บทที่ 2

ทฤษฎีเกี่ยวกับไมโครเวฟ

ไมโครเวฟ คือ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่อยู่ในช่วง 10^9-10^{12} รอบต่อวินาที การคำนวณต่าง ๆ เกี่ยวกับไมโครเวฟได้แสดงในหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้

2.1 สมการของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่น[8]

จากสมการของแมกซ์เวล ถ้าไม่คำนึงถึงต้นกำเหนิดคลื่น และตัวกลางเป็นสูญญากาศแล้ว จะเขียนได้ว่า

$$\bar{\nabla}.\bar{D} = 0 \qquad (2.1.1)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad (2.1.2)$$

$$\bar{\nabla}.\bar{B} = 0 \qquad (2.1.3)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad (2.1.4)$$

โดยที่ $\bar{D}$ คือ การขจัดทางไฟฟ้า (electric displaciment), $\bar{E}$ คือ สนามไฟฟ้า, $\bar{B}$ คือ เส้นแรงแม่เหล็กต่อหน่วยพื้นที่, $\bar{H}$ เป็นความเข้มของสนามแม่เหล็ก นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{D}$ กับ $\bar{E}$ และ $\bar{B}$ กับ $\bar{H}$ อีกโดย

$$\bar{D} = \epsilon_o \bar{E} \qquad (2.1.5)$$

$$\bar{B} = \mu_o \bar{H} \qquad (2.1.6)$$

ซึ่ง ϵ_o คือ เปอมิตติวิตี (permittivity) ของสูญญากาศมีค่าเท่ากับ 8.854×10^{-12} คูลอมบ์/(นิวตัน-เมตร^2) และ μ_o คือ เปอมีอบิลิตี (permeability) ของสูญญากาศมีค่าเท่ากับ $4\pi \times 10^{-7}$ เฮ็นรี่/เมตร ถ้ากำหนดให้คลื่นแผ่ (propagate) ไปในทิศ z ก็จะทำให้เขียนสนามไฟฟ้า ($\bar{E}$) และสนามแม่เหล็ก ($\bar{H}$) ได้ตามลำดับ ดังนี้

$$\bar{E}(x,y,Z,t) = \bar{E}_t(x,y,Z,t) + \bar{E}_z(x,y,Z,t)$$
$$= (\bar{\ell}(x,y) + \bar{\ell}_z(x,y))\,\ell^{j(wt - \beta Z)} \quad (2.1.7)$$

$$\bar{H}(x,y,Z,t) = \bar{H}_t(x,y,Z,t) + \bar{H}_z(x,y,Z,t)$$
$$= (\bar{h}(x,y) + \bar{h}_z(x,y))\,\ell^{j(wt - \beta Z)} \quad (2.1.8)$$

โดยที่ β เป็นตัวประกอบการแผ่ (propagation factor) และ w เป็นความถี่เชิงมุม (angalar frequency) ของคลื่น จากสมการ (2 1.5) ถึง (2.1.8) โดยใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ ทำให้เขียนสมการ (2.1.1) ถึง (2.1.4) ได้เป็น

$$\bar{\nabla}_t \cdot \bar{h} = j\beta\, h_z \quad (2.1.9)$$

$$\bar{\nabla}_t \cdot \bar{\ell} = j\beta\, \ell_z \quad (2.1.10)$$

$$\bar{\nabla}_t \times \bar{\ell} = -jw\,\mu_o \bar{h}_z \quad (2.1.11)$$

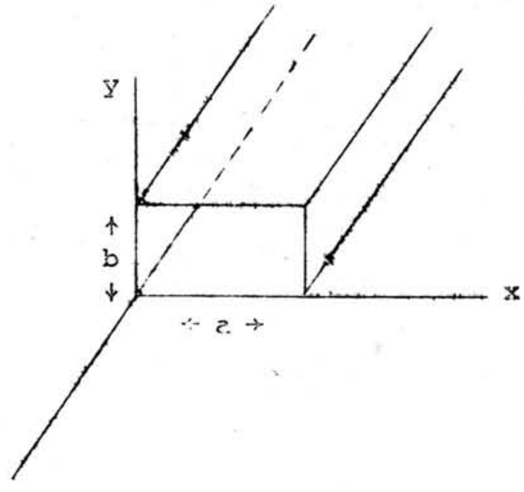
$$\bar{\nabla}_t \times \bar{h} = jw\,\varepsilon_o \bar{\ell}_z \quad (2.1.12)$$

