บทที่ 2

การตั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. สมมติฐาน

ในการเขียนสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลเพื่อแก้ปัญหาหลังคาเปลือกบางรูปไฮเปอร์โบลิคพาราโบลอยด์แบบตื้น มีข้อสมมติฐานสำหรับเปลือกบางแบบตื้นดังต่อไปนี้

1. เปลือกบางมีความหนาน้อยมาก
2. มีดีเฟล็คชันน้อย (deflection)
3. ความเค้นในแนวตั้งฉากกับผิวเปลือกบางมีค่าน้อย
4. เส้นตั้งฉากกับระนาบของเปลือกบางยังคงเป็นเส้นตั้งฉากและความยาวไม่เปลี่ยนแปลงระหว่างที่ถูกแรงกระทำ
5. ความชันของผิวเปลือกบางมีค่าน้อย
6. ความโค้งของผิวเปลือกบางมีค่าน้อย
7. ความโค้งหลัก (principal curvatures) ของเปลือกบางมีค่าคงที่

2. สมการของการสมดุลย์

ในรูปที่ 1 แสดงถึงเปลือกบางชิ้นเล็กๆที่อยู่ภายใต้แรงและโมเมนต์ ฟลูกกี้ [1] ได้เขียนสมการของการสมดุลย์ของเปลือกบางดังนี้

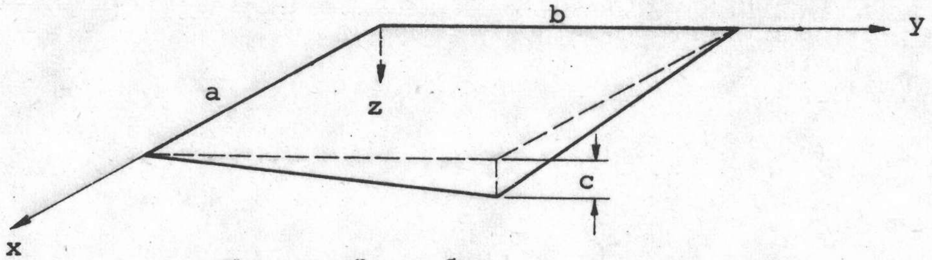
$$N_{x,x} + N_{yx,y} - Q_x z_{,xx} - Q_y z_{,xy} + q_1 = 0 \qquad (1)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} - Q_x z_{,xy} - Q_y z_{,yy} + q_2 = 0 \qquad (2)$$

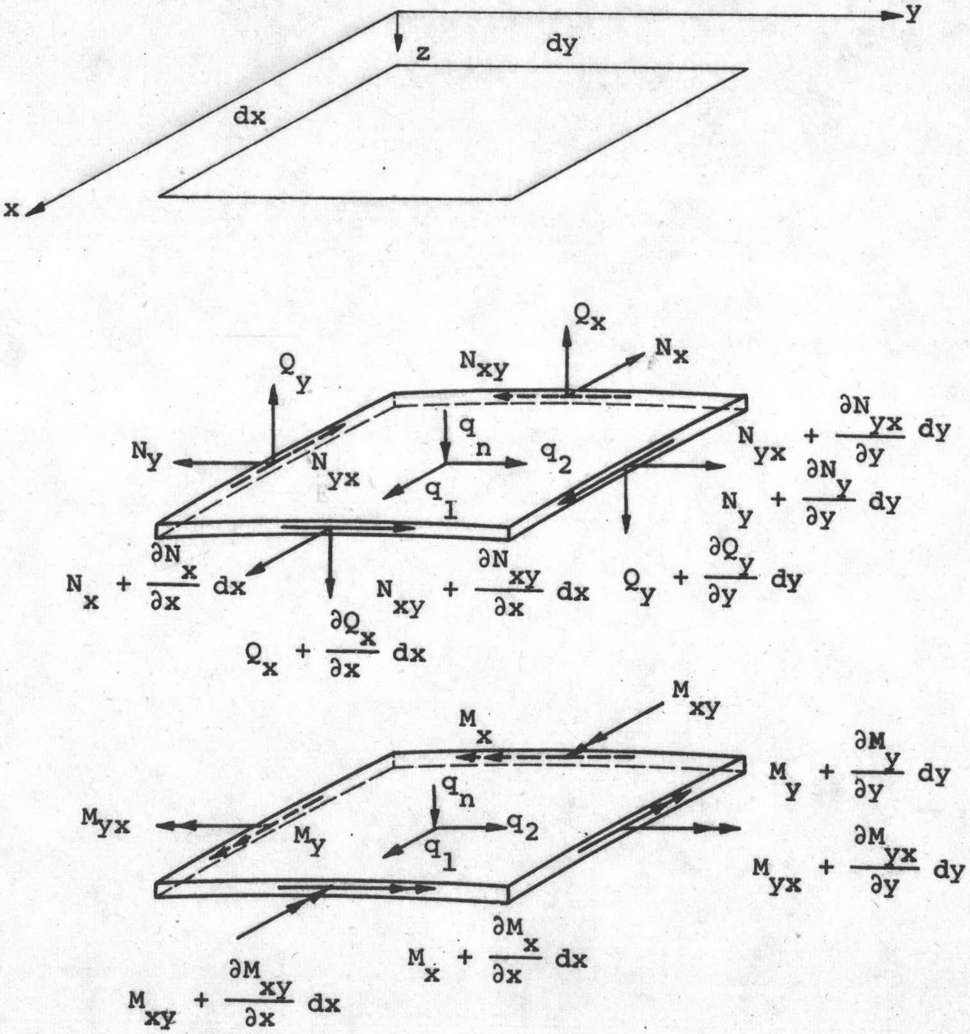
$$N_x z_{,xx} + 2N_{xy} z_{,xy} + N_y z_{,yy} + Q_{x,x} + Q_{y,y} + q_n = 0 \qquad (3)$$

