บทที่ 2

การวิเคราะห์ทางทฤษฎี

2.1 สมการควบคุมและสภาพของขอบ (Governing Equation and Boundary Conditions)

สมการดิฟเฟอร์เรนเชียลของแผ่นพื้น เมื่อรับแรงเดี่ยวอาจ เขียนได้ดังนี้คือ

$$\nabla^4 w = 0 \tag{1}$$

เมื่อ

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

สำหรับกรณีของแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีที่รองรับที่มุมนั้น คำตอบที่ได้จะต้องสอดคล้องกับสภาพของขอบดังต่อไปนี้

$$w = 0 \quad \text{ที่มุมทั้งสาม} \tag{3ก}$$

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0, \quad \text{ตามแนวขอบทั้งสามด้าน} \tag{3ข}$$

$$V_x = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right] = 0, \quad \text{ตามแนวขอบทั้งสามด้าน} \tag{3ค}$$

ในเมื่อ w เป็นฟังก์ชั่นการโก่งของแผ่นพื้น M_x แทนโมเมนต์ดัดต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งฉากกับแกนx, V_x แทน แรงเฉือนเคียร์คอฟ ต่อความยาวของขอบที่ตั้งฉากกับแกน x,D คือ เฟลคซูรัลริจิดิที (flexural rigidity) ของแผ่นพื้นมีค่าเท่ากับ $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ E คือโมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) h คือความหนาของแผ่นพื้น และ ν คือ ค่าอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio)

คำตอบที่ได้จะต้องสมมาตรกับแกน x , x' และ x'' ดังแสดงในรูปที่ 1 เสมอ ดังนั้น สภาพของขอบในสมการ (3ก) (3ข) (3ค) ก็อาจเขียนลดรูปลงได้ดังนี้ : -

$$w(\tfrac{2}{3}a,0) = w(-\tfrac{a}{3},\tfrac{a}{\sqrt{3}}) = 0 \qquad (4ก)$$

$$M_x(-\tfrac{a}{3},y) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{a}{\sqrt{3}} \qquad (4ข)$$

$$V_x(-\tfrac{a}{3},y) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{a}{\sqrt{3}} \qquad (4ค)$$

สมมติฟังก์ชั่นการโก่งของแผ่นพื้นอยู่ในรูปของ

$$w = w^s + w^c \qquad (5)$$

โดยที่ w^s เป็นฟังก์ชั่นการโก่งของแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีที่รองรับแบบธรรมดาตามแนวขอบ และถูกกระทำด้วยแรงเดี่ยว P ที่จุดศูนย์กลางของแผ่นดังแสดงไว้ในภาคผนวก ก w^s สอดคล้องกับสมการควบคุมและสภาพของขอบดังต่อไปนี้

$$\nabla^4 w^s = 0 \qquad (6)$$

$$w^s(-\tfrac{a}{3},y) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{a}{\sqrt{3}} \qquad (7ก)$$

$$M_x^s(-\tfrac{a}{3},y) = -D\left[\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2}\right]_{-a/3,y} = 0 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant \tfrac{a}{\sqrt{3}} \qquad (7ข)$$

ส่วนฟังก์ชั่นการโก่ง w^c นั้น จะต้องเป็นฟังก์ชั่นที่สมมาตรกับแกน x , x' และ x'' และสอดคล้องกับสมการควบคุม

$$\nabla^4 w^c = 0$$

และเมื่อรวมเข้ากับ w^s แล้วจะต้องสอดคล้องกับสภาพของขอบดังต่อไปนี้

$$w^s(\tfrac{2}{3}a,0) + w^c(\tfrac{2}{3}a,0) = w^s(-\tfrac{a}{3},\tfrac{a}{\sqrt{3}}) + w^c(-\tfrac{a}{3},\tfrac{a}{\sqrt{3}}) = 0$$

หรือ

$$w^c(\tfrac{2}{3}a,0) = w^c(-\tfrac{a}{3},\tfrac{a}{\sqrt{3}}) = 0 \qquad (8ก)$$

และ

$$M_x^s(-\frac{a}{3},y) + M_x^c(-\frac{a}{3},y) = M_x^c(-\frac{a}{3},y) = 0 \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{8ข}$$

$$V_x^s(-\frac{a}{3},y) + V_x^c(-\frac{a}{3},y) = 0 \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{8ค}$$

