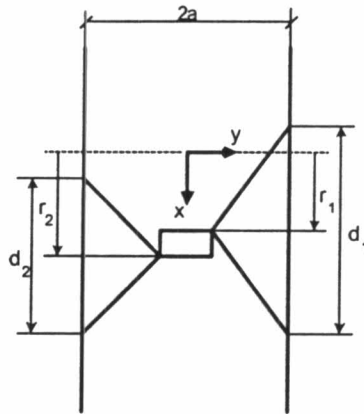
โดยที่

$$\begin{aligned} x_2 &= x - c \cdot \sin(\theta) \\ y_2 &= y - b + a \\ z_2 &= z - c \cdot \cos(\theta) + d \end{aligned}$$

จากสมการที่ (2.10) ถึง (2.13) แสดงผลเฉลยของความสัมพันธ์อินเวอร์สคิเนแมติกส์ของแขนกลที่ ออกแบบขึ้น

2.2.2 การวิเคราะห์ฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์

การวิเคราะห์ฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์จะมีความซับซ้อนมากกว่าอินเวอร์สคิเนแมติกส์ เพื่อจัดรูปสมการให้ง่ายขึ้น จึงกำหนดตัวแปรใหม่โดยพิจารณารูปที่ 7 ประกอบดังนี้



รูปที่ 2.6 แสดงการกำหนดตัวแปรเพื่อจัดรูปสมการให้ง่ายขึ้น

ผังรูปที่ 2.6 ตัวแปรที่กำหนดได้แก่

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{l_1 + l_2}{2}, r_2 = \frac{l_3 + l_4}{2} \\ d_1 &= l_1 - l_2, d_2 = l_3 - l_4 \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณารูปที่ 2.4 พบว่าสามารถหาค่า x ได้เนื่องจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด B เป็นวงกลม ในระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และมีจุดศูนย์กลางที่ r เมื่อพิจารณารูปที่ 7 ประกอบพบว่า

$$x = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (2.14)$$

หากนำสมการที่ (2.10) และ (2.11) มารวมกันก็จะได้ผลเช่นเดียวกัน

จากรูปที่ 2.6 สามารถหาการหมุนของ platform ได้จาก

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}}{2c} \quad (2.15)$$

เมื่อสามารถหาความสัมพันธ์บางส่วนของค่าแห่งจุดปลายได้แล้วทำให้การหาส่วนที่เหลือง่ายขึ้น
 ย้อนไปที่สมการ (2.10) ถึง (2.13) อีกครั้งพบว่าเมื่อทราบค่า x แล้วสมการที่เหลือจะอยู่ในรูป
 สมการวงกลมบนระนาบ yz ดังแสดงในรูปที่ 5 ทำให้สามารถหา y และ z ในรูปแบบเชิงวิเคราะห์
 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (l_1 - x - c \cdot \sin(\theta))^2 &= R^2 - (y - b + a)^2 - (z + c \cdot \cos(\theta) - d)^2 \\ (l_3 - x + c \cdot \sin(\theta))^2 &= R^2 - (y + b - a)^2 - (z - c \cdot \cos(\theta) + d)^2 \end{aligned} \quad (2.10-2.12)$$

นำสมการ (2.10) ไปบวกกับสมการที่ (2.12) จะได้

$$\begin{aligned} (l_1 - x - c \cdot \sin(\theta))^2 + (l_3 - x + c \cdot \sin(\theta))^2 &= 2R^2 - 2y^2 - 2(b - a)^2 - 2z^2 - 2(c \cdot \cos(\theta) - d)^2 \\ \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} &= 2R^2 - 2y^2 - 2(b - a)^2 - 2z^2 - 2(c \cdot \cos(\theta) - d)^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

เช่นเดียวกัน

$$\begin{aligned} (l_2 - x - c \cdot \sin(\theta))^2 &= R^2 - (y - b + a)^2 - (z + c \cdot \cos(\theta) - d)^2 \\ (l_4 - x + c \cdot \sin(\theta))^2 &= R^2 - (y + b - a)^2 - (z - c \cdot \cos(\theta) + d)^2 \end{aligned} \quad (2.11-2.13)$$

นำสมการที่ (2.11) กับ (2.13) มาลบกันจะได้

$$\begin{aligned} (l_2 - x - c \cdot \sin(\theta))^2 - (l_4 - x + c \cdot \sin(\theta))^2 &= 4y(b - a) - 4z(c \cdot \cos(\theta) - d) \\ \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} &= 4y(b - a) - 4z(c \cdot \cos(\theta) - d) \end{aligned} \quad (2.17)$$

ทำให้ได้ y ในรูปของ z ดังนี้

$$y = \frac{d_1^2 - d_2^2 + 8z \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]}{16(a - b)} \quad (2.18)$$

หากนำ y ในสมการที่ (2.18) ไปแทนในสมการที่ (2.16) จะได้ z ในรูปพหุนามกำลังสอง

$$\begin{aligned} \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} &= 2R^2 - 2 \left[\frac{d_1^2 - d_2^2 + 8z \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]}{16(a - b)} \right]^2 \\ &\quad - 2(b - a)^2 - 2z^2 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(b-a)^2 - 2z^2 - \frac{1}{2} \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2 \\
& \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} - 2R^2 + 2(b-a)^2 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2 = \\
& - \frac{1}{128(a-b)^2} \left[\frac{(d_1^2 - d_2^2)^2 + 16z(d_1^2 - d_2^2) \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right] + 64z^2 \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2}{8(a-b)^2} \right] - 2z^2
\end{aligned}$$

จึงได้ z อยู่ในรูปของพหุนามกำลังสองดังนี้

$$\begin{aligned}
& \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} - 2R^2 + 2(b-a)^2 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2 + \frac{(d_1^2 - d_2^2)^2}{128(a-b)^2} + \\
& \frac{z(d_1^2 - d_2^2) \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]}{8(a-b)^2} + \frac{z^2 \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2}{2(a-b)^2} + 2z^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

สมการ (19) สามารถหาผลเฉลยได้ดังนี้

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

แต่เนื่องจากลักษณะของกลไก ผลเฉลย z ที่ถูกต้องจะเป็นลบเท่านั้น ดังนั้น

$$z = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{2.20}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2}{2(a-b)^2} + 2 \\
B &= \frac{(d_1^2 - d_2^2) \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]}{8(a-b)^2} \\
C &= \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} - 2R^2 + 2(b-a)^2 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2} - 2d \right]^2 + \frac{(d_1^2 - d_2^2)^2}{128(a-b)^2}
\end{aligned}$$

สมการที่ (2.14) (2.15) (2.18) และ (2.20) เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์ฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์ในรูปแบบเชิงวิเคราะห์

2.2.3 การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงความเร็ว

การหาเมตริกซ์ความสัมพันธ์เชิงความเร็ว (Jacobian Matrix) สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของความสัมพันธ์เชิงตำแหน่งที่ได้กล่าวมาแล้ว หรือจะใช้วิธีวิเคราะห์

การเคลื่อนที่ของวัตถุโดยตรงก็ได้ ในกรณีนี้จะแสดงวิธีวิเคราะห์โดยการหาความเร็วของ platform โดยตรง

ความเร็วของ Moving platform หาได้จาก

$$\mathbf{V}_{B_i} = \mathbf{V}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{PB}_i$$

