



บทที่ 2

วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับท่อนำคลื่นแบบที่ใช้สนามในแนวขวาง 2 ส่วนประกอบเป็นตัวแปร
ของ W.C. Chew และ M.A. Nasir

2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่เสนอโดย W.C. Chew และ M.A. Nasir [5] ซึ่งเป็นวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้ส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง 2 ส่วนประกอบเป็นตัวแปร โดยมีการกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ซึ่งผู้ศึกษาในงานวิจัยได้ศึกษาและนำมาใช้แล้ว พบว่ามีปัญหาเกี่ยวกับคำตอบแพทเทิร์นของสนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมกลวง และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับท่อนำคลื่นที่มีขอบเป็นเส้นโค้ง และผู้ศึกษาในงานวิจัยได้เสนอแนวคิดของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์มาใช้เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

2.2 วิธีการไฟไนต์อีลิเมนต์ของ W.C. Chew และ M.A. Nasir [5]

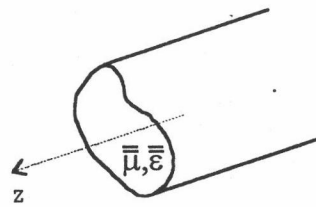
วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ของปัญหาท่อนำคลื่นแบบที่ใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขวาง 2 ส่วนประกอบเป็นตัวแปร ได้มีผู้เสนอไว้แล้วคือ W.C. Chew และ M.A. Nasir [5]

รูปที่ 2-1 แสดงท่อนำคลื่นที่วางแนวแกนของท่อในแนวแกน z และแสดงพื้นที่ภาคตัดขวาง S และเส้นรอบขอบเขต C บนระนาบ $x-y$ วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่เสนอโดย W.C. Chew และ M.A. Nasir [5] จะมีสมการนิพจน์การแปรผันสำหรับค่าเจาะจง β_z^2 อยู่ในรูปของผลคูณภายในระหว่างสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง คือ

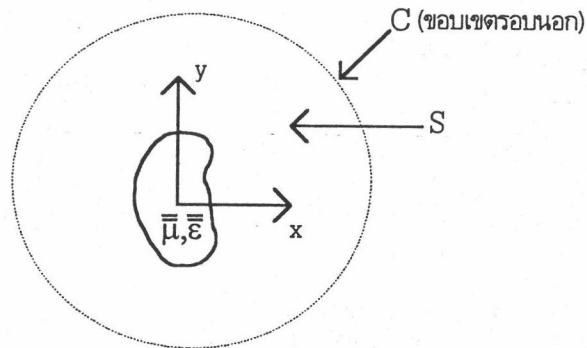
$$\beta_z^2 = - \frac{\langle \mathbf{H}_s, \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_s \rangle}{\langle \mathbf{H}_s, \mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_s \rangle} \quad (2-1)$$

โดยผลคูณภายใน

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_s, \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_s \rangle = & - \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s v_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s \\ & + \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s \\ & - \omega^2 \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot (\overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s) \times (\overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s) \\ & + \int_C dl \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s v_{zz} \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s \\ & - \int_C dl \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-2a)$$



(a)



(b)

รูปที่ 2-1 a) แสดงท่อนำคลื่นที่วางแนวแกนของท่อในแนวแกน z และ b) แสดงภาคตัดขวางในระนาบ x-y และ แสดงบริเวณพื้นที่ S และ เส้นรอบขอบเขต C

$$\langle \mathbf{H}_s, \nabla \cdot \mathbf{E}_s \rangle = \int_S dS \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_s \quad (2-2b)$$

ในที่นี้ \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางของท่อนำคลื่น $\int_S dS$ หมายถึงอินทิกรัลบนพื้นที่ตลอดภาคตัดขวาง S $\int_C dl$ หมายถึงอินทิกรัลเชิงเส้นบนเส้นรอบขอบเขต C \mathbf{i}_z คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศแกน z \mathbf{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศชี้ออกจากบริเวณ S และตั้งฉากกับเส้นรอบขอบเขต C $\bar{\mu}_s, \bar{\mu}_{zz}, \bar{\epsilon}_s$ และ $\bar{\epsilon}_{zz}$ เป็นส่วนประกอบของเทนเซอร์ $\bar{\mu}$ และ $\bar{\epsilon}$ โดย

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_s & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_{zz} \end{pmatrix} \quad \bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_s & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix}$$

$\bar{v}_s, \bar{v}_{zz}, \bar{\kappa}_s$ และ $\bar{\kappa}_{zz}$ เป็นส่วนประกอบของเทนเซอร์ \bar{v} และ $\bar{\kappa}$ โดย

$$\bar{\nu} = \bar{\mu}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_s & 0 \\ 0 & \nu_{zz} \end{pmatrix} \quad \bar{\kappa} = \bar{\varepsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\kappa}_s & 0 \\ 0 & \kappa_{zz} \end{pmatrix}$$

และ ครรชนิบน t เป็นเครื่องหมายสลับเปลี่ยน

เมื่อพิจารณาพจน์ที่เป็นอินทิกรัลเชิงเส้นในสมการ (2-2a) คือ

$$\begin{aligned} & + \int_C d\mathbf{l} \cdot \bar{\mu}_s \cdot \mathbf{H}_s \nu_{zz} \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s \\ & - \int_C d\mathbf{l}_z \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \bar{\varepsilon}_s \cdot \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-3)$$