---

[1] Flügge, W. "Stresses in Shells" (Berlin: Springer-Verlag, 1973) p 416



เปลือกบางรูปไฮเปอร์โบลิคพาราโบลอยด์ $z = \frac{c}{ab}\,xy$



รูป 1 สเตรสรีซัลแต้นท์และสเตรสคัปเปิล

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \quad (4)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0 \quad (5)$$

สมการ (1) - (5) นี้ ได้ตัด $(z_{,x})^2$, $(z_{,x})(z_{,y})$, $(z_{,y})^2$ ทิ้งไปตามสมมติฐานข้อ 5 เนื่องจากมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับหนึ่ง

2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด

จากวิชาความแข็งแรงของวัสดุ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดดังนี้

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

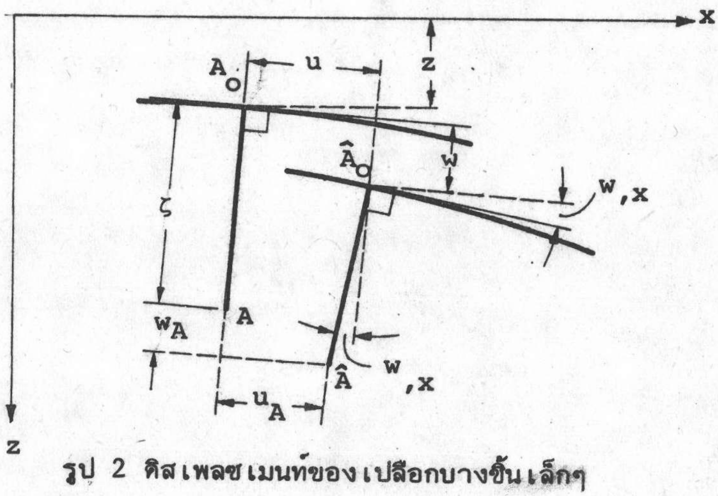
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad (6\ ก - ฉ)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับดิสเพลซเมนท์ (displacement)



รูป 2 ดิสเพลซเมนท์ของเปลือกบางชิ้นเล็กๆ

พิจารณาจุด A_o ซึ่งอยู่บนมิดเดิลเซอร์เฟส (middle surface) และมี A_oA เป็นเส้นตั้งฉากกับเซอร์เฟสยาว ζ ระหว่างที่ถูกแรงกระทำ จุด A_o และจุด A เลื่อนไปอยู่ที่ $\hat{A}_o$ และ $\hat{A}$ ตามลำดับ จากรูป 2 บนระนาบ y =คงที่ เราจะได้ดิสเพลซเมนท์ของจุด A เป็น