2.2 ขั้นตอนในการแก้ปัญหา (Solution Scheme)

กำหนดให้ w^c อยู่ในรูปของ

$$w^c(x,y) = C_1 + \frac{3}{2}(C_2+C_3)(x^2+y^2) + f(x,y) + f(x',y') + f(x'',y'') \tag{9}$$

โดยที่ฟังก์ชั่น $f(\xi,\eta)$ เป็นฟังก์ชั่นที่สอดคล้องกับ $\nabla^4 f=0$, (x',y') และ (x'',y'') เป็นแกนโคออร์-ดิเนท ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1 และมีความสัมพันธ์กับแกนโคออร์ดิเนท (x,y) ดังนี้

$$x' = -\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y) \tag{10ค}$$

$$y' = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y) \tag{10ข}$$

และ

$$x'' = -\frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y) \tag{11ค}$$

$$y'' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y) \tag{11ข}$$

แทนค่าความสัมพันธ์ในสมการ (10) และ (11) ลงในสมการ (9) จะได้ w^c อยู่ในรูปของ

$$w^c(x,y) = C_1 + \frac{3}{2}(C_2+C_3)(x^2+y^2) + f(x,y) + f[-\tfrac{1}{2}(x-\sqrt{3}y), -\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)] + f[-\tfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}y), \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}x-y)] \tag{12}$$

เมื่อ C_1 และ C_2+C_3 เป็นค่าคงที่

จะเห็นได้ชัดว่าถ้าเราเลือก $f(\xi,\eta)$ ให้เป็นฟังก์ชั่นที่สมมาตรกับแกน ξ นั่นคือถ้า $f(\xi,\eta)=f(\xi,-\eta)$ แล้ว ฟังก์ชั่น w^c ในสมการ (12) ก็จะสมมาตรกับแกน x ด้วย และในทำนองเดียวกันก็จะพิสูจน์ได้ว่า w^c นอกจากสมมาตรกับแกน x แล้วก็จะสมมาตรกับแกน x' และ x'' ด้วย

จากการพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าว ในที่นี้จะเลือกฟังก์ชั่น f ให้มีรูปดังนี้

$$f(\xi,\eta) = C_4\xi^3 + C_5\xi\eta^2 + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m+\xi B_m)e^{-\sqrt{3}m\pi\xi/a}\cos\frac{\sqrt{3}m\pi\eta}{a} \qquad (13)$$

ในเมื่อ C_4, C_5, A_m และ B_m เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ (arbitary constants) และสมการ (13) นี้สอดคล้องกับสมการ $\nabla^4 f = 0$ โดยอัตโนมัติ

แทนสมการ (13) ลงในสมการ (12) จะได้

$$w^c(x,y) = C_1 + \frac{3}{2}(C_2+C_3)(x^2+y^2) + \frac{3}{4}(C_4+C_5)(x^3-3xy^2)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\Big[e^{-\alpha x}\cos\alpha y + e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) + e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big]A_m$$

$$+\Big[xe^{-\alpha x}\cos\alpha y - \frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) - \frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big]B_m\Big\}$$

..... (14)

ในเมื่อ $\alpha = \sqrt{3}m\pi/a$

โดยการดิฟเฟอร์เรนชิเอทสมการ (14) ก็อาจจะหาฟังก์ชั่นของโมเมนต์และแรงเฉือนได้ในรูปของ

$$
\begin{aligned}
M_x^c(x,y) = & -3(1+\nu)(C_2+C_3)D - \frac{9}{2}(1-\nu)(C_4-C_5)Dx \\
& -(1-\nu)D\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\Big[e^{-\alpha x}\cos\alpha y - \frac{1}{2}e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) - \frac{1}{2}e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) \\
& -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big]\alpha^2 A_m \\
& +\Big[-\frac{2}{1-\nu}e^{-\alpha x}\cos\alpha y + \alpha x e^{-\alpha x}\cos\alpha y - \frac{1}{2}\frac{1+3\nu}{1-\nu}e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) - \frac{1}{2}\frac{1+3\nu}{1-\nu}e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) \\
& +\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) + \frac{1}{4}\alpha(x-\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) \\
& +\frac{1}{4}\alpha(x+\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha(x-\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) \\
& +\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha(x+\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big]\alpha B_m\Big\}
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
V_x^c(x,y) = & \frac{9}{2}(1-\nu)(C_4-C_5)D - (1-\nu)D\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\Big[e^{-\alpha x}\cos\alpha y + e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) + e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big]\alpha^3 A_m \\
& +\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}e^{-\alpha x}\cos\alpha y + \alpha x e^{-\alpha x}\cos\alpha y - \frac{1}{4}\frac{11-7\nu}{1-\nu}e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) - \frac{1}{4}\frac{11-7\nu}{1-\nu}e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) \\
& +\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) - \frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) \\
& -\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)e^{\frac{\alpha}{2}(x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big]\alpha^2 B_m\Big\}
\end{aligned} \tag{16}
$$