เราจะพบว่าในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C นี้เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ(perfect electric conductor หรือ PEC) ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0 \quad (2-4a)$$

$$E_z = \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \bar{\varepsilon}_s \cdot \mathbf{E}_s = 0 \quad (2-4b)$$

สมการ (2-4a) และ (2-4b) จะทำให้พจน์ที่เป็นอินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ ในสมการ (2-3) ในพจน์แรกและพจน์ที่สอง มีค่าเท่ากับ 0 และเมื่อพิจารณาในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C นี้เป็นตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ(perfect magnetic conductor หรือ PMC) ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\mathbf{H}_z = \nu_{zz} \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s = 0 \quad (2-5a)$$

$$\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s = 0 \quad (2-5b)$$

สมการ (2-5a) และ (2-5b) จะทำให้พจน์ที่เป็นอินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ ในสมการ (2-3) ในพจน์แรกและพจน์ที่สองในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C เป็นตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ มีค่าเท่ากับ 0 และเมื่อพิจารณาในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C นี้อยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด เวกเตอร์ตั้งฉาก \mathbf{n} และมีทิศชี้ออกจากเส้นรอบขอบเขต C ในการอินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ รอบตัวกลางแต่ละชนิดตามสมการ (2-3) สำหรับที่รอยต่อนี้ จะมีทิศของเวกเตอร์ตรงกันข้ามซึ่งกันและกัน คือ

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 \quad (2-5c)$$

ในที่นี้ ครรชนิบล่าง 1 และ 2 หมายถึงเวกเตอร์ตั้งฉาก \mathbf{n} สำหรับตัวกลาง 1 และ 2 ตามลำดับ สมการ (2-5c) นี้ทำให้อินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ รอบตัวกลางแต่ละชนิดบนรอยต่อนี้หักล้างกัน ผลการอินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ ตามสมการ (2-3) จึงมีค่าเท่ากับ 0 และเมื่อพิจารณาในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C นี้อยู่ที่ระยษอนันต์ โดยเริ่มจากการพิจารณาให้เส้นรอบขอบเขตเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับจุดศูนย์กลางของท่อนำคลื่นและมีระยษรัศมีของวงกลมเท่ากับ r ซึ่งในกรณีที่ระยษรัศมี r มีค่าเข้าใกล้ระยษอนันต์นั้น สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s จะมีขนาดแปรผกผันกับระยษรัศมี r ตามสมการ

$$|\mathbf{E}_s| \propto e^{-r} \quad (2-6a)$$

$$|\mathbf{H}_s| \propto e^{-r} \quad (2-6b)$$

ในที่นี้ $|\mathbf{E}_s|$ และ $|\mathbf{H}_s|$ หมายถึงขนาดของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางตามลำดับ และ r คือระยะทางจากจุดศูนย์กลางของท่อนำคลื่น ขนาดของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางตามสมการ (2-6a) และ (2-6b) นี้จะทำให้

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_C d\mathbf{l} \cdot \overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s \nu_{zz} \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s \right) = 0 \quad (2-7a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_C d\mathbf{l}_z \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s \right) = 0 \quad (2-7b)$$

สมการ (2-7a) และ (2-7b) จะทำให้พจน์ที่เป็นอินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ ในสมการ (2-3) ในพจน์แรกและพจน์ที่สองสำหรับในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C อยู่ที่ระยะอนันต์ มีค่าเท่ากับ 0

ดังนั้น ในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C นี้เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (perfect electric conductor หรือ PEC) หรือเป็นตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ (perfect magnetic conductor หรือ PMC) หรือเส้นรอบขอบเขต C นี้อยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด หรือเส้นรอบขอบเขต C นี้อยู่ที่ระยะอนันต์ พจน์ที่เป็นอินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ ในสมการ (2-2a) จะมีค่าเท่ากับ 0 ตามเหตุผลที่ได้กล่าวไปข้างต้น ทำให้เขียนสมการ (2-2) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_s, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_s \rangle = & - \int_s dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s \nu_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s \\ & + \int_s dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-8a)$$

$$\begin{aligned} & - \omega^2 \int_s dS \mathbf{i}_z \cdot (\overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s) \times (\overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s) \\ \langle \mathbf{H}_s, \mathcal{B} \cdot \mathbf{E}_s \rangle = & \int_s dS \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-8b)$$

ตามที่อ้างไว้ในบทความของ W.C. Chew และ M.A. Nasir [5] สมการ (2-1) นี้เป็นนิพจน์การแปรผันที่ให้ค่า β_z^2 เป็นค่าต่ำสุด เมื่อ \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s เป็นผลเฉลยของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ส่งผ่านในท่อนำคลื่น

ตามวิธีการของ Rayleigh-Ritz เราจะกระจาย \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{E}_{ns} \quad \mathbf{H}_s = \sum_{m=1}^N b_m \mathbf{H}_{ms} \quad (2-9)$$

โดย a_n ($n=1..N$) และ b_m ($m=1..N$) เป็นตัวแปรสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของฟังก์ชันการขยาย \mathbf{E}_{ns} ($n=1..N$) และ \mathbf{H}_{ms} ($m=1..N$) ตามลำดับ ต่อจากนั้นพิจารณาค่าต่ำสุดของนิพจน์การแปรผันในสมการ(2-1) โดยให้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของนิพจน์การแปรผันนี้มีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงไปด้วยค่าเล็ก ๆ ของตัวแปร a_n ($n=1..N$) และ b_m ($m=1..N$) โดยเริ่มด้วยการแทนสมการ(2-9) ลงในสมการ(2-1) จะได้ผลเป็น

$$\beta_z^2 = - \frac{\overline{\overline{\mathbf{b}' \mathbf{L} \mathbf{a}}}}{\overline{\overline{\mathbf{b} \mathbf{B} \mathbf{a}}}} \quad (2-10)$$

