บทที่ 3

ทฤษฎีการกระจายตัวของแกสกัมมันตรังสี

ในบทนี้กล่าวถึงรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การคำนวณ และวิธีหาค่าที่สำคัญบางค่า ซึ่งไม่อาจจะวัดได้

3.1 ลักษณะของการแพร่กระจาย

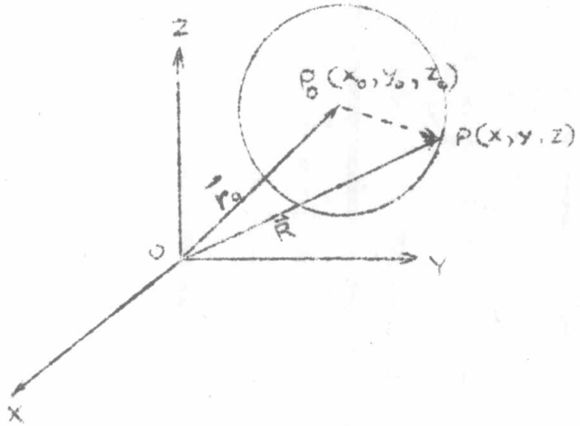
การศึกษาการแพร่กระจายของแกสกัมมันตรังสีในบรรยากาศนั้น คล้ายคลึงกับการนำความร้อนในของแข็ง

พิจารณาการปล่อยแกสกัมมันตรังสีปริมาณ q ในบรรยากาศชั่วขณะใดขณะหนึ่ง การแพร่กระจายสามารถเขียนได้ในรูปสมการ

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = k \nabla^2 \lambda \qquad (3\text{-}1)$$

และ

$$\int \lambda \, dv = q \qquad (3\text{-}2)$$



รูปที่ 3-1. การกระจายที่เกิดจากการปลดปล่อยชั่วขณะใดขณะหนึ่ง ณ จุด P_o (X_o, Y_o, Z_o)

มีข้อกำหนดว่า $\lambda \to 0$ สำหรับ $t \to 0,\ r \to 0$

$\lambda \to 0$ สำหรับ $t \to \infty$ (3-3)

เมื่อ λ = ความเข้มของแกสกัมมันตรังสีในบรรยากาศ

q = ปริมาณแกสกัมมันตรังสีที่ปล่อยออกมา ณ ตำแหน่งใด ๆ

k = สัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย (Diffusion Coefficient)

t = เวลา

V = ปริมาตรของแกส

r = รัศมีของฟองแกส

ตามสภาพอากาศที่ปกติฟองแกสที่เกิดขึ้นมีการกระจายตัว ในลักษณะทรงกลม จากสมการ (3-2) จะได้ว่า

$$\int \lambda 4\pi r^2 \, dr = q \qquad (3\text{-}4)$$

ในระบบออโทโกนัลคอร์ออดิเนต(Orthogonal Co-ordinate) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรได้ดังนี้

$$\lambda = \lambda(x, y, z, t)$$

$$r = |\vec{R} - \vec{r}_o|$$

โดยที่ $\vec{R} = \vec{R}(x, y, z)$ และ $\vec{r}_o = \vec{r}_o(x, y, z)$ ตามรูปที่ 3-1 ดังนั้น จากสมการที่ 3-1 จึงเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = k_x\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + k_y\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + k_z\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}5)$$

เมื่อ k_x, k_y และ k_z เป็นสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายในแกน x, y และ z ตามลำดับ ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ต่างก็เป็นตัวคงที่

โดยอาศัยหลักทางคณิตศาสตร์ วิธีการแก้สมการแบบ Partial Differential Equation และ Fourier Series ตามข้อกำหนด สมการ (3-3) หาผลลัพธ์ของสมการ (3-5) ได้

$$\lambda(x, y, z, t) = \frac{q \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_o)^2}{4k_x t} - \frac{(y-y_o)^2}{4k_y t} - \frac{(z-z_o)^2}{4k_z t}\right]}{(4\pi t)^{3/2} \quad (k_x k_y k_z)^{1/2}} \qquad (3\text{-}6)$$