จากสมการดังกล่าวจะเห็นได้ว่าฟังก์ชั่นการโก่ง, โมเมนต์ดัด M_x^c และ แรงเฉือนเคียร์-คอฟ V_x^c มีรูปยุ่งยาก ทำให้การหาคำตอบที่แน่นอน (exact solution) ให้สอดคล้องกับสภาพของขอบทั้งหมดโดยตรงนั้นทำได้ลำบาก ฉะนั้นจึงกลับไปพิจารณาสมการ (13) โดยให้ฟังก์ชั่น $f(\xi,\eta)$ มีคุณสมบัติดังนี้

$$-D\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\nu\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right]_{\xi=-\frac{a}{3},\eta} = 0 \qquad (17ก)$$

$$-D\left[\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 f}{\partial \xi\partial \eta^2}\right]_{\xi=-\frac{a}{3},\eta} = 2\sqrt{3}\,\frac{\varepsilon}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j+\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j\cos\alpha\eta \qquad (17ข)$$

เมื่อสมการ (17ก) เป็นเงื่อนไขว่าโมเมนต์ที่ขอบ $\xi=-a/3$ ซึ่งเกิดจากฟังก์ชั่น $f(\xi,\eta)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนสมการ (17ข) นั้นเป็นเงื่อนไขที่กำหนดให้ค่า แรงเฉือนเคียร์คอฟ ที่มาจากฟังก์ชั่น $f(\xi,\eta)$ มีค่าเท่ากับผลรวมของ υ_j บนระยะ 2ε โดยมีศูนย์กลางห่างจากแกน ξ เป็นระยะ c_j ซึ่งเราสามารถกำหนดให้ υ_j และ c_j มีค่าเท่าใดก็ได้ ดังตัวอย่างที่แสดงไว้ในรูป 4 ก

แทนสมการ (13) ลงในสมการ (17) จะได้

$$-D(-2aC_4-\frac{2}{3}a\nu C_5)-D\sum_{m=1}^{\infty}\left[(1-\nu)\alpha^2A_m-2\alpha B_m-(1-\nu)\frac{a\alpha^2}{3}B_m\right]e^{a\alpha/3}\cos\alpha\eta = 0 \qquad (18)$$

และ

$$-D[6C_4+2(2-\nu)C_5]-D\sum_{m=1}^{\infty}\left[(1-\nu)\alpha^3A_m+(1+\nu)\alpha^2B_m-(1-\nu)\frac{a\alpha^2}{3}B_m\right]e^{a\alpha/3}\cos\alpha\eta$$

$$=2\sqrt{3}\,\frac{\varepsilon}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j+\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j\cos\alpha\eta \qquad (19)$$

สมการ (18) และ (19) จะเป็นจริงต่อเมื่อ

$$-2aC_4 - \frac{2}{3}a\nu C_5 \qquad = 0 \tag{20}$$

$$\left[(1-\nu)\alpha^2 A_m - 2\alpha B_m - (1-\nu)\frac{a\alpha^2}{3}B_m\right]e^{a\alpha/3} \qquad = 0 \tag{21}$$

$$6C_4 + 2(2-\nu)C_5 \qquad = -2\sqrt{3}\frac{\varepsilon}{aD}\sum_{j=1}^{N} v_j \tag{22}$$

และ

$$\left[(1-\nu)\alpha^3 A_m + (1+\nu)\alpha^2 B_m - (1-\nu)\frac{a\alpha^2}{3}B_m\right]e^{a\alpha/3} = -\frac{4}{\pi D}\sum_{j=1}^{N}\frac{v_j}{m}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \tag{23}$$