$\bar{\mathbf{a}}$ และ $\bar{\mathbf{b}}$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งของชุดตัวแปรไม่ทราบค่า a_i ($i=1..N$) และ b_i ($i=1..N$) ตามลำดับ หรือ $\bar{\mathbf{a}} = [a_1 \dots a_N]^t$ และ $\bar{\mathbf{b}} = [b_1 \dots b_N]^t$ ตามลำดับ

$$\left[\bar{\mathbf{L}} \right]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_{ns} \rangle \quad (2-11a)$$

$$\left[\bar{\mathbf{B}} \right]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}, \mathcal{B} \cdot \mathbf{E}_{ns} \rangle \quad (2-11b)$$

$\bar{\mathbf{L}}$ และ $\bar{\mathbf{B}}$ นี้เป็นเมตริกซ์ของตัวดำเนินการ \mathcal{L} และ \mathcal{B} ตามลำดับ

เมื่อจัดสมการ (2-10) ใหม่ จะได้เป็น

$$\bar{\mathbf{b}}^t \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{a}} + \beta_z^2 \bar{\mathbf{b}}^t \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}} = 0 \quad (2-12)$$

จากนั้นหาอนุพันธ์ของสมการ (2-6) เมื่อเทียบกับ b_1 จะได้

$$\sum_{i=1}^N a_i \bar{\mathbf{L}}_{1i} + \beta_z^2 \sum_{i=1}^N a_i \bar{\mathbf{B}}_{1i} + \left(\frac{\partial \beta_z^2}{\partial b_1} \right) \bar{\mathbf{b}}^t \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}} = 0 \quad (2-13)$$

ในพจน์ที่สามของด้านซ้ายมือของสมการ (2-13) พิจารณาที่จุดต่ำสุดของนิพจน์การแปรผัน จะมีค่า $\frac{\partial \beta_z^2}{\partial b_1} = 0$ เพราะฉะนั้น สมการ(2-13) จะเปลี่ยนเป็น

$$\sum_{i=1}^N a_i \bar{\mathbf{L}}_{1i} + \beta_z^2 \sum_{i=1}^N a_i \bar{\mathbf{B}}_{1i} = 0 \quad (2-14)$$

ในการทำงานเดียวกันนี้ เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (2-12) เมื่อเทียบกับ b_m ($m=1..N$) ทุกตัว และพิจารณาที่จุดต่ำสุดของนิพจน์การแปรผัน จะได้สมการค่าเงาจริงสำหรับ $\bar{\mathbf{a}}$ คือ

$$\left[\bar{\mathbf{L}} + \beta_z^2 \bar{\mathbf{B}} \right] \cdot \bar{\mathbf{a}} = 0 \quad (2-15a)$$

และเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (2-12) เมื่อเทียบกับ a_1 จะได้

$$\sum_{i=1}^N b_i \bar{\mathbf{L}}_{i1} + \beta_z^2 \sum_{i=1}^N b_i \bar{\mathbf{B}}_{i1} + \left(\frac{\partial \beta_z^2}{\partial a_1} \right) \bar{\mathbf{b}}^t \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}} = 0 \quad (2-16)$$

ในพจน์ที่สามของด้านซ้ายมือของสมการ (2-16) พิจารณาที่จุดต่ำสุดของนิพจน์การแปรผัน จะมีค่า $\frac{\partial \beta_z^2}{\partial a_1} = 0$ เพราะฉะนั้น สมการ(2-16) จะเปลี่ยนเป็น

$$\sum_{i=1}^N b_i \bar{\mathbf{L}}_{i1} + \beta_z^2 \sum_{i=1}^N b_i \bar{\mathbf{B}}_{i1} = 0 \quad (2-17)$$

ในการทำงานเดียวกันนี้ เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (2-12) เมื่อเทียบกับ a_n ($n=1..N$) ทุกตัว และพิจารณาที่จุดต่ำสุดของนิพจน์การแปรผัน จะได้สมการค่าเงาจริงสำหรับ $\bar{\mathbf{b}}$ คือ

$$\left[\bar{\mathbf{L}} + \beta_z^2 \bar{\mathbf{B}} \right] \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad (2-15b)$$

ดังนั้น สรุปสมการค่าเจาะจงสำหรับค่าต่ำสุดของนิพจน์การแปรผัน คือ

$$\left[\bar{\mathbf{L}} + \beta_z^2 \bar{\mathbf{B}} \right] \cdot \bar{\mathbf{a}} = 0 \quad (2-15a)$$

$$\left[\bar{\mathbf{L}}' + \beta_z^2 \bar{\mathbf{B}}' \right] \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad (2-15b)$$

เมื่อสมาชิกของเมตริกซ์ $\bar{\mathbf{L}}$ และ $\bar{\mathbf{B}}$ เป็นไปตามสมการ (2-11) คือ

$$\left[\bar{\mathbf{L}} \right]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_{ns} \rangle \quad (2-11a)$$

$$\left[\bar{\mathbf{B}} \right]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}, \beta \cdot \mathbf{E}_{ns} \rangle \quad (2-11b)$$

