บทที่ ๓

การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของความเชื่อถือได้ของระบบ

ถ้าให้ $P(r,t)$ = ความน่าจะเป็นที่มี r ชิ้นส่วนที่ยังคงใช้งานได้ เมื่อเวลา t โดยที่ $r = 0,1,2,\ldots\ldots,n$ เมื่อระบบประกอบด้วย n ชิ้นส่วนที่เหมือนกัน สมมุติว่าก่อนเริ่มต้นใช้งานเรามีการตรวจเพื่อให้แน่ใจว่าทุกชิ้นส่วนใช้งานได้

$$\therefore \quad P(n,0) = 1$$

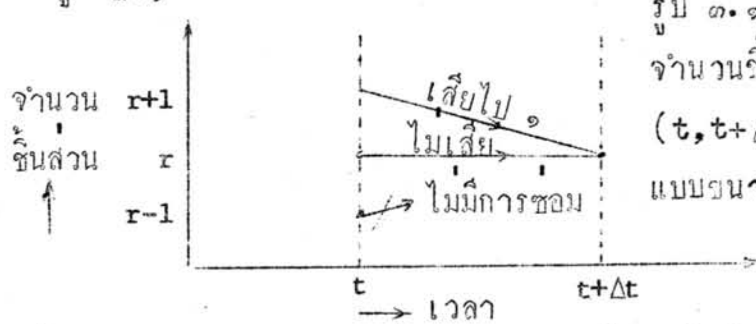
และ $P(r,0) = 0$ เมื่อ $r = 0,1,\ldots\ldots, n-1$

ให้ λ = อัตราการเสียของแต่ละชิ้นส่วน (ใน n ชิ้นส่วน) ต่อระยะเวลา

μ = อัตราการซ่อมของแต่ละชิ้นส่วนที่เสียไป จำนวนชิ้น/ระยะเวลา

๓.๑ ระบบที่ต่อแบบขนาน

ถ้านำ n ชิ้นส่วนนั้นมาต่อแบบขนาน และระหว่างใช้งานไม่มีการซ่อมหรือแทนที่ชิ้นส่วนที่เสียไป การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของระบบนี้ เราได้จากการพิจารณาหนทางต่าง ๆ ตามรูป ๓.๑



รูป ๓.๑ การเปลี่ยนแปลงจำนวนชิ้นส่วน ในช่วงเวลา $(t,t+\Delta t)$ ของระบบที่ต่อแบบขนาน เมื่อไม่มีการซ่อม

ให้ $t \geqslant 0$ และ Δt เป็นช่วงเวลาสั้น ๆ ซึ่งจะมีชิ้นส่วนเสียในช่วงนี้ไม่เกิน ๑ ชิ้นส่วน

จากรูปจะได้ว่า

$$P(n,t+\Delta t) = P(n,t)\left[1 - n\lambda\Delta t\right] + o(\Delta t)$$

หมายความว่า ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนทั้งหมดยังคงใช้งานได้ เมื่อเวลา $t+\Delta t$ ก็คือ ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนทั้งหมดใช้งานได้เมื่อเวลา t และในช่วง Δt ถัดมา ทุกชิ้นส่วน (n ชิ้นส่วน) ไม่มีการเสียเลย

$o(\Delta t)$ เป็น function ที่มี (Δt) ยกกำลังตั้งแต่สองขึ้นไป

$$\therefore \quad \frac{P(n,t+\Delta t) - P(n,t)}{\Delta t} = -n\lambda P(n,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \rightarrow 0$; $\therefore \quad \frac{d\,P(n,t)}{dt} = -n\lambda\, P(n,t) \qquad \text{-----(1)}$

$$\because \quad P(r,t+\Delta t) = P(r,t)\left[1-r\lambda\Delta t\right] + P(r+1,t)\left[(r+1)\lambda\Delta t\right] + o(\Delta t)$$