$$\hat{a}_Z \times \bar{\nabla}_t \cdot \bar{\ell}_z + j\beta \hat{a}_z \times \bar{\ell} = jw\mu_o \bar{h} \quad (2.1.13)$$

$$\hat{a}_Z \times \bar{\nabla}_t h_Z + j\beta\, \hat{a}_Z \times \bar{h} = -jw\varepsilon_o \bar{\ell} \quad (2.1.14)$$

โดย $$\bar{\nabla}_t = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}$$

ถ้าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่พิจารณาเป็นแบบสนามไฟฟ้าตามขวาง (tranverse electric mode) คือ ไม่มีสนามไฟฟ้าในแนวการแผ่ของลื่น เรียกย่อ ๆ ว่า โมด TE และคลื่นนี้แผ่ไปในท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยม (rectangular wave guide) ดังในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยม

ในกรณีเช่นนี้ เมื่อพิจารณาสมการ (2.1.2) จะได้ว่า

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E} \qquad \frac{-\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \times \bar{B})$$

ดังนั้น จากสมการ (2.1.1), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) และ (2.1.7) ทำให้สมการข้างบนเป็น

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu_o \varepsilon_o \bar{E} = 0$$

ถ้ากำหนดให้ $k_o^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o$ ..... (2.1.15)

จะได้ว่า $\nabla^2 \bar{E} + k_o^2 \bar{E} = 0$ ..... (2.1.16)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาจากสมการ (2.1.4) ก็จะได้ว่า

$$\nabla^2 \bar{H} + k_o^2 \bar{H} = 0 \qquad \text{.....} \quad (2.1.17)$$

โดยเหตุที่กำลังพิจารณา โมด TE ซึ่งมีเงื่อนไขต่าง ๆ คือ

$$\ell_z = 0, \ \bar{h}_z \neq 0, \ \bar{\ell} \neq 0, \ \bar{h} \neq 0$$

จึงทำให้สมการ (2.1.17) กลายเป็น

$$(\nabla_t^2 - \beta^2)(\bar{h} + \bar{h}_z) + k_o^2 (\bar{h} + \bar{h}_z) = 0$$

ซึ่งสมการนี้จะเป็นจริงได้เมื่อ

$$\nabla_t^2 \bar{h} + k_c^2 \bar{h} = 0 \qquad (2.1.18)$$

$$\nabla_t^2 \bar{h}_z + k_c^2 \bar{h}_z = 0 \qquad (2.1.19)$$

โดยกำหนดให้ $k_c^2 = k_o^2 - \beta^2$ (2.1.20)

จากการแก้สมการ (2.1.19) โดยวิธีแยกตัวแปรแล้ว จะทำให้ได้ว่า

$$h_z(x,y) = (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x)(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) \qquad (2.1.21)$$

พิจารณาสมการ(2.1.12) ในกรณี โมด TE จะได้เป็น

$$\bar{\nabla}_t \times \bar{h} = 0$$

โดยอาศัยสมการ(2.1.9) และ (2.1.18) จะทำให้ได้ว่า

$$j\beta \bar{\nabla}_t h_z + k_c^2 \bar{h} = 0$$

หรือ

$$\bar{h} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \bar{\nabla}_t h_z \qquad \ldots\ldots (2.1.22)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (2.1.21) เทียบกับ x และ y โดยใช้เงื่อนไขที่ว่าสนามแม่เหล็กที่ผิวโลหะเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$A_2 = B_2 = 0 \qquad (2.1.23)$$

$$k_x = n\pi/a \ , \ n = 0,1,2,\ldots \qquad (2.1.24)$$

$$k_y = m\pi/a \ , \ m = 0,1,2,\ldots \qquad (2.1.25)$$

ดังนั้น $h_z = (A_1 \cos \frac{n\pi x}{a})(B_1 \cos \frac{m\pi y}{b})$

หรือ $h_z = Anm \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \qquad \ldots (2.1.26)$

