บทที่ 2

ทฤษฎี และแนวความคิดที่ใช้ในการศึกษา

2.1 ทฤษฎี และแนวความคิดเกี่ยวกับการควบคุมในทางเศรษฐศาสตร์

หลักการของทฤษฎีอ๊อพติมัลคอนโทรล ได้กล่าวมาบ้างแล้วในบทที่ผ่านมา ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานทางทฤษฎี และวิธีการคำนวณหาค่าตัวแปรควบคุมตามแนวคิดของ Chow และของนักเศรษฐมิติบางท่านที่มีผลงานเป็นที่ยอมรับกันทั่วไป

Tinbergen [1] คำนวณหาค่าตัวแปรควบคุมจากแบบจำลองเศรษฐมิติเชิงเส้นตรงแบบสถิต (Statics) โดยแก้สมการดังต่อไปนี้

$$Ay = Cx + Bw \qquad .....i$$

โดยที่ y เวคเตอร์ของตัวแปร Endogenous

x เวคเตอร์ของตัวแปรควบคุม

w เวคเตอร์ของตัวแปร Exogenous ที่ควบคุมไม่ได้

ถ้าให้ y^* เป็นเวคเตอร์ที่ได้มาจากการหาค่าสูงสุด จากสมการเป้าหมาย $J(y)$ และสมมุติให้จำนวนตัวแปรควบคุมเท่ากับจำนวนตัวแปรเป้าหมาย (Endogenous) นั่นคือ การหาค่าตัวแปรควบคุมจะได้จาก

---

[1] ชัยวุฒิ ชัยพันธุ์, การวิจัยขั้นดำเนินงาน สำหรับนักเศรษฐศาสตร์ 1 (คณะเศรษฐศาสตร์ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522), หน้า 96-97.

$$x = C^{-1}Ay - C^{-1}Bw = Gy + Hw \quad .....ii$$

ในเมื่อ $G = C^{-1}A$ และ $H = -C^{-1}B$

แทนค่าตัวแปรเป้าหมาย y^* ลงในสมการที่ i ก็จะได้ค่าตัวแปรควบคุมตามแนวความคิดของ Tinbergen

$$x^* = Gy^* + Hw \quad .....iii$$

วิธีการคำนวณค่าตัวแปรควบคุมของ Chow แตกต่างจาก Tinbergen ตรงที่การวิเคราะห์ของ Chow เป็นแบบพลวัตร โดยมีเรื่องเวลา และ Disturbance Term เข้ามาเกี่ยวข้อง

การหาค่าตัวแปรควบคุมของ Chow นั้นเริ่มจากพิจารณาระบบสมการเชิงเส้นตรงที่ประกอบด้วยตัวแปร Endogenous และ Predetermined สำหรับ Predetermined ซึ่งเป็นตัวแปรถูกกำหนดค่ามาก่อน ยังแบ่งออกเป็น Exogenous,Lagged Endogenous และ Lagged Exogenous ถ้าเขียนความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ เหล่านี้ ออกมาเป็นสมการโครงสร้าง (Structural Form Equations) ก็จะได้

$$a_1y_t + a_2y_{t-1} + \ldots + a_my_{t-m} + c_1x_t + c_2x_{t-1} + \ldots + c_nx_{t-n} + b_t = u_t \quad .....[1]$$

y คือ เวคเตอร์ของตัวแปร Endogenous x คือ เวคเตอร์ของตัวแปร Exogenous a และ c เป็นเมตริกของสัมประสิทธิ์ และ b คือ เวคเตอร์ของค่าคงที่ u_t ที่นำเข้ามาในสมการเป็น disturbances ที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนร่วมเป็นศูนย์ หรือ

$$E(u_t) = 0$$
$$E(u_t u_t') = 0$$

ในการศึกษาแบบจำลองอ๊อพติมัลคอนโทรลนี้ จะจำกัดการวิเคราะห์ให้ตัวแปร Lagged Endogenous มีความล่าของเวลาเพียง t-1 กรณีที่มีสมการใดมีตัวแปรแสดงความล่าของเวลามากกว่า t-1 ให้นำตัวแปรนั้นไปตั้งชื่อเป็นตัวแปรใหม่ ให้มีช่วงความล่าเหลือเพียง t-1 แล้วนำ