สมการ (3-6) นี้ เรียกว่า Fickian Diffusion

อย่างไรก็ตาม สภาพบรรยากาศรอบจุดปลดปล่อย x_o, y_o, z_o มีการไหลเวียนเสมอด้วยความเร็ว U ข้อสมมุติที่เกิดขึ้น ณ จุดนี้ จึงเป็น

$$T(t) = T[x_o(t), y_o(t), z_o(t)] \qquad (3\text{-}7)$$

ความสัมพันธ์ในสมการ (3-6) โดยอาศัยข้อสมมุติ (3-7) จึงถูกเปลี่ยนเป็น

$$\lambda(x,y,z,t) = \frac{q.\exp\left\{-\frac{[x-x_o(t)]^2}{4k_x t} - \frac{[y-y_o(t)]^2}{4k_y t} - \frac{[z-z_o(t)]^2}{4k_z t}\right\}}{(4\pi t)^{3/2}(k_x k_y k_z)^{1/2}} \qquad (3\text{-}8)$$

ใช้หลักการเปลี่ยนจุด Or-dinate โดยเปลี่ยนจุด $P_o(x_o, y_o, z_o)$ เป็น $P_o(0, 0, H)$ ตามทิศทางที่เคลื่อนที่ไปตามแกน)X พบว่า

$$\left.\begin{aligned} x_o(t) &= ut \\ y_o(t) &= 0 \\ z_o(t) &= H \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}9)$$

เมื่อ H = ความสูง

U = ความเร็วการกระจาย

แทนค่าสมการ (3-9) ใน (3-8)

$$\lambda(x,y,z,t) = \frac{q.\exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4k_x t} - \frac{y^2}{4k_y t} - \frac{(z-H)^2}{4k_z t}\right]}{(4\pi t)^{3/2}(k_x k_y k_z)^{1/2}} \qquad (3\text{-}10)$$

โดยอาศัย **K-Theory** ซึ่งให้ความสัมพันธ์ของ k กับเวลา t ในรูปของ Variance พบว่า

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 2k_x t \\ \sigma_y^2 &= 2k_y t \\ \sigma_z^2 &= 2k_z t \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}11)$$

แทนค่าสมการ (3-11) ลงในสมการ (3-10) จะได้ความสัมพันธ์ใหม่ว่า

$$\lambda(x, y, z, t) = \frac{q.\exp\left[-\frac{(x-tu)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right]}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \qquad (3\text{-}12)$$

สมการ (3-12) เป็นการแสดงการปลดปล่อยแกสชั่วขณะ แต่ถ้าต้องการปล่อยในช่วงเวลายาวนาน และต่อเนื่องไปในทิศทางตามแกน X จะต้องถือสมการ (3-12) เป็นการปล่อยห้วงสั้น ๆ ซึ่งผลลัพธ์ทั้งหมดจะได้มาจากการ Integrate ห้วงสั้นได้

$$\lambda(x, y, z) = \frac{Q\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right]}{2\pi U\sigma_y\sigma_z} \qquad (3\text{-}13)$$

เมื่อ Q = อัตราการปลดปล่อยแกส

σ_y^2, σ_z^2 = Variance ตามแกน y และ z

σ_y, σ_z = Standard deviation ตามแกน y และ z

ในขณะที่กลุ่มของแกสถึงพื้นดิน จะมีการสะท้อนเกิดขึ้น ทำให้ความเข้มของแกสเพิ่มขึ้นอีกเท่าตัว หรือแทนค่าทิศทางในแกน Z ด้วย -H สมการ (3-13) จึงถูกเขียนใหม่ได้ว่า

$$\lambda(x, y, z) = \frac{Q\exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right]\left\{\exp\left[\frac{-(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[\frac{-(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right]\right\}}{2\pi U\sigma_y\sigma_z} \qquad (3\text{-}14)$$