กำหนดให้เวกเตอร์ ที่ปรากฏในสมการต่อไปนี้เป็นเวกเตอร์นอน ความเร็วของจุด A เมื่อเทียบกับจุด B จะได้

$$\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \bullet \mathbf{V}_{A_i} = \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \bullet \mathbf{V}_{B_i}$$

Jacobian Matrix สามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.21)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned}$$

โดยที่

$$\mathbf{q} = [l_1, l_2, l_3, l_4]^T$$

$$\mathbf{x} = [x, y, z, \theta]^T$$

ความเร็วของจุด B เมื่อเทียบกับจุดปลายของแขนกล

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{B_i} &= \mathbf{V}_P + \dot{\theta} \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{PB}_i \\ \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \bullet \mathbf{V}_{A_i} &= \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \bullet \mathbf{V}_P + (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \times \mathbf{PB}_i) \bullet \dot{\theta} \mathbf{j} \end{aligned}$$

ความเร็วของข้อต่อขับเคลื่อนมีทิศทางแกน x ทั้งหมด ดังนั้น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \bullet \mathbf{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \bullet \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \bullet \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_4 \bullet \mathbf{i} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3 \quad \dot{l}_4]^T$$

และ

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \quad (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \times \mathbf{PB}_i) \bullet \mathbf{j}] \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{V}_P \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \times \mathbf{PB}_1) \bullet \mathbf{j} \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \times \mathbf{PB}_2) \bullet \mathbf{j} \\ \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 & (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \times \mathbf{PB}_3) \bullet \mathbf{j} \\ \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 & (\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 \times \mathbf{PB}_4) \bullet \mathbf{j} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\theta}]^T \quad (2.23)$$

เมตริกซ์ที่ (2.21) (2.22) และ (2.23) คือ Jacobian Matrices ของแขนกล

2.2.4 การวิเคราะห์ซิงกูลาริตีส์ของแขนกล

กลไกแบบขนานมีความซับซ้อนจึงเป็นไปได้ว่าจะมีบริเวณที่เกิดซิงกูลาริตีส์ขึ้น การวิเคราะห์ซิงกูลาริตีส์จึงมีความสำคัญมาก Gosselin [1990] ได้อธิบายการเกิดซิงกูลาริตีส์ของกลไกแบบปิดไว้ ซิงกูลาริตีส์จะเกิดขึ้นเมื่อเมตริกซ์ \mathbf{A} และหรือ \mathbf{B} จาก (2.21) เป็นซิงกูลาร์ (รูปแบบต่างๆของซิงกูลาริตีส์โปรดดูใน Gosselin [1990] และ Zlatanov [1994]) ดังนั้นซิงกูลาริตีส์จึงเกิดขึ้นได้สามกรณีคือ

1. ซิงกูลาริตีส์แบบที่หนึ่งหรือแบบ Redundant Input (RI) เกิดขึ้นเมื่อ $\det(\mathbf{A}) = 0$ กล่าวคือมีเวกเตอร์ $\dot{\mathbf{q}}$ ที่ไม่เป็นศูนย์ที่ทำให้ $\dot{\mathbf{x}}$ เป็นศูนย์ได้แสดงว่าจุดที่เกิดซิงกูลาริตีส์แบบที่หนึ่งแขนกลจะสูญเสียองศาอิสระไปหนึ่งหรือมากกว่า ซิงกูลาริตีส์แบบที่หนึ่งมักเกิดที่บริเวณขอบเขตของปริมาตรการทำงาน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือจุดที่ผลเฉลยของอินเวอร์สคิเนแมติกส์ที่ต่างกันมาบรรจบกัน
2. ซิงกูลาริตีส์แบบที่สองหรือแบบ Redundant Output (RO) เกิดขึ้นเมื่อ $\det(\mathbf{A}) = 0$ เป็นจุดที่จุดปลายของแขนกลยังเคลื่อนที่ได้ แม้ว่าข้อต่อข้อเคลื่อนทั้งหมดจะหยุดนิ่ง กรณีนี้จะแตกต่างกับกรณีที่หนึ่งคืออาจเกิดขึ้นภายในปริมาตรทำงานของแขนกล เป็นจุดที่ผลเฉลยของความสัมพันธ์ฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์ที่ต่างกันมาบรรจบกัน กล่าวอีกนัยคือ จุดปลายแขนกลมีองศาอิสระเพิ่มขึ้นมาอีกหนึ่งหรือมากกว่า
3. ซิงกูลาริตีส์แบบที่สามจะแตกต่างกับแบบที่หนึ่งและสอง เกิดขึ้นเมื่อทั้ง $\det(\mathbf{A}) = 0$ และ $\det(\mathbf{B}) = 0$ ซิงกูลาริตีส์แบบนี้จะไม่เกิดกับแขนกลโดยทั่วไป แต่จะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์บางค่าของแขนกลเช่นความยาวข้อต่อ

เนื่องจากซิงกูลาริตีส์แบบที่สองมีความสำคัญต่อการออกแบบแขนกลที่มีกลไกแบบปิด ดังนั้นจะแสดงการวิเคราะห์ซิงกูลาริตีส์แบบที่สองนี้โดยการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ \mathbf{B} (2.24) เนื่องจากแต่ละแถวของเมตริกซ์ \mathbf{B} มีความคล้ายกันเนื่องจากคุณสมบัติที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้หาดีเทอร์มิแนนต์ในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ได้ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 - l_1 & y_1 & z_1 & [x_1 - l_1 & z_1] \bullet \mathbf{u}_1 \\ x_1 - l_2 & y_1 & z_1 & [x_1 - l_2 & z_1] \bullet \mathbf{u}_1 \\ x_2 - l_3 & y_2 & z_2 & [x_2 - l_3 & z_2] \bullet \mathbf{u}_2 \\ x_2 - l_4 & y_2 & z_2 & [x_2 - l_4 & z_2] \bullet \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

โดยที่

$$\mathbf{u}_1 = [-c \cdot \cos(\theta) \quad c \cdot \sin(\theta)]^T$$

$$\mathbf{u}_2 = [c \cdot \cos(\theta) \quad -c \cdot \sin(\theta)]^T$$

เริ่มต้นโดยการนำแถว 1 ไปลบออกจากแถว 2 และนำแถวสามไปลบออกจากแถว 4 ดังนี้

$$\text{แถวที่ 2} \begin{bmatrix} x_1 - l_2 - (x_1 - l_1) & 0 & 0 & -c \cdot (x_1 - l_2) \cos(\theta) + c \cdot (x_1 - l_1) \cos(\theta) \\ l_1 - l_2 & 0 & 0 & -c \cdot (l_1 - l_2) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\text{แถวที่ 4} \begin{bmatrix} x_2 - l_4 - (x_2 - l_3) & 0 & 0 & c \cdot (x_2 - l_4) \cos(\theta) - c \cdot (x_2 - l_3) \cos(\theta) \\ l_3 - l_4 & 0 & 0 & c \cdot (l_3 - l_4) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} x_1 - l_1 & y_1 & z_1 & [x_1 - l_1 & z_1] \bullet \mathbf{u}_1 \\ l_1 - l_2 & 0 & 0 & -c \cdot (l_1 - l_2) \cdot \cos(\theta) \\ x_2 - l_3 & y_2 & z_2 & [x_2 - l_3 & z_2] \bullet \mathbf{u}_2 \\ l_3 - l_4 & 0 & 0 & c \cdot (l_3 - l_4) \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