ไปรวมเข้าไว้ในเวคเตอร์ของตัวแปร Endogenous ตัวอย่างเช่น สมการการบริโภคเป็นฟังก์ชั่นกับรายได้และระดับการบริโภคปีที่ผ่านมา และระดับการบริโภคสองปีที่ผ่านมา

$$C_t = f(Y_t, C_{t-1}, C_{t-2})$$

สมการใหม่จะเป็น $C_t = f(Y_t, CL_t, CL_{t-1})$

โดยมี $CL_t = C_{t-1}$

$CL_{t-1} = C_{t-2}$

และสำหรับตัวแปร Lagged Exogenous ก็จะให้มีความล่าของเวลาเหลือเพียง t-1 โดยใช้วิธีการเช่นเดียวกับ Lagged Endogenous ดังนั้นระบบสมการที่ [1] ลดลงเหลือ

$$a_1y_t + a_2y_{t-1} + c_1x_t + b_t = u_t \qquad .....[2]$$

เมื่อจัดรูประบบสมการที่ [2] โดยให้ตัวแปร Endogenous อยู่ทางด้านซ้ายส่วนที่เหลือย้ายข้างไปทางขวาของสมการ

$$y_t = -a_1^{-1}a_2y_{t-1} - a_1^{-1}c_1x_t - a_1^{-1}b_t - a_1u_t \qquad .....[3]$$

$$\underset{p\times 1}{y_t} = \underset{p\times p}{A}\underset{p\times 1}{y_{t-1}} + \underset{p\times q}{C}\underset{q\times 1}{x_t} + \underset{p\times 1}{B_t} + \underset{p\times 1}{U_t} \qquad .....[4]$$

โดย $A = -a_1^{-1}a_2$, $C = -a_1^{-1}c_1$, $B = -a_1^{-1}b_t$ และ $U_t = -a_1^{-1}u_t$

เวคเตอร์ y_t ใหม่ที่ได้จากสมการที่ [4] นี้จะเรียกว่าเป็นเวคเตอร์ของ State Variables ซึ่งมีตัวแปรจำนวน p และเวคเตอร์ x_t มีตัวแปรจำนวน q และเวคเตอร์ x_t ในที่นี้จำกัดให้มีเฉพาะตัวแปร Exogenous ที่ควบคุมได้เท่านั้น สำหรับ Exogenous ส่วนที่ควบคุมไม่ได้จะถูกนำไปรวมอยู่ใน B_t ซึ่งเป็นเวคเตอร์ของค่าคงที่

2.2 วิธีการคำนวณหาค่าตัวแปรควบคุม

ในเมื่อจุดประสงค์ของเรา คือ ต้องการควบคุมภาวะการณ์ทางเศรษฐกิจ ให้มีสภาพใกล้เคียงกับภาวะที่เราต้องการหรือที่ตั้งเป้าหมายไว้ให้มากที่สุด อีกนัยหนึ่ง พยายามลดความผิดพลาดจากการควบคุมให้ได้มากที่สุด ในทางคณิตศาสตร์ก็หมายถึงต้องทำ Minimize ฟังก์ชั่นของความแตกต่างดังกล่าว

ถ้าให้ W เป็นฟังก์ชั่นของระบบสมการกำลังสองที่ต้องการ Minimize

$$\underset{}{\text{Minimize}} \quad W = \underset{p\times 1}{(y_t - a_t)'} \; \underset{p\times p}{K_t} \; \underset{p\times 1}{(y_t - a_t)} \qquad .....[5]$$

โดย y_t ในที่นี้กำหนดให้เป็น เวคเตอร์ของ Endogenous ที่แสดงภาวะการณ์ทางเศรษฐกิจที่ต้องการควบคุม ส่วน a_t เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรที่เราตั้งเป้าหมายไว้ สำหรับ K_t นั้นเป็น เมตริกจัตุรัส (Square Matrix) ซึ่งมีคุณสมบัติเป็น Positive Semi-Definite Matrix

เริ่มต้นเราจะพิจารณาปัญหา ณ เวลาปัจจุบัน โดยกำหนดให้ t=T สมการเป้าหมายก็จะเปลี่ยนไปเป็น

$$W_T = (y_T - a_T)'K_T(y_T - a_T) \qquad .....[6]$$

หลังจากนั้น กระจายเทอมในวงเล็บออกเป็น

$$W_T = y_T'K_Ty_T - 2y_T'K_Ta_T + a_T'K_Ta_T$$

ถ้ากำหนดให้ $K_T = H_T$, $K_Ta_T = h_T$ และ $d_T = a_T'K_Ta_T$ สมการใหม่ที่ได้จะเป็น

$$W_T = y_T'H_Ty_T - 2y_T'h_T + d_T \qquad .....[7]$$

นำสมการที่ [4] แทนลงใน [7] แล้วจัดรูปใหม่

$$W_T = (A_T y_{T-1} + C_T x_T + B_T)' H_T (A_T y_{T-1} + C_T x_T + B_T) - 2(A_T y_{T-1} + C_T x_T + B_T)' h_T + d_T$$