แต่ความเข้มนั้นทำการวัดที่ระดับพื้นดิน $z = 0$ สมการ (3-14) ถูกเขียนให้ง่ายขึ้นเป็น

$$\lambda(x, y, 0) = \frac{Q \exp\left\{ -\left[\frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right]\right\}}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \tag{3-15}$$

เมื่อต้องการคิดการแพร่กระจายในรูปของสารกัมมันตรังสี ที่ปะปนอยู่ในแกส ความหมายของค่าต่าง ๆ รวมถึงหน่วยของสมการ (3-15) จะเป็นดังนี้

λ = ความเข้มของสารกัมมันตรังสีต่อปริมาตรของแกสที่ระดับผิวพื้น (คูรี่/ลูกบาศก์เมตร)

Q = ปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่ปลดปล่อยต่อหน่วยเวลา (คูรี่/วินาที)

U = ความเร็วลมเฉลี่ย (เมตร/วินาที)

H = ความสูง ณ จุดเริ่มการแพร่กระจาย (เมตร)

y = ระยะใด ๆ ตามแกน y (เมตร)

σ_y = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามแนวระดับ (เมตร) เป็นฟังก์ชั่นของระยะทาง X

σ_z = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามแนวตั้ง (เมตร) เป็นฟังก์ชั่นของระยะทาง X

ในกรณีที่พิจารณาการกระจายในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง ซึ่งขึ้นอยู่กับทิศทางลมที่พัดนั้น ค่า y จะถูกกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ถ้าหากตั้งแกนสมมุติขึ้นที่จุดปลอยแกสกัมมันตรังสี จะพิจารณาความเข้มสารกัมมันตรังสีเฉพาะในระนาบ xz ซึ่งเป็นระนาบที่เกิดตำแหน่งความเข้มเมื่อมีค่าสูงที่สุด

จากสมการ (3-15) ถ้า $y = 0$ เทอม $\exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right) = 1$ ค่า λ จะถูกเปลี่ยนเป็น λ'

$$\lambda'(X, 0, 0) = \frac{Q \exp\left\{\frac{-H^2}{2\sigma_z^2}\right\}}{\pi U \sigma_y \sigma_z} \tag{3-16}$$

นำค่า Q หรือปริมาณความเข้มของสารกัมมันตรังสีที่ปลดปล่อยต่อหน่วยเวลาหารสมการ (3-16) ตลอด เพื่อให้เกิดเป็นค่าต่อ 1 หน่วย (per unit)

$$\frac{\lambda'}{Q}(X, 0, 0) = \frac{\exp\left[\frac{-H^2}{2\sigma_z^2}\right]}{\pi \cdot u \sigma_y \sigma_z} \qquad (3-17)$$

เมื่อ $\frac{\lambda'}{Q}$ = ความเข้มต่อ 1 หน่วย (วินาที/ลูกบาศก์เมตร) ที่ระดับผิวพื้น

H = ตำแหน่งความสูงของจุดปล่อยแกสกัมมันตรังสี ซึ่งก็คือความสูงของปล่องโรงไฟฟ้าปรมาณู

