6

เซมิเนียร์ฟิลด์

นางสาวจันทนา หัตถโกศล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2527

ISBN 974-563-864-1

SEMINEAR-FIELDS

Miss Jantana Hattakosol

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1984

Thesis Title	Seminear-fields
By	Miss Jantana Hattakosol
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

....Dean of Graduate School

(Associate Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

Virool Boonyasombat ....Chairman

(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

...Yupaporn Kemprasit.....Member

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

...Sidney S. Mitchell...Member

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เซมิเนียร์ฟิลด์

ชื่อนิสิต นางสาวจันทนา หัตถโกศล

อาจารย์ที่ปรึกษา Dr. Sidney S. Mitchell

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2527

บทคัดย่อ

เซต S ที่ประกอบด้วยไบนารีโอเปอเรชัน + และ . จะเรียกว่าเป็น <u>เซมิเนียร์-ริง</u> ก็ต่อเมื่อ

(1) (S,+) เป็นเซมิกรุป

(2) (S,.) เป็นเซมิกรุป

(3) สำหรับทุกสมาชิก x, y, z ใน S $(x + y).z = x.z + y.z$

เซมิเนียร์-ริง (S,+,.) จะเรียกว่า <u>ดิวิชันเซมิเนียร์-ริง</u> ก็ต่อเมื่อ (S,.) เป็นกรุป

ถ้า (S,+,.) เป็นเซมิเนียร์-ริงและ $T \subseteq S$ แล้ว T จะเป็น <u>เซมิเนียร์-ริงย่อย</u> ของ S ก็ต่อเมื่อ (T,+,.) เป็นเซมิเนียร์-ริง เซมิเนียร์-ริงย่อย T จะเรียกว่าเป็น <u>ดิวิชันเซมิเนียร์-ริงย่อย</u> ก็ต่อเมื่อ T เป็นดิวิชันเซมิ-เนียร์-ริง

ให้ G เป็นกรุปและ G_1, G_2 เป็นกรุปย่อยของ G แล้ว G จะเรียกว่า <u>แซปปาเซปโปรดัก</u> ของ G_1 และ G_2 ก็ต่อเมื่อ $G = G_1G_2$ และ $G_1 \cap G_2 = \{1\}$ ถ้า G เป็นแซปปาเซปโปรดักของ G_1 และ G_2 เราจะใช้สัญลักษณ์ $G = G_1 * G_2$

เซมิกรุป S จะเรียกว่าเป็น <u>แบนด์</u> ก็ต่อเมื่อ $x^2 = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S แบนด์ S จะเรียกว่า <u>เรกแทงกลาร์แบนด์</u> ก็ต่อเมื่อ $xyx = x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y ใน S

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ (D,.) เป็นกรุปและ D_1, D_2 เป็นกรุปย่อยของ D ซึ่ง $D = D_1 * D_2$

แล้วจะมีไบนารีโอเปอเรชัน + บน D เพียงโอเปอเรชันเดียวเท่านั้นที่ทำให้

(1) $(D,+,.)$ เป็นคิวิชันเซมิเนียร์-ริง

(2) $x + y = x$ สำหรับทุกสมาชิก x, y ใน D_1

(3) $x + y = y$ สำหรับทุกสมาชิก x, y ใน D_2

(4) $D = D_1 + D_2$

(5) $D_2 + D_1 = \{1\}$

(จากข้อ(2)และ(3)จะได้ว่า D_1 และ D_2 เป็นคิวิชันเซมิเนียร์-ริงย่อยของ D) นอกจากนี้ยังได้ว่า $(D,+)$ เป็นเรกแทงกูลาร์แบนด์, $(D,+) \cong (D_1,+) \times (D_2,+)$ และกฎการกระจายทางซ้ายเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $D = D_1 \times D_2$ i.e. $D_1, D_2 \trianglelefteq D$

ในวิทยานิพนธ์นี้เราได้แสดงว่า ทุกๆคิวิชันเซมิเนียร์-ริงจำกัดมาจากการสร้างในทฤษฎีดังกล่าว

เซมิเนียร์-ริง $(K,+,.)$ จะเรียกว่าเป็น <u>เซมิเนียร์ฟิลด์</u> ก็ต่อเมื่อมีสมาชิก a ใน K ซึ่ง $a^2 = a$ และ $(K-\{a\},.)$ เป็นกรุป

<u>ทฤษฎีบท</u>ให้ $(K,+,.)$ เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ ที่มี a เป็นสมาชิกซึ่ง $a^2 = a$ และ $(K-\{a\},.)$ เป็นกรุป แล้วจะได้ว่า $ax = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K หรือ $ax = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K และ $xa = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K หรือ $xa = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