$$u_A = u - w_{,x}\zeta \qquad (7ก)$$

ในทำนองเดียวกัน บนระนาบที่ขนานกับแกน y และ z เราจะได้

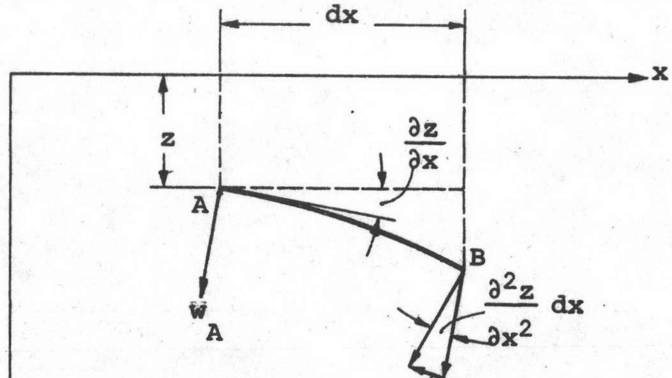
$$v_A = v - w_{,y}\zeta \qquad (7ข)$$

และ

$$w_A = w \qquad (7ค)$$

บนเซอร์เฟส ζ = คงที่ซึ่งขนานกับมิดเดิลเซอร์เฟส ให้ ε_x และ ε_y เป็นความยาวที่เปลี่ยนไปของ dx และ dy และ γ_{xy} เป็นมุมที่เปลี่ยนไประหว่างมุมของ dx กับ dy ซึ่ง ค่าความเครียดเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของดิสเพลซเมนท์ u_A, v_A และ w_A ได้ดังเช่นในวิชาความแข็งแรงของวัสดุ แต่ในกรณีนี้จะมีความเครียดเพิ่มขึ้นอีกเนื่องจากความโค้งของ dx และ dy

พิจารณาจากรูป 3 เนื่องจาก AB มีความโค้ง เส้นตั้งฉากที่ปลายจะทำมุม $(\partial^2 z/\partial x^2)dx$



รูป 3 ผลของ w ต่อความเครียด

ในระนาบ xz ดังรูป 3 และมีดิสเพลซเมนท์ไปในทิศทางลบของ u_A และอีกส่วนหนึ่งในทิศทางลบของ v_A มีค่า $w_A(\partial^2 z/\partial y\partial x)dx$ ซึ่งเกิดจากการบิดของเปลือกบาง ในทำนองเดียวกันก็จะเกิดลักษณะเช่นนี้ที่ปลายของ dy ดังนั้นเราจึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับดิสเพลซเมนท์เป็น

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{A,x} - w_A z_{,xx} \\ \varepsilon_y &= v_{A,y} - w_A z_{,yy} \end{aligned} \qquad (8ก - ข)$$

$$\gamma_{xy} = u_{A,y} + v_{A,x} - 2w_A z_{,xy} \qquad (8ค)$$

แทนค่า u_A, v_A และ w_A จากสมการ (7ก - ค) ลงในสมการ (8ก - ค) จะได้

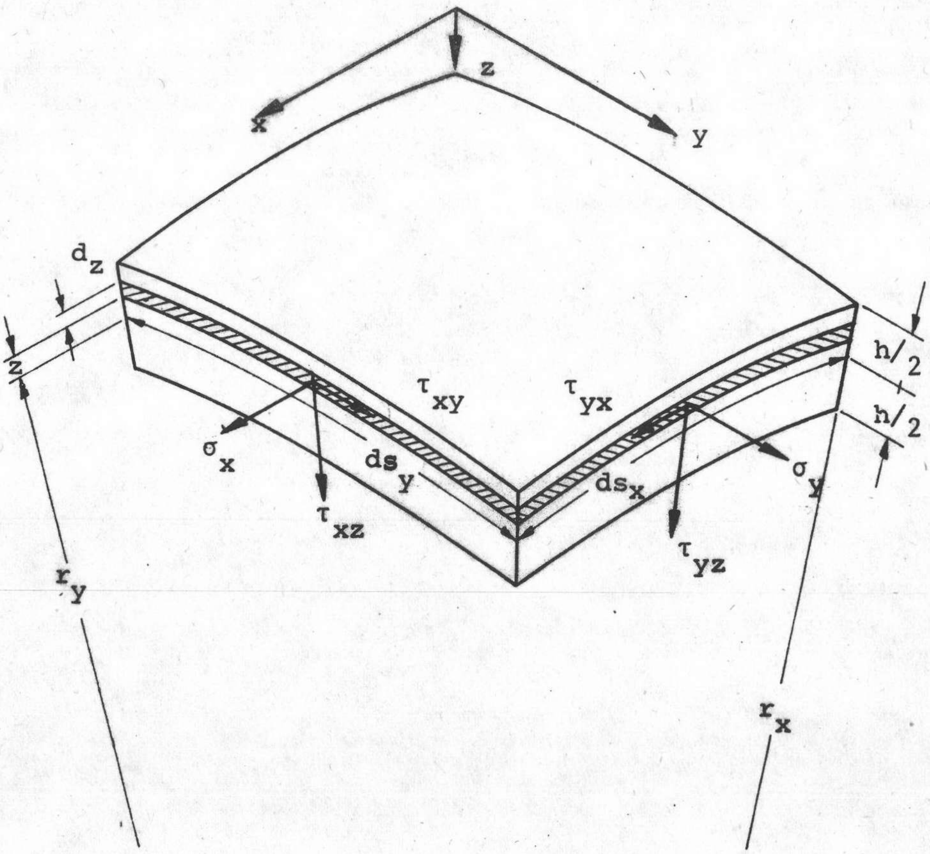
$$\varepsilon_x = u_{,x} - w_{,xx}\zeta - wz_{,xx}$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - w_{,yy}\zeta - xz_{,yy} \qquad (9ก - ค)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2w_{,yy}\zeta - 2wz_{,xy}$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับดิสเพลซเมนท์ของเปลือกบางแบบตื้น