สมการ (2-15a) และ (2-15b) เป็นสมการค่าเจาะจงที่มีค่าเจาะจงที่ใช้ร่วมกัน เราจึงสามารถแก้สมการเพียงสมการใดสมการหนึ่งเพียงสมการเดียวก็พอ[5] ค่าเจาะจงนี้คือค่าคงที่ของการส่งผ่านของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นยกกำลังสอง β_z^2 และเวกเตอร์เจาะจง $\bar{\mathbf{a}}$ หรือ $\bar{\mathbf{b}}$ ที่คำนวณได้สามารถนำมาสร้างเป็นคำตอบแพดเทิร์นของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขวางของท่อนำคลื่น \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s แต่ละโหมดได้ โดยใช้สมการ (2-9)

จำนวนของคำตอบค่าเจาะจง β_z^2 และจำนวนชุดคำตอบเวกเตอร์เจาะจง $\bar{\mathbf{a}}$ (หรือ $\bar{\mathbf{b}}$) ที่คำนวณได้จากสมการเมตริกซ์ (2-15a) และ (2-15b) จะมีจำนวนเท่ากับขนาดของเมตริกซ์ $\bar{\mathbf{L}}$ และ $\bar{\mathbf{B}}$ ซึ่งในจำนวนคำตอบที่ได้นี้ จะมีบางค่าเท่านั้นที่เป็นผลเฉลยของค่าคงที่ของการส่งผ่านและแพดเทิร์นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่สามารถเคลื่อนที่ไปในท่อนำคลื่นได้ โดยเงื่อนไขที่ใช้สำหรับเลือกคำตอบที่เป็นค่าคงที่ของการส่งผ่านนี้คือ

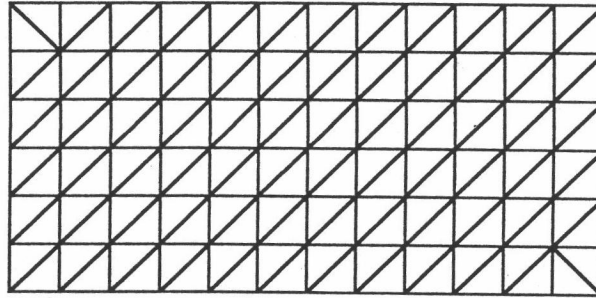
$$\beta_z^2 > 0 \quad (2-18)$$

ทั้งนี้เพราะ ค่า $\beta_z^2 > 0$ จะให้คำตอบของ β_z เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับการวิเคราะห์ในท่อนำคลื่นที่มีตัวกลางแบบไม่มีการสูญเสีย

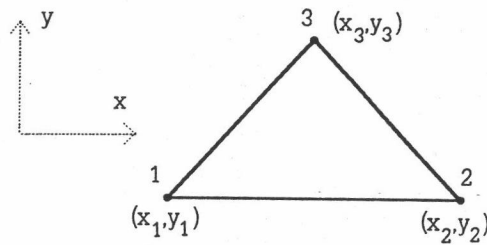
ตามวิธีของ FEM จะทำการแบ่งภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นออกเป็นอีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมย่อย ๆ (รูปที่ 2-2) จากนั้นกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสำหรับภายในแต่ละอีลิเมนต์ ด้วยส่วนประกอบตามแนวแกน x และแกน y ด้วยสมการ

$$\mathbf{E}_s^e = \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_i N_i(x, y) \quad (2-19a)$$

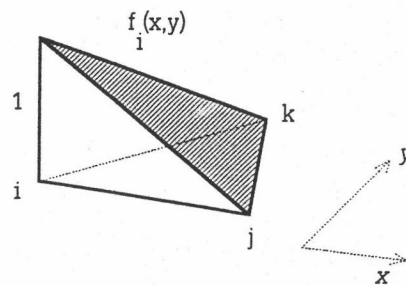
$$\mathbf{H}_s^e = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i N_i(x, y) \quad (2-19b)$$



รูปที่ 2-2 ตัวอย่างของการแบ่งอีลีเมนต์ของท่อนำคลื่น



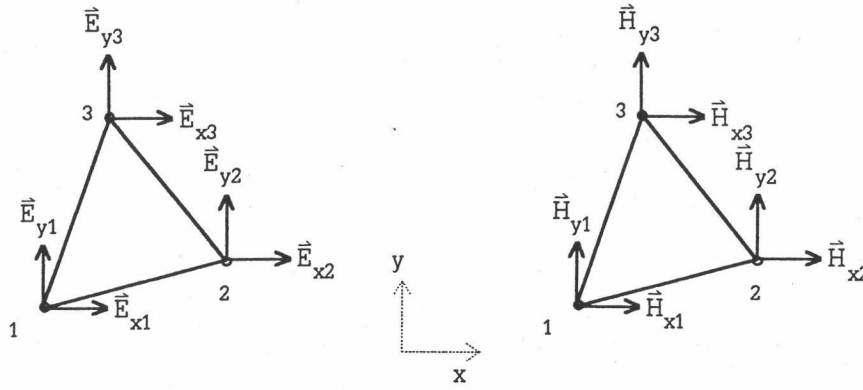
รูปที่ 2-3 แสดงอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม

รูปที่ 2-4 แสดงรูปปริมาตรของสมการ $N_i(x, y)$ ซึ่งมีจุดยอดสูงหนึ่งหน่วยที่โหนด i และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่โหนด j และ k