เมื่อ $r = 1,2,\ldots\ldots,n-1$

หมายความว่า ความน่าจะเป็นที่มี r ชิ้นส่วนใช้งานได้เมื่อเวลา $t+\Delta t$ ก็คือ ผลรวมของความน่าจะเป็นที่มี r ชิ้นส่วนใช้การได้เมื่อเวลา t ในช่วง Δt ถัดมา r ชิ้นส่วนนั้นไม่มีการเสียเลย และความน่าจะเป็นที่มี $(r+1)$ ชิ้นส่วนใช้การได้เมื่อเวลา t ในช่วง Δt ถัดมาหนึ่งใน $(r+1)$ ชิ้นส่วนนั้นเกิดเสียไป

$$\therefore \quad \frac{P(r,t+\Delta t) - P(r,t)}{\Delta t} = -r\lambda P(r,t) + (r+1)\lambda P(r+1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \rightarrow 0$; $\therefore \quad \frac{d\,P(r,t)}{dt} = -r\lambda P(r,t) + (r+1)\lambda P(r+1,t) \text{-----(2)}$

เมื่อ $r = 1,2,\ldots\ldots,n-1$

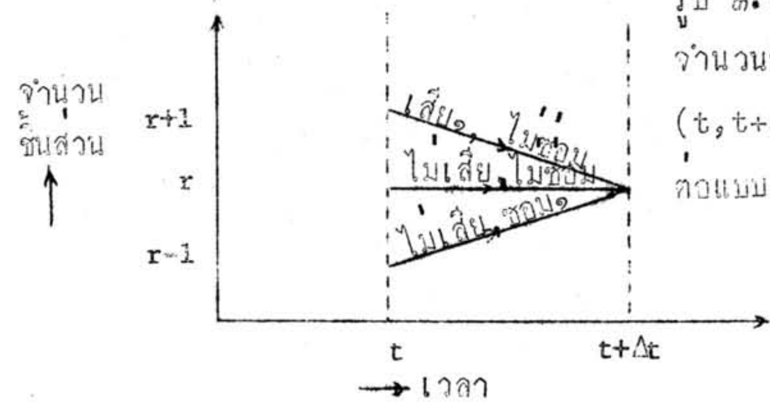
ถ้า $r = 0$ $\quad \because P(o,t+\Delta t) = P(o,t) + P(1,t)\left[\lambda\Delta t\right] + o(\Delta t)$

หมายความว่า ความน่าจะเป็นที่ไม่มีชิ้นส่วนใดใช้การได้เลย เมื่อเวลา $t+\Delta t$ ก็คือ ผลรวมของความน่าจะเป็นที่ไม่มีชิ้นส่วนใดใช้การได้เลยเมื่อเวลา t และความน่าจะเป็นที่เคยมีชิ้นส่วนหนึ่งใช้การได้เมื่อเวลา t แต่เสียไปในช่วง Δt ถัดมา

$$\therefore \quad \frac{P(o,t+\Delta t) - P(o,t)}{\Delta t} = \lambda P(1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \rightarrow 0;\quad \therefore \dfrac{dP(0,t)}{dt} = \lambda P(1,t)$ ------(3)

นอกจากนี้ถ้าระบบที่ต่อขนานนี้ มีการซ่อมแซมชิ้นส่วนกลับเข้ามาในระบบ หรือมีการแทนที่ชิ้นส่วนเสียด้วยชิ้นส่วนใหม่ (คือ) การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของระบบนี้ จะขึ้นอยู่กับ λ (failure rate) และ μ (repair rate หรือ replace rate) ตามรูป ๓.๒



รูป ๓.๒ การเปลี่ยนแปลงจำนวนชิ้นส่วนในช่วงเวลา $(t, t+\Delta t)$ ของระบบที่ต่อแบบขนาน เมื่อมีการซ่อม

$$\therefore \quad P(n, t+\Delta t) = P(n,t)\left[1-n\lambda\Delta t\right] + P(n-1,t)\left[1-(n-1)\lambda\Delta t\right]\left[\mu\Delta t\right] + o(\Delta t)$$

$$\therefore \quad \frac{P(n,t+\Delta t)-P(n,t)}{\Delta t} = -n\lambda P(n,t)+\mu P(n-1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \rightarrow 0;\quad \therefore \dfrac{dP(n,t)}{dt} = -n\lambda P(n,t) + \mu P(n-1,t)$ ------(4)

