บทที่ ๓

การหาค่าคงที่ฉนวนของสารละลายผลึกเหลวที่ความถี่ไมโครเวฟ

ในการศึกษาค่าคงที่ฉนวนของผลึกเหลวที่ความถี่ไมโครเวฟ ไมโครเวฟเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่อยู่ในช่วง $๑๐^{๙}$ – $๑๐^{๑๒}$ รอบต่อวินาที เราจะเริ่มต้นโดยกล่าวถึงทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของไมโครเวฟในหัวข้อข้างล่างนี้

๓.๑ ทฤษฎีเกี่ยวกับไมโครเวฟ [3,7]

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถถ่ายทอดได้หลายแบบในท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยม (rectangular waveguid) สมการของแมกซ์เวลล์ถ้าไม่คำนึงถึงต้นกำเนิดคลื่นและตัวกลาง เป็นสูญญากาศ เขียนได้

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \qquad (๓.๑.๑)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (๓.๑.๒)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (๓.๑.๓)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (๓.๑.๔)$$

โดย $\vec{D}$ เป็น การขจัดทางไฟฟ้า ซึ่งมีความสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ดังสมการ

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} \qquad (๓.๑.๕)$$

ϵ_0 เป็น เปอร์มิตติวิตี (permittivity) ของสูญญากาศมีค่าเท่ากับ ๘.๘๕๔×๑๐^{-๑๒} $C/N\text{-}m^2$

$\vec{B}$ เป็น เส้นแรงแม่เหล็กต่อหน่วยพื้นที่ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ดังสมการ

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \qquad (๓.๑.๖)$$

μ_0 เป็น เปอร์มิอบิลิตี (permeability) ของสูญญากาศมีค่าเท่ากับ $๔\pi\times๑๐^{-๗}$ Henry/m.

ในที่นี้

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} = \vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z$$

เมื่อ $$\vec{\nabla}_t = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \vec{\nabla}_z = \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

ถ้ากำหนดให้ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่น มีการแผ่ (propagate) ไปตามทิศ z ตามแนวแกนของท่อ เราสามารถเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ได้ดังนี้

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_t(x,y,z,t) + \vec{E}_z(x,y,z,t)$$

$$= (\vec{e}(x,y) + \vec{e}_z(x,y))e^{i(\omega t-\beta z)} \qquad (๓.๑.๗)$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}(x,y,z,t) + \vec{H}_z(x,y,z,t)$$

$$= (\vec{h}(x,y) + \vec{h}_z(x,y))e^{i(\omega t-\beta z)} \qquad (๓.๑.๘)$$

ในที่นี้ β เป็นตัวประกอบการแผ่ (propagation factor) และ ω เป็นความเร็วเชิงมุม ซึ่ง $\omega = 2\pi f$ เมื่อ f เป็นความถี่ t และ z แสดงถึงองค์ประกอบของสนามในแนวตั้งฉากและขนานกับทิศ z จากสมการ (๓.๑.๑) ถึง (๓.๑.๘) อาศัยเทคนิคทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์เวคเตอร์ เราจะได้

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{h} = i\beta h_z \qquad (๓.๑.๙)$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{e} = i\beta e_z \qquad (๓.๑.๑๐)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{e} = -i\omega\mu_0 \vec{H}_z \qquad (๓.๑.๑๑)$$

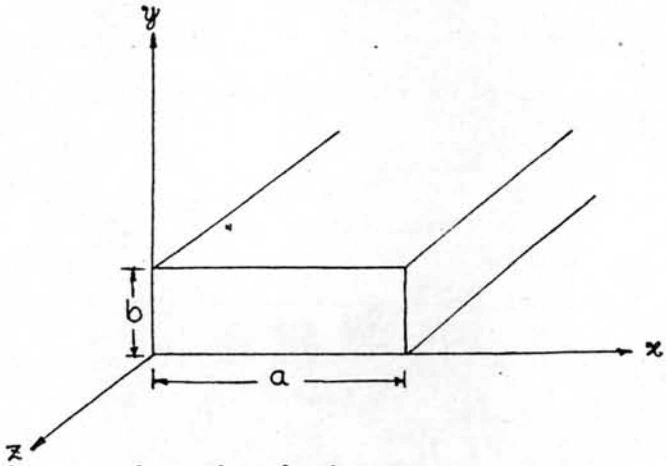
$$\vec{\nabla}_t \times \vec{h} = i\omega\epsilon_0 \vec{e}_z \qquad (๓.๑.๑๒)$$

$$\hat{a}_z \times \vec{\nabla}_t e_z + i\beta\hat{a}_z \times \vec{e} = i\omega\mu_0 \vec{h} \qquad (๓.๑.๑๓)$$

$$\hat{a}_z \times \vec{\nabla}_t h_z + i\beta\hat{a}_z \times \vec{h} = -i\omega\epsilon_0 \vec{e} \qquad (๓.๑.๑๔)$$