$$W_T = (y'_{T-1} A'_T H_T A_T y_{T-1} + y'_{T-1} A'_T H_T B_T + B'_T H_T A_T y_{T-1} + B'_T H_T B_T) + (x'_T C'_T H_T C_T x_T) + [(y'_{T-1} A'_T H_T C_T x_T + x'_T C'_T H_T A_T y_{T-1}) + (x'_T C'_T H_T B_T + B'_T H_T C_T x_T)] - (2y'_{T-1} A'_T h_T + 2B'_T h_T) - 2x'_T C'_T h_T + d_T$$

$$W_T = (A_T y_{T-1} + B_T)' H_T (A_T y_{T-1} + B_T) + x'_T C'_T H_T C_T x_T + 2x'_T C'_T H_T (A_T y_{T-1} + B_T) - 2(A_T y_{T-1} + B_T)' h_T - 2x'_T C'_T h_T + d_T$$

ทำ Partial Derivatives เทียบกับ x_T แล้วกำหนดให้มีค่า = 0

$$\partial W_T / \partial x_T = 2C'_T H_T C_T x_T + 2C'_T H_T A_T y_{T-1} + 2C'_T H_T B_T - 2C'_T h_T = 0$$

$$(C'_T H_T C_T) x_T = -(C'_T H_T A_T) y_{T-1} + C'_T (H_T B_T - h_T)$$

$$x_T = G_T y_{T-1} + g_T \qquad .....[8]$$

โดยที่ $G_T = -(C'_T H_T C_T)^{-1} (C'_T H_T A_T)$ และ $g_T = -(C'_T H_T C_T)^{-1} C'_T (H_T B_T - h_T)$

x_T ที่ได้ในสมการที่ [8] เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรควบคุมที่ต้องการ

นำค่า C_T ไปคูณกับ x_T ที่ได้จากสมการที่ [8] แล้วแทนค่าลงในสมการที่ [4] ก็จะได้

$$Y^*_T = (A_T + C_T G_T) Y_{T-1} + C_T g_T + B_T \qquad .....[9]$$

Y^*_T คือ เวคเตอร์ที่แสดงผลของ State Variables หลังจากดำเนินนโยบายควบคุม

เวคเตอร์ x_T หรือตัวแปรควบคุมในสมการที่ [8] บอกให้ทราบว่าถ้าใช้มาตรการทางเศรษฐกิจเป็น x_T นี้แล้ว จะก่อให้เกิดผลต่อระบบเศรษฐกิจในอัตราใกล้เคียงกับที่เราตั้งเป้าหมายไว้แต่ตอนแรก (คือ a_T) และภาวะเศรษฐกิจที่กำลังควบคุม (Y^*_T) อยู่นี้ อาจกล่าวได้ว่าเป็นสภาวะ ฯ ที่เหมาะสมตามทฤษฎีอ๊อพติมัลคอนโทรล

2.3 การประยุกต์ทฤษฎีลิเนียร์อ๊อพติมัลคอนโทรล

แนวความคิดที่กล่าวมาตั้งแต่ต้น จะนำมาประยุกต์ใช้ได้ต่อเมื่อมีแบบจำลองเศรษฐมิติขึ้นมาก่อน และจะต้องมีคุณสมบัติเป็นแบบจำลองเชิงเส้นตรงด้วย คำว่า "เชิงเส้นตรง" นี้ หมายถึง เชิงเส้นตรงในตัวแปร กล่าวคือ ชื่อตัวแปรในระบบ จะต้องไม่อยู่ในรูปของผลคูณหรือผลหาร พร้อมกับตัวแปรในระบบตัวอื่น ๆ ในเวลาเดียวกัน แต่มียกเว้นบางกรณีที่ตัวแปรในระบบอยู่ในรูปของผลคูณ (หรือผลหาร) พร้อมกับตัวแปรนอกระบบหรือตัวแปรแสดงความล่า บางตัว เพราะสามารถแทนค่าตัวแปรดังกล่าวนั้นขึ้นก่อน ให้เหลือเพียงตัวแปรภายในระบบเพียงตัวเดียวในที่สุด

สมการต่าง ๆ ที่ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ออกมาแล้ว จะถูกนำมาจัดเรียงโดยตัวแปร Endogenous อยู่ทางด้านซ้ายของสมการ ส่วนทางด้านขวาจะประกอบด้วยเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (A_T) และเวคเตอร์ของตัวแปร Endogenous ที่มีช่วงความล่าของเวลาเป็น t-1 ส่วนของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (C_T) และเวคเตอร์ของตัวแปร Exogenous ที่ควบคุมได้ และส่วนของค่าคงที่ซึ่งเกิดจากการกะประมาณของสมการ และส่วนที่เกิดขึ้นเนื่องจากการกำหนดให้ตัวแปร Exogenous ชุดที่ไม่สามารถควบคุมได้ให้เป็นค่าคงที่ไป การจัดรูปสมการดังกล่าวให้ยึดหลักตามแบบสมการที่ [4]

