

กรุปซึ่ง เป็นยูเนียนของพหุคูณ

นางสาว ยูพารณ ธีระสุภา



002474

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๑๕

i 17061908

ON GROUPS WHICH ARE UNIONS OF THEIR PROPER SUBGROUPS

Miss Yupaporn Tirasupa

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1972

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University
in partial fulfillment of the requirements of the Degree of
Master of Science.

B. Tamthoi

.....
Dean of the Graduate School

Thesis Committee *Trois' M. Akshay* Chairman

..... *Calvin F.K. Jung*

..... *๑๕๐ ๔๐๕๕๕*

Thesis Supervisor Dr. Calvin F.K. Jung

หัวข้อวิทยานิพนธ์ G ซึ่งเป็นยูเนียนของพหุคูณพีเออร์ซัพกรุป
ชื่อ นางสาว บุพการณ์ ฉิระสุระ แผนกวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา ๒๕๑๔



บทคัดย่อ

ให้ G เป็นกรุป (group) และ $\{G_\alpha / \alpha \in I\}$ เป็นกลุ่ม (collection) ของซัพกรุป (subgroup) ของ G เราจะเรียก G ว่าเป็น เออริคันเคินท์ยูเนียน (irredundant union) ของ G_α ก็ต่อเมื่อ

$$ก. \quad G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

และ

$$ข. \quad \text{สำหรับแต่ละ } \beta \text{ ใน } I \quad G_\beta \setminus \bigcup_{\alpha \neq \beta} G_\alpha \neq \emptyset$$

ในวิทยานิพนธ์นี้ เราสนใจปัญหาของกรุปที่เป็นเออริคันเคินท์ยูเนียนของซัพกรุปเท่านั้น สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป ถึงแม้ว่าเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทโคหลายทฤษฎีบท แต่เราก็ไม่สามารถแก้ปัญหาคืออย่างเป็นที่พึงพอใจ แต่อย่างไรก็ตามในกรณีที่เซตกรชนี้ (index set) I เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจำกัด (finite set) เราได้แก้ปัญหามาบางอย่างได้อย่างสมบูรณ์

เพื่อความสะดวก เราให้ $\mathcal{N}(I)$ เป็นคาร์ดินาลิตี้ (cardinality) ของ I

กรณีที่ $\mathcal{N}(I) = 2$ เราพิสูจน์ได้ว่าไม่มีกรุปใด ๆ ที่สามารถเป็นเออริคันเคินท์ยูเนียนของซัพกรุปสองซัพกรุปใด

กรณีที่ $\mathcal{N}(I) = 3$ เราสามารถแสดงให้เห็นว่ากรุป G ที่เป็นเออริคันเคินท์ยูเนียนของซัพกรุปสามซัพกรุปใด ก็ต่อเมื่อ (if and only if) มีโฮมอมอร์ฟิซึม (homomorphism) จาก G ไปบน (onto) อะบีเลียนกรุป (abelian group) $C_2 \times C_2$ (อะบีเลียนกรุป $C_2 \times C_2$ นี้เราเรียกว่า ไคลน์ ๔-กรุป (the Klein 4 - group)) เมื่อ C_n เป็นซิกคลิกกรุป (cyclic group) ซึ่งมีออร์เคอร์ (order) n

กรณี $|G| = 2^{n-1}$ ในกรณีทั่วไป เราอาจสร้างเวกเตอร์สเปซ V_n โดยให้

$$V_n = C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2 \quad (n \text{ ครั้ง})$$

และเราสามารถแสดงได้ว่า ถ้ามีโฮมอมอร์ฟิซึมจากกลุ่ม G ไปบนเวกเตอร์สเปซ V_n แล้ว G จะเป็นเออริกันเจนต์ของซับกรุป 2^{n-1} ซับกรุป นอกจากนี้เราสามารถพิสูจน์บทกลับบางส่วนของทฤษฎีบทนี้ได้

สุดท้ายเราได้ศึกษาความสัมพันธ์ของโคเรคทีฟ (direct sum) และเออริกันเจนต์ของกรุป และโคทฤษฎีบทที่ว่า ถ้ากรุป G เป็นเออริกันเจนต์ของซับกรุป G_0 แล้ว G จะไม่สามารถเป็นโคเรคทีฟของ G_0 แต่อาจเป็นโคเรคทีฟของพหุคูณของซับกรุป (proper subgroup) อื่น ๆ ของ G ได้

Thesis Title: On Groups Which are Unions of Their Proper Subgroups.

Name: Miss Yupaporn Tirasupa; Department: Mathematics

Academic year: 1971

ABSTRACT

Let G be a group and $\{G_\alpha / \alpha \in I\}$ a collection of subgroups of G . Then G is said to be the irredundant union of the G_α if

$$(1) \quad G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

and (2) for each β in I , $G_\beta \setminus \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha \neq \beta}} G_\alpha \neq \emptyset$.

In this thesis, we are mainly concerned with the question as to which groups are irredundant unions of their subgroups. For the general case, although many results are obtained, we have not been able to settle the question in a satisfactory manner. However, in case the index set I is finite, some definitive answers are found.

For convenience, let $\mathcal{N}(I)$ be the cardinality of I .

Case $\mathcal{N}(I) = 2$. No group can be an irredundant union of two of its subgroups.

Case $\mathcal{N}(I) = 3$. It is shown that a group G is an irredundant union of three of its subgroups if and only if it can be mapped homomorphically onto the abelian group $C_2 \times C_2$, the Klein 4 - group, where C_n denotes cyclic group of order n .

Case $\mathcal{V}(I) = 2^{n-1}$. Generalizing the Klein 4 - group, let V_n be the abelian group such that

$$V_n = C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2 \text{ (n times).}$$

It is shown that if G can be mapped homomorphically onto the abelian group V_n , then G is an irredundant union of 2^{n-1} subgroups. Moreover, a partial converse of this also was found.

Finally, we study relationships between direct sums and irredundant unions of groups. We have proved that if a group $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ is the irredundant union of its subgroups G_α , then G can not be the direct sum of G_α , of course, G may be a direct sum of other proper subgroups of G .



ACKNOWLEDGMENT

The author wishes to express her sincere gratitude to Dr. Calvin F.K. Jung for exposing her to this subject and for his generous donation of time in aiding her in the preparation of this thesis.

TABLE OF CONTENTS

	Page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	vi
ACKNOWLEDGMENT	viii
CHAPTER	
I INTRODUCTION	1
II PRELIMINARIES	2
III GROUPS WHICH ARE UNIONS OF THEIR PROPER SUBGROUPS	3
IV GROUPS WHICH ARE UNIONS OF THREE PROPER SUBGROUPS	14
V ON THE ABELIAN GROUP $C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2$ (N TIMES)	26
VI FIELDS WHICH ARE IRREDUNDANT UNIONS OF SUBFIELDS.....	31
VII RELATIONSHIPS BETWEEN DIRECT SUMS AND IRREDUNDANT UNIONS OF GROUPS	37
EPILOGUE	39
REFERENCES	40
VITA	41