กราฟที่สร้างจากระบบพีชคณิต

นางสาว นิตยา ชิงชัย

วิทยานิพนธ์นี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2519

ON GRAPHS DEFINED FROM ALGEBRAIC SYSTEMS

Miss Nidtaya Chingchai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Master of Science.

Kirid Prachuabmoh
....
Dean of the Graduate School

Thesis Committee

Mark Tamthai .... Chairman

Thavee Srisangthong ....

Virool Boonyasombat ....

Thesis Supervisor   Assistant Professor Dr. Virool Boonyasombat.

หัวข้อวิทยานิพนธ์ : กราฟที่สร้างจากระบบพีชคณิต

ชื่อ : นางสาวนิตยา ชิงชัย แผนกวิชา : คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา : ๒๕๑๘

บทคัดย่อ

เรานิยามไดกราฟว่าเป็นคู่ลำดับ (V, E) โดยที่ V เป็นเซทจำกัดที่ไม่ว่างเปล่า และ E เป็นซับเซทของ $V \times V$ เราเรียกสมาชิกของ V และ E ว่าเป็นจุดยอดและเส้นตามลำดับ สำหรับแต่ละ v ใน V เราให้ $\delta(v) = \{u \in V \mid (v,u) \in E\}$, $\rho(v) = \{w \in V \mid (w, v) \in E\}$ ถ้า $|\delta(v)| = |\rho(v)| = k$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก v ของเซท V เราจะเรียกไดกราฟ (V, E) ว่าเป็นเร็กกูล่าไดกราฟ ถ้าเร็กกูล่าไดกราฟมีคุณสมบัติเพิ่มเติมว่า $(v, v) \in E$ สำหรับทุก ๆ $v \in V$ หรือ $(v, v) \notin E$ สำหรับทุก ๆ $v \in V$ เราเรียกเร็กกูล่าไดกราฟนั้นว่านอร์มอลเร็กกูล่าไดกราฟ

ไอโซมอร์ฟิสสึมจากไดกราฟ (V_1, E_1) ไปยังไดกราฟ (V_2, E_2) หมายถึงแมปปิ้งหนึ่งต่อหนึ่ง φ จาก V_1 ไปเต็ม V_2 ใด ๆ ซึ่งทุก ๆ คู่ของสมาชิก u, v ในเซท V_1 จะมี $(u, v) \in E_1$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $(u\varphi, v\varphi) \in E_2$ ถ้ามีไดกราฟไอโซมอร์ฟิสสึมจาก (V_1, E_1) ไปยัง (V_2, E_2) เราจะกล่าวว่า (V_1, E_1) ไอโซมอร์ฟิค กับ (V_2, E_2) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(V_1, E_1) \cong (V_2, E_2)$ เราเรียกไอโซมอร์ฟิสสึมใด ๆ จาก (V, E) ไปยังตัวเองว่าออโตมอร์ฟิสสึมของ (V, E) เซทของไดกราฟออโตมอร์ฟิสสึมทั้งหมดของ (V, E) จะเป็นกรุ๊ปภายใต้คอมโพสิชั่น เราจะเขียนแทนกรุ๊ปนี้ด้วย $\Gamma(V, E)$

ให้ A เป็นซับเซทใด ๆ ของกรุ๊ปปอยด์ $(G, \circ)$ เราเรียกไดกราฟ (G, E_A) ซึ่ง $E_A = \{(x, x \circ a) \in G \times G \mid x \in G, a \in A\}$ ว่าเป็นไดกราฟจากกรุ๊ปปอยด์ $(G, \circ)$ และซับเซท A เรากล่าวว่าไดกราฟ (V, E) จะเป็นกรุ๊ปปอยด์ไดกราฟเมื่อมีกรุ๊ปปอยด์ $(G, \circ)$ และซับเซท A ของ G ซึ่ง $(V, E) \cong (G, E_A)$ ถ้ากรุ๊ปปอยด์ดังกล่าวเป็น

ควาไซกรุ๊ป ลูป กรุ๊ป หรือไซคลิคกรุ๊ป เราจะเรียกกรุ๊ปปอยด์ไดกราฟว่าเป็น ควาไซกรุ๊ปไดกราฟ ลูปไดกราฟ กรุ๊ปไดกราฟ หรือไซคลิคกรุ๊ปไดกราฟตามลำดับ

อาจสรุปผลลัพธ์จากการศึกษาไว้ได้เป็นทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท A</u> $(V, E) \cong (G, E_A)$ สำหรับบางกรุ๊ปปอยด์ $(G, \circ)$ และบางซับเซท A ของ G เมื่อและก็ต่อเมื่อ E เป็นเอ็มพ์ตี้เซท หรือทุก ๆ สมาชิก v ของเซท V จะมีสมาชิก u ใน V ซึ่ง $(v, u) \in E$