เมื่อ $r = 2, \ldots\ldots, n-1$

$$\begin{aligned}\therefore \quad P(r,t+\Delta t) &= P(r,t)\left[1-r\lambda\Delta t\right]\left[1-(n-r)\mu\Delta t\right] \\ &+ P(r+1,t)\left[(r+1)\lambda\Delta t\right]\left[1-(n-r-1)\mu\Delta t\right] \\ &+ P(r-1,t)\left[1-(r-1)\lambda\Delta t\right]\left[(n-r+1)\mu\Delta t\right] \\ &+ o(\Delta t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \frac{P(r,t+\Delta t)-P(r,t)}{\Delta t} &= -r\lambda P(r,t)-(n-r)\mu P(r,t)+(r+1)\lambda P(r+1,t) \\ &+ (n-r+1)\mu P(r-1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$= -\left[r\lambda + (n-r)\mu\right] P(r,t) + (r+1)\lambda P(r+1,t)$$

$$- (n-r+1)\mu P(r-1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \longrightarrow 0$;

$$\therefore \frac{dP(r,t)}{dt} = -\left[r\lambda + (n-r)\mu\right] P(r,t) + (r+1)\lambda P(r+1,t)$$

$$- (n-r+1)\mu P(r-1,t) \qquad \text{------(5)}$$

เมื่อ $r = 2,3,\ldots\ldots,n-1$

เมื่อ $r = 1$

$$P(1,t+\Delta t) = P(1,t)\left[1-\lambda\Delta t\right]\left[1-(n-1)\mu\Delta t\right]$$

$$+ P(2,t)\left[2\lambda\Delta t\right]\left[1-(n-2)\mu\Delta t\right] + o(\Delta t)$$

$$\therefore \frac{P(1,t+\Delta t)-P(1,t)}{\Delta t} = -\lambda P(1,t)-(n-1)\mu P(1,t)+ 2\lambda P(2,t)+ \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= -\left[\lambda + (n-1)\mu\right] P(1,t) + 2\lambda P(2,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \longrightarrow 0$;

$$\therefore \frac{d\,P(1,t)}{dt} = -\left[\lambda + (n-1)\mu\right] P(1,t) + 2\lambda P(2,t) \qquad \text{------(6)}$$

เมื่อ $r = 0 \quad P(0,t+\Delta t) = P(0,t)+P(1,t)\left[\lambda\Delta t\right]\left[1-(n-1)\mu\Delta t\right] + o(\Delta t)$

$$\therefore \frac{P(0,t+\Delta t)-P(0,t)}{\Delta t} = \lambda P(1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \longrightarrow 0$; $\therefore \dfrac{dP(0,t)}{dt} = \lambda P(1,t)$ ------(7)

๓.๒ <u>ระบบที่ต่อแบบ stand-by</u>

ถ้านำ n ชิ้นส่วนนั้นมาต่อแบบ **stand-by** และระหว่างใช้งานไม่มีการซ่อมหรือใช้ชิ้นส่วนใหม่มาแทนชิ้นส่วนที่เสียไป การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของระบบ คิดทำนองเดียวกับการต่อแบบขนาน แต่เราใช้งานเพียงทีละชิ้นส่วนเดียว ดังนั้นถึงจะมี **r** ชิ้นส่วนที่ไม่เสีย อัตราการเสียในช่วง Δt ก็จะเป็นอัตราการเสียของ ๑ ชิ้นส่วนในช่วง Δt

เท่านั้น คือ $\lambda \Delta t$

$$P(n,t+\Delta t) = P(n,t)[1-\lambda\Delta t] + o(\Delta t)$$

$$\therefore \quad \frac{P(n,t+\Delta t) - P(n,t)}{\Delta t} = -\lambda P(n,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \longrightarrow 0; \quad \therefore \frac{dP(n,t)}{dt} = -\lambda P(n,t)$ ------(8)