นำแถว 2 คูณด้วย $\frac{l_3 - l_4}{l_1 - l_2}$ เมื่อ $l_1 - l_2 \neq 0$ แล้วนำไปลบออกจากแถว 4

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} x_1 - l_1 & y_1 & z_1 & [x_1 - l_1 & z_1] \bullet \mathbf{u}_1 \\ l_1 - l_2 & 0 & 0 & -c \cdot (l_1 - l_2) \cdot \cos(\theta) \\ x_2 - l_3 & y_2 & z_2 & [x_2 - l_3 & z_2] \bullet \mathbf{u}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2c \cdot (l_3 - l_4) \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B}) = (-1)^8 \cdot 2c \cdot (l_3 - l_4) \cdot \cos(\theta) \cdot \begin{vmatrix} x_1 - l_1 & y_1 & z_1 \\ l_1 - l_2 & 0 & 0 \\ x_2 - l_3 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2c \cdot (l_3 - l_4) \cdot \cos(\theta) \cdot [z_1(l_1 - l_2)y_2 - z_2(l_1 - l_2)y_1]$$

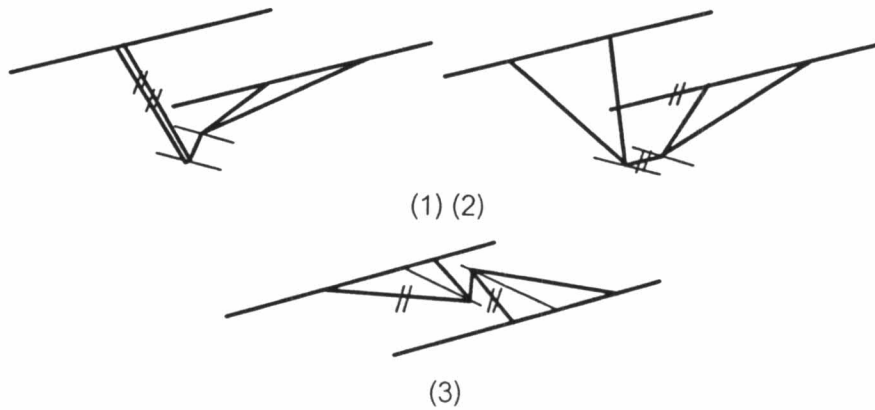
ดังนั้น $\det(\mathbf{B}) = 4c \cdot (l_1 - l_2) \cdot (l_3 - l_4) \cdot \cos(\theta) \cdot [y(d - c \cdot \cos(\theta)) - z(b - a)] \quad (2.25)$

จากสมการที่ (2.25) ซิงกูลาริตีส์จะเกิดขึ้นในกรณีต่อไปนี้

1. $l_1 - l_2$ หรือ $l_3 - l_4$ แสดงว่าเวกเตอร์ $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ กับ $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$ และ $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3$ กับ $\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4$ ทับซ้อนกันดังรูปที่ 2.7(1)
2. $\cos(\theta) = 0$ หรือ $\theta = \pm 90^\circ$ เป็นจุดที่ platform ขนานกับแกน x ดังรูปที่ 2.7(2)
3. $y(d - c \cdot \cos(\theta)) - z(b - a) = 0 \Rightarrow z = \frac{y(d - c \cdot \cos(\theta))}{(b - a)}$ เป็นตำแหน่งที่ระนาบ

ที่เกิดจาก $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ กับ $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2$ และ $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3$ กับ $\mathbf{A}_4\mathbf{B}_4$ ขนานกันดังในรูปที่ 2.7(3)

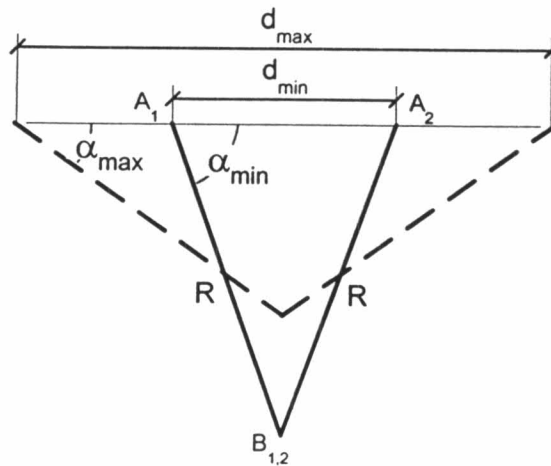
รูปที่ 2.7 แสดงรูปแบบการเกิดซิงกูลาริตีส์ในกรณีต่างๆที่กล่าวมา



รูปที่ 2.7 รูปแบบซิงกูลาริตีส์ที่เป็นไปได้

2.3 การหาปริมาตรทำงานของแขนกล

ในหัวข้อที่ที่ผ่านมาได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของจุดทำงานของแขนกลกับระยะของข้อต่ออุปกรณ์ขับเคลื่อนแล้ว ความสัมพันธ์นี้สามารถนำมาวิเคราะห์ปริมาตรทำงานของแขนกลได้ดังนี้ พิจารณารูปแบบของแขนกลในรูปที่ 2.5(3) พบว่าตำแหน่งของจุดปลายของ Metachain ทั้งสองข้างของกลไกได้แก่จุด $B_{1,2}$ และ $B_{3,4}$ เชื่อมต่อกับข้อต่อข้อแบบ Prismatic ที่จุด A_1 A_2 A_3 และ A_4 ทำให้เกิดสามเหลี่ยม $A_1A_2B_{12}$ และ $A_3A_4B_{34}$ ตามลำดับ ปริมาตรทำงานของจุดปลายแขนกลจะถูกบังคับโดยระยะทางที่ข้อต่อข้อสามารถเคลื่อนที่ได้ ดังนั้นหากกำหนดตำแหน่งที่ข้อต่อข้อสามารถเคลื่อนที่ไปได้จริงแล้วใช้ความสัมพันธ์ฟอร์เวิร์ดคิเนแมติกส์เพื่อหาตำแหน่งปลายของแขนกลและหากผลเฉลยที่ได้เป็นจำนวนจริงก็จะได้ปริมาตรทำงานจริงของแขนกล