และจากสมการ (2.1.20) ได้ว่า

$$k_{c.nm}^2 = \frac{n\pi}{a}^2 + \frac{m\pi}{b}^2 \qquad (2.1.27)$$

คลื่นไฟฟ้าตามขวางที่ง่ายที่สุด คือ โมดที่มี $n = 1$ และ $m = 0$ เรียกว่า โมด TE_{10} ซึ่งจากสมการ (2.1.26), (2.1.27) และ (2.1.20) จะได้ว่า

$$h_z = A_{10} \cos (\pi x/a) \qquad (2.1.28)$$

$$k_c = \pi/a \qquad (2.1.29)$$

$$\beta = \left[k_o^2 - (\pi/a)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1.30)$$

สำหรับ โมด TE โดยทั่วไป ส่วนนี้ขึ้นกับ z ของคลื่นไมโครเวฟ คือ $\ell^{j\beta z}$ ถ้ากำหนด r_{nm} โดย

$$r_{nm} = j\beta_{nm}$$

จากสมการ (2.1.20) จะได้ว่า

$$r_{nm} = j(k_o^2 - k_{c,nm}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1.31)$$

ดังนั้น ถ้า k_o มากกว่า $k_{c,nm}$ จะได้ βnm เป็นค่าจริง นั่นคือ คลื่นสามารถแผ่ออกไปตามท่อนำคลื่นได้ แต่ถ้า k_o น้อยกว่า $k_{c,nm}$ จะได้ β_{nm} เป็นค่าจินตภาพ และ r_{nm} เป็นค่าจริง และตัวประกอบการแผ่ คือ $\ell^{-r_{nm}z}$ ก็จะทำให้โมดมีการลดลงอย่างรวดเร็ว จึงไม่มีคลื่นแผ่ไปในท่อนำคลื่น จึงพอสรุปได้ว่า คลื่นไมโครเวฟที่สามารถเคลื่อนที่ไปในท่อนำคลื่นได้นั้นจะต้องมีความถี่ที่ทำให้เลขคลื่น (wave number) ของมันมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ k_c ซึ่งเรียกว่าเลขคลื่นตัดขาด (cut off wave number) และเรียกความถี่ที่ตรงกับ k_c ความถี่ตัดขาด (cut off frequency, $f_{c,nm}$)

สมการ (2.1.1) ถึง (2.1.6) นั้นใช้ได้กับตัวกลางที่เป็นสูญญากาศเท่านั้น ถ้าตัวกลางเป็นสารที่ดูดกลืนสนามแม่เหล็กแล้ว สมการ (2.1.4) จะกลายเป็น

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad (2.1.32)$$

โดย $J = \sigma E$

ซึ่ง σ เป็นสภาพนำ (conductivity) และ ε เป็นเปอมิตติวิตี ของตัวกลาง เนื่องจากส่วนที่ขึ้นกับเวลา ของทั้ง E และ H เป็น $\ell^{j\omega t}$ หรือเขียนได้ว่า

$$H = H_o \ell^{j\omega t}$$

$$E = E_o \ell^{j\omega t}$$

ดังนั้นสมการ (2.1.32) กลายเป็น

$$\nabla \times H = \sigma E_o + j\omega\varepsilon E_o$$

$$= j\omega \left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right) E_o$$