แก้สมการ (20), (21) และ (23) เพื่อหา C_4, C_5, A_m และ B_m ในเทอมของ v_j ได้ในรูป

$$C_4 = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\varepsilon}{aD}\sum_{j=1}^{N} v_j \tag{24ก}$$

$$C_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{1-\nu}\frac{\varepsilon}{aD}\sum_{j=1}^{N} v_j \tag{24ข}$$

หรือ

$$C_4 - C_5 = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{3+\nu}{1-\nu}\frac{\varepsilon}{aD}\sum_{j=1}^{N} v_j \tag{25}$$

และ

$$A_m = -4\sqrt{3}\frac{1}{3+\nu}\frac{1}{aD}\sum_{j=1}^{N}\frac{v_j}{\alpha^4}\left(\frac{2}{1-\nu} + \frac{a\alpha}{3}\right)e^{-a\alpha/3}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \tag{26ก}$$

$$B_m = -4\sqrt{3}\frac{1}{3+\nu}\frac{1}{aD}\sum_{j=1}^{N}\frac{v_j}{\alpha^3}e^{-a\alpha/3}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \tag{26ข}$$

แทน C_4, C_5, A_m และ B_m ลงในสมการ (14) จะได้ w^c ในรูปของ

$$w^c(x,y) = C_1 + \frac{3}{2}(C_2+C_3)(x^2+y^2) + \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{3+\nu}{1-\nu}\frac{\varepsilon}{aD}(x^3-3xy^2)\sum_{j=1}^{N}v_j$$

$$-4\sqrt{3}\frac{1}{3+\nu}\frac{1}{aD}\sum_{j=1}^{N}v_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^4}\Big\{\Big(\frac{2}{1-\nu}+\frac{a\alpha}{3}+\alpha x\Big)e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)}\cos\alpha y$$

$$+\Big[\frac{2}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y)$$

$$+\Big[\frac{2}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (27)$$

และเมื่อดิฟเฟอร์เรนชิเอทสมการ (27) หาฟังก์ชั่นของโมเมนต์ และแรงเฉือนตามแนวขอบ $x = -a/3$ จะได้

$$M_x^c\Big(-\frac{a}{3},y\Big) = -3(1+\nu)D(C_2+C_3) + \frac{\sqrt{3}}{4}(3+\nu)\varepsilon\sum_{j=1}^{N}v_j$$

$$-2\sqrt{3}\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}v_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}\Big\{\Big[3\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)$$

$$-\Big[3\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}+y\Big) - \sqrt{3}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)$$

$$-\sqrt{3}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}+y\Big)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (28)$$

$$V_x^c(-\frac{a}{3},y) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(3+\nu)\frac{\varepsilon}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j + 4\sqrt{3}\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\Big\{\frac{3+\nu}{1-\nu}\cos\alpha y$$

$$-\Big[\frac{1}{4}\frac{3-7\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)-\Big[\frac{1}{4}\frac{3-7\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\frac{a}{\sqrt{3}}+y)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\frac{a}{\sqrt{3}}+y)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (29)$$

ถ้าพิจารณาผลของ υ_j ค่าหนึ่ง ๆ จะได้กราฟของโมเมนต์ดัด M_x^c และแรงเฉือนเคียร์-คอฟ V_x^c ที่ได้จากสมการ (28) และ (29) อยู่ในลักษณะดังแสดงในรูป 4 ข และจะเห็นได้ว่าค่าโมเมนต์ดัด M_x^c ที่ขอบมีค่าน้อยและผันแปรไปตามจุดต่าง ๆ ไม่มากนัก ส่วนค่าของ แรงเฉือนเคียร์คอฟ V_x^c นั้นจะมีลักษณะที่กระจายหนาแน่นเฉพาะในช่วงที่กำหนดไว้ ($c_j-\varepsilon < y < c_j+\varepsilon$)