รูปที่ 2.8 ระยะทางที่ข้อต่อข้อเคลื่อนที่ไปได้จริง

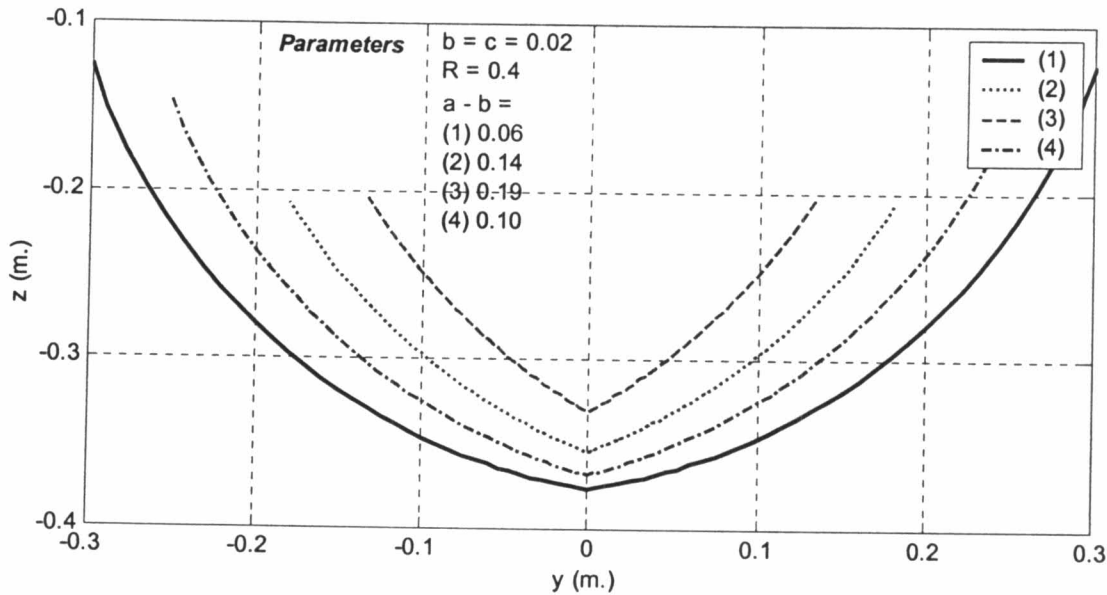
ระยะทางจริงที่ข้อต่อข้อสามารถเคลื่อนที่ได้ขึ้นอยู่กับลักษณะทางกลของข้อต่อจริงว่ามีขนาดเท่าใด ซึ่งต้องเป็นไปได้ในการสร้าง นอกจากนี้ยังต้องพิจารณาถึงซิงกูลาริตี้อีกด้วย จากรูปที่ 2.8 พบว่า d_{max} ต้องน้อยกว่า $2R$ เพื่อไม่ให้เกิดซิงกูลาริตีส์และ d_{min} ที่เป็นไปได้มีค่าประมาณ $0.5R$ ถึง $0.6R$ เนื่องจากข้อจำกัดด้านขนาดชิ้นส่วน นอกจากนี้ความผิดพลาดและความเผื่อของชิ้นส่วนต่างๆ ในขั้นตอนการสร้างมีผลให้การเคลื่อนที่ของกลไกโดยรวมมีความคลาดเคลื่อน ดังนั้นนอกจากตำแหน่งที่เป็นซิงกูลาริตีส์แล้วบริเวณใกล้เคียงกันก็มีผลทำให้เกิดซิงกูลาริตีส์ได้เช่นกัน กำหนดให้ d_{max} มีค่าตั้งแต่ $1.3R$ ถึง $1.7R$ เพื่อหลีกเลี่ยงซิงกูลาริตีส์

ต่อไปพิจารณาถึงพารามิเตอร์ต่างๆที่ส่งผลต่อปริมาตรทำงาน พารามิเตอร์เหล่านี้ ได้แก่ ผลต่างของความกว้างฐานกับความกว้าง Platform (a-b) ขนาดความสูง Platform c และ d และความยาวของขาทั้งสี่ R โปรดดูรูปที่ 2.5(3) ประกอบ เนื่องจากปริมาตรทำงานในแกน x มีขนาดคงที่ไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ที่กล่าวมาแต่อย่างใด ดังนั้นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ปริมาตรทำงานกับพารามิเตอร์ที่แสดงต่อจากนี้จะพิจารณาเพียงพื้นที่ทำงานในระนาบ yz เท่านั้น รูปที่ 2.9 แสดงขนาดพื้นที่ทำงานในระนาบ yz ของแขนกลโดยแปรผันขนาด (a-b) ต่างๆ กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้

$$(a - b) = 0.06; 0.1; 0.14; 0.19$$

$$b = 0.02, c = 0.02$$

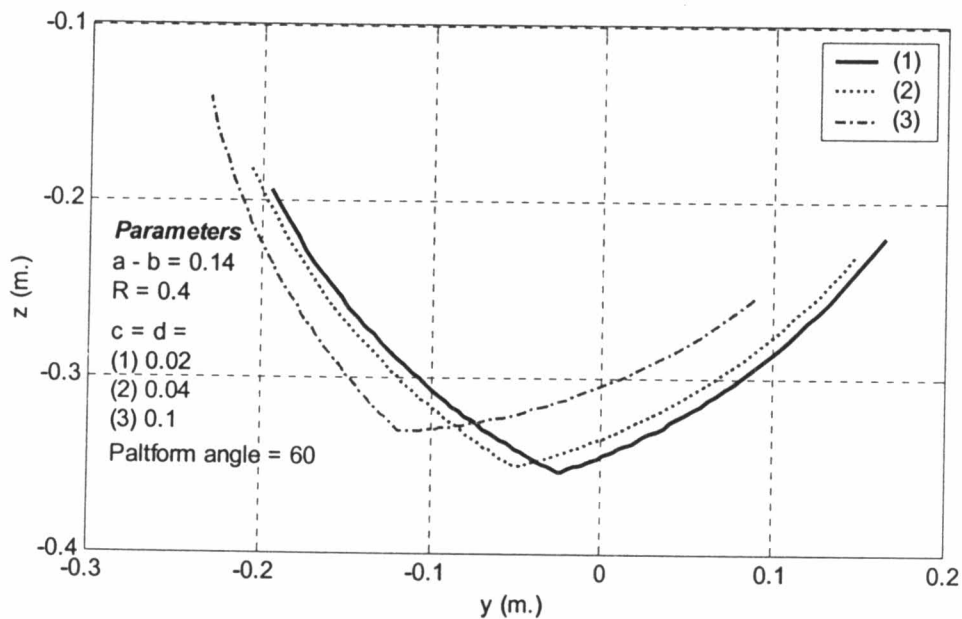
$$R = 0.4$$



รูปที่ 2.9 พื้นที่ทำงานในระนาบ yz ของแขนกลโดยแปรผันขนาด (a-b) ต่างๆ Platform ทำมุมเอียง

จากรูปที่ 2.9 พบว่าพื้นที่ทำงานเพิ่มขึ้นมากหากลดขนาด (a-b) ลง แต่การลดขนาด (a-b) ลงทำให้กลไกเข้าใกล้บริเวณซิงกูลาริตีส์มากขึ้น อันดับต่อไปรูปที่ 2.10 แสดงพื้นที่ทำงานในระนาบ yz โดยแปรผันขนาด c และ d โดยกำหนดให้ $c = d$ กำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆดังนี้

$$\begin{aligned}c &= d = 0.02; 0.04; 1.0 \\(a - b) &= 0.14 \\R &= 0.4\end{aligned}$$