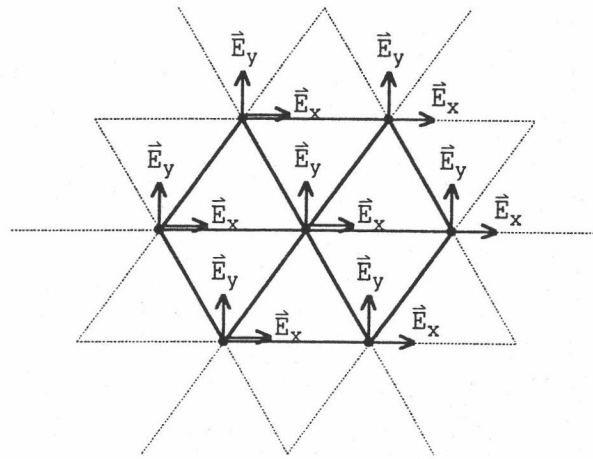
โดย $\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{xi} \\ \alpha_{yi} \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{bmatrix}$ เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่โหนด i และ α_{xi} , α_{yi} , β_{xi} และ β_{yi} เป็นตัวไม่ทราบค่าที่บอกขนาดของส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ $N_i(x, y)$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ของโหนด i ซึ่งแปรตามตำแหน่งต่าง ๆ ในอีลีเมนต์เป็นฟังก์ชันดังนี้

$$N_i(x, y) = \frac{(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3} \quad (2-20)$$

โดย (x_i, y_i) , (x_j, y_j) และ (x_k, y_k) เป็นตำแหน่งพิกัดของโหนด i, j และ k ตามลำดับ และลำดับของโหนด (i, j, k) คือ โหนด (1, 2, 3) หรือ (2, 3, 1) หรือ (3, 1, 2) ตามอีลีเมนต์ในรูปที่ 2-3



รูปที่ 2-5 แสดงการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางที่โหนดทั้งสามด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y



รูปที่ 2-6 แสดงตัวอย่างการรวมสนามไฟฟ้าในแนวขวางของแต่ละอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน และใช้ตัวแปรส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน x และ y ที่จุดโหนดร่วมกัน

รูปที่ 2-5 แสดงการกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_x และ H_x ด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ที่จุดโหนดทั้งสามของอีลีเมนต์ตามสมการ (2-19a) และ (2-19b) และรูปที่ 2-6 แสดงตัวอย่างการรวมสนามไฟฟ้าในแนวขวางของแต่ละอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน โดยใช้ตัวแปรส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน x และ y ที่จุดโหนดร่วมกัน

เมื่อสามารถเขียนสมการการกระจายของสนามไฟฟ้าและแม่เหล็กภายในอีลีเมนต์ทั้งหมด และรวมสมการของแต่ละอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน สามารถสร้างสมการเมตริกซ์ (2-14) โดยส่วนประกอบในแถวที่ m และแนวตั้งที่ n ใน เมตริกซ์ \bar{L} และ \bar{B} ในสมการ(2-10) คือ



$$\begin{aligned} \overline{[\mathbf{L}]}_{mn} &= \langle \overline{N}_m, \mathcal{L} \cdot \overline{N}_n \rangle \\ \overline{[\mathbf{B}]}_{mn} &= \langle \overline{N}_m, \mathcal{B} \cdot \overline{N}_n \rangle \end{aligned} \quad (2-21)$$

หรือ

$$\begin{aligned} \overline{[\mathbf{L}]}_{mn} &= -\int_s dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \overline{N}_n v_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\mu}_s^t \cdot \overline{N}_m \\ &\quad + \int_s dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \overline{N}_m \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\varepsilon}_s \cdot \overline{N}_n \\ &\quad - \omega^2 \int_s dS \mathbf{i}_z \cdot (\overline{\varepsilon}_s \cdot \overline{N}_n) \times (\overline{\mu}_s^t \cdot \overline{N}_m) \\ \overline{[\mathbf{B}]}_{mn} &= \int_s dS \overline{f}_m \cdot \mathbf{i}_z \times \overline{N}_n \end{aligned} \quad (2-22)$$

โดย

$$\overline{N}_n(x, y) = \begin{pmatrix} N_n(x, y) & 0 \\ 0 & N_n(x, y) \end{pmatrix} \quad (2-23)$$

สำหรับการกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขวาง \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s ในท่อนำคลื่นซึ่งมีผนังเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ จะเป็นไปตามสมการ

$$\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) = 0 \quad (2-24a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0 \quad (2-24b)$$

เมื่อ \mathbf{n} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตั้งฉากกับผนังท่อนำคลื่น และมีเงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด คือ

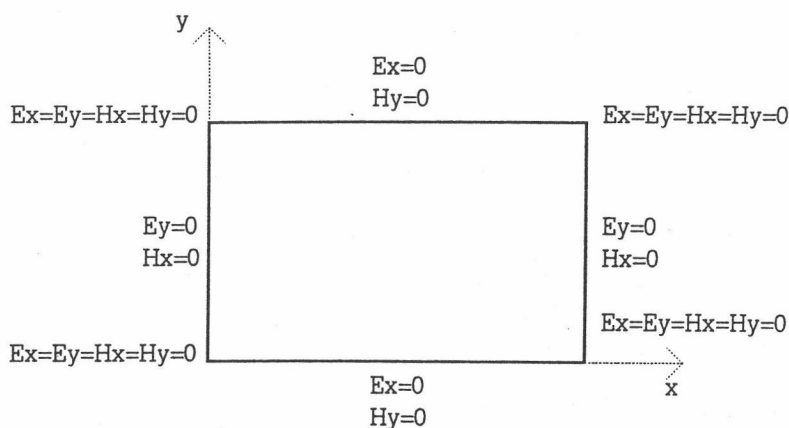
$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \quad (2-25a)$$