กำหนดให้ $\varepsilon = \varepsilon'$

และ $\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon''$

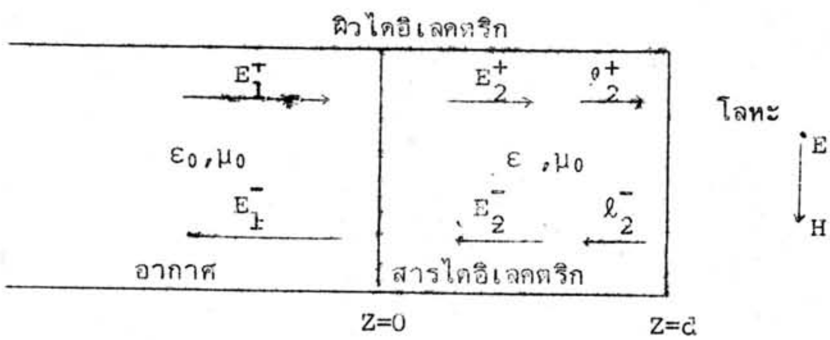
ทำให้เขียนค่าเปอมิตติวิตี ของสารดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นปริมาณเชิงซ้อนได้ว่า

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (2.1.33)$$

และอาจจะใช้สมการที่เขียนมาตั้งแต่ (2.1.1) ในสารดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยแทนค่า ε. ด้วย ε ในสมการ (2.1.33)

2.2 การสะท้อนของคลื่นจากผิวของสารไดอิเลคตริกที่ดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

สารไดอิเลคตริกที่อยู่ในท่อนำคลื่นสั้น ซึ่งมีปลายข้างหนึ่งปิดด้วยแผ่นโลหะ จะมีลักษณะดังรูป 2.2



รูปที่ 2.2 การสะท้อนของไมโครเวฟที่ผิวของสารไดอิเลคตริกที่ดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

E_1^+ , E_1^- และ H_1^+ , H_1^- เป็นสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กของไมโครเวฟในโมด TE_{10} ที่ตกกระทบและสะท้อนจากผิวของสาร ไดอิเลคตริก ที่ตำแหน่ง $Z = 0$ E_2^+ , E_2^- และ H_2^+ , H_2^- เป็นสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กที่ผิวของไดอิเลคตริก ℓ_2^+, ℓ_2^- เป็นสนามไฟฟ้าที่ผิวโลหะ ซึ่งอยู่ที่ระยะ $z = d$ เนื่องจากสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้าที่ผิวของไดอิเลคตริกเท่ากันจึงทำให้เขียนสมการได้ว่า

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \qquad (2.2.1)$$

$$H_1^+ + H_1^- = H_2^+ - H_2^- \qquad (2.2.2)$$

และเนื่องจากสมการไฟฟ้าที่ผิวโลหะเป็นศูนย์ จึงทำให้ได้ว่า

$$\ell^+ + \ell^- = 0 \qquad (2.2.3)$$

สำหรับโมด $TE_{10}E$ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวาและซ้ายจะเขียนได้ว่า

$$E^+ = E_+\ell^{j(\omega t - \beta z)} \qquad \text{สำหรับคลื่นที่ไปทางขวา}$$

$$E^- = E_-\ell^{j(\omega t + \beta z)} \qquad \text{สำหรับคลื่นที่ไปทางซ้าย}$$

โดย β คือ ตัวประกอบของการแผ่ (propagation factor) เท่ากับ $2\pi/\lambda$ เมื่อ λ คือ ความยาวคลื่น จากนี้จะได้ว่า

$$\ell_2^+ = E_2^+\ell^{j(\omega t - \beta_2 d)} \qquad (2.2.4)$$

$$\ell_2^- = E_2^- \ell^{j(\omega t + \beta_2 d)} \qquad (2.2.5)$$

โดยกำหนดว่า β_1 และ β_2 เป็น β ในอากาศและในสาร ไดอิเลคตริกตามลำดับ เมื่อแทน (2.2.4) (2.2.5) ลงในสมการ (2.2.3) จะได้

$$E_2^- = -E_2^+ \ell^{-2j\beta_2 d} \qquad (2.2.6)$$

แทนค่า E_2^- ในสมการ (2.2.6) ลงในสมการ (2.2.1) จะได้

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ (1 - \ell^{-2j\beta_2 d}) \qquad (2.2.7)$$

จากทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า[9] ในตัวกลางใด ๆ พบว่า

$$\frac{E^{+}}{H^{+}} = \frac{E^{-}}{H^{-}} = \eta \qquad (2.2.8)$$

$$\therefore \eta = \omega\mu|\beta \qquad (2.2.9)$$

โดย μ คือ เปอมีอบิลิตี (permeability) ของสาร สำหรับสารที่ศึกษานั้น $\mu = \mu_o$ เมื่อแทนสมการ (2.2.8) (2.2.2) จะได้

$$\frac{E_1^{+}}{\eta_1} - \frac{E_1^{-}}{\eta_1} = \frac{E_2^{+}}{\eta_2} - \frac{E_2^{-}}{\eta_2} \qquad (2.2.10)$$

แทน E_2^{-} จากสมการ (2.2.6) ลงใน (2.2.10) จะได้

$$E_1^{+} - E_1^{-} = \frac{\eta_1}{\eta_2} E_2^{+} (1 + \ell^{-2j\beta_2 d}) \qquad (2.2.11)$$

เอาสมการ (2.4.7) บากกับสมการ (2.4.11) ได้ว่า

$$E_1^{+} = \frac{E_2^{+}}{2} [(1 - \ell^{-2j\beta_2 d}) + \frac{\eta_1}{\eta_2} (1+\ell^{-2j\beta_2 d})] \qquad (2.2.12)$$

และเมื่อเอาสมการ (2.2.7) ลบด้วยสมการ (2.2.11) ได้ว่า

$$E_1^{-} = \frac{E_2^{+}}{2} [(1-\ell^{-2j\beta_2 d}) - \frac{\eta_1}{\eta_2} (1+\ell^{-2j\beta_2 d})] \qquad (2.2.13)$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์การสะท้อน คือ อัตราส่วนระหว่างคลื่นสะท้อนต่อคลื่นตกกระทบ จึงนำเอาสมการ (2.2.12) ไปหารสมการ (2.2.13) และถ้าให้ Γ เป็นสัมประสิทธิ์การสะท้อน จะได้ว่า

$$\Gamma = \frac{E_1^{-}}{E_1^{+}} = \frac{[\eta_2 (1-\ell^{-2j\beta_2 d}) - \eta_1 (1+\ell^{-2j\beta_2 d})]}{[\eta_2 (1-\ell^{-2j\beta_2 d}) + \eta_1 (1+\ell^{-2j\beta_2 d})]} \qquad (2.2.14)$$

เมื่อแทนสมการ (2.2.9) ลงในสมการ (2.2.14) จะให้

$$\Gamma = \frac{\beta_1(1-\ell^{-2j\beta_2 d}) - \beta_2(1+\ell^{-2j\beta_2 d})}{\beta_1(1-\ell^{-2j\beta_2 d}) + \beta_2(1+\ell^{-2j\beta_2 d})} \quad (2.2.15)$$

เพราะว่าสารที่ศึกษาเป็นสารที่ดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (คือเป็นสารไดอิเลคตริก ที่มี loss) จึงเขียนค่า β_2 ได้ว่า

$$\beta_2 = \beta_2' - j\beta_2'' \quad (2.2.16)$$

เมื่อแทนค่า β_2 ลงในสมการ (2.4.15) และเอา d คูณทั้งเศษและส่วนจะให้

$$\Gamma = \frac{\beta_1 d(1-\ell^{-2j(\beta_2'-j\beta_2'')d}) - (\beta_2'-j\beta_2'')d(1+\ell^{-2j(\beta_2'-j\beta_2'')d})}{\beta_1 d(1-\ell^{-2j(\beta_2'-j\beta_2'')d}) + (\beta_2'+j\beta_2'')d(1+\ell^{-2j(\beta_2'-j\beta_2'')d})} \quad (2.2.17)$$