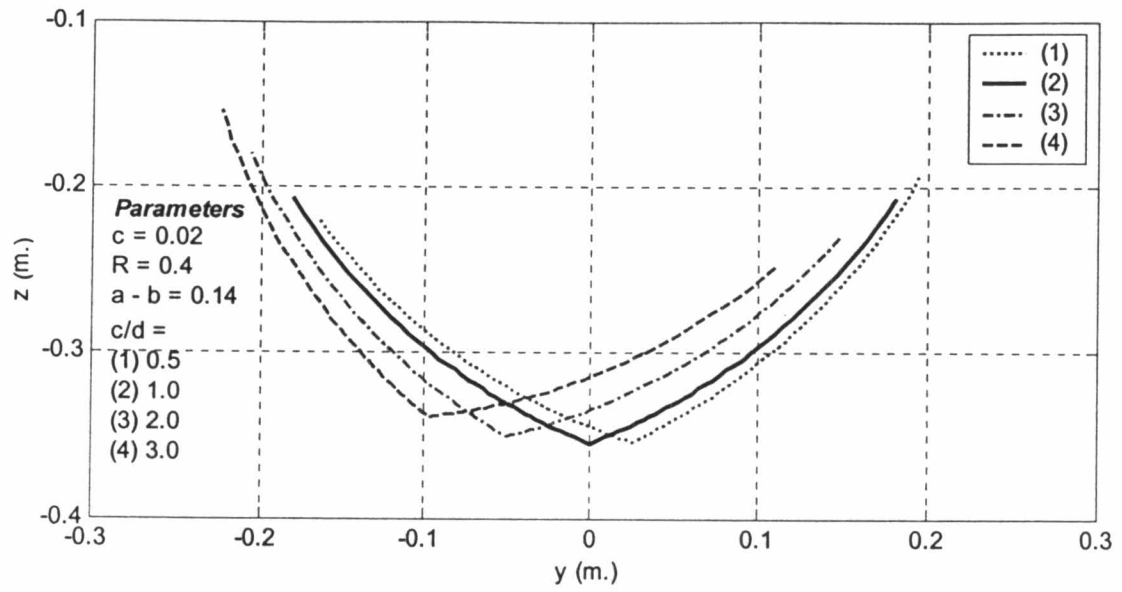
รูปที่ 2.10 พื้นที่ทำงานในระนาบ yz ของแขนกลแปรผันขนาด platform c และ d ต่างๆ และกำหนดให้ $c = d$ Platform เอียงทำมุม 60 องศา

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์อินเวอร์สคิเนมาติกส์ใน (2.10) ถึง (2.13) พบว่าหาก $c = d$ พื้นที่ทำงานในระนาบ yz เมื่อ Platform ทำมุม 0 องศาจะเท่ากันทุกๆค่า c และ d แต่เมื่อ Platform เอียงทำมุม พื้นที่ทำงานจะเริ่มแตกต่างกัน จากรูปที่ 2.10 พบว่าเมื่อเพิ่มค่า c และ d ขึ้น พื้นที่ทำงานจะเบี่ยงเบนจากกึ่งกลางหรือบริเวณ $y = 0$ ไปมากขึ้นทำให้พื้นที่ทำงานรวมมีขนาดลดลงมาก

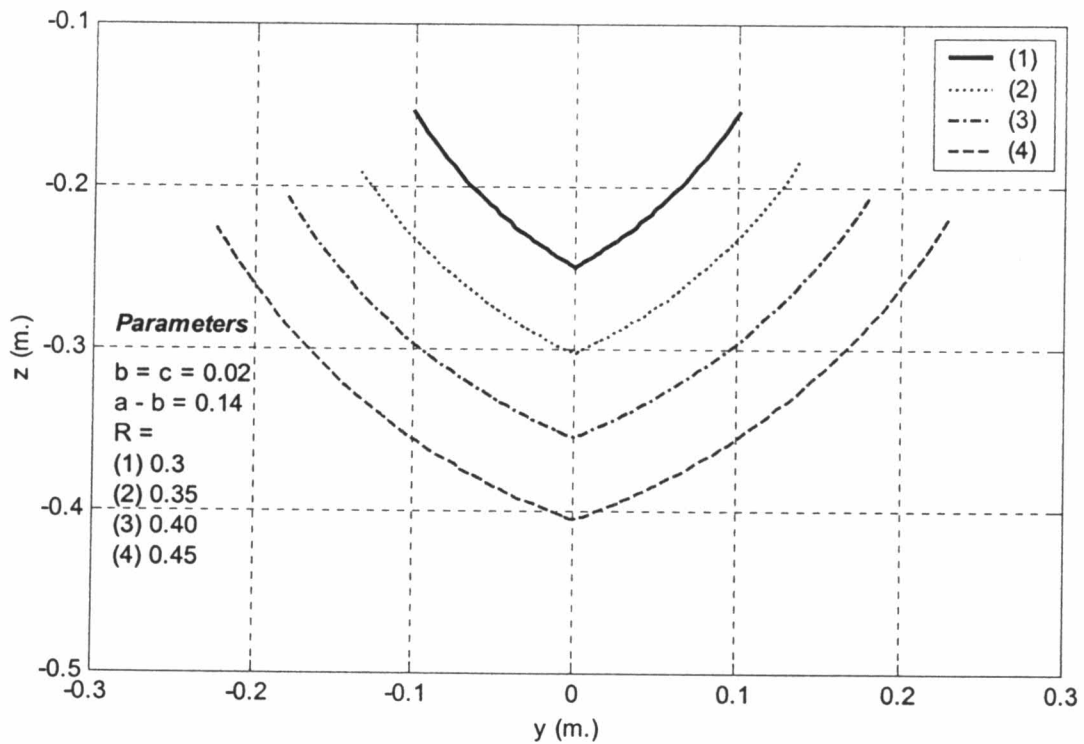
อันดับต่อไป กำหนดให้ c มีค่าคงที่ แต่แปรผันอัตราส่วนระหว่าง c และ d แทนดังแสดงในรูปที่ 2.11 กำหนดพารามิเตอร์ต่างๆดังนี้

$$\begin{aligned}c &= 0.02 \\c/d &= 0.5; 1.0; 2.0; 3.0 \\(a - b) &= 0.14 \\R &= 0.4\end{aligned}$$

จากรูปที่ 2.11 พบว่าหาก c ไม่เท่ากับ d จะทำให้จุดต่ำสุดของพื้นที่ทำงาน (ระยะ z ต่ำสุดที่กลไกเข้าถึงได้) เบี่ยงเบนออกจากบริเวณกลางทำให้พื้นที่ทำงานไม่สมมาตรและมีขนาดลดลง



รูปที่ 2.11 พื้นที่ทำงานในระนาบ yz ของแขนกลแปรผันอัตราส่วน c และ d ต่างๆ และกำหนดให้ c คงที่ Platform ทำมุม 0 องศา



รูปที่ 2.12 พื้นที่ทำงานในระนาบ yz ของแขนกลแปรผันความยาวของขา R และกำหนดให้ Platform ทำมุม 0 องศา

จากรูปที่ 2.12 พบว่าพื้นที่ทำงานใหญ่ขึ้นหากความยาวขามากขึ้น แต่ตำแหน่งกลางพื้นที่ทำงานจะต่ำลงเนื่องจากระยะ d_{min} มีค่าเท่าเดิมคือ 0.5R ถึง 0.6R

จากที่กล่าวมาข้างต้นการเลือกค่าพารามิเตอร์ต่างๆต้องคำนึงถึงทั้งขนาดพื้นที่ทำงานของแขนกลและซิงกูลาริตีส์ กล่าวโดยสรุปคือ