๓.๒ คลื่นโมด TE_{10} ในท่อนำคลื่น[3,7]

พิจารณาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นแบบสนามไฟฟ้าตามขวาง(transverse electric mode) คือไม่มีสนามไฟฟ้าในแนวการแผ่ของคลื่น และ ให้คลื่นนี้แผ่ไปในท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยม ดังรูปที่ ๒.๒.๑



รูปที่ ๒.๒.๑ ท่อนำคลื่นรูปสี่เหลี่ยม

ในกรณีนี้ เราพิจารณาสมการ (๓.๑.๒) เราพบว่า

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad (๓.๒.๑)$$

จากสมการ (๓.๑.๔),(๓.๑.๕),(๓.๑.๖)และ(๓.๑.๗) ทำให้สมการ (๓.๒.๑) กลายเป็น

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\vec{E} = 0 \qquad (๓.๒.๒)$$

หรือ

$$\nabla^2\vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\vec{E} = 0 \qquad (๓.๒.๓)$$

โดยที่ $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ และ c เป็นความเร็วของแสงในสุญญากาศ

ถ้ากำหนดให้

$$k_0^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \qquad (๓.๒.๔)$$

แทนค่าในสมการ (๓.๒.๓) เราจะได้ สมการเฮล์มโฮลตซ์ (Helmhlotz's equation)

$$\nabla^2\vec{E} + k_0^2\vec{E} = 0 \qquad (๓.๒.๕)$$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาสมการ (๓.๑.๔) และอาศัยสมการ (๓.๑.๒),(๓.๑.๕),(๓.๑.๖) และ (๓.๑.๘) จะได้ว่า

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \qquad (๓.๒.๖)$$

สำหรับ โมด TE (TE-mode) $\vec{e}_z = 0 \;, h_z \neq 0 \;, \vec{e} \neq 0 \;, h \neq 0$
ดังนั้นจากเงื่อนไขดังกล่าว เราแทนความเข้มของสนามแม่เหล็ก จากสมการ (๓.๑.๘) และ $\nabla^2 = \nabla_t^2 + \nabla_z^2$ ในสมการ (๓.๒.๖) เราจะได้

$$(\nabla_t^2 - \beta^2)(h + h_z) + k_0^2 (h + h_z) = 0 \qquad (๓.๒.๗ก)$$

จัดเทอมใหม่ได้

$$\left\{ \nabla_t^2 h + (k_0^2 - \beta^2) h \right\} + \left\{ \nabla_t^2 h_z + (k_0^2 - \beta^2) h_z \right\} = 0 \qquad (๓.๒.๗ข)$$

ถ้ากำหนดให้

$$k_c^2 = k_0^2 - \beta^2 \qquad (๓.๒.๘)$$

สมการ (๓.๒.๗ข) จะเป็นจริงก็คือเมื่อ

$$\nabla_t^2 h + k_c^2 h = 0 \qquad (๓.๒.๙)$$

$$\nabla_t^2 h_z + k_c^2 h_z = 0 \qquad (๓.๒.๑๐)$$

แก้สมการ (๓.๒.๑๐) โดยวิธีแยกตัวแปร กำหนดให้ $h_z = f(x)g(y)$ ทำให้เป็นสมการใหม่เป็น

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k_c^2 = 0 \qquad (๓.๒.๑๑)$$

อาศัยหลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ โดยให้ $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$ เราได้

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_x^2 = 0 \qquad (๓.๒.๑๒)$$

และ

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + k_y^2 y = 0 \qquad (๓.๒.๑๓)$$

จากสมการ (๓.๒.๑๒) และ (๓.๒.๑๓) เราได้ว่า

$$f = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \qquad (๓.๒.๑๔)$$

$$g = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \qquad (๓.๒.๑๕)$$

ทำให้เราแก้สมการ (๓.๒.๑๐) ได้ดังนี้

$$h_z = (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x)(B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) \qquad (๓.๒.๑๖)$$