ถ้าให้ $a = \beta_2' d$, $b = \beta_2'' d$, $c = \beta_1 d$ จะได้

$$\Gamma = \frac{c(1-\ell^{-2j(a-jb)}) - (a-jb)(1+\ell^{-2j(a-jb)})}{c(1-\ell^{-2j(a-jb)}) + (a-jb)(1+\ell^{-2j(a-jb)})}$$

$$= \frac{c(1-\ell^{-2(b+ja)}) - (a-jb)(1+\ell^{-2(b+ja)})}{c(1-\ell^{-2(b+ja)}) + (a-jb)(1+\ell^{-2(b+ja)})}$$

$$= \frac{c(1-\ell^{-2b}\,\ell^{-2ja}) - (a-jb)(1+\ell^{-2b}\,\ell^{-2ja})}{c(1-\ell^{-2b}\,\ell^{-2ja}) + (a-jb)(1+\ell^{-2b}\,\ell^{-2ja})}$$

$$= \frac{c(1-\ell^{-2b}(\sin 2a-j\cos 2a)) - (a-jb)(1+\ell^{-2b}(\sin 2a-j\cos 2a))}{c(1-\ell^{-2b}(\sin 2a-j\cos 2a)) + (a-jb)(1+\ell^{-2b}(\sin 2a-j\cos 2a))}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\Gamma = \frac{(c-a)-(c+a)\ell^{-2b}\cos 2a+b\ell^{-2b}\sin 2a+j((c+a)\ell^{-2b}\sin 2a+b+b\ell^{-2b}\cos 2a)}{(c+a)-(c-a)\ell^{-2b}\cos 2a-b\ell^{-2b}\sin 2a+j((c-a)\ell^{-2b}\sin 2a-b-b\ell^{-2b}\cos 2a)}$$

(2.218)

กำหนดให้

$$A = (c-a)-(c+a)\ell^{-2b}\cos 2a+b\ell^{-2b}\sin 2a$$

$$B = (c+a)\ell^{-2b}\sin 2a+b+b\ell^{-2b}\cos 2a$$

$$C = (c+a)-(c-a)\ell^{-2b}\cos 2a-b\ell^{-2b}\sin 2a$$

$$D = (c-a)\ell^{-2b}\sin 2a-b-b\ell^{-2b}\cos 2a$$

สมการ (2.4.18) จึงกลายเป็น

$$\Gamma = \frac{A + jB}{C + jD}$$

$$= \frac{A+jB}{C+jD} \cdot \frac{C-jD}{C-jD}$$

$$= \frac{AC+BD}{C^2+D^2} + j\,\frac{(BC-AD)}{C^2+D^2}$$

นั่นคือ $$\Gamma = \left(\left[\frac{AC+BD}{C^2+D^2}\right]^2+\left[\frac{BC-AD}{C^2+D^2}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} (x)\; j \tan^{-1}\frac{BC-AD}{AC+BD} \qquad (2.2.19)$$

สมการ (2.4.19) อยู่ในรูปของ

$$\Gamma = \rho\,\ell^{j\theta} \qquad (2.2.20)$$

ในการทดลองสามารถวัด ρ และ θ ได้ ซึ่งค่าทั้งสองนี้จะนำไปสู่ค่าคงที่ฉนวน ดังนั้นสมการ (2.2.20) จึงเป็นสมการเริ่มแรกที่จะใช้ต่อไป

พิจารณาสนามไฟฟ้าภายนอกสารไดอิเลคตริก สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$E = E^+ + E^-$$

$$= E_1^+\,\ell^{-j\beta_1 z} + E_1^-\,\ell^{j\beta_1 z}$$

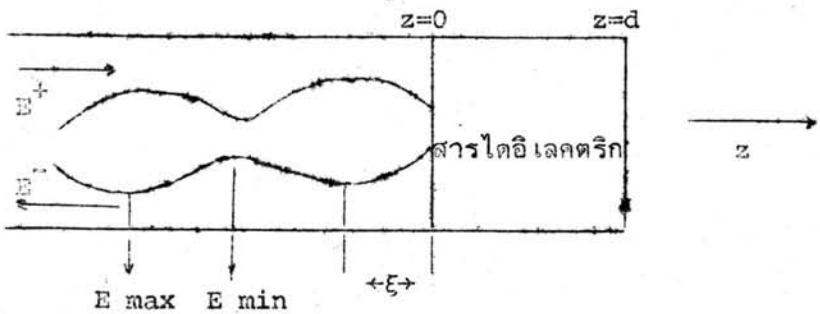
$$= E_1^+\,\ell^{-j\beta_1 z}\left(1+\frac{E_1^-}{E_1^+}\,\ell^{2j\beta_1 z}\right) \qquad (2.2.21)$$

แต่ $\quad \dfrac{E_1^-}{E_1^+} \quad = \quad \Gamma \quad = \quad \rho\ell^{j\theta}$

ดังนั้น $\quad E \; = \; E_1^+\ell^{-j\beta_1 z}(1+\rho\ell^{j\theta}\ell^{2j\beta_1 z})$

$$= \; E_1^+ \; \ell^{-j\beta_1 z}(1+\rho\ell^{\,j(\theta+2\beta_1 z)})$$

ความเข้มสนามไฟฟ้า $= \quad |E| \; = \; |E_1^+||1 + \rho\ell^{j(\theta+2\beta_1 z)}| \qquad (2.2.22)$



รูปที่ 2.3 แสดงตำแหน่งต่าง ๆ ที่มีความเข้มสนามไฟฟ้ามากที่สุด

จากสมการ (2.2.22) ที่ ρ ค่าหนึ่ง ๆ ความเข้มสนามไฟฟ้า จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ

$$\theta+2\beta_1 z \quad = \quad 0$$

ถ้า $z = -\xi$ เป็นตำแหน่งที่ความเข้มสนามไฟฟ้ามีค่ามากที่สุด ได้ว่า

$$\theta \quad = \quad 2\beta_1\xi \qquad (2.2.23)$$

จากสมการ (2.2.22) เห็นได้ว่าในขณะที่ความเข้มสนามไฟฟ้ามากที่สุดนั้นจะได้

$$|E| \; max \quad = \quad |E_1^+| \; |1+ \rho| \qquad (2.2.24)$$

และเมื่อสนามไฟฟ้าน้อยที่สุดจะได้

$$|E| \; min \quad = \quad |E_1^+| \; |1- \rho| \qquad (2.2.25)$$

เมื่อนำสมการ (2.2.25) ไปหารสมการ (2.2.24) จะได้

$$\frac{|E|max}{|E|min} \quad = \quad \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

ถ้าให้ $$A = \frac{|E|\ max}{|E|\ min}$$

จะได้ $$A = \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

หรือ $$\rho = \frac{A-1}{A+1} \qquad (2.2.26)$$

สมการ (2.2.23) และ (2.2.26) เป็นสมการที่จะใช้ในการคำนวณ ρ และ θ จากการทดลองซึ่งจะได้กล่าวในบทต่อไป

2.3 การคำนวณค่าคงที่ฉนวน

จากสมการ(2.1.30) เมื่อแทนค่า k_o จากสมการ(2.1.15) จะได้ว่า

$$\beta = [\omega^2\mu_o\varepsilon_o - \frac{\pi^2}{a^2}]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3.1)$$

สำหรับตัวกลางที่ไม่ใช่สูญญากาศจะมีเปอมิตติวิตีเป็น ε และถ้าตัวกลางนั้นเป็นตัวกลางที่ดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าด้วย ก็จะทำให้ตัวประกอบการแผ่ในตัวกลางนั้น (ซึ่งจะเรียกว่า β_2 เช่นเดียวกัน) เป็นไปตามสมการ (2.2.16) และเปอมิตติวิตีของตัวกลางก็จะเป็นปริมาณเชิงซ้อน กล่าวคือ

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \qquad (2.3.2)$$

ในกรณีนี้สมการ (2.3.1) จะกลายเป็น

$$\beta_2^2 = [\omega^2\mu_o(\varepsilon'-j\varepsilon'') - \frac{\pi^2}{a^2}]^2$$

$$\omega^2\mu_o\varepsilon'(1 - \frac{\pi^2}{a^2\omega^2\mu_o\varepsilon'} - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}) \qquad (2.3.3)$$

จากสมการ (2.3.3) ถ้าตัวกลางเป็นสูญญากาศจะได้ว่า

$$\beta_1 = \left(\omega^2\mu_o\varepsilon_o - \frac{\pi^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3.4)$$

สำหรับในสารไดอิเลคตริก กำหนดให้

$$K^2 = \omega^2\mu_o\varepsilon'$$

$$\alpha^2 = 1 - \pi^2/a^2\omega^2\mu_o\varepsilon$$

$$\tan\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$$

สมการ (2.3.3) จะเป็น

$$\beta_2^2 = K^2(\alpha^2 - j\tan\delta)$$

$$= K^2\alpha^2(1 - j\tan\delta/\alpha^2) \qquad (2.3.5)$$

กำหนดให้

$$K' = K\alpha \qquad (2.3.6)$$

$$\tan\delta/\alpha^2 = \tan\delta' \qquad (2.3.7)$$

จึงทำให้ได้สมการ (2.3.5) ได้ว่า

$$\beta_2^2 = K'^2(1 - j\tan\delta') \qquad (2.3.8)$$

ถ้า a + jb เป็นปริมาณเชิงซ้อนใด ๆ จะเขียนได้ว่า

$$a + jb = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\,\ell^{j\tan^{-1}(b/a)}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\beta_2^2 = K'^2(1+\tan^2\delta')^{\frac{1}{2}}\,\ell^{j\tan^{-1}(-\tan\delta')}$$

$$= (K'^2/\cos\delta')\,\ell^{-j\delta'}$$

นั่นคือ

$$\beta_2 = (K'/\cos^{\frac{1}{2}}\delta')\,\ell^{-j\frac{\delta'}{2}}$$

$$= (K'/\cos^{\frac{1}{2}}\delta')(\cos\delta'/2 - j\sin\delta'/2) \qquad (2.3.9)$$

ถ้าเราเขียน

$$\beta_2 = \beta'_2 - j\,\beta''_2$$

เพราะฉะนั้น

$$\beta'_2 = (K'\cos\frac{\delta'}{2})/\cos^{\frac{1}{2}}\delta' \qquad .....(2.3.10)$$

$$\beta''_2 = (K'\sin\frac{\delta'}{2})/\cos^{\frac{1}{2}}\delta' \qquad .....(2.3.11)$$

$$\beta''_2/\beta'_2 = \tan\delta'/2 \qquad .....(2.3.12)$$

จากสมการ (2.3.6) เมื่อแทนค่า K และ α แล้วจะได้ว่า

$$K'^2 = [\omega^2\mu_o\varepsilon'(1-\pi^2/a^2\omega^2\mu_o\varepsilon')] \qquad .....(2.3.13)$$

เมื่อหารสมการ (2.3.13) ตลอดด้วย ε_o แล้วจัดเทอมเสียใหม่จะทำให้ได้ค่าคงที่ฉนวน (κ) เป็น

$$\kappa = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_o} = \left(\frac{c}{2\pi f}\right)^2 [K'^2 + \frac{\pi^2}{a^2}] \qquad .....(2.3.14)$$

และสมการ $\tan\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ .....(2.3.15)

เป็นค่าที่แสดง ไดอิเลคตริกลอส (Dielectric loss) ของฉนวน

สำหรับวิธีการทดลอง และการวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งต้องใช้การคำนวณข้างต้นจะได้กล่าวในบทที่ 3 และ 4 ต่อไป