1. การลดขนาดฐาน (Footprint, (a-b)) ทำให้พื้นที่ทำงานมากขึ้นแต่จะเข้าไปใกล้ซิงกูลาริตีส์มากขึ้น
2. กำหนด c เท่ากับ d เพราะจะทำให้พื้นที่ทำงานขณะที่ Platform ทำมุม 0 องศา สมมาตรกับพื้นที่ทำงานเมื่อ Platform เอียงทำมุมต่างๆจะเบี่ยงเบนออกจากบริเวณกลางไปทางทิศ +y และ -y เท่าๆกัน
3. ขนาด platform c มากจะทำให้พื้นที่ทำงานเบี่ยงเบนออกจากบริเวณกลางมากขึ้น เมื่อเทียบกับค่า c ที่น้อยกว่า ในขณะที่ Platform ทำมุมเอียงมากขึ้น
4. พื้นที่ทำงานมากขึ้นเมื่อความยาวขาเพิ่มขึ้นแต่บริเวณที่แขนกลเข้าถึงโดยรวมจะมีตำแหน่งต่ำลงเนื่องจากกำหนดระยะ d_{min} เท่าเดิม นอกจากนี้ยังต้องคำนึงถึงสภาพความจริงเมื่อข้อต่อมีความยาวมากย่อมมีการโก่งตัวมากขึ้น อีกทั้งแขนกลที่สร้างขึ้นมามีขนาดใหญ่เกินความจำเป็น ดังนั้นข้อต่ออาจไม่ควรยาวเกินไป

ผลจากกราฟที่ 2.9 ถึง 2.12 กำหนดให้ (a-b) มีค่า 0.1 ถึง 0.14 เมตรขนาดของ c และ d คือ 0.04 เมตร และขนาด R มีค่าประมาณ 0.4 ถึง 0.45 เมตร ค่าพารามิเตอร์จริงของแขนกลหลังจากประกอบชิ้นส่วนทั้งหมดแล้วย่อมเบี่ยงเบนจากค่าที่กำหนดนี้ ค่าที่ใกล้เคียงที่สุดหาได้จากการทดลองและจะกล่าวถึงในภายหลัง

2.4 การหาเมตริกซ์ความแข็งแกร่ง (Stiffness matrix) ของแขนกล

เมตริกซ์ความแข็งแกร่งแสดงถึงความสามารถในการรับแรงของแขนกล เมตริกซ์ความแข็งแกร่งจะเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งของแขนกล และนอกจากการยุบตัวของแขนกลจะขึ้นกับเมตริกซ์ความแข็งแกร่งแล้วยังขึ้นกับทิศทางของแรงลัพธ์ที่กระทำต่อแขนกลด้วย ความแข็งแกร่งของแขนกลขึ้นอยู่กับหลายปัจจัยเช่น ลักษณะของแขนกล วัสดุที่ใช้สร้าง ขนาด ตัวขับเคลื่อนและรวมถึงลักษณะการควบคุม ต่อไปจะแสดงการวิเคราะห์หาเมตริกซ์ความแข็งแกร่งของแขนกลที่เสนอในงานวิจัยนี้

เมตริกซ์ความแข็งแกร่งสามารถหาได้ดังนี้ [Gosselin, 1990] จาก (2.21)

$$A\dot{q} = B\dot{x} \quad (2.21)$$

หรือเขียนในรูป

$$\dot{q} = J\dot{x}$$

หรือ

$$\Delta q = J\Delta x$$

โดยที่

$$J = A^{-1}B$$

\dot{q} : ความเร็วของข้อต่อข้อ

\dot{x} : ความเร็วของจุดปลายแขนกลแบบคาร์ทีเซียน

นอกจากนี้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำที่ปลายแขนกลกับแรงที่ข้อต่อข้อในสถานะสมดุลคือ

$$F = J^T \tau \quad (2.26)$$

โดยที่ F เป็นเวกเตอร์รวมของแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อแขนกลซึ่งเขียนได้ในรูป $[f \ M_y]^T$

กำหนดให้ $\chi = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] \bullet \text{diag}(4,4)$ เป็นเวกเตอร์ความแข็งเกร็งของข้อต่อข้อ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ข้อต่อข้อกับการยุบตัวของข้อต่อข้อคือ

$$\tau = k\Delta q$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้นทั้งหมดจะได้เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของแขนกลคือ

$$F = K\Delta x \quad (2.27)$$

โดยที่

$$K = J^T k J$$

เห็นได้ว่าความแข็งเกร็งของแขนกลขึ้นอยู่กับตำแหน่งปัจจุบันของแขนกลและทิศทางการยุบตัวของแขนกลคือเวกเตอร์ χ นั้นขึ้นอยู่กับทั้งเมตริกซ์ความแข็งเกร็งและทิศทางของแรงที่กระทำ

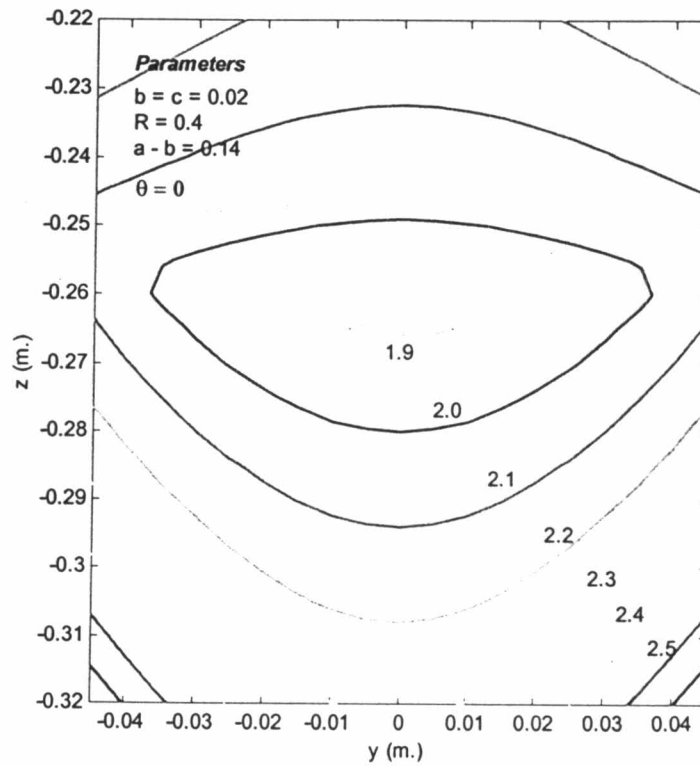
นอกจากนี้เมตริกซ์ความแข็งเกร็งยังแสดงถึงความน่าจะเป็นที่แขนกลจะเข้าสู่สถานะซิงกูลาริตีส์อีกด้วย โดยดูจาก Condition number [Gosselin, 1990] ดัชนีดังกล่าวสามารถชี้วัดความเป็นไปได้ที่เมตริกซ์นั้นๆ เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์ Condition number คือรากที่สองของอัตราส่วนของ Eigenvalue ที่มากที่สุดต่อ Eigenvalue ที่น้อยที่สุด