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_{n1} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{n2} \quad (2-25b)$$

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \quad (2-25c)$$

$$\mu_1 \mathbf{H}_{n1} = \mu_2 \mathbf{H}_{n2} \quad (2-25d)$$

ในที่นี้ ครรชนีล่าง t หมายถึงสนามในทิศแนวสัมผัสกับรอยต่อ และครรชนีล่าง n หมายถึงสนามในแนวตั้งฉากกับรอยต่อ ครรชนีล่าง 1 และ 2 หมายถึงชั้นของตัวกลาง 1 หรือ 2



รูปที่ 2-7 แสดงตัวอย่างการกำหนดตัวแปรไม่ทราบค่าสำหรับท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมกลวงที่มีผนังขอบเขตเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

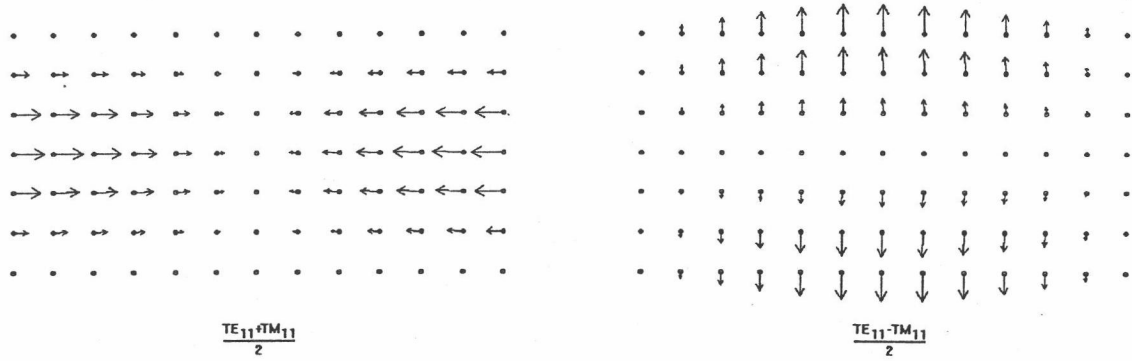
ในรูปที่ 2-7 แสดงตัวอย่างการให้ค่าเงื่อนไขขอบเขตสำหรับท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมอันหนึ่ง ที่ผนังขอบเขตของท่อนำคลื่นเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบและวางตัวอยู่ในแนวแกน x และแกน y โดยจะกำหนดตัวแปรไม่ทราบค่าของส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามแนวแกน คือ E_x , E_y , H_x และ H_y บางตัวให้เป็น 0 เพื่อให้สอดคล้องกับสมการ (2-24)

ผู้ศึกษาในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและทำการคำนวณตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่เสนอโดย W.C. Chew และ M.A. Nasir [5] นี้ เมื่อนำมาใช้แล้วพบว่า มีข้อดี คือ

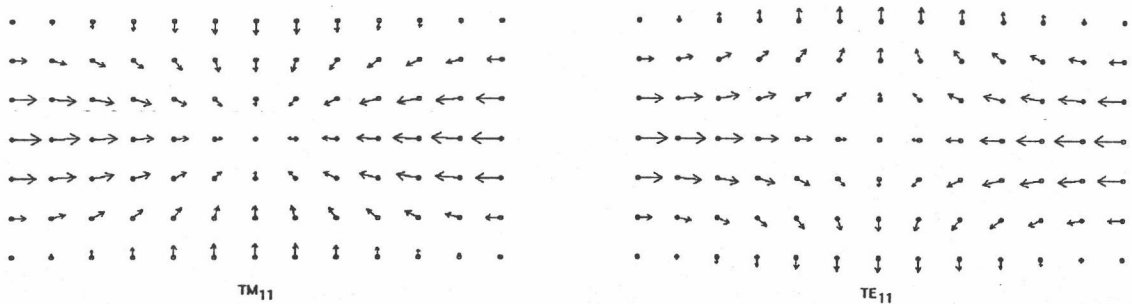
1. การใช้ส่วนประกอบของสนามในแนวขวาง 2 ส่วนประกอบ ทำให้มีตัวแปรไม่ทราบค่าเป็น $\frac{2}{3}$ ของวิธีที่ใช้ส่วนประกอบของสนามครบทั้ง 3 ส่วนประกอบ จึงใช้หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์น้อยกว่า

2. ไม่มีคำตอบ spurious mode ในชุดคำตอบค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจง แต่ก็พบว่ามีปัญหาในการนำไปใช้งาน 2 ข้อคือ

1. ผลการคำนวณสำหรับท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมกลวงตามวิธีนี้ จะให้คำตอบของค่าคงที่ของการส่งผ่านถูกต้อง แต่จะให้คำตอบสำหรับแพดเทิร์นของสนามไฟฟ้าในโหมด TE และ TM ที่มีค่าคงที่ของการส่งผ่านเท่ากัน (degeneration mode) ไม่ถูกต้อง คือจะรวมกันเป็นโหมดไฮบริด (hybrid mode) 2 โหมดที่มีแพดเทิร์นของสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวแกน x หรือ y อย่างใดอย่างหนึ่งแทน ตัวอย่างเช่น โหมด TE_{11} และ TM_{11} ซึ่งมีค่าคงที่ของการส่งผ่านเท่ากัน (degeneration mode) ผลการคำนวณจะให้ชุดคำตอบเวกเตอร์เจาะจง 2 ค่า ที่มีค่าเจาะจงเท่ากัน