ถ้า $r = 1,2,\ldots,n-1 \quad P(r,t+\Delta t) = P(r,t)[1-\lambda\Delta t] + P(r+1,t)[\lambda\Delta t] + o(\Delta t)$

$$\therefore \quad \frac{P(r,t+\Delta t)-(P(r,t)}{\Delta t} = -\lambda P(r,t) + \lambda P(r+1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \longrightarrow 0; \quad \therefore \frac{d\,P(r,t)}{dt} = -\lambda P(r,t) + \lambda P(r+1,t)$ ------(9)

เมื่อ $r = 1,2,\ldots,n-1$

ถ้า $r = 0 \qquad P(o,t+\Delta t) = P(o,t)+P(1,t)[\lambda\Delta t] + o(\Delta t)$

$$\therefore \quad \frac{P(o,t+\Delta t)- P(o,t)}{\Delta t} = \lambda P(1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \longrightarrow 0; \quad \therefore \frac{dP(o,t)}{dt} = \lambda P(1,t)$ ------(10)

นอกจากนี้ ถ้าระบบ stand-by นี้ มีการซ่อมหรือแทนที่ชิ้นส่วนที่เสีย การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของระบบนี้ จะเป็น

$$P(n,t+\Delta t) = P(n,t)[1-\lambda\Delta t]+P(n-1,t)[1-\lambda\Delta t][\mu\Delta t]+o(\Delta t)$$

$$\therefore \quad \frac{P(n,t+\Delta t)-P(n,t)}{\Delta t} = -\lambda P(n,t) + \mu P(n-1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \longrightarrow o, \quad \frac{dP(n,t)}{dt} = -\lambda P(n,t) + \mu P(n-1,t)$ ------(11)

ถ้า $r = 2,\ldots,n-1$

$$\begin{aligned} P(r,t+\Delta t) = {} & P(r,t)[1-\lambda\Delta t][1-(n-r)\mu\Delta t] \\ & +P(r+1,t)[\lambda\Delta t][1-(n-r-1)\mu\Delta t] \\ & + P(r-1,t)[1-\lambda\Delta t][n-r+1)\mu\Delta t] + o(\Delta t) \end{aligned}$$

$$\frac{P(r,t+\Delta t) - P(r,t)}{\Delta t} = -\lambda P(r,t)-(n-r)\mu P(r,t)+\lambda P(r+1,t) + (n-r+1)\mu P(r-1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \to o$; $\frac{dP(r,t)}{dt} = -[\lambda+(n-r)\mu]\ P(r,t)+\lambda P(r+1,t)+(n-r+1)\mu P(r-1,t)$

$r = 2,3,\ldots,n-1$ -----(12)

ถ้า $r = 1$ $P(1,t+\Delta t) = P(1,t)[1-\lambda\Delta t][1-(n-1)\mu\Delta t] + P(2,t)[\lambda\Delta t][1-(n-2)\mu\Delta t] + o(\Delta t)$

$$\frac{P(1,t+\Delta t)-(P(1,t)}{\Delta t} = -\lambda P(1,t)-(n-1)\mu P(1,t)+\lambda P(2,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \to o$; $\frac{dP(1,t)}{dt} = -[\lambda+(n-1)\mu]\ P(1,t)+\lambda P(2,t)$ -----(13)

ถ้า $r = o$ $P(o,t+\Delta t) = P(o,t)+P(1,t)[\lambda\Delta t][1-(n-1)\mu\Delta t] + o(\Delta t)$

$$\frac{P(o,t+\Delta t)-P(o,t)}{\Delta t} = \lambda P(1,t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta t \to o$; $\frac{dP(o,t)}{dt} = \lambda P(1,t)$. -----(14)

ทั้งนี้ถือว่า มีคนและเครื่องมือเพียงพอที่จะซ่อมชิ้นส่วนทุกชิ้นที่เสียได้ทุกชิ้น (หรือมีชิ้นส่วนมากพอที่จะนำมาแทนที่ชิ้นส่วนที่เสีย)

ถ้าการซ่อมหรือการแทนที่ทำได้เพียงทีละชิ้นส่วนเดียว การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของระบบจะเป็น