พิจารณาสมการ (๓.๑.๑๒) ในกรณีที่เป็น โมด TE ซึ่ง $e_z = 0$ เราจะได้

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{h} = 0 \qquad (๓.๒.๑๗)$$

อาศัยสมการ (๓.๑.๙) และ (๓.๒.๙) จะได้ว่า

$$i\beta \vec{\nabla}_t h_z + k_c^2 \vec{h} = 0$$

$$\vec{h} = -i\frac{\beta}{k_c^2}\vec{\nabla}_t h_z \qquad (๓.๒.๑๘)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (๓.๒.๑๖) เทียบกับ x และ y โดยการใช้เงื่อนไขที่ว่าสนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับผิวโลหะเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$h_x = \frac{\partial h_z}{\partial x} = 0 \qquad x = 0, a \qquad (๓.๒.๑๙)$$

$$h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} = 0 \qquad y = 0, b \qquad (๓.๒.๒๐)$$

จากสมการ (๓.๒.๑๖) และ (๓.๒.๑๙) จะได้ว่า

$$-k_x A_1 \sin k_x x + k_x A_2 \cos k_x x = 0 \qquad (๓.๒.๒๑)$$

แทน $x = 0$ และ a เราจะได้ว่า

$$A_2 = 0 \qquad (๓.๒.๒๒)$$

$$k_x = n\pi/a \qquad \text{เมื่อ } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (๓.๒.๒๓)$$

ในทำนองเดียวกัน อาศัยสมการ (๓.๒.๑๖) และ (๓.๒.๒๐) จะได้

$$B_2 = 0 \qquad (๓.๒.๒๔)$$

$$k_y = m\pi/b \qquad \text{เมื่อ } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (๓.๒.๒๕)$$

ดังนั้น สมการ (๓.๒.๑๖) กลายเป็น

$$h_z = \left(A_1 \cos \frac{n\pi x}{a}\right)\left(B_1 \cos \frac{m\pi y}{b}\right)$$

หรือ

$$h_z = A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \qquad (๓.๒.๒๖)$$

และ จากสมการ (๓.๑.๘)

$$H_z = A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}\, e^{-i\beta z} \qquad (๓.๒.๒๗)$$

และ จากสมการ (๓.๒.๑๒) และ (๓.๒.๑๓) เราจะได้

$$k_{c,nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \qquad (๓.๒.๒๘)$$

คลื่นไฟฟ้าตามขวางที่ง่ายที่สุด คือ โมดที่มี $n = 1$ และ $m = 0$ เรียกว่า โมด TE_{10} ดังนั้น จากสมการ (๓.๒.๘), (๓.๒.๒๖), (๓.๒.๒๗) และ (๓.๒.๒๘) จะได้ว่า

$$h_z = A_{10} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \qquad (๓.๒.๒๙)$$

$$H_z = A_{10} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z} \qquad (๓.๒.๓๐)$$

$$k_c = \frac{\pi}{a} \qquad (๓.๒.๓๑)$$

$$\beta = \left[k_o^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (๓.๒.๓๒)$$

จากสมการ (๓.๒.๒๘) เราพบว่า $k_{c,nm}$ ขึ้นอยู่กับมิติของท่อนำคลื่น ถ้าเรากำหนดให้ β_{nm} เป็นตัวคงที่ของการแผ่ (propagation constant) โมดที่ nm จากสมการ (๓.๒.๘) เราได้

$$\beta_{nm} = (k_o^2 - k_{c,nm}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (๓.๒.๓๓)$$

จากสมการ (๓.๒.๒๘) และ (๓.๒.๓๓) จะได้ว่า

$$\beta_{nm} = \left[k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (๓.๒.๓๔)$$

จากสมการ (๓.๒.๔) เราพบว่า $k_o = (\omega/c)^2$ โดย c เป็นอัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ จากสมการข้างบนพบว่า ถ้า $k_o > k_{c,nm}$ จะได้ β_{nm} เป็นค่าจริง นั่นหมายความว่า คลื่นสามารถแผ่ไปในท่อนำคลื่นได้ แต่ถ้า $k_o < k_{c,nm}$ จะได้ β_{nm} เป็นค่าจินตภาพ เราให้ $\beta_{nm} = -i\gamma_{nm}$ โดยที่ γ_{nm} เป็นค่าบวก ในการแผ่ในทิศ $+z$ เทอม $e^{-i\beta z}$ หรือ $e^{-\gamma_{nm} z}$ จะลดลงเรื่อย ๆ เมื่อ z เพิ่มขึ้น แสดงว่าในการแผ่ของคลื่น อัมปลิจูดจะลดลงเรื่อย ๆ ในทิศ $+z$ ซึ่งหมายความว่าในกรณีนี้ คลื่นจะแผ่ไปในท่อนำไม่ได้ จะเห็นได้ว่าคลื่นสามารถแผ่ในท่อนำได้ก็ต่อเมื่อมีความถี่สูงพอที่ทำให้ $k_o > k_c$ เราเรียก k_c ว่า เลขคลื่นตัดขาด (cut off wave number) ซึ่งเป็นตัวบอกถึงการแผ่ของคลื่นไมโครเวฟในท่อนำคลื่นได้หรือไม่