จากทฤษฎีจะได้ว่า มีเซมิเนียร์ฟิลด์ อยู่ 4 ชนิดคือ

(1) เซมิเนียร์ฟิลด์ที่ $ax = xa = a$ สำหรับทุกสมาชิก x

(2) เซมิเนียร์ฟิลด์ที่ $ax = xa = x$ สำหรับทุกสมาชิก x

(3) เซมิเนียร์ฟิลด์ที่ $ax = a$ และ $xa = x$ สำหรับทุกสมาชิก x

(4) เซมิเนียร์ฟิลด์ที่ $ax = x$ และ $xa = a$ สำหรับทุกสมาชิก x

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ $(K,+,.)$ เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ชนิดที่ 1 และ a เป็นสมาชิกใน K ซึ่ง $a^2 = a$ และ $(K-\{a\},.)$ เป็นกรุป แล้วจะได้ว่า $a + x = a$ สำหรับทุกสมาชิก x หรือ $a + x = x$ สำหรับทุกสมาชิก x และ $x + a = a$ สำหรับ

ทุกสมาชิก **x** หรือ **x + a = x** สำหรับทุกสมาชิก**x**

ให้ (K,+,.) เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ ไพร์มเซมิเนียร์ฟิลด์ ของ K คือเซมิเนียร์ฟิลด์ย่อยที่เล็กที่สุดของ K ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาทุกไพร์มเซมิเนียร์ฟิลด์ของเซมิเนียร์ฟิลด์จำกัด

Thesis Title	Seminear-fields
Name	Miss Jantana Hattakosol
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell
Department	Mathematics
Academic Year	1984

ABSTRACT

A triple $(S,+,.)$ is said to be a <u>seminear-ring</u> iff S is a set and $+$ and $.$ are binary operations on S such that

(1) $(S,+)$ is a semigroup,

(2) $(S,.)$ is a semigroup,

(3) $(x + y)z = xz + yz$ for all $x,y,z \in S$.

A seminear-ring $(D,+,.)$ is said to be a <u>division seminear-ring</u> iff $(D,.)$ is a group.

If $(S,+,.)$ is a seminear-ring and $T \subsetneq S$, then T is said to be a <u>subseminear-ring</u> of S iff $(T,+,.)$ is a seminear-ring.
A subseminear-ring of a seminear-ring is said to be a <u>division subseminear-ring</u> iff it is a division seminear-ring.

Let G be a group and G_1, G_2 subgroups of G. Then G is said to be a <u>Zappa-Szép product</u> of G_1 and G_2 iff $G = G_1G_2$ and $G_1 \cap G_2 = \{1\}$ where 1 is the identity of G. If G is a Zappa-Szép product of G_1 and G_2 we shall denote this by $G = G_1 * G_2$.

A semigroup S is said to be a <u>band</u> iff $x^2 = x$ for all $x \in S$
A semigroup S is said to be a <u>rectangular band</u> iff $xyx = x$

for all $x,\ y \in S$.

Theorem. Let $(D,.)$ be a group such that $D = D_1 * D_2$ for some $D_1, D_2 \leqslant D$. Then there exists a unique binary operation $+$ on D such that

(1) $(D,+,.)$ is a division seminear-ring,

(2) $x + y = x$ for all $x,\ y \in D_1$,

(3) $x + y = y$ for all $x,\ y \in D_2$,

(4) $D = D_1 + D_2$,

(5) $D_2 + D_1 = \{1\}$.

(Therefore, from (2) and (3) we see that D_1 and D_2 are division subseminear-rings of D.) Furthermore, $(D,+)$ is a rectangular band, $(D,+) \cong (D_1,+) \times (D_2,+)$ and the left distributive law holds iff $D = D_1 \times D_2$ i.e. $D_1,\ D_2 \trianglelefteq D$.

In this thesis we show that all finite division seminear-rings come from this construction.

A seminear-ring $(K,+,.)$ is said to be a seminear-field iff there exists an element a in K such that $a^2 = a$ and $(K \setminus \{a\},.)$ is a group.

Theorem. Let $(K,+,.)$ be a seminear-field and a the element in K s such that $a^2 = a$ and $(K \setminus \{a\},.)$ is a group. Then ($ax = a$ for all $x \in K$ or $ax = x$ for all $x \in K$) and ($xa = a$ for all $x \in K$ or $xa = x$ for all $x \in K$).

From this theorem we have four categories of seminear-fields, they are :

(I) $ax = xa = a$ for all x,

(II) $ax = xa = x$ for all x,

(III) $ax = a$ and $xa = x$ for all x,

(IV) $ax = x$ and $xa = a$ for all x.

<u>Theorem</u>. Let $(K,+,.)$ be a seminear-field of category I and a be the element in K such that $a^2 = a$ and $(K \setminus \{a\},.)$ is a group. Then ($a + x = a$ for all $x \in K$ or $a + x = x$ for all $x \in K$) and ($x + a = a$ for all $x \in K$ or $x + a = x$ for all $x \in K$).

Let $(K,+,.)$ be a seminear-field. Then the <u>prime seminear-field</u> of K is the smallest seminear-field contained in K. In this thesis we determine all prime seminear-fields of finite seminear-fields.

ACKNOWLEDGEMENT

I am grateful to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor, for the invaluable guidance considerately offered in the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of the lectures for their previous valuable lectures while studying.

In particular, deep gratitude and appreciation are shown to my beloved mother, father, brother and sister for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS