

One-Dimensional White Noise Model

Mr. Chaisingh Poo-rakkiat

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Physics

Graduate School

Chulalongkorn University

1981

I 15512538

แบบจำลองไวท์นอยล์หนึ่งมิติ



นาย ชัยสิงห์ ภูริรักษ์เกียรติ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาฟิสิกส์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๖๔

011722

Thesis Title      One-Dimensional White Noise Model  
By                      Mr. Chaisingh Poo-rakkiat  
Department        Physics  
Thesis Adviser    Professor Virulh Sa-yakanit

---

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in  
Partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

..... *S. Bunnag* ..... Dean of Graduate School  
(Associate Professor Supradit Bunnag, Ph.D.)

Thesis Committee

..... *Kitt Visoottivinth* ..... Chairman  
(Assistant Professor Kitt Visoottiviseth, Ph.D.)

..... *I. Ming Tang* ..... Member  
(I- Ming Tang, Ph.D.)

..... *Pisitha Ratanavararaksa* ..... Member  
(Assistant Professor Pisitha Ratanavararaksa, Ph.D.)

..... *V. Sa-yakanit* ..... Member  
(Professor Virulh Sa-yakanit, F.D.)

Thesis Title        One-Dimensional White Noise Model  
 Name                Mr. Chaisingh Poo-rakkiat  
 Thesis Adviser     Professor Virulh Sa-yakanit, F.D.  
 Department         Physics  
 Academic Year      1981

#### ABSTRACT

The one-dimensional white noise model is a simple problem of disordered systems for which an exact expression of the density of states exist. Halperin used the one-electron Green's function method to obtain the following exact asymptotic form for the density of states,

$$\rho_{as}(E) = \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp \left\{ -\frac{B(E)}{2\xi} \right\},$$

where the functions  $A(E)$  and  $B(E)$  are defined by

$$\begin{aligned} A(E) &= \frac{8}{\pi} \cdot (-E), \\ B(E) &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \cdot (-E)^{3/2}. \end{aligned}$$

However, the method of Halperin is not useful of handling the disordered phenomena in three-dimensional real systems. For this purpose, Halperin and Lax developed a theoretical method based on wave mechanics, and they found that as a first order approximation and a second order approximation, the density of states in the one-dimensional white noise model are given respectively as

$$\rho_1^{\text{HL}}(E) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp \left\{ -\frac{B(E)}{2\xi} \right\},$$

and

$$\rho_2^{\text{HL}}(E) = \frac{e^{13/18}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp \left\{ -\frac{B(E)}{2\xi} \right\}.$$

Recently Sa-yakanit used the path integral method to calculate the density of states for the one-dimensional white noise model. Using the first cumulant approximation, he found that

$$\rho_L(E) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} \cdot \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \cdot \frac{B(E)}{2\xi} \right\}.$$

In this thesis, we extend Sa-yakanit's work by treating the complete first cumulant, and find that

$$\rho_1(E) = e^{-1/2} \cdot \frac{4\sqrt{2\pi}}{6} \cdot \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \cdot \frac{B(E)}{2\xi} \right\}.$$

We have also calculated the second cumulant correction. The effect is to change the numerical factor in front of  $B(E)$  from  $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}$  to  $\left(\frac{3031}{3072}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} = 1.0097$ . A comparison of the present results with the results of Halperin and Lax is given.

หัวข้อวิทยานิพนธ์	แบบจำลองไวทน์น้อยสี่เหลี่ยม
ชื่อนิสิต	นายชัยสิงห์ ภู่วรรักษ์เกียรติ
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.วิรุพท์ สายคณิต
ภาควิชา	ฟิสิกส์
ปีการศึกษา	2524



บทคัดย่อ

แบบจำลองไวทน์น้อยสี่เหลี่ยม เป็นปัญหาของระบบที่ไร้ระเบียบ ที่มีลักษณะง่ายโดยสามารถหาความหนาแน่นของสถานะได้ถูกต้องแน่นอน ฮิลเปอรินได้ใช้วิธีกรีนส์ฟังก์ชันสำหรับอิเล็กตรอนหนึ่งตัวแก้ปัญหานี้ และพบว่ารูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นของสถานะในขีดจำกัดคอสมโพลิโทสามารถหาได้ถูกต้องแน่นอนดังนี้

$$\rho_{as}(E) = \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp \left\{ \frac{-B(E)}{2\xi} \right\}$$

โดยที่ฟังก์ชัน  $A(E)$  และ  $B(E)$  ได้กำหนดไว้ดังนี้

$$A(E) = \frac{8}{\pi} (-E)$$

$$B(E) = \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{m}} (-E)^{3/2}$$

แม้วิธีที่ฮิลเปอรินใช้นี้จะประสบความสำเร็จดีกับปัญหาไวทน์น้อยสี่เหลี่ยม แต่กลับไม่สามารถใช้ได้กับปัญหาที่เกิดจากปรากฏการณ์ของระบบที่ไร้ระเบียบในสามมิติ ดังนั้นเพื่อแก้ปัญหานี้ ฮิลเปอรินกับแลกซ์ ได้พัฒนาวิธีทางทฤษฎีขึ้นโดยอาศัยทฤษฎีกลศาสตร์เชิงคลื่น และพบว่าสำหรับการประมาณอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง ความหนาแน่นของสถานะของแบบจำลองไวทน์น้อยสี่เหลี่ยมสามารถหาได้ตามลำดับดังนี้

$$\rho_1^{HL}(E) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp\left\{-\frac{B(E)}{2\xi}\right\}$$