จากสมการของแมกซ์เวลล์ (๓.๑.๑) ถึง (๓.๑.๔) ใช้กับตัวกลางที่เป็นสุญญากาศ ถ้าตัวกลางไม่ใช่สุญญากาศ แต่เป็นสารที่มีการดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแล้ว สมการ (๓.๑.๔) จะกลายเป็น

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (๓.๒.๓๕)$$

เมื่อ $\vec{J} = \sigma \vec{E}_o$ โดยที่ σ เป็นสภาพนำ (conductivity) ของตัวกลาง และ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

โดย ϵ เป็นเปอร์มิตติวิตีของตัวกลาง ดังนั้นสมการ (๓.๒.๓๕) กลายเป็น

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E}_o + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (๓.๒.๓๖)$$

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอาจเขียน

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i\omega t} \qquad (๓.๒.๓๗)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_o e^{i\omega t} \qquad (๓.๒.๓๘)$$

จากสมการ (๓.๒.๓๖) จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E}_o + i\omega\epsilon \vec{E}_o$$

$$= i\omega\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}_o \qquad (๓.๒.๓๙)$$

ถ้าเราให้ $\epsilon = \epsilon'$ และ $i\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon''$ จะเขียนเปอร์มิตติวิตีของสารดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้เป็นปริมาณเชิงซ้อน

$$\epsilon^* = \epsilon' - i\epsilon'' \qquad (๓.๒.๔๐)$$

ดังนั้นสมการ (๓.๒.๓๙) กลายเป็น

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega(\epsilon' - i\epsilon'')\vec{E}_o = i\omega\epsilon^* \vec{E}_o \qquad (๓.๒.๔๑)$$

ในสมการแมกซ์เวลล์ (๓.๑.๑) ถึง (๓.๑.๔) ถ้าตัวกลางดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เราแทน ϵ ดังในสมการ (๓.๒.๔๐) เราพบว่า ϵ ขึ้นอยู่กับความถี่จึงเขียนว่า $\epsilon(\omega)$ ดังนั้นสมการ (๓.๒.๓๑) และ (๓.๒.๔) กลายเป็น

$$\beta = \left[\omega^2 \epsilon(\omega)\mu_o - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (๓.๒.๔๒)$$

จากสมการ (๓.๒.๔๒) $\epsilon(\omega)$ เป็นปริมาณเชิงซ้อน ดังนั้น β ต้องเป็นปริมาณเชิงซ้อนด้วย เราเขียนสมการ (๓.๒.๔๒) เป็น

$$(\beta' - i\beta'')^2 = \left[\omega^2(\epsilon' - i\epsilon'')\mu_o - \frac{\pi^2}{a^2}\right]$$

$$= \omega^2\mu_o\epsilon'\left[1 - \frac{\pi^2}{a^2\omega^2\mu_o\epsilon'} - i\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right]$$

$$= \omega^2\mu_o\epsilon_o K'\left[1 - \frac{\pi^2}{a^2\omega^2\mu_o\epsilon_o K'} - i\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right] \qquad (๓.๒.๖๓)$$

แต่ $c = 1/\sqrt{\mu_o\epsilon_o}$ และ $\tan\delta = \epsilon''/\epsilon'$ ดังนั้นสมการ (๓.๒.๖๓) กลายเป็น

$$\beta_2'^2 - \beta_2''^2 - i2\beta_2'\beta_2'' = \frac{\omega^2 K'}{c^2}\left[1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2\omega^2 K'} - i\tan\delta\right] \qquad (๓.๒.๖๔)$$

ซึ่งได้

$$\frac{\omega^2 K'}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} = \beta_2'^2 - \beta_2''^2$$

$$K' = \left(\beta_2'^2 - \beta_2''^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 = \frac{\epsilon'}{\epsilon_o} \qquad (๓.๒.๖๕)$$