2.3 สเตรสรีซัลแต้นท์และสเตรสคัปเปิล



รูป 4 ความเค้นที่กระทำกับเปลือกบางชิ้นเล็กๆ

จากรูป 4 สเตรสรีซัลแต้นท์และสเตรสคัปเปิลของเปลือกบางคือ

$$
\begin{aligned}
N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x (r_y + z)/r_y \, dz \\
N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y (r_x + z)/r_x \, dz \\
N_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} (r_y + z)/r_y \, dz \\
Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} (r_y + z)/r_y \, dz \\
Q_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} (r_x + z)/r_x \, dz \\
M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x (r_y + z)/r_y \, z \, dz \\
M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y (r_x + z)/r_x \, z \, dz \\
M_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} (r_y + z)/r_y \, z \, dz
\end{aligned}
\qquad (\text{ 10ก - ซ })
$$

โดยสมมติฐานข้อ 1 จะตัด z/r ทิ้ง เนื่องจากมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับหนึ่ง จากนั้นแทนค่า σ และ τ จากสมการ (6ก - ค) ลงในสมการ (10ก - ซ) แล้วอินทิเกรต (integrate) จะได้

$$
\begin{aligned}
N_x &= K\{ u_{,x} + \nu v_{,y} - (z_{,xx} + \nu z_{,yy}) w \} \\
N_y &= K\{ v_{,y} + \nu u_{,x} - (z_{,yy} + \nu z_{,xx}) w \} \\
N_{xy} &= K \frac{(1-\nu)}{2} \{ u_{,y} + v_{,x} - 2z_{,xy} w \} \\
M_x &= -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\
M_y &= -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\
M_{xy} &= -D (1 - \nu) w_{,xy}
\end{aligned}
\qquad (\text{ 11ก - ฉ })
$$

โดยที่

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

ในกรณีของเปลือกบางแบบตื้น จากสมมติฐานข้อ 5 และ 6 สมการของการสมดุลย์ (1) และ (2) จะกลายเป็น

$$N_{x,x} + N_{xy,y} + q_1 = 0 \qquad (12)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} + q_2 = 0 \qquad (13)$$

แทนค่า N_x , N_y และ N_{xy} จากสมการ (11ก - ค) ลงในสมการ (12) และ (13)ได้

$$K(u_{,xx} + \nu v_{,xy} - w_{,x}z_{,xx} - \nu w_{,x}z_{,yy}) + K\frac{(1-\nu)}{2}(u_{,yy} + v_{,xy} - 2w_{,y}z_{,xy}) + q_1 = 0 \qquad (14)$$

$$K(v_{,yy} + \nu u_{,xy} - w_{,y}z_{,yy} - \nu w_{,y}z_{,xx}) + K\frac{(1-\nu)}{2}(v_{,xx} + u_{,xy} - 2w_{,x}z_{,xy}) + q_2 = 0 \qquad (15)$$

แก้สมการ (14) และ (15) หาค่า u และ v ให้อยู่ในเทอมของ w ได้

$$\nabla^4 u = (z_{,xx} + \nu z_{,yy})w_{,xxx} - 2\nu z_{,xy}w_{,xxy} + \{(\nu + 2)z_{,xx} - z_{,yy}\}w_{,xyy} + 2z_{,xy}w_{,yyy} - \frac{1}{K}q_{1,xx} + \frac{(1+\nu)}{K(1-\nu)}q_{2,xy} - \frac{2}{K(1-\nu)}q_{1,yy} \qquad (16)$$

$$\nabla^4 v = -(z_{,yy} + \nu z_{,xx})w_{,yyy} - 2\nu z_{,xy}w_{,xyy} + \{(z_{,xx} + (\nu + 2)z_{,yy}\}w_{,xxy} + 2z_{,xy}w_{,xxx} - \frac{1}{K}q_{2,yy} + \frac{(1+\nu)}{K(1-\nu)}q_{1,xy} - \frac{2}{K(1-\nu)}q_{2,xx} \qquad (17)$$