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = -\lambda P(n,t)+\mu P(n-1,t) \quad \text{-----(15)}$$

$$\frac{dP(r,t)}{dt} = -[\lambda+\mu]P(r,t)+\lambda P(r+1,t)+\mu P(r-1,t) \quad \text{-----(16)}$$

สำหรับ $r = 2,3,\ldots,n-1$

$$\frac{dP(1,t)}{dt} = -[\lambda+\mu]\ P(1,t) + \lambda P(2,t) \quad \text{-----(17)}$$

$$\frac{d\,P(o,t)}{dt} = \lambda P(1,t) \quad \text{-----(18)}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการdifferentialเพื่อหา $P(n,t)$, $P(r,t)$, $P(1,t)$ และ $P(o,t)$ ได้

<u>ตัวอย่าง</u> ระบบหนึ่งประกอบด้วย ๓ ชิ้นส่วน ต่อกันแบบ stand-by อัตราการเสียของชิ้นส่วน ๑ ชิ้นส่วน/ชั่วโมง และอัตราการซ่อม = ๒ ชิ้นส่วน/ชั่วโมง (โดยที่การซ่อมทำได้เพียงครั้งละชิ้นส่วนเท่านั้น)

$\therefore$ สมการ differential ของระบบนี้จะเป็น

$$\frac{d\,P(3,t)}{dt} = -P(3,t) + 2P(2,t) \qquad \text{------(19)}$$

$$\frac{d\,P(2,t)}{dt} = P(3,t) - 3P(2,t) + 2P(1,t) \qquad \text{------(20)}$$

$$\frac{d\,P(1,t)}{dt} = P(2,t) - 3P(1,t) \qquad \text{------(21)}$$

$$\frac{d\,P(o,t)}{dt} = P(1,t) \qquad \text{-----(22)}$$

แก้สมการ differential (19) ถึง (22) ด้วยวิธี Laplace transforms

ให้ $\bar{P}_i(s)$ เป็น Laplace transform ของ $P_i(t)$ หรือ $P(i,t)$

$$\therefore \quad s\bar{P}_3(s) - P_3(o) = -\bar{P}_3(s) + 2\bar{P}_2(s)$$

$$s\bar{P}_2(s) - P_2(o) = \bar{P}_3(s) - 3\bar{P}_2(s) + 2\bar{P}_1(s)$$

$$s\bar{P}_1(s) - P_1(o) = \bar{P}_2(s) - 3\bar{P}_1(s)$$

$$s\bar{P}_o(s) - P_o(o) = \bar{P}_1(s)$$

เมื่อเริ่มต้นใช้งาน($t = o$) ทุกชิ้นส่วนในระบบนี้ไม่เสีย ซึ่งก็คือ ระบบมีพฤติภาพเบื้องต้น $P_3(o) = 1$ และ $P_2(o) = P_1(o) = P_o(o) = o$

$$\therefore \quad (s+1)\bar{P}_3(s) - 2\bar{P}_2(s) = 1$$

$$-\bar{P}_3(s) + (s+3)\bar{P}_2(s) - 2\bar{P}_1(s) = o$$

$$-\bar{P}_2(s) + (s+3)\bar{P}_1(s) = o$$

$$-\bar{P}_1(s) + s\bar{P}_o(s) = o$$

แก้สมการทั้งสี่นี้ด้วย Cramer's rule

$$\therefore \bar{P}_3(s) = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & s+3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & s+3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{vmatrix}$$

โดยที่ $D = \begin{vmatrix} s+1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & s+3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & s+3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{vmatrix} = s\left\{(s+1)(s+3)^2-2(s+1)-2(s+3)\right\}$

$$\therefore \quad \bar{P}_3(s) = \frac{s(s+3)^2 - 2s}{s\left\{(s+1)(s+3)^2-2(s+1)-2(s+3)\right\}}$$

$$= \frac{(s+3)^2-2}{s^3+7s+11s+1}$$

หารากของสมการ $s^3+7s+11s+1 = 0$ (ตามโปรแกรมที่ ๑ ในผนวก ร.) ได้ว่า

$s_1 = -0.097$

$s_2 = -2.194$

$s_3 = -4.709$

$$\therefore \bar{P}_3(s) = \frac{(s+3)^2-2}{(s+0.097)(s+2.194)(s+4.709)}$$

ซึ่ง partial fraction ในรูป $\bar{P}_3(S) = \frac{A}{s+0.097} + \frac{B}{s+2.194} + \frac{C}{s+4.709}$ ได้