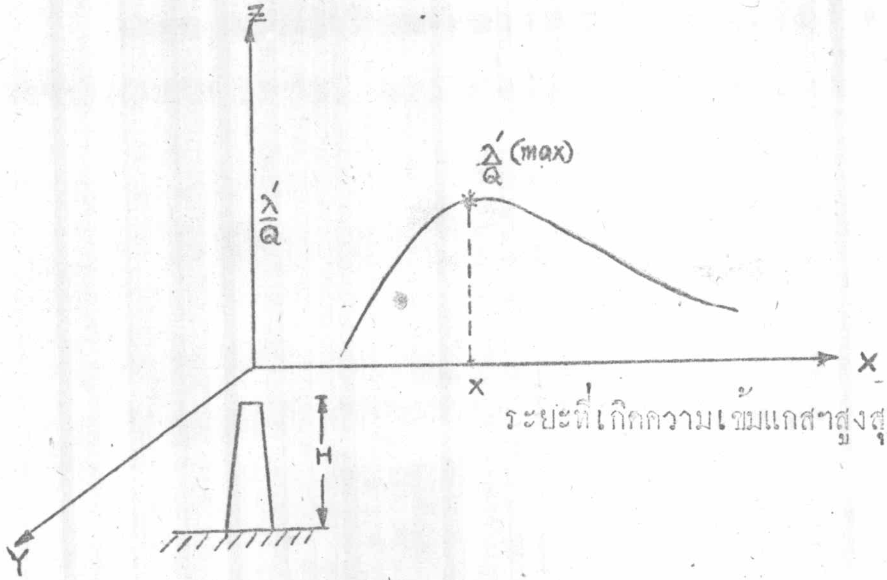
ถ้าจะถือการกระจายความเข้มของแกสกัมมันตรังสีว่า จะเกิดเฉพาะในระนาบใดระนาบหนึ่ง (ระนาบ XZ) ตามทิศทางของลมที่พัดนั้น ย่อมผิดไปจากข้อเท็จจริง แต่ถ้าคำนึงถึงความปลอดภัยแล้ว ถือได้ว่าเป็นส่วนสำคัญที่ต้องนำมาพิจารณาก่อน เพราะความเข้มของแกสกัมมันตรังสี ณ ระดับผิวพื้น จะมีค่าสูงที่สุดบนระนาบนี้ (ดังรูปที่ 3-2) มากกว่าระนาบอื่น อย่างไรก็ตาม บนระนาบที่ $y \neq 0$ แต่ y มีค่าเป็นบวกหรือลบ ย่อมมีความเข้มของแกสกัมมันตรังสีเหมือนกัน เพียงแต่มีค่าต่ำกว่า ค่าสูงสุดที่เกิดบนระนาบ XZ (y = 0) ตามระยะทางของ X ที่เพิ่มขึ้น

แทนค่า สมการ (3-15) ด้วยสมการ (3-16) จะได้ว่า

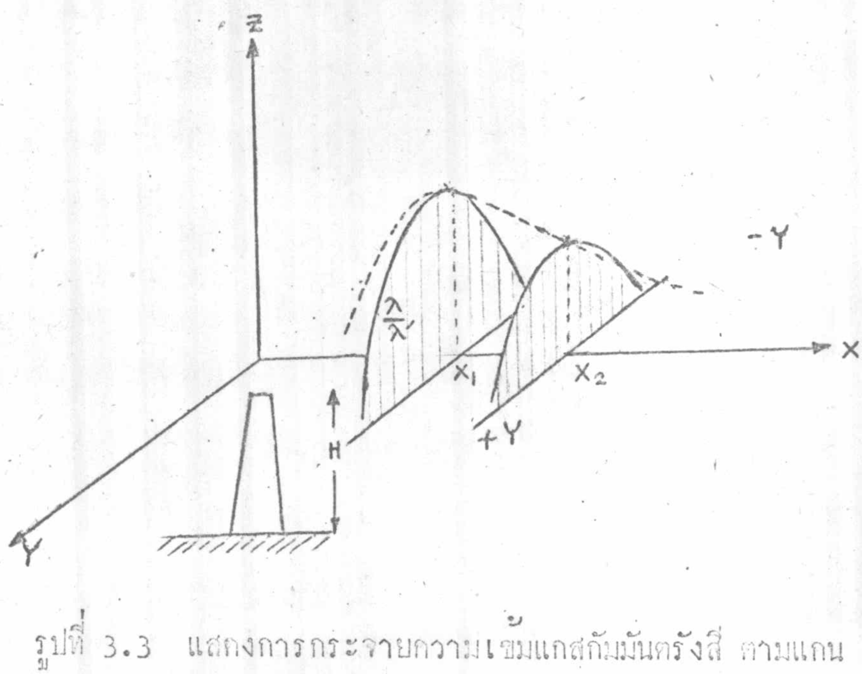
$$\lambda(X, Y, 0) = \lambda'(X, 0, 0) \exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right] \qquad (3-18)$$

หรือ

$$\frac{\lambda(X, Y, 0)}{\lambda'(X, 0, 0)} = \exp\left[\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right] \qquad (3-19)$$



รูปที่ 3.2 แสดงความเข้มของแกสกัมมันตรังสีต่อปริมาณที่ปล่อย $\frac{\lambda'}{Q}$ ที่ระดับผิวพื้น ตามทิศทาง x บนระนาบ XZ



รูปที่ 3.3 แสดงการกระจายความเข้มแกสกัมมันตรังสี ตามแกน Y

เมื่อ $\lambda(X, Y, 0) / \lambda'(X, 0, 0)$ เป็นค่าต่อ 1 หน่วย ของความเข้มแกสกัมมันตรังสี ค่าสูงสุด ณ ตำแหน่ง X ใด ๆ ที่เกิดบนระนาบ XZ (y = 0) โดยมี σ_y เป็นฟังก์ชั่น โดยประมาณของตำแหน่ง X (จะกล่าวในหัวข้อ 3.2) และจากสมการ (3-19) ทำให้ทราบว่า การลดลงของความเข้มแกสกัมมันตรังสีมีลักษณะเป็นรูป Exponential ตามระยะ y (ทั้งบวกและลบ) ที่เพิ่มขึ้นในค่าที่เป็นตัวเลข ตามรูปที่(3-3)

3.2 การหาค่าความเข้มสูงสุดของแกสกัมมันตรังสีที่ระดับผิวพื้น (Maximum Coneentration of Radioactive Gas at Ground Level)

การแพร่กระจายความเข้มแกสกัมมันตรังสีมีอยู่ทั่วไปเป็นบริเวณกว้างรอบจุดปล่อยแกสกัมมันตรังสี ซึ่งมีค่าแตกต่างกัน เพื่อความปลอดภัยในทุกกรณี จึงพิจารณาจากค่าที่สูงที่สุด และจำเป็นอยู่เองที่ต้องทราบตำแหน่งหรือบริเวณที่ความเข้มแกสกัมมันตรังสีมีค่ามากที่สุด

จากสมการที่ (3-16) ค่าความเข้ม ณ ตำแหน่ง X ใด ๆ ขึ้นอยู่กับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ_y, σ_z และเป็นตัวแปรค่าที่ต้องพิจารณามากที่สุด อาศัยการทดลองเกี่ยวกับสภาพทางอุตุนิยมวิทยาพบว่า ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานขึ้นกับระยะทาง X ในรูปของการยกกำลัง (Power Law) โดยมีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\sigma = p X^q \qquad (3\text{-}20)$$

เมื่อ p เป็นสัมประสิทธิ์ และ q เป็นค่าที่ใช้ยกกำลังของ X ซึ่งขึ้นอยู่กับสภาพอากาศ กรณีที่ถูกนำมาใช้ในการคำนวณ ค่าความเข้มสูงสุด จำเป็นต้องแบ่งส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นแนวระนาบ (σ_y) และในแนวตั้ง (σ_z) สมการที่ (3-20) จึงถูกเปลี่ยนเป็น

$$\sigma_z = a X^q \qquad (3\text{-}21)$$

$$\sigma_y = b X^q \qquad (3\text{-}22)$$

เมื่อ a และ b เป็นสัมประสิทธิ์ขึ้นอยู่กับสภาพอากาศ

นำสมการ (3-21) และ (3-22) แทนค่าใน (3-16) จะได้

$$\lambda'(X, 0, 0) = \frac{\Omega \exp\left\{\frac{-H^2}{2a^2 X^{2q}}\right\}}{\pi ab X^{2q} U} \qquad (3\text{-}23)$$