และ

$$\rho_2^{HL}(E) = \frac{e^{13/18}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp\left\{-\frac{B(E)}{2\xi}\right\}$$

เมื่อไม่นานมานี้ ศาสตราจารย์ ดร. วิรุฬห์ สายคณิตได้นำวิธีอินทิเกรตตามเส้นทางมาใช้คำนวณหาความหนาแน่นของสถานะสำหรับแบบจำลองไวทน์นอยส์หนึ่งมิตินี้ และพบว่า การคำนวณอย่างประมาณในคูมูแลนต์ที่หนึ่งให้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\rho_L(E) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6} \cdot \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{B(E)}{2\xi}\right\}$$

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ ได้ขยายการคำนวณของศาสตราจารย์ ดร. วิรุฬห์ สายคณิต ออกไปสู่การคำนวณที่เสร็จสมบูรณ์ในคูมูแลนต์ที่หนึ่ง และได้พบว่า

$$\rho_1(E) = e^{-1/2} \cdot \frac{4\sqrt{2\pi}}{6} \cdot \frac{A(E)}{2\xi} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{B(E)}{2\xi}\right\}$$

ทั้งยังได้แก้ไขความหนาแน่นของสถานะนี้ ให้ถูกต้องยิ่งขึ้นด้วยการประมาณในคูมูแลนต์ที่สองอีก และพบว่าตัวเลขที่อยู่ข้างหน้าฟังก์ชัน  $B(E)$  คือ  $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}$  เปลี่ยนไปเป็น  $\left(\frac{3031}{3072}\right) \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} = 1.0097$  ในการวิจัยนี้ได้เปรียบเทียบผลลัพธ์ ความหนาแน่นของสถานะที่ได้จากทฤษฎีของฮิลเปอรินกับแลกซ์ด้วย



### ACKNOWLEDGEMENTS

The author wishes to express his appreciation to Dr. Virulh Sa-yakanit for his advice, guidance and encouragement given throughout the course of investigation.

He would like to express his sincere thanks to Dr. I-Ming Tang for assistance in correcting the English manuscript, and to Dr. Preedeepon Limcharoen and Mr. Chai Hok Eab for their valuable advices.

Finally he would like to thank all colleagues at the department of Physics for their helps in various ways.



## TABLE OF CONTENTS

	page
ABSTRACT .....	iv
ACKNOWLEDGEMENTS .....	viii
LIST OF ILLUSTRATIONS .....	xi
LIST OF TABLES .....	xii
CHAPTER I EXACT RESULT IN ONE DIMENSION .....	1
1.1 Introduction .....	1
1.2 White Noise Model .....	1
1.3 One-Dimensional White Noise Model .....	1
1.4 Density of States .....	2
1.5 Exact Asymptotic Result .....	2
1.6 Approximate Density of States .....	3
CHAPTER II WAVE MECHANICS METHOD .....	6
2.1 Introduction .....	6
2.2 One-Dimensional Model .....	6
2.3 First Order Approximation .....	7
2.4 Gaussian Statistics .....	10
2.5 One-Dimensional White Noise Model .....	12
2.6 Second Order Approximation .....	15
CHAPTER III PATH INTEGRAL METHOD .....	18
3.1 Introduction .....	18
3.2 Density of States .....	18



3.3	Gaussian Random Model .....	19
3.4	Sa-yakanit's Theory .....	24
3.5	First Cumulant Approximation .....	27
CHAPTER IV SECOND CUMULANT CORRECTION .....		32
4.1	Introduction .....	32
4.2	Leading Term Approximation in First Cumulant	32
4.3	Correction to the Density of States .....	35
4.4	Complete First Cumulant .....	38
4.5	Second Cumulant Correction .....	41
CHAPTER V CONCLUSION .....		46
5.1	Summary .....	46
5.2	Discussion .....	48
5.3	Conclusion .....	52
APPENDIX A EVALUATION OF $G_0(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t)$ .....		58
APPENDIX B EVALUATION OF $S'_{o,cl}$ .....		60
APPENDIX C INTEGRAL FORM OF $\langle S^n \rangle$ .....		62
APPENDIX D EVALUATION OF THE INTEGRAL IN $\langle S \rangle$ .....		66
APPENDIX E EVALUATION OF THE $\Delta$ -INTEGRALS .....		68
APPENDIX F LLOYD-BEST VARIATIONAL PRINCIPLE .....		71
REFERENCES .....		76

LIST OF ILLUSTRATIONS

page

Figure 5.1    Density of States for One-Dimensional White Noise  
Model ..... 55

## LIST OF TABLES

Table 5.1	The Percentage Errors of the Numerical Factors in Front of the Exponential Term and in the Exponent for the Corresponding Density of States.....	49
Table 5.2	Numerical Results of the Corresponding Density of States.....	57