$$= \frac{0.665}{s+0.097} + \frac{0.256}{s+2.194} + \frac{0.079}{s+4.709}$$

inverse Laplace transform จะได้

$$P_3(t) = 0.665\, e^{-0.097t} + 0.256\, e^{-2.194t} + 0.079\, e^{-4.709t}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\bar{P}_2(s) = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} s+1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s(s+3)}{s\left\{(s+1)(s+3)^2-2(s+1)-2(s+3)\right\}}$$

$$= \frac{s+3}{(s+0.097)(s+2.194)(s+4.709)}$$

$$= \frac{0.300}{s+0.097} - \frac{0.153}{s+2.194} - \frac{0.147}{s+4.709}$$

$$\therefore P_2(t) = 0.3\ e^{-0.097t} - 0.153\ e^{-2.194t} - 0.147\ e^{-4.709t}$$

$$\bar{P}_1(s) = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} s+1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & s+3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s}{s\left\{(s+1)(s+3)^2-2(s+1)-2(s+3)\right\}}$$

$$= \frac{1}{(s+0.097)(s+2.194)(s+4.709)}$$

$$= \frac{0.1034}{s+0.097} - \frac{0.1896}{s+2.194} + \frac{0.0862}{s+4.709}$$

$$\therefore P_1(t) = 0.1034\ e^{-0.097t} - 0.1896\ e^{-2.194t} + 0.0862\ e^{-4.709t}$$

$$\bar{P}_o(s) = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} s+1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & s+3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & s+3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{s\left\{(s+1)(s+3)^2-2(s+1)-2(s+3)\right\}}$$

$$= \frac{1}{s\left\{(s+0.097)(s+2.194)(s+4.709)\right\}}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1.066}{s+0.097} + \frac{0.0864}{s+2.194} - \frac{0.018}{s+4.709}$$

$$\therefore P_o(t) = 1 - 1.066\, e^{-0.097t} + 0.086\, e^{-2.194t} - 0.018\, e^{-4.709t}$$

เมื่อ $t \rightarrow \infty$ เป็นสภาพอยู่ตัว (Steady state)

$$P_o(t) = 1, \quad P_1(t) = P_2(t) = P_3(t) = 0$$

แสดงว่าเครื่องเสียหมด และการกำหนดความเชื่อถือได้จะต้องกำหนดระยะเวลาที่แน่นอน เช่น เมื่อ ๑๐๐ วัน, ๒ ปี มีความเชื่อถือได้เป็นกี่เปอร์เซ็นต์

ในกรณีที่มีชิ้นส่วนมาก ๆ ต้องแก้สมการ differential หลายสมการ ควรใช้ computer ช่วยแก้สมการ จะทำให้สะดวกและรวดเร็วขึ้น เช่น การแก้สมการ differential (19) ถึง (22) ของระบบ stand-by ดังกล่าวในตัวอย่าง เมื่อใช้ภาษา BASIC กับเครื่อง WANG 2200 ที่โรงเรียนนายเรืออากาศ ซึ่งมี SUBROUTINE สำหรับแก้สมการdifferential โดยวิธีของ Runge-Kutta อยู่แล้ว จะทำได้ง่ายขึ้น

ให้ X(1) = P(o,t)

X(2) = P(1,t)

X(3) = P(2,t)

X(4) = P(3,t)

และให้

$$F(1) = \frac{dP(o,t)}{dt}$$

$$F(2) = \frac{dP(1,t)}{dt}$$

$$F(3) = \frac{dP(2,t)}{dt}$$

$$F(4) = \frac{dP(3,t)}{dt}$$

∴ จาก (19) ถึง (22) เขียนในรูป matrix ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \end{bmatrix}$$

แล้วแก้สมการ differential โดยใช้ matrix นี้ จะได้ program listing และคำตอบตามโปรแกรมที่ ๒ ในผนวก ก.