(a)



(b)

รูปที่ 2-8 a) แสดงแพตเทิร์นของคลื่นที่คำนวณได้โดยวิธีของ W.C. Chew และ M.A. Nasir [5] เปรียบเทียบกับ b) แพตเทิร์นของคำตอบโดยวิธีเชิงวิเคราะห์

ซึ่งเมื่อนำมาพล็อตเพื่อดูแพตเทิร์นของสนามไฟฟ้า จะได้แพตเทิร์นเป็น $(TE_{11} + TM_{11})/2$ และ $(TE_{11} - TM_{11})/2$ ซึ่งมีสนามเรียงตัวในแนวแกน x เพียงอย่างเดียว และ y เพียงอย่างเดียว ตามลำดับ (ดูรูปที่ 2-8 แสดงการเปรียบเทียบกับแพตเทิร์นที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์)

2. การใช้การกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_x และ H_x โดยสมการ(2-19) และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตตามรูปที่ 2-7 ทำให้เกิดปัญหาเมื่อนำวิธีนี้ไปใช้กับท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นเส้นโค้ง เพราะเงื่อนไขขอบเขตของสนามไฟฟ้าที่ผนังท่อนำคลื่นประเภทนี้ไม่ได้มีทิศทางเฉพาะในแนวแกน x และ y เท่านั้น และคำตอบค่าคงที่ของการส่งผ่านมีค่าไม่ถูกต้อง ตัวอย่างเช่น ค่าตอบค่าคงที่ของการส่งผ่านในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นแบบวงกลม เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ตามที่แสดงในตาราง 2-1 ผลการคำนวณจากวิธี FEM จะให้คำตอบของค่าคงที่ในการส่งผ่านสำหรับโหมด TE_{11} , TM_{01} , TE_{21} ผิดพลาดไปจากคำตอบจากวิธีเชิงวิเคราะห์มาก เพราะไม่สามารถให้เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของท่อนำคลื่นแบบวงกลม ด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ได้

โหมด	คำตอบจากวิธี เชิงวิเคราะห์	คำตอบจากวิธี FEM	เปอร์เซ็นต์ ผิดพลาด
TE ₁₁	0.8878	0.7554	14.91
TM ₀₁	0.7991	0.6941	13.14
TE ₂₁	0.6457	0.4523	29.95

ตาราง 2-1 แสดงคำตอบค่าคงที่ของการส่งผ่าน β_z / k_0 ของวิธี FEM ที่ใช้การกระจายตัวประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ในการวิเคราะห์ที่อนาคลีนแบบวงกลมกลวง ที่ความถี่ที่ทำให้ $k_0 a = 4$ และแสดงเปอร์เซ็นต์ผิดพลาด

เมื่อพบปัญหาทั้ง 2 ข้อข้างต้นนี้ ผู้ศึกษาในงานวิจัยได้มีสมมุติฐานว่าควรจะนำฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์มาใช้สำหรับการกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและแม่เหล็กในแนวขวาง E_x และ H_x เพื่อแก้ปัญหา

2.3 แนวความคิดของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์

แนวความคิดของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์นั้นจะกระจายส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขวางด้วยเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ ที่มีทิศทางเหมาะสมกับการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต และไม่จำเป็นต้องอยู่ในทิศของแกน x หรือ y

รูปที่ 2-9 a) และ b) แสดงตัวอย่างการกระจายสนามไฟฟ้าในแนวขวางด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y และการกระจายด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ ตามลำดับสัมประสิทธิ์ u และ v เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย L_1 และ L_2 ตามลำดับ เวกเตอร์สนามไฟฟ้าในแนวขวาง E ที่มีส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ตามสมการ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y \quad (2-26)$$

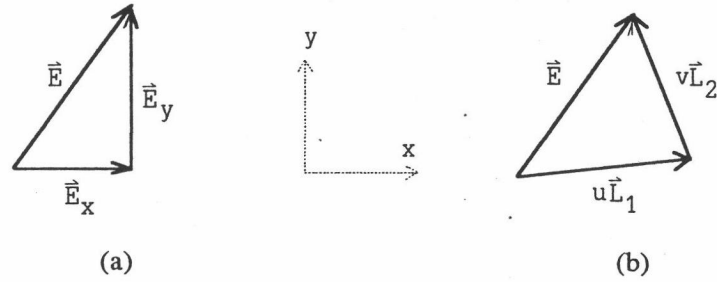
สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_1 และ L_2 ซึ่งไม่จำเป็นต้องมีทิศอยู่ในแนวแกน x หรือ y และสัมประสิทธิ์ u และ v ได้ตามสมการ