และ

$$\frac{\omega^2 K'}{c^2}\tan\delta = 2\beta_2'\beta_2''$$

หรือ

$$\tan\delta = 2\beta_2'\beta_2''\frac{c^2}{\omega^2 K'} \qquad (๓.๒.๖๖)$$

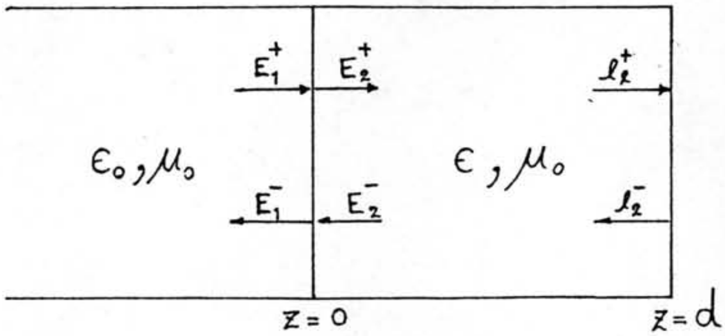
จากสมการ (๓.๒.๖๕) แทนลงใน (๓.๒.๖๖) เราจะได้

$$\tan\delta = \frac{2\beta_2'\beta_2''}{\beta_2'^2 - \beta_2''^2 + \frac{\pi^2}{a^2}} \qquad (๓.๒.๖๗)$$

จากสมการ (๓.๒.๖๕),(๓.๒.๖๖) และ (๓.๒.๖๗) ทำให้เราสามารถคำนวนหา K', $\tan\delta$ ถ้าเราทราบค่า β_2' และ β_2'' ของสารไดอิเลคตริก ซึ่งการหาค่า β_2' และ β_2'' จะได้กล่าวต่อไป

๓.๓ การสะท้อนของคลื่นจากผิวของไดอิเลคตริกที่ดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า [3,7]

ในกรณีไมโครเวฟเคลื่อนที่ผ่านสารตัวอย่างที่ดูดกลืนพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ความเข้มของสนามจะค่อย ๆ ลดลงเรื่อย ๆ ตามความหนาของสารในท่อสี่เหลี่ยม ถ้าสารตัวอย่างนี้มีความหนามากพอไมโครเวฟจะถูกดูดกลืนหายไปในที่สุด



รูปที่ ๓.๓.๑ แสดงการสะท้อนของสัญญาณไมโครเวฟที่ผิวของสารไดอิเลคตริกที่ถูกคลื่นสนามไฟฟ้า

เราพิจารณาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของไมโครเวฟในโมด TE_{10} ถ้าให้ E_1^+ , E_1^- และ H_1^+ , H_1^- เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวางที่ตกกระทบและสะท้อนในอากาศที่ผิวของสารไดอิเลคตริกที่ตำแหน่ง $z = 0$, E_2^+ , E_2^- และ H_2^+ , H_2^- เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามขวางที่ตกกระทบและสะท้อนที่ผิวในของไดอิเลคตริกที่ตำแหน่ง $z = 0$ และ ℓ_2^+ , ℓ_2^- เป็นสนามไฟฟ้าตามขวางที่ตกกระทบและสะท้อนที่ผิวของโลหะที่ตำแหน่ง $z = d$ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ผิวของสารไดอิเลคตริกเท่ากัน จึงเขียนสมการได้ว่า

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \qquad (๓.๓.๑)$$

$$H_1^+ - H_1^- = H_2^+ - H_2^- \qquad (๓.๓.๒)$$

และจากสมบัติที่ว่าสนามไฟฟ้าที่ผิวโลหะเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\ell_2^+ + \ell_2^- = 0 \qquad (๓.๓.๓)$$

สำหรับโมด TE_{10} E ที่เคลื่อนที่ไปทางซ้ายและขวา เขียนเป็น

$$E^+ = E_0^+ \ell^{i(\omega t - \beta z)} \qquad (๓.๓.๔)$$

$$E^- = E_0^- \ell^{i(\omega t + \beta z)} \qquad (๓.๓.๕)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง E_2^+ และ ℓ_2^+ ซึ่งแผ่ไปทางขวา และ E_2^- และ ℓ_2^- ซึ่งแผ่