$$\alpha_c = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \quad (2.28)$$

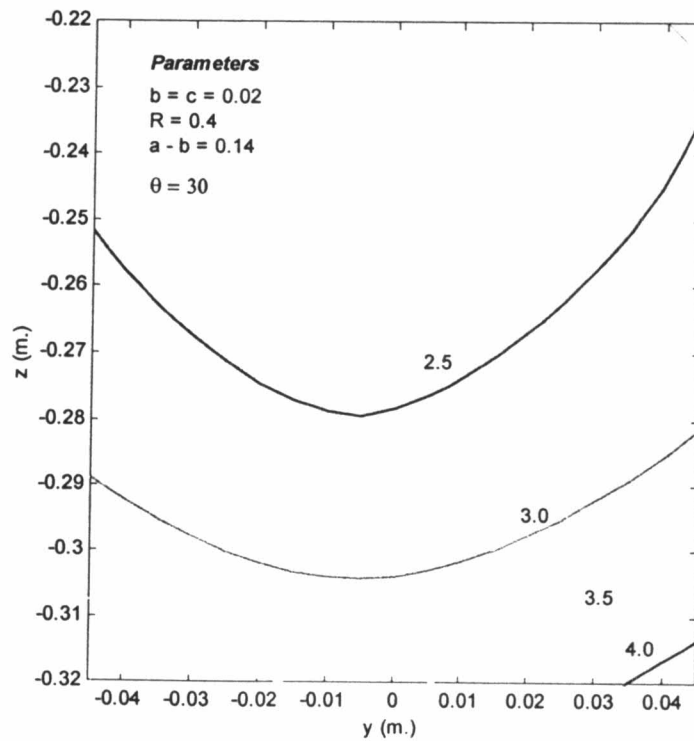
จาก (2.26) λ_{\max} คือค่าความแข็งเกร็งที่มากที่สุดในทิศทางของ Eigenvector นั้นๆ ในทำนองเดียวกัน λ_{\min} คือค่าความแข็งเกร็งที่น้อยที่สุดในทิศทางของ Eigenvector นั้นๆ โปรดดูรายละเอียดใน Friedberg และคณะ [2003]

ต่อไปเป็นแผนภูมิแสดงค่า Condition number ของเมตริกซ์ความแข็งเกร็ง (2.26) ของแขนกลที่ตำแหน่งต่างๆ ในพื้นที่ทำงานในระนาบ yz ในสถานะต่างๆกัน รูปที่ 2.13 ถึง 2.16

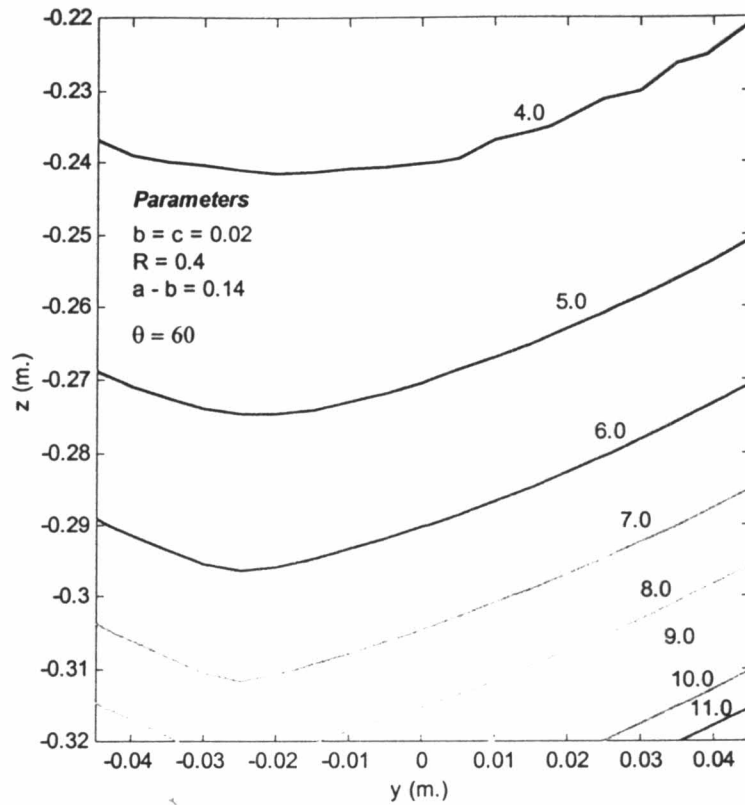
แสดงค่า Condition number ของแกนกลที่ Platform ทำมุมเอียงต่างๆกัน โดยใช้พารามิเตอร์ตามที่กำหนดในหัวข้อ 2.3



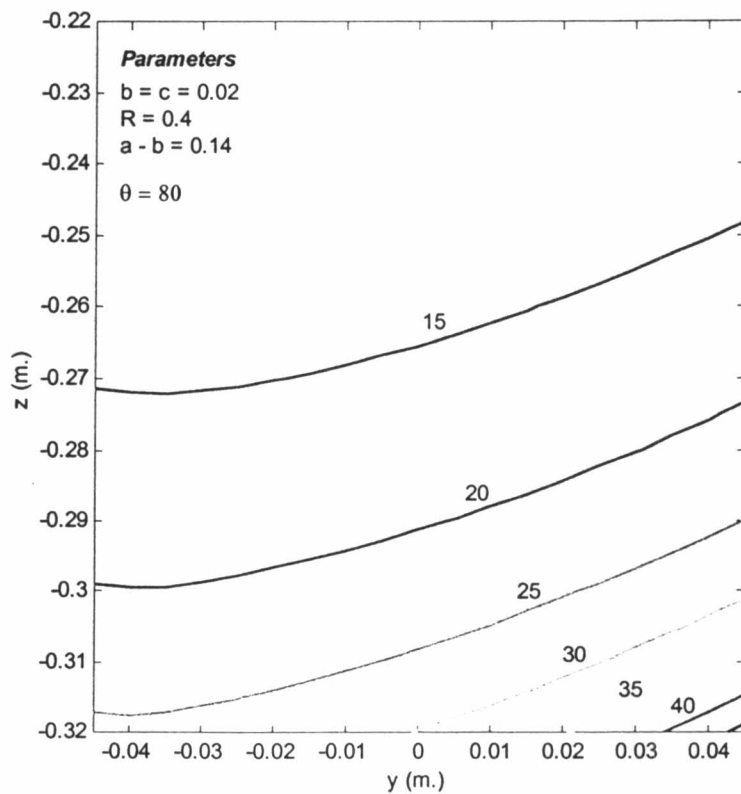
รูปที่ 2.13 ค่า Condition number ของแกนกลขณะ Platform ทำมุม 0 องศา