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ A_T และ C_T ที่ได้จากการจัดรูปสมการนี้ จะต้องนำมาตรวจสอบดูว่ามีแถวหรือคอลัมภ์ใดที่สมาชิกของเมตริกซ์ (Elements) เป็นศูนย์ทั้งหมด ถ้าเกิดกรณีดังกล่าวขึ้น ย่อมไม่เหมาะสมที่จะนำไปใช้คำนวณในขั้นตอนต่อไป เพราะไม่สามารถหา Inverse ของเมตริกซ์นั้นได้ ให้ดำเนินการแก้ไขโดยวิธีใดวิธีหนึ่ง

1. ให้ตัดแถวหรือคอลัมภ์ที่เป็นศูนย์นั้นออกไป ในการนี้จะต้องลดจำนวนตัวแปร Endogenous ที่สอดคล้องกับแถวหรือคอลัมภ์นั้นลงไป ขณะเดียวกันก็ต้องลดขนาดของเวคเตอร์

ทั้งหมดในสมการที่ [43] ลงให้สอดคล้องกันด้วย

2. ให้แก้สมการที่แถวหรือคอลัมภ์ที่เป็นศูนย์นั้นใหม่ โดยให้นำตัวแปร Endogenous ที่มีช่วงความล่าของเวลาเป็น t-1 หรือ ตัวแปร Exogenous ที่ควบคุมได้เข้าสู่สมการ แล้วแต่กรณี

เมื่อได้เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ A_T C_T และ B_T แล้ว ก็ให้กำหนดเมตริกซ์ K_T ขึ้น เมตริกซ์ K_T จะเป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดสอดคล้องกับจำนวนตัวแปร Endogenous ของระบบ และต้องมีคุณสมบัติเป็น Positive Semi-Definite Matrix ตัวอย่างที่ง่ายที่สุด คือกำหนดให้ K_T เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์โดยสมาชิกบนเส้นทแยงมุม แสดงให้เห็นถึงการให้น้ำหนักความสำคัญของเป้าหมายทางเศรษฐกิจที่เท่าเทียมกัน ในทางปฏิบัติรูปแบบของ K อาจแตกต่างไปจากนี้ได้ตราบใดที่ยังคงมีคุณสมบัติดังกล่าวข้างต้นอยู่ หลังจากนั้นให้นำเมตริกซ์ทั้งหมดที่ได้มา แทนลงในสมการที่ [8] ก็จะได้ตัวแปรควบคุม (x_T) ที่เหมาะสมตามต้องการ

อย่างไรก็ดี x_T ที่คำนวณได้เป็นเพียงค่าที่เหมาะสมในเชิงทฤษฎีเท่านั้น (เพราะเกิดจากการคำนวณตามเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ โดยการทำ Minimize ความแตกต่างระหว่างสภาวะทางเศรษฐกิจที่เราต้องการควบคุม กับเป้าหมายที่ได้ตั้งไว้) ในทางปฏิบัติจำเป็นต้องมีการตรวจสอบก่อนว่า มีความเป็นไปได้มากน้อยเพียงใดที่จะนำ x_T ไปใช้กำหนดเป็นนโยบาย เพราะ x_T อาจมีช่วง (Range) ที่กว้างเกินกว่าจะยอมรับได้ ตัวอย่างเช่น ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากแบบจำลอง ทำให้ได้ค่าใช้จ่ายลงทุนของภาครัฐบาลที่สูงมากจนเกินกำลังการจัดหารายได้มาชดเชยอย่างเพียงพอ หรือได้ค่าที่ต่ำมากจนประชาชนและภาคธุรกิจปรับตัวไม่ทันต่อการเปลี่ยนแปลงครั้งนี้ เป็นต้น ถ้าเกิดกรณีเช่นนี้ขึ้น เราจำเป็นต้องมีการปรับเป้าหมายทางเศรษฐกิจ (a_T) เสียใหม่ เพื่อคำนวณ x_T ขึ้นมาอีกครั้งหนึ่ง ตัวแปรควบคุมที่คำนวณได้ จะต้องมีการทดสอบถึงความเป็นไปได้ในทางปฏิบัติทุกครั้ง ถ้ายังใช้ไม่ได้จะต้องมีการปรับเป้าหมาย ฯ และคำนวณ x_T ขึ้นมาใหม่ ให้ดำเนินการตามขั้นตอนที่กล่าวมา จนกระทั่งได้ค่าที่เหมาะสมทั้งในเชิงทฤษฎีและในทางปฏิบัติ