สมมุติให้ $k_1 = \frac{\Omega}{\pi abU}$, $k_2 = \frac{H^2}{2a^2}$

สมการ (3-23) จึงถูกเขียนใหม่เป็น

$$\lambda'(X, 0, 0) = \frac{k_1}{X^{2q}} \exp\left\{\frac{-k_2}{X^{2q}}\right\} \qquad (3\text{-}24)$$

หาค่า $\frac{d\lambda'}{dX}$ จากสมการ (3-24)

$$\frac{d\lambda'}{dX} = \frac{2q.\, k_1 k_2 \exp\left\{\frac{-k_2}{X^{2q}}\right\}}{X^{4q-1}} - \frac{2q.\, k_1 \exp\left\{\frac{-k_2}{X^{2q}}\right\}}{X^{2q-1}} \qquad (3\text{-}25)$$

ในกรณีที่ต้องการหาค่า λ' ที่มีค่ามากที่สุด (Maximum) ให้ $\frac{d\lambda'}{dX} = 0$ จากสมการที่ (3-25) ได้

$$X^{2q} = k_2$$

$$X^{2q} = \frac{H^2}{2a^2}$$

หรือเขียนใหม่เป็น

$$a^2 X^{2q} = \frac{H^2}{2} \qquad (3\text{-}26)$$

แทนค่าด้วยสมการ (3-21)

$$\therefore \sigma_z^2 = \frac{H^2}{2}$$

หรือ $$\sigma_z = \frac{H}{\sqrt{2}} \qquad (3\text{-}27)$$

สมการที่ (3-27) เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในแนวตั้ง กับความสูงของปล่องโรงไฟฟ้าปรมาณู โดยที่สามารถทราบความสัมพันธ์ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในแนวตั้งกับระยะทางใต้ลม (ระยะทาง X ตามแนว Down Wind) ซึ่งจะนำมากล่าวในหัวข้อต่อไป ทำให้ทราบว่า ถ้าหากรู้ความสูงของปล่องโรงไฟฟ้าปรมาณู ก็สามารถหาระยะทางตามแนวใต้ลมที่เกิดความเข้มแกสกัมมันตรังสีสูงที่สุด

แทนค่า สมการ (3-27) ในสมการ (3-16)

$$\chi'_{max.}(X, 0, 0) = \frac{2Q\,\sigma_z}{\exp(1)\,\pi\, U H^2 \sigma_y} \qquad (3\text{-}28)$$

เพื่อให้ใช้ได้ทั่วไปในกรณีที่ปริมาณรังสีที่ปล่อยออกมามีค่าไม่แน่นอน จึงแปลงค่าความเข้มแกสกัมมันตรังสีเป็นต่อ 1 หน่วย (Per Unit) และใช้ว่า

$$\frac{\chi'}{Q}_{max.} = \frac{2\,\sigma_z}{\exp(1)\,\pi\, UH^2\sigma_y} \qquad (3\text{-}29)$$

3.3 การหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ตามสภาพอากาศ

โดยปกติแล้วสถานีตรวจอากาศจะมีเครื่องมือหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามแนวระดับกับแนวตั้ง อันเกี่ยวข้องกับการแปรปรวนของความเร็วและทิศทางลม ในกรณีสภาพอากาศคงตัว สมการที่ใช้

$$\sigma_y = 0.15\,\sigma_a X^{0.71} \qquad (3\text{-}30)$$

$$\sigma_z = 0.15\,\sigma_e X^{0.71} \qquad (3.31)$$

สำหรับสภาพอากาศไม่คงตัว

$$\sigma_y = 0.045\,\sigma_a X^{0.86} \quad (3\text{-}32)$$

$$\sigma_z = 0.045\,\sigma_e X^{0.86} \quad (3.33)$$

เมื่อ σ_a คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมุมตามแนวระนาบที่จุดปล่อย (องศา)