<u>ทฤษฎีบท B</u> $(V, E) \cong (G, E_A)$ สำหรับบางควาไซกรุ๊ป $(G, \circ)$ และบางซับเซท A ของ G เมื่อและก็ต่อเมื่อ (V, E) เป็นเร็กกูล่าไดกราฟ นอกจากนั้นเราอาจเลือกควาไซกรุ๊ป $(G, \circ)$ เป็นลูปได้เมื่อและก็ต่อเมื่อ (V, E) เป็นนอร์มอลเร็กกูล่าไดกราฟ

<u>ทฤษฎีบท C</u> ให้ G เป็นกรุ๊ป และ (V, E) เป็นไดกราฟ $(V, E) \cong (G, E_A)$ สำหรับบางซับเซท A ของ G เมื่อและก็ต่อเมื่อ (1) $|G| = |V|$ และ (2) $\Gamma(V, E)$ มีซับกรุ๊ป $\Delta \cong G$ ซึ่งทุก ๆ คู่ของสมาชิก v, v' ในเซท V จะมีสมาชิก σ ใน Δ ซึ่ง $v\sigma = v'$

Thesis Title : On Graphs Defined from Algebraic Systems.

Name : Miss Nidtaya Chingchai, Department : Mathematics

Academic Year : 1975

ABSTRACT

A digraph (directed graph) is defined to be an ordered pair (V, E), where V is a finite nonempty set and E is a subset of $V \times V$. Elements of V and E are called vertices and arcs of (V, E) respectively. To each $v \in V$ we let,
$\sigma(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$, $\rho(v) = \{w \in V \mid (w, v) \in E\}$.
If $|\sigma(v)| = |\rho(v)| = k$ for all $v \in V$ we say that (V, E) is regular of degree k. A regular digraph is said to be a normal regular if $(v, v) \in E$ for all $v \in V$ or $(v, v) \notin E$ for all $v \in V$.

By an isomorphism from a digraph (V_1, E_1) onto a digraph (V_2, E_2) we mean any one - to - one mapping φ from V_1 onto V_2 such that $(u, v) \in E_1$ if and only if $(u\varphi, v\varphi) \in E_2$ for each $u, v \in V_1$. If a digraph isomorphism from (V_1, E_1) onto (V_2, E_2) exists we say (V_1, E_1) is isomorphic to (V_2, E_2) and write $(V_1, E_1) \cong (V_2, E_2)$. By an automorphism of a digraph (V, E) we mean any digraph isomorphism from (V, E) onto itself. The set $\Gamma(V, E)$ of all digraph automorphisms forms a group under

composition.

Given any subset A of a groupoid $(G, \circ)$ we call the digraph (G, E_A), where $E_A = \{(x, x \circ a) \in G \times G \mid x \in G, a \in A\}$, the digraph induced by the groupoid $(G, \circ)$ and the subset A. We call a digraph (V, E) a groupoid digraph if $(V, E) \cong (G, E_A)$ for some groupoid $(G, \circ)$ and some subset A of G. We say that (V, E) is a quasi - group digraph, a loop digraph, a group digraph, or a cyclic group digraph if the groupoid $(G, \circ)$ can be chosen to be a quasi - group, a loop, a group, or a cyclic group respectively.

The results of our investigations can be summarized in the following theorems.

Theorem A $(V, E) \cong (G, E_A)$ for some groupoid $(G, \circ)$ and some subset A of G if and only if $E = \emptyset$ or for each $v \in V$, there exists $u \in V$ such that $(v, u) \in E$.

Theorem B $(V, E) \cong (G, E_A)$ for some quasi - group $(G, \bullet)$ and some subset A of G if and only if (V, E) is regular. Furthermore the quasi - group $(G, \circ)$ can be chosen to be a loop if and only if (V, E) is normal regular.

Theorem C Let G be a group and (V, E) be a digraph. $(V, E) \cong (G, E_A)$ for some subset A of G if and only if (1) $|V| = |G|$ and (2) the group $\Gamma(V, E)$ contains a subgroup $\Delta \cong G$ such that for each pair $v, v' \in V$ there exists $\delta \in \Delta$ such that $v\delta = v'$.

ACKNOWLEDGMENT

The author wishes to express her deep appreciation to Assistant Professor Dr. Virool Boonyasombat, her thesis supervisor, for his valuable advice and suggestions.

TABLE OF CONTENTS