ไปทางซ้ายในสารไดอิเลคตริก เขียนได้เป็น

$$\ell_2^+ = E_2^+ \ell^{-i\beta_2 d} \quad (๓.๓.๖)$$

$$\ell_2^- = E_2^- \ell^{+i\beta_2 d} \quad (๓.๓.๗)$$

โดยให้ β_1 เป็นตัวประกอบการแผ่ในสุญญากาศ

β_2 เป็นตัวประกอบการแผ่ในตัวกลางไดอิเลคตริก

แทนสมการ (๓.๓.๖)และ(๓.๓.๗) ลงใน (๓.๓๓) จะได้

$$E_2^+ \ell^{-i\beta_2 d} + E_2^- \ell^{i\beta_2 d} = 0$$

$$E_2^- = -E_2^+ \ell^{-2i\beta_2 d} \quad (๓.๓.๘)$$

แทนสมการ (๓.๓.๘) ลงใน (๓.๓.๑) จะได้

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + (-E_2^+ \ell^{-2i\beta_2 d})$$

$$= E_2^+ \left(1 - \ell^{-2i\beta_2 d}\right) \quad (๓.๓.๙)$$

ในตัวกลางใด ๆ จากทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า

$$\frac{E^+}{H^+} = \frac{E^-}{H^-} = \eta \quad (๓.๓.๑๐)$$

โดยที่ $\eta = \omega\mu/\beta_1$

จากสมการ (๓.๓.๑๐) เราจะได้ว่า สมการ (๓.๓.๒) เป็น

$$\frac{E_1^+}{\eta_1} - \frac{E_1^-}{\eta_1} = \frac{E_2^+}{\eta_2} - \frac{E_2^-}{\eta_2} \quad (๓.๓.๑๑)$$

แทน E_2^- จาก (๓.๓.๘) ลงใน (๓.๓.๑๑) จะได้ว่า

$$E_1^+ - E_1^- = \frac{\eta_1}{\eta_2} E_2^+ \left(1 + \ell^{-2i\beta_2 d}\right) \quad (๓.๓.๑๒)$$

สมการ (๓.๓.๙) บวกกับ (๓.๓.๑๒) ได้เป็น

$$E_1^+ = \frac{E_2^+}{2}\left[\left(1 - e^{-2i\beta_2 d}\right) + \frac{\eta_1}{\eta_2}\left(1 + e^{-2i\beta_2 d}\right)\right] \qquad (๓.๓.๑๓)$$

สมการ (๓.๓.๙) ลบกับ (๓.๓.๑๒) ได้เป็น

$$E_1^- = \frac{E_2^+}{2}\left[\left(1 - e^{-2i\beta_2 d}\right) - \frac{\eta_1}{\eta_2}\left(1 + e^{-2i\beta_2 d}\right)\right] \qquad (๓.๓.๑๔)$$

จากสัมประสิทธิการสะท้อน เป็นอัตราส่วนระหว่างคลื่นสะท้อนต่อคลื่นตกกระทบ ดังนั้นถ้าให้ Γ เป็น สัมประสิทธิ์การสะท้อน จากสมการ (๓.๓.๑๓) และ (๓.๓.๑๔) เราจะได้

$$\Gamma = \frac{E_1^-}{E_1^+}$$

$$= \frac{\left[\eta_2\left(1 - e^{-2i\beta_2 d}\right) - \eta_1\left(1 + e^{-2i\beta_2 d}\right)\right]}{\left[\eta_2\left(1 - e^{-2i\beta_2 d}\right) + \eta_1\left(1 + e^{-2i\beta_2 d}\right)\right]} \qquad (๓.๓.๑๕)$$

สารที่เราศึกษาเป็นฉนวน ดังนั้น $\mu = \mu_0$ เราจะได้ $\eta_1 = \omega\mu_0/\beta_1$ และ $\eta_2 = \omega\mu_0/\beta_2$ แทนในสมการ (๓.๓.๑๕) จะได้

$$\Gamma = \frac{\beta_1\left(1 - e^{-2i\beta_2 d}\right) - \beta_2\left(1 + e^{-2i\beta_2 d}\right)}{\beta_1\left(1 - e^{-2i\beta_2 d}\right) + \beta_2\left(1 + e^{-2i\beta_2 d}\right)} \qquad (๓.๓.๑๖)$$