$$\mathbf{E} = u\mathbf{L}_1 + v\mathbf{L}_2 \quad (2-27)$$

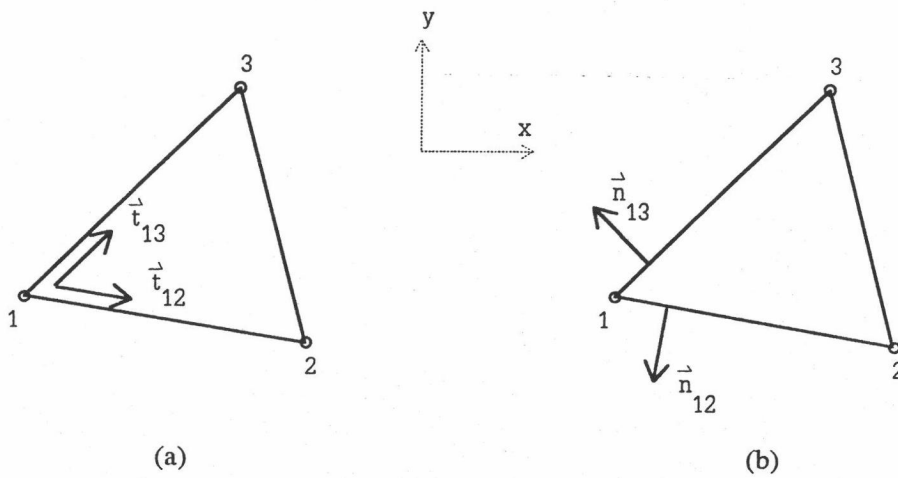
โดยสัมประสิทธิ์ u และ v จะมีค่าตามสมการ

$$u = \frac{\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{L}_2)}{\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2)} \quad (2-28a)$$

$$v = \frac{\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{L}_1)}{\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_1)} \quad (2-28b)$$



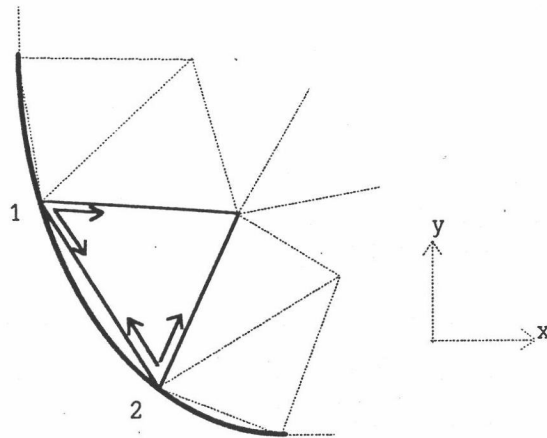
รูปที่ 2-9 แสดงตัวอย่างการกระจายส่วนประกอบของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าแนวขวาง E เวกเตอร์หนึ่ง a) เป็นการกระจายด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y b) เป็นการกระจายด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ที่มีทิศของเวกเตอร์ไม่อยู่ในแนวแกน x และ y



รูปที่ 2-10 แสดงการกระจายส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่โหนด 1 โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ โดย a) เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ที่มีทิศขนานกับด้านของอีลีเมนต์ และ b) เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ที่มีทิศตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์

การกระจายส่วนประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_1 และ L_2 ตามสมการ (2-26) และ (2-27) สามารถนำไปใช้แทนการกระจายส่วนประกอบด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ตามสมการ (2-19) ได้ ซึ่งการเลือกฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_1 และ L_2 ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สามารถเลือกได้จากเวกเตอร์ในแนวสัมผัสหรือเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์ตามที่แสดงในรูปที่ 2-10

รูปที่ 2-10 a) และ b) แสดงการกระจายเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่โหนด 1 ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ที่มีทิศขนานและตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์ตามลำดับ โดยในที่นี้ t_{12} และ t_{13} เป็นเวกเตอร์สัมผัสขนาดหนึ่งหน่วยของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 ตามลำดับ โดยมีทิศจากโหนด 1 ไป 2 และจากโหนด 1 ไป 3 ตามลำดับ n_{12} และ n_{13} เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศชี้ออกจากอีลีเมนต์ของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 ตามลำดับ



รูปที่ 2-11 แสดงอีลีเมนต์อันหนึ่งที่อยู่ติดกับผนังขอบเขตที่เป็นเส้นโค้ง และด้านของอีลีเมนต์
ไม่อยู่ในแนวแกน x หรือ y มีโหนด 1 และ 2 อยู่บนผนังขอบเขต สามารถกระจาย
ส่วนประกอบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนโหนด 1 และ 2 ได้ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์

การใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์นี้อาจจะสามารถแก้ปัญหาที่พบ 2 ข้อในหัวข้อ
2.2 ข้างต้นได้ โดยมีเหตุผลของสมมุติฐานดังนี้ คือ

1. ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์มีทิศทางของส่วนประกอบของเวกเตอร์อยู่ในทิศที่
สัมผัสหรือตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์ ซึ่งไม่จำเป็นต้องอยู่ในแนวแกน x หรือ y (รูปที่ 2-10) จะ
ให้จำนวนของทิศทางของส่วนประกอบของสนามที่ใช้ในการคำนวณ มากกว่าการกระจายด้วย
ส่วนประกอบตามแนวแกน x และ y ที่มีเพียง 2 ทิศทาง อาจสามารถแก้ไขทำให้แพดเทิร์นของ
สนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้อง ไม่เกิดการรวมแพดเทิร์นของโหมด TE และ TM
ที่มีค่าคงที่ของการส่งผ่านเท่ากัน แล้วให้แพดเทิร์นของสนามไฟฟ้าเรียงตัวอยู่เฉพาะในแนวแกน x
หรือ y อย่างที่พบในปัญหาข้อที่ 1

2. ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์มีทิศทางของส่วนประกอบของสนามปรับไปตามอี
ลีเมนต์ที่อยู่ตามขอบของท่อนำคลื่นที่มีขอบเป็นเส้นโค้งได้ (รูปที่ 2-11) โดยไม่จำเป็นต้องอยู่ใน
แนวแกน x หรือ y ซึ่งอาจจะแก้ปัญหาเกี่ยวกับเงื่อนไขขอบของท่อนำคลื่นที่มีขอบเป็นเส้นโค้งใน
ปัญหาข้อที่ 2 ได้