จากที่ได้พิจารณาข้างต้นนั้นเราอาจแทนสภาพของขอบที่แท้จริงตามสมการ (8ข) ซึ่งกำหนดให้โมเมนต์ดัดที่ขอบเป็นศูนย์ด้วยเงื่อนไขที่ว่าผลรวมของโมเมนต์ที่ขอบเป็นศูนย์ ซึ่งอาจเขียนได้ในรูปดังนี้

$$\int_0^{a/\sqrt{3}} M_x^c(-\frac{a}{3},y)\,dy = 0 \qquad (30)$$

ส่วนสมการ (8ค) ซึ่งกำหนดให้ แรงเฉือนเคียร์คอฟ ที่ขอบเป็นศูนย์นั้นก็จะแทนด้วยเงื่อนไขที่ว่าค่า แรงเฉือนเคียร์คอฟ เป็นศูนย์ที่จุด y_i เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots N$ ดังนี้

$$V_x^s(-\frac{a}{3},y_i) + V_x^c(-\frac{a}{3},y_i) = 0 \quad ; \; y_i = c_j \; ; \; i = 1,2,3,\ldots N \qquad (31)$$

โดยการแทนสมการ (27), (28) และ (29) และ V_x^s (ดังแสดงไว้ในภาคผนวก ก) ลงในสมการ (8ก), (30) และ (31) ตามลำดับ จะได้ชุดของสมการดังนี้

$$C_1 + \frac{2}{3}a^2(C_2+C_3) + \frac{\sqrt{3}}{27}\frac{3+\nu}{1-\nu}\frac{a^2\varepsilon}{D}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j - 4\sqrt{3}\frac{1}{3+\nu}\frac{1}{aD}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^4}\Big[\frac{4}{1-\nu}\cos m\pi$$

$$+\Big(\frac{2}{1-\nu}+a\alpha\Big)e^{-a\alpha}\Big]\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad = \quad 0$$

(32)

$$-\sqrt{3}(1+\nu)aD(C_2+C_3) + \frac{1}{4}(3+\nu)a\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j - 6\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^3}\Big[\frac{3+\nu}{1-\nu}\cos m\pi$$

$$-\Big(\frac{3+\nu}{1-\nu}+a\alpha\Big)e^{-a\alpha}\Big]\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad = \quad 0 \qquad (33)$$

และ

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}(3+\nu)\frac{\varepsilon}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j + 4\sqrt{3}\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\Big\{\frac{3+\nu}{1-\nu}\cos\alpha y_i$$

$$-\Big[\frac{1}{4}\frac{3-7\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y_i)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y_i)}\cos\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y_i\Big) - \Big[\frac{1}{4}\frac{3-7\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y_i)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y_i)}\cos\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}+y_i\Big)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(a+\sqrt{3}y_i)}\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y_i\Big) - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(a-\sqrt{3}y_i)}\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}+y_i\Big)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j$$

$$= -(1-\nu)\frac{P}{2a}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{3-\nu}{1-\nu}-\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\Big)\cosh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y_i\Big) + \frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y_i\Big)\sinh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y_i\Big)\Big]\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{3-\nu}{1-\nu}-\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\Big)\cosh\frac{n\pi y_i}{a} + \frac{n\pi y_i}{a}\sinh\frac{n\pi y_i}{a}\Big]\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\Big\} \quad ; \quad i = 1,2,3,\dots N$$

(34)

ในที่นี้จะเห็นได้ว่าสมการ (32), (33) และชุดของสมการ (34) ประกอบด้วยจำนวนสมการทั้งหมด N+2 สมการโดยมีตัวไม่ทราบค่า (unknowns) N+2 ตัว ดังนี้คือ $C_1, C_2 + C_3$ และ υ_j; $j = 1,2,3, \ldots N$ ดังนั้นเมื่อกำหนดค่า c_j; $j = 1,2,3, \ldots N$ และ y_i; $i = 1,2,3,\ldots N$ แล้วก็ย่อมสามารถแก้สมการหาค่าตัวไม่ทราบค่าทั้งหมดได้

จากสมการ (32) และ (33) ก็อาจแก้สมการหาค่า C_1 และ $C_2 + C_3$ ในเทอมของ υ_j ได้ดังนี้

$$C_1 = -\frac{\sqrt{3}}{54}\frac{(3+\nu)(5-\nu)}{(1-\nu)(1+\nu)}\frac{\varepsilon a^2}{D}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j - \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{1}{(1+\nu)(3+\nu)}\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^3}\Big\{\Big[(1-\nu)a\alpha$$

$$-2\nu-6\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{a\alpha}\Big]e^{-a\alpha}-(3+\nu+12\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{a\alpha})\cos m\pi\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (35)$$