แต่สารที่ศึกษามีการดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้น β_2 เขียนเป็นเชิงซ้อนได้

$$\beta_2^* = \beta_2' - i\beta_2'' \qquad (๓.๓.๑๗)$$

แทนสมการ (๓.๓.๑๗) ลงใน (๓.๓.๑๖) แล้วเอา d คูณทั้งเศษและส่วน ให้ $a = \beta_2' d$ $b = \beta_2'' d$, $c = \beta_1 d$ จัดเทอมเสียใหม่เราจะได้

$$\Gamma = \frac{(c-a) - (c+a)e^{-2b}\cos 2a + be^{-2b}\sin 2a + i\left[(c+a)e^{-2b}\sin 2a + b + be^{-2b}\cos 2a\right]}{(c+a) - (c-a)e^{-2b}\cos 2a - be^{-2b}\sin 2a + i\left[(c-a)e^{-2b}\sin 2a - b - be^{-2b}\cos 2a\right]}$$

(๓.๓.๑๘)

ถ้าเราให้

$$A = (e-a) - (e+a)e^{-2b}\cos 2a + be^{-2b}\sin 2a$$

$$B = (e+a)e^{-2b}\sin 2a + b + be^{-2b}\cos 2a$$

$$C = (e+a) - (e-a)e^{-2b}\cos 2a - be^{-2b}\sin 2a$$

$$D = (e-a)e^{-2b}\sin 2a - b - be^{-2b}\cos 2a$$

ดังนั้น สมการ (๓.๓.๑๘) กลายเป็น

$$\Gamma = \frac{A + iB}{C + iD} \qquad (๓.๓.๑๙)$$

ใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ว่า

$$x + jy = (x^2 + y^2)^{1/2} e^{-i\tan^{-1} y/x}$$

ดังนั้นสมการ (๓.๓.๑๙) กลายเป็น

$$\Gamma = \left(\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}\right)^{1/2} \exp\left\{-i\tan^{-1}\left(\frac{BC - AD}{AC + BD}\right)\right\}$$

$$= \rho e^{i\theta} \qquad (๓.๓.๒๐)$$

โดยที่

$$\rho = \left(\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}\right)^{1/2} \qquad (๓.๓.๒๑)$$

และ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{BC - AD}{AC + BD}\right) \qquad (๓.๓.๒๒)$$

ซึ่ง $\rho = |\Gamma|$ เป็นค่าที่บอกถึงการสูญเสียพลังงานของคลื่นไมโครเวฟ และ θ เป็นการเปลี่ยนเฟส (phase shift) ของการสะท้อนของคลื่น

สมการ (๓.๓.๒๑) และ (๓.๓.๒๒) เป็นสมการสำหรับหา β_2' และ β_2'' ที่ทำให้ ρ และ θ มีค่าสอดคล้องกับการทดลอง ซึ่งจะได้กล่าวในบทหน้า

๓.๔ การสะท้อนของคลื่นจากผิวของไดอิเลคตริกที่ไม่ดูดกลืนสนามแม่เหล็กไฟฟ้า [3, 7]

ถ้าพิจารณา การดูดกลืนพลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า จากสมการ (๓.๒.๔๖)

$$\tan\delta = 2\beta_2'\beta_2''\frac{c^2}{\omega^2 K'} \qquad (๓.๔.๑)$$

ดังนั้น ถ้าสารไม่มีการดูดกลืนพลังงานสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเนื่องจากไม่มีไดโพลถาวรทางไฟฟ้า นั่นคือ $\tan\delta = 0$ ดังนั้น $\beta_2'' = 0$ ในกรณีนี้ β_2 จะเป็นเลขจริง จากสมการ (๓.๓.๒๐)

$$\Gamma = \left(\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}\right)^{1/2} \exp\left\{-i\tan^{-1}\left(\frac{BC-AD}{AC+BD}\right)\right\} \qquad (๓.๔.๒)$$

โดยที่

$$A = (e-a) - (e+a)\cos 2a$$

$$B = (e+a)\sin 2a$$

$$C = (e+a) - (e-a)\cos 2a$$

$$D = (e-a)\sin 2a$$

ดังนั้นสมการ (๓.๔.๒) จะได้

$$\rho = \left(\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}\right)$$

$$= 1 \qquad (๓.๔.๓)$$

สมการ (๓.๔.๓). แสดงว่าสารไม่มีการดูดกลืนพลังงาน และ

$$\tan\Theta = \frac{BC-AD}{AC+BD}$$

$$= \frac{2\beta_1\beta_2\sin 2\beta_2 d}{(\beta_1^2-\beta_2^2) - (\beta_1^2+\beta^2)\cos 2\beta_2 d} \qquad (๓.๔.๔)$$

สมการ (๓.๔.๔) ใช้สำหรับหาเฟสในสารไดอิเลคตริกที่ไม่มีการดูดกลืนพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และจากสมการ (๓.๒.๔๕) เราจะได้

$$K' = \left(\beta_2^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \qquad (๓.๔.๕)$$