รูปที่ 2.14 ค่า Condition number ของแกนกลขณะ Platform ทำมุม 30 องศา



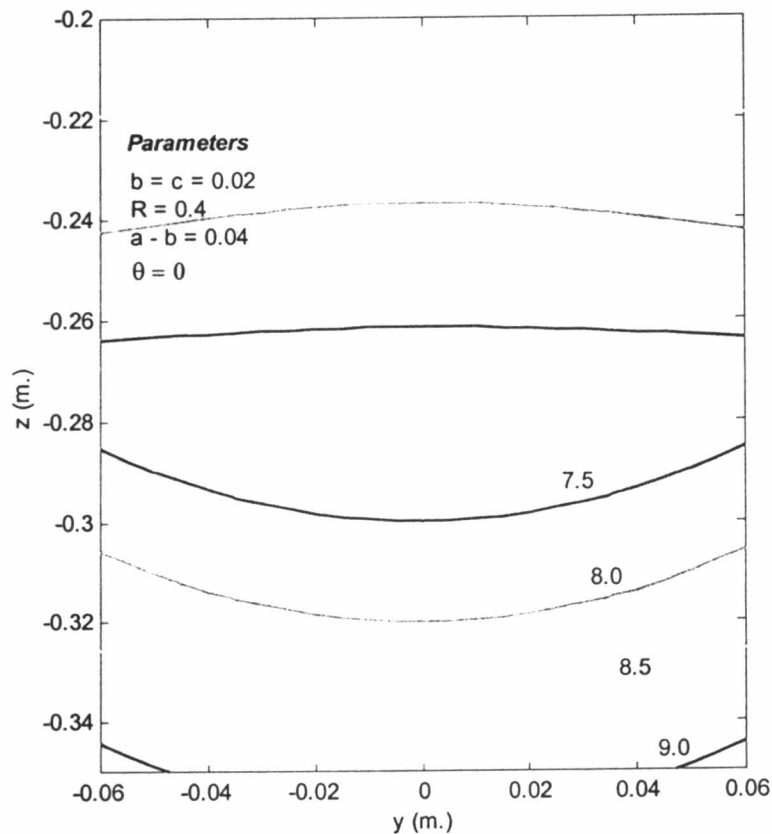
รูปที่ 2.15 ค่า Condition number ของแกนกลขณะ Platform ทำมุม 60 องศา



รูปที่ 2.16 ค่า Condition number ของแกนกลขณะ Platform ทำมุม 80 องศา

จากรูปที่ 2.13 ถึง 2.16 พบว่าแขนกลมีแนวโน้มที่จะเข้าสู่ซิงกูลาริตีส์มากขึ้นเมื่อมุมเอียงของ Platform มากขึ้น ค่ามุมเอียงที่เหมาะสมคือ 0 ถึง ± 60 องศา ซึ่งสอดคล้องกับสมการ 2.24

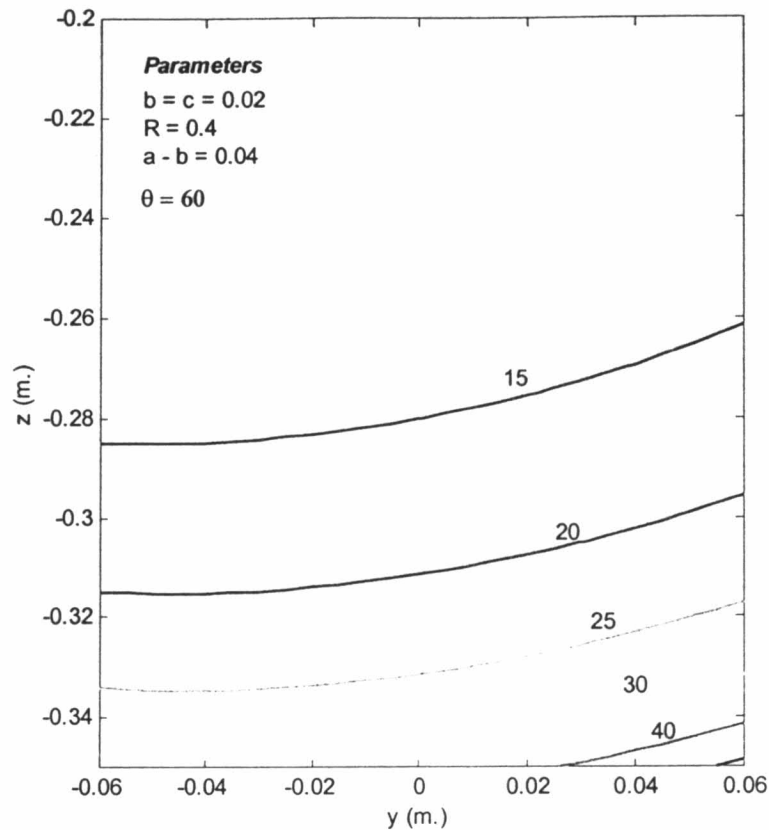
รูปที่ 2.17 และ 2.18 เป็นแผนภูมิแสดงค่า Condition number ของแขนกลโดยกำหนดขนาดความกว้างของฐานหุ่น (a-b) ให้น้อยลง ตามความสัมพันธ์ที่ 2.24 พบว่าแขนกลจะเข้าใกล้ซิงกูลาริตีส์มากขึ้น



รูปที่ 2.17 ค่า Condition number ของแขนกลขณะ Platform ทำมุม 0 องศา กำหนดความกว้างของฐานแขนกล (a-b) เป็น 0.04 เมตร

เมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 2.13 กับรูปที่ 2.17 พบว่าเมื่อฐานของแขนกลแคบลง ในตำแหน่งทำงานเดียวกันแขนกลจะเข้าใกล้บริเวณซิงกูลาริตีส์มากกว่า เช่นบริเวณตำแหน่ง $(y, z) = (0.04, -0.32)$ ในรูปที่ 2.13 มี Condition number ประมาณ 2.5 แต่ในรูปที่ 2.17 มี Condition number ประมาณ 8.5 แขนกลจะมีแนวโน้มสู่ซิงกูลาริตีส์เร็วขึ้นดังแสดงในรูปที่ 2.18 ขณะ Platform เอียงทำมุม 60 องศา

จากรูปที่ 2.18 พบว่าที่บริเวณเดียวกันกับในรูปที่ 2.13 และ 2.17 ค่า Condition number ของแขนกลสูงถึง 25 ทำให้เชื่อได้ว่าแขนกลมีแนวโน้มสู่ซิงกูลาริตีส์สูง



รูปที่ 2.18 ค่า Condition number ของแกนกลขณะ Platform ทำมุม 60 องศา กำหนดความกว้างของฐานแกนกล (a-b) เป็น 0.04 เมตร

จากการวิเคราะห์เบื้องต้นทั้งหมดทำให้ทราบว่าแกนกลที่ออกแบบนั้นมีความสามารถเคลื่อนที่ได้ดี และมีพื้นที่ทำงานในแนวแกน x สูง อีกทั้งยังมีความสามารถในการเคลื่อนที่ได้แม้ว่า platform จะเอียงทำมุมมากๆ จากการวิเคราะห์พบว่า แกนกลสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างมีประสิทธิภาพเมื่อ platform เอียงทำมุมระหว่าง 0 ถึง 60 องศา ผลการวิเคราะห์สามารถแสดงในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ได้ทำให้นำไปใช้งานได้สะดวกและเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ปัญหาซับซ้อนมากขึ้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ เช่นการควบคุมแรงกดต่อวัตถุเวดล้อมเป็นต้น นอกจากนี้แกนกลยังมีความแข็งแรงสูง โดยเฉพาะในแกน x และ z ทั้งนี้ประสิทธิภาพโดยรวมของแกนกลยังขึ้นกับมาตรฐานและความสามารถในการสร้างชิ้นส่วน ความเผื่อของหน้าสัมผัสทางกลทั้งหมดของแกนกลอีกด้วยซึ่งเป็นข้อจำกัดอันหนึ่งของห้องวิจัย