ในกรณีที่เปลือกบางมีสมการออเดอร์ (order) สอง เช่นสมการของเปลือกบางรูปไฮเปอร์โบลิคพาราโบลอยด์ สมการ (16) และ (17) จะลดรูปลงเป็น

$$\nabla^4 u = 2k\,(w_{,yyy} - \nu w_{,xxy}) \qquad (18)$$

$$\nabla^4 v = 2k\,(w_{,xxx} - \nu w_{,xyy}) \qquad (19)$$

โดยที่

$$k = z_{,xy}$$

จากสมการ (11ก - ข) ให้

$$A = (z_{,xx} + \nu z_{,yy})$$

$$B = (z_{,yy} + \nu z_{,xx})$$

ดังนั้น

$$N_x = K\,(u_{,x} + \nu v_{,y} - Aw) \qquad (20\text{ก})$$

$$N_y = K (v_{,y} + \nu u_{,x} - Bw) \qquad (20ข)$$

แทนค่า u และ v จากสมการ (18) และ (19) ลงในสมการ (20ก - ข) และ(11ค) แล้วแก้สมการหาค่า N_x , N_y และ N_{xy} ในเทอมของ w จะได้

$$N_x = 2Ehk\,\nabla^{-4}w_{,xyyy} - \frac{Eh}{1-\nu^2} Aw$$

$$N_y = 2Ehk\,\nabla^{-4}w_{,xxxy} - \frac{Eh}{1-\nu^2} Bw \qquad (21ก - ค)$$

$$N_{xy} = -2Ehk\,\nabla^{-4}w_{,xxyy}$$

รวมสมการ (3) , (4) และ (5) เข้าด้วยกัน จะได้

$$N_x z_{,xx} + 2N_{xy} z_{,xy} + N_y z_{,yy} + M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + q_n = 0 \qquad (22)$$

สำหรับเปลือกบางที่มีสมการออเดอร์สอง $z_{,xx}$ และ $z_{,yy}$ จะมีค่าคงที่ ดังนั้นให้

$$H = z_{,xx} \quad \text{และ} \quad I = z_{,yy} \qquad (23ก - ข)$$

แทนค่า N_x , N_y และ N_{xy} จากสมการ (21ก - ค) M_x, M_y และ M_{xy} จากสมการ (11ง - ฉ) และ H, I จากสมการ (23ก - ข) ลงในสมการ (22) ได้

$$2EhkH\,\nabla^{-4}w_{,xyyy} - \frac{Eh}{1-\nu^2} AHw - 4Ehk^2\,\nabla^{-4}w_{,xxyy} + 2EhkI\,\nabla^{-4}w_{,xxxy}$$
$$- \frac{Eh}{1-\nu^2} AIw - D\nabla^4 w + q_n = 0$$

โอเปอร์เรท (operate) ด้วย ∇^4

$$D\,\nabla^8 w - 2EhkHw_{,xyyy} - 2EhkIw_{,xxxy} + \frac{Eh}{1-\nu^2} AH\,\nabla^4 w + \frac{Eh}{1-\nu^2} AI\,\nabla^4 w$$
$$+ 4Ehk^2 w_{,xxyy} = \nabla^4 q_n$$

ในกรณีของเปลือกบางแบบพื้นรูปไฮเปอร์โบลิคพาราโบลอยด์

$$H = I = 0$$

ดังนั้นสมการจะเหลือเพียง

$$D\,\nabla^8 w + 4Ehk^2 w_{,xxyy} = \nabla^4 q_n$$

$$\nabla^8 w + \frac{4Ehk^2}{D} w_{,xxyy} = \frac{\nabla^4 q_n}{D}$$

000662

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\nabla^8 w + \alpha\, w_{,xxyy} = \frac{\nabla^4 q_n}{D} \qquad (24)$$

โดยที่

$$\alpha = \frac{4Ehk^2}{D}$$

สมการ (24) เป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลของเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮเปอร์โบลิคพาราโบลอยด์ที่ได้รวมเอาความเค้นตัดเข้าไปด้วยแล้ว ซึ่งจะได้แก้สมการนี้ในบทต่อไป