และ

$$C_2+C_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{\varepsilon}{D}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j + 2\sqrt{3}\frac{1-\nu}{(1+\nu)(3+\nu)}\frac{1}{a^2D}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^3}\Big[(\frac{3+\nu}{1-\nu}+a\alpha)e^{-a\alpha}$$

$$-\frac{3+\nu}{1-\nu}\cos m\pi\Big]\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (36)$$

และโดยอาศัยเครื่องจักรประมวลช่วย ก็สามารถแก้ชุดของสมการ (34) เพื่อหาค่าของ υ_j ออกมาได้ทั้งหมด

ฉะนั้นเมื่อแทนสมการ (27) ซึ่งทราบค่าของ C_1, $C_2 + C_3$ และ υ_j; $j=1,2,3,\ldots N$ ลงในสมการ (5) ก็จะได้คำตอบโดยประมาณของระยะโก่งดังนี้

$$w(x,y) = w^s(x,y) - \frac{\sqrt{3}}{54}\frac{(3+\nu)(5-\nu)}{(1-\nu)(1+\nu)}\frac{\varepsilon a^2}{D}\sum_{j=1}^{N} v_j$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{1}{(1+\nu)(3+\nu)}\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{N} v_j \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^3}\Big\{\Big[(1-\nu)a\alpha - 2\nu - 6\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{a\alpha}\Big]e^{-a\alpha}$$

$$-\Big[(3+\nu) + 12\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{a\alpha}\Big]\cos m\pi\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j + \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{3+\nu}{1-\nu}\frac{\varepsilon}{D}(x^2+y^2)\sum_{j=1}^{N} v_j$$

$$+3\sqrt{3}\frac{1-\nu}{(1+\nu)(3+\nu)}\frac{x^2+y^2}{a^2 D}\sum_{j=1}^{N} v_j \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^3}\Big[\Big(\frac{3+\nu}{1-\nu} + a\alpha\Big)e^{-a\alpha} - \frac{3+\nu}{1-\nu}\cos m\pi\Big]\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{3+\nu}{1-\nu}\frac{\varepsilon}{aD}(x^3-3xy^2)\sum_{j=1}^{N} v_j - 4\sqrt{3}\frac{1}{3+\nu}\frac{1}{aD}\sum_{j=1}^{N} v_j \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^4}\Big\{\Big(\frac{2}{1-\nu} + \frac{a\alpha}{3} + \alpha x\Big)e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)}\cos\alpha y$$

$$+\Big[\frac{2}{1-\nu} + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y)$$

$$+\Big[\frac{2}{1-\nu} + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (37)$$

ในเมื่อ w^s เป็นฟังก์ชั่นการโก่งของแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารองรับแบบธรรมดา ดังแสดงไว้ในภาคผนวก ก.

อนึ่ง โดยการดิฟเฟอร์เรนชิเอทสมการ (37) ก็อาจหาคำตอบของหน่วยแรงต่าง ๆ ได้ทั้งหมดดังนี้

$$
\begin{aligned}
M_x(x,y) = {} & M_x^{S}(x,y) - \frac{\sqrt{3}}{4}(3+\nu)\left(1+3\frac{x}{a}\right)\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j - 6\sqrt{3}\,\frac{1-\nu}{3+\nu}\,\frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^3}\Big[\Big(\frac{3+\nu}{1-\nu}+a\alpha\Big)e^{-a\alpha} \\
& - \frac{3+\nu}{1-\nu}\cos m\pi\Big]\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \\
& + 2\sqrt{3}\,\frac{1-\nu}{3+\nu}\,\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}\Big\{2\Big(\frac{a\alpha}{3}+\alpha x\Big)e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)}\cos\alpha y - \Big[3\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) \\
& - \Big[3\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) - \sqrt{3}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) \\
& - \sqrt{3}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_y(x,y) = {} & M_y^{S}(x,y) - \frac{\sqrt{3}}{4}(3+\nu)\left(1-3\frac{x}{a}\right)\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j - 6\sqrt{3}\,\frac{1-\nu}{3+\nu}\,\frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^3}\Big[\Big(\frac{3+\nu}{1-\nu}+a\alpha\Big)e^{-a\alpha} \\
& - \frac{3+\nu}{1-\nu}\cos m\pi\Big]\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \\
& - 2\sqrt{3}\,\frac{1-\nu}{3+\nu}\,\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}\Big\{2\Big(2\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{a\alpha}{3}+\alpha x\Big)e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)}\cos\alpha y + \Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) \\
& + \Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y) - \sqrt{3}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y) \\
& - \sqrt{3}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (39)
\end{aligned}
$$