σ_e คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมุมตามแนวตั้งที่จุดปล่อย (องศา)

ดังนั้น ถ้าหากทราบค่า σ_a และ σ_e โดยอาศัยผลจากการบันทึกที่สถานีตรวจอากาศกับเทคนิคทางวิชาสถิติเข้าช่วย ก็จะหาค่า σ_y และ σ_z ได้

อย่างไรก็ตาม มีวิธีการที่ช่วยให้ทราบค่า σ_y และ σ_z ได้ โดยอาศัยผลจากการทดลองที่มีผู้ทำมาจนสรุปเป็นทฤษฎี ประกอบกับการคำนวณ ซึ่งหามาได้จากความเร็วลม

$$\sigma_e = 0.2\,\sigma_a \quad \text{สำหรับสภาพอากาศคงตัว} \quad (3\text{-}34)$$

$$\sigma_e = 0.7\,\sigma_a \quad \text{สำหรับสภาพอากาศไม่คงตัว} \quad (3\text{-}35)$$

ค่า σ_a ในลักษณะอากาศคงตัวมีความยุ่งยากมากที่จะนำมาสัมพันธ์กับความเร็วลม ในความหมายทางคณิตศาสตร์ แต่จากการสังเกตุและทดลอง พบว่าในทุกระดับความสูง

$$\sigma_a \cong 2 \text{ องศา} \quad (3\text{-}36)$$

ซึ่งต่างไปจากค่า σ_a ในลักษณะอากาศไม่คงตัว เพราะสามารถหาความสัมพันธ์ได้โดยตรงจากความเร็วลม ในระดับ 100 เมตร

$$\sigma_{a(100)} = \frac{23}{U(100)} + 4.75 \quad (3\text{-}37)$$

แต่ตามสภาพความเป็นจริง อุปกรณ์ที่ใช้วัดความเร็วลม มิได้ติดตั้งไว้ในระดับ 100 เมตรเสมอไป อันมีผลทำให้ค่าที่คำนวณได้ผิดพลาดไปบ้าง เพื่อแก้ความคลาดเคลื่อน จำเป็นต้องปรับความเร็วลมในระดับอื่น ๆ[4] มาเป็นที่ระดับ 100 เมตรด้วยสมการ

$$U(H) = U_1\left(\frac{H}{Z_1}\right)^{0.5} \quad \text{สภาพอากาศคงตัว} \qquad (3\text{-}38)$$

และ

$$U(H) = U_1\left(\frac{H}{Z_1}\right)^{0.25} \quad \text{สภาพอากาศไม่คงตัว} \qquad (3\text{-}39)$$

เมื่อ $U(H)$ = ความเร็วลม ณ ระดับความสูง H เมตร

U_1 = ความเร็วลม ณ ระดับความสูง Z_1 เมตร

นอกจากนี้ เพื่อให้การหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเชิงมุมมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น จำเป็นต้องประกอบด้วยสมการ ดังต่อไปนี้

$$\sigma_a(H)\,U(H) = \sigma_{a1}\,U_1 \qquad (3\text{-}40)$$

และ

$$\sigma_e(H)\,U(H) = \sigma_{e1}\,U_1 \qquad (3\text{-}41)$$

โดยที่ $\sigma_a(H)$, $\sigma_e(H)$ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเชิงมุมตามแนวระนาบและแนวตั้ง ณ ความสูง H เมตร ตามลำดับ ส่วน σ_{a1}, σ_{e1} คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเชิงมุม ตามแนวระนาบและแนวตั้งที่ตำแหน่งใด ๆ ตามความเร็วลม U_1

---

4. Maynard Smith, Prediction of the Dispersion of Airbrone Effluents, Brook Haven National Laboratory, P 55.