ซึ่งเป็นสมการสำหรับ หาค่าคงที่ฉนวนของสารไดอิเลคตริกที่ไม่มีการดูดกลืนพลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

๓.๕ การวัดค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อน

สนามไฟฟ้ารวมเหนือผิวของสารไดอิเลคตริกที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} E &= E_1^+ e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + E_1^- e^{j(\omega t + \beta_1 z)} \\ &= E_1^+ e^{j(\omega t - \beta_1 z)}\left[1 + \frac{E_1^-}{E_1^+} e^{2j\beta_1 z}\right] \end{aligned} \qquad (๓.๕.๑)$$

โดยเขียน

$$\Gamma = \frac{E^-}{E^+} = \rho e^{j\theta} \qquad (๓.๕.๒)$$

ทำให้สมการ (๓.๕.๑) กลายเป็น

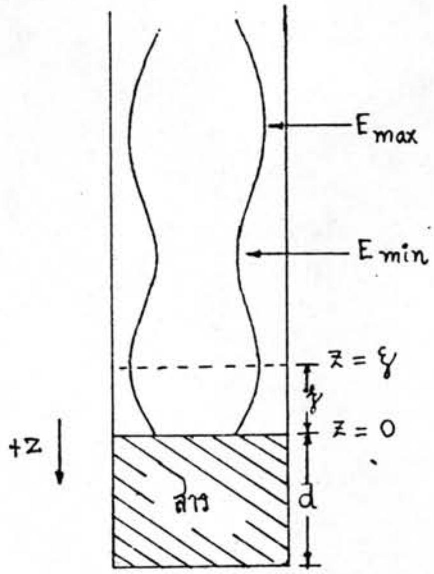
$$\begin{aligned} E &= E_1^+ e^{j(\omega t - \beta_1 z)}\left[1 + \rho e^{j\theta} e^{2j\beta_1 z}\right] \\ &= E_1^+ e^{j(\omega t - \beta_1 z)}\left[1 + \rho e^{j(\theta + 2\beta_1 z)}\right] \end{aligned} \qquad (๓.๕.๓)$$

จากสมการ (๓.๕.๓) ได้ขนาดของสนามไฟฟ้า

$$|E| = |E_1^+|\left|1 + \rho e^{j(\theta + 2\beta_1 z)}\right| \qquad (๓.๕.๔)$$

จากรูป ถ้าเราพิจารณา ณ. ตำแหน่ง $z = -\xi$ ใด ๆ ขนาดของไฟฟ้าที่จุดนั้นคือ

$$|E| = |E_1^+|\left|1 + \rho e^{j(\theta - 2\beta_1 \xi)}\right| \qquad (๓.๕.๕)$$



<u>รูปที่ ๓.๕.๑</u> แสดงตำแหน่งสัญญาณไมโครเวฟสูงสุด

ถ้าพิจารณาสมการ (๓.๕.๕) จะพบว่าที่ ρ ค่าหนึ่ง ๆ ความเข้มของสนามไฟฟ้าจะมีค่าสูงสุดเมื่อ

$$\Theta - 2\beta_1 \xi = 0$$

$$\Theta = 2\beta_1 \xi \qquad (๓.๕.๖)$$

ที่ตำแหน่งที่มีความเข้มของสนามไฟฟ้ามากที่สุดทำให้สมการ (๓.๕.๕) กลายเป็น

$$|E|_{max} = |E_1^+||1+\rho| \qquad (๓.๕.๗)$$

และเมื่อสนามไฟฟ้าน้อยที่สุด

$$|E|_{min} = |E_1^+||1-\rho| \qquad (๓.๕.๘)$$

จากสมการ (๓.๕.๗) และ (๓.๕.๘) จะได้

$$VSWR = \frac{|E|_{max}}{|E|_{min}} = \frac{|1+\rho|}{|1-\rho|} \qquad (๓.๕.๙)$$

โดยเขียน

$$A = VSWR = \frac{|E|_{max}}{|E|_{min}} \qquad (๓.๕.๑๐)$$

ดังนั้นสมการ (๓.๕.๙) และ (๓.๕.๑๐) เราได้

$$\rho = \frac{|A-1|}{|A+1|} \qquad (๓.๕.๑๑)$$

ซึ่งสมการ (๓.๕.๖) และ (๓.๕.๑๑) เป็นสมการที่ใช้สำหรับหา Θ และ ρ จากการทดลองจะกล่าวในบทต่อไป