$$M_{xy}(x,y) = -M_{yx}(x,y) = M^S_{xy}(x,y) - 4\sqrt{3}\,\frac{1-\nu}{3+\nu}\,\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N} v_j \Big[\!\Big[\frac{3}{16}\,\frac{(3+\nu)^2}{1-\nu}\,\varepsilon y + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2}\Big\{\Big(\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{a\alpha}{3} + \alpha x\Big) e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)} \sin\alpha y$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y\Big)\Big] e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y)} \cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x + y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y\Big)\Big] e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y)} \cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x - y)$$

$$- \frac{1}{2}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y\Big)\Big] e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y)} \sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x + y) - \frac{1}{2}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y\Big)\Big] e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y)} \sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x - y)\Big\} \cdots$$

$$\cdots \sin\alpha\varepsilon \cos\alpha c_j \Big]\!\Big] \qquad (40)$$

$$Q_x(x,y) = Q^S_x(x,y) + 4\sqrt{3}\,\frac{1}{3+\nu}\,\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N} v_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\Big[2e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)} \cos\alpha y - e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y)} \cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

$$- e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y)} \cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x - y) + \sqrt{3}\, e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y)} \sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

$$+ \sqrt{3}\, e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y)} \sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x - y)\Big] \sin\alpha\varepsilon \cos\alpha c_j \qquad (41)$$

$$Q_y(x,y) = Q^S_y(x,y) + 4\sqrt{3}\,\frac{1}{3+\nu}\,\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N} v_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\Big[2e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)} \sin\alpha y + \sqrt{3}\, e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y)} \cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

$$- \sqrt{3}\, e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y)} \cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x - y) + e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x + \sqrt{3}y)} \sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

$$- e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a - x - \sqrt{3}y)} \sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x - y)\Big] \sin\alpha\varepsilon \cos\alpha c_j \qquad (42)$$

$$V_x(x,y) = V_x^s(x,y) + \frac{3\sqrt{3}}{4}(3+\nu)\frac{\epsilon}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j + 4\sqrt{3}\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\Big\{\Big(\frac{3+\nu}{1-\nu}+\frac{a\alpha}{3}+\alpha x\Big)e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)}\cos\alpha y$$

$$-\Big[\frac{1}{4}\frac{3-7\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y)$$

$$-\Big[\frac{1}{4}\frac{3-7\nu}{1-\nu}-\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y)+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (43)$$

และ

$$V_y(x,y) = V_y^s(x,y) + 4\sqrt{3}\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\Big\{\Big(2-\frac{a\alpha}{3}-\alpha x\Big)e^{-\alpha(\frac{a}{3}+x)}\sin\alpha y$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y)-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{5-\nu}{1-\nu}e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\cos\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)$$

$$+\Big[\frac{1}{4}\frac{7+5\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x+\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x+y)$$

$$-\Big[\frac{1}{4}\frac{7+5\nu}{1-\nu}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y\Big)\Big]e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{2}{3}a-x-\sqrt{3}y)}\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3}x-y)\Big\}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (44)$$

สำหรับฟังก์ชั่นของแรงต้าน (reaction) ที่จุดรองรับ (support) นั้น หาได้ในรูปดังนี้

$$R = 2M_{xy}\left(-\frac{a}{3},\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{2}(3+\nu)\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\nu_j - 12\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}\nu_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2}\Big[\frac{1+\nu}{1-\nu}\cos m\pi$$

$$-\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}+a\alpha\right)e^{-a\alpha}\Big]\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j \qquad (45)$$

ในเมื่อ M_x, M_y เป็นโมเมนต์ดัดต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งฉากกับแกน X และ Y ตามลำดับ M_{xy}, M_{yx} เป็นโมเมนต์บิดต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งฉากกับแกน X และY Q_x, Q_y เป็นแรงเฉือนต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งฉากกับแกน X และ Y V_x, V_y เป็น แรงเฉือนเคียร์คอฟ ต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งได้ฉากกับแกน X และ Y R คือค่าแรงต้าน ที่จุดรองรับของแผ่นพื้น สำหรับค่า $M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s, M_{yx}^s, Q_x^s, Q_y^s, V_x^s, V_y^s$ นั้นได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก.