บรรณานุกรม

ณมล สุดประเสริฐ วิชาสถิติศาสตร์และวัดผล พระนคร : สำนักพิมพ์สหบัณฑิต, 2514.

คิกสัน ดับเบิ้ลยู เจ และ แมสซี่เอฟ สถิติวิเคราะห์ แปลโดย นราศรี ผดุงชีวิต กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ ส ศิลป, 2510.

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย สถิติเบื้องต้น ฉบับแก้ไขเพิ่มเติม พิมพ์ครั้งที่ 2,2504.

Blalock, Habert M. Social Statistics. New York : McGraw-Hill Book Company Inc., C.1967.

Burmingham, Richard Steven and May, Donald Gentis. Handbook of Probability and Statistics with Table. Ohio: Handbook Publisher, Inc., 1958.

Chou, Ya-lun. Statistical Analysis New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.

Clark, Charles E. An Introduction to Statistics. New York : John Wiley & Sons Inc., 1953.

Cohen, Lillian. Statistical Methods for Social Statistics. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1954.

Cochran, William G. "χ^2 Test Goodness of Fit" The Annuals of Mathematical Statistics. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1952.

Croxton, Frederick E. and Cowden, Dudley J. Applied General Statistics. New Delhi: Prentice-Hall of India (Private) Ltd., 1964.

________, Practical Business Statistics. 3d.ed., Jersy: Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1960.

David Harold T. and Welson W.F.C. Elements of Statistics. 2d.ed. The Principia Press, Inc., 1937.

Dixon, Wilfred J. and Massey Frank J. Introduction to Statistics Analysis. New York : McGraw-Hill Book Company, Inc., C 1957.

Encyclopedia Britanica Vol. 10 Encyclopedia Britanica, Inc., 1958. pp.588-9.

Fisher, R.A., Sir. Statistical Methods for Research Worker. New York: Hafner Publishing Company, Inc., 1958.

______, Contribution to Mathematical Statistics. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1950.

Frederic Barnett, Robert Beaver and William Mendenhall. A Programmed Study Guide for Introduction to Probability and Statistics. California : Wadsworth Publishing Company, Inc., 1968.

Fraser, Donald A.S. Statistics an Introduction New York : Wiley & Sons, Inc., 1958.

Freeman Harold. Introduction to Statistical Inference. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., C. 1963.

Freund John E. Modern Elementary Statistics. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1952.

Guenther William G. Concepts of Statistical Inference. New York : McGraw-Hill Book Company, Inc., C 1965.

Guilford, J.P. Fundamental Statistics in Psychology and Education. New York : McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.

Hays, William L. Statistics New York : Holt Rinehart and Winston, C. 1963.

Harnett Donald L. *Introduction to Statistical Methods*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

Hoel, Paul G. *Introduction to Mathematical Statistics*. 3d.ed. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1962.

Hughes, Ann and Grawoig, Dennis, *Statistics: A Foundation for Analysis*. Massachusetts: Addison-Wesby Publishing Company,1971.

Johnson, Palmer O. *Statistical Methods in Research*. New York : Prentice-Hall, Inc., 1949.

Kane Edward J. *Economics Statistics and Econometrics*, Harper & Row Publishers, 1968.

Kendall, Manrie G. *The Advanced Theory of Statistics*. London : Charles Criffin & Company Ltd., 1952.

Klugh Henry E. *Statistics : The Essentials for Research*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1970.

Larson Harold J. *Introduction to Probability Theory and Statistical Influence*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1969.

Mendenhall, William. *Introduction to Probability and Statistics*. California : Wasworth Publishing Company, Inc., 1969.

Meyer Paul L. *Introductory Probability and Statistical Applications*. Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company, 1971.

McNemar, Quinn. *Psychological Statistics*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1962.

Mood Alexander M. and Graybill, Franklin A. *Introduction to the Theory of Statistics*. 2 ed., New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., C. 1963.

Ostle Bernard. Statistics in Research. Ames, Iowa: The Iowa State University Press, 1963.

Parzen, E. Manuel. Probability Theory and Its Applioation. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1962.

Peters, William and Summers, George W. Statistical Analysis for Business Decisions. Englewood Cliffs, New York : Prentice-Hall, Inc., 1968.

Phillips, Janne S. and Thomson, Richard F. Statistics for Nurse. New York : The Mcmillan Company, 1967.

Siegel Sidney. Non Parametric, Tokyo : Kogakusha Company, Ltd., C. 1956.

Spiegel, Murray R. Theory and Problems of Statistics Schaum's Outline Series. New York : Schaum Publishing Co., 1961.

Tate, Merle Wesley. Statistics in Educational and Psychology. New York : Mcmillan Company, 1965.

Walpole Ronald E. Introduction to Statistics Collier-Mcmillan International edition, 1970.

Yamane Taro. Statistics An Introductory Analysis : New York, Evanston & London : John Weatherhill, Inc., 1970.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การหามัชฌิมของการแจกแจงไบโนเมียล

$$\text{mean } (\bar{X}) = \sum x\,P(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x.\ {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$= 0.q^{n}+1.\ {}^{n}C_{1}pq^{n-1}+2.\ {}^{n}C_{2}p^{2}q^{n-2}+ .$$
$$+3.\ {}^{n}C_{3}p^{3}q^{n-3}+\ldots+np^{n}$$

$$= 1.\ {}^{n}C_{1}pq^{n-1}+2\,{}^{n}C_{2}p^{2}q^{n-2}+\ldots\ np^{n}$$

$$= npq^{n-1}+n(n-1)p^{2}q^{n-2}+n(n-1)(n-2)p^{3}q^{n-3}+$$
$$\ldots+np^{n}$$

$$= np\left[q^{n-1}+(n-1)pq^{n-2}+(n-1)(n-2)p^{2}q^{n-3}+\right.$$
$$\left.\ldots\ p^{n-1}\right]$$

$$= np\left[q+p\right]^{n-1}$$

$$= np$$

การหาความเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงไบโนเมียล

$$P(x) = {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$\text{Var}(x) = E(x-E(x))^{2} = E(x)^{2}-(E(x))^{2} = (S.D)^{2}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^{2}P(x) - \left[\sum x.P(x)\right]^{2}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^{2}P(x) - \left[np\right]^{2}$$

$$\sum_{x=0}^{n} x^{2}P(x) = \sum_{x=0}^{n} x^{2}\ {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \left[x(x-1)+x\right]{}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\,(x-1)\ {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x\ {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\,{}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}\ p^{x}q^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!}\ p^{x}q^{n-x} + np$$

$$= n(n-1)\ p^{2} \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}\ p^{x-2}q^{n-x} + np$$

ให้ $Z = x-2$

$$= n(n-1)p^{2} \sum_{Z=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{Z!(n-(Z+2))!} p^{Z}q^{n-(Z+2)} + np$$

$$= n(n-1)\ p^{2}\left[\frac{(n-2)!}{0!(n-2)!}\ p^{0}q^{n-2} + \frac{(n-2)!}{1!(n-3)!}pq^{n-3}\right.$$

$$+ \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}\ p^{2}q^{n-4} + \frac{(n-2)!}{3!(n-5)!}\ p^{3}q^{n-5} + \ldots$$

$$\left. + \frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-(n-2+2))!}\ p^{n-2}q^{n-(n-2+2)}\right] + np$$

$$= n(n-1)p^{2}\left[q^{n-2} + {}^{n-2}C_{1}pq^{n-3} + {}^{n-2}C_{2}p^{2}q^{n-4} +\right.$$

$$\left. + {}^{n-2}C_{3}p^{2}q^{n-5} + \ldots + p^{n-2}\right] + np$$

$$\sum x^{2}P(x) = n(n-1)p^{2}(q+p)^{n-2} + np$$

$$= n(n-1)p^{2} + np$$

$$(S.D)^{2} = \sum x^{2}.\ P(x) - n^{2}p^{2}$$

$$= n(n-1)p^{2} + np - n^{2}p^{2}$$

$$= n^{2}p^{2} - np^{2} + np - n^{2}p^{2} = np(1-p) = npq$$

$$S.D = +\sqrt{npq}$$

ภาคผนวก ข.

การหาสูตรของการแจกแจงปัวซองซึ่งมาจากลิมิตจำกัดของการแจกแจงไบโนเมียล

การพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty} {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

เมื่อ $np = \lambda \quad \therefore p = \frac{\lambda}{n}$

จาก $${}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^{x}\,n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}}\right]$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{n^{x}}\right]\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}}\right]$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} = \frac{\lambda^{x}}{x!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n}}x\right)\right] = \frac{\lambda^{x}}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\,e^{-\lambda}$$

$$\therefore P(x) = \frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{เมื่อ } x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

เมื่อ $n\to\infty$, $np = \lambda$ (คงที่) หรือขณะ $n\to\infty$, $p\to 0$ ทำให้ $np\to\lambda$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

เป็นการแจกแจงปัวซองด้วยพารามิเตอร์ λ

ภาคผนวก ค.

การหาบัชฌิมของการแจกแจงปัวซอง

$$\bar{X} = \sum x\,P(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$
$$= 0.e^{-\lambda} + 1.\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} + 2.\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + 3.\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \ldots$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right]$$
$$= \lambda e^{-\lambda} . e^{\lambda} = \lambda$$
$$\therefore \bar{X} = \lambda$$

การหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงปัวซอง

$$Var(x) = E(x-E(x))^2 = E(x^2)-(E(x))^2$$
$$= \sum x^2 P(x) - \left[\sum x\,P(x)\right]^2$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2$$
$$= \left[0.e^{-\lambda} + \frac{1\,\lambda e^{-\lambda}}{1!} + \frac{2^2\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \frac{3^2\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \ldots\right] - \lambda^2$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1 + 2^2\frac{\lambda}{2!} + 3^2\frac{\lambda^2}{3!} + 4^2\frac{\lambda^3}{4!} + \ldots\right] - \lambda^2$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1 + 2.\lambda + 3\frac{\lambda^2}{2!} + 4\frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right] - \lambda^2$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1 + (\lambda+\lambda) + \left(\frac{\lambda^2}{2!} + \frac{2\lambda^2}{2!}\right) + \left(\frac{\lambda^3}{3!} + \frac{3\lambda^3}{3!}\right) + \left(\frac{\lambda^4}{4!} + \frac{4\lambda^4}{4!}\right) + \ldots\right] - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[e^{\lambda} + \lambda\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^2}{3!} + \cdots\right]\right. - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2$$

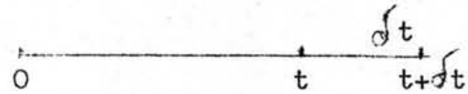
$$= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

$$\therefore S.D = \sqrt{\lambda}$$

ภาคผนวก ง.

การแจกแจงปัวซองที่มาจากทฤษฎีความน่าจะเป็น

พิจารณาเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา $(0,t)$ สมมุติความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์จะเกิดในช่วง $(t,\ t + \delta t)$ เป็น $\lambda\delta t + 0(\delta t)$ ถ้าให้ $p(n,t)$ แทนความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ n ครั้งเกิดขึ้นในเวลา $(0,\ t)$



พิจารณา $P(n,t + \delta t)$

จำนวนเหตุการณ์ในช่วงเวลา $(0,t)$	ความน่าจะเป็น
n	$p(n,t)$
$n-1$	$p(n-1,t)$
$n-i$	$p(n-i,t)$

จำนวนเหตุการณ์ในช่วงเวลา $(t,t+\delta t)$	ความน่าจะเป็น
0	$1-\lambda\delta t+0(\delta t)$
1	$\lambda\delta t + 0(\delta t)$
i	$0(\delta t)$

$$\therefore\ P(n,t+\delta t) = (1-\lambda\delta t)\,P(n,t) + \lambda\delta t\,P(n-1,t)+0(\delta t),n > 0 \quad \ldots(1)$$

$$P(0,t+\delta t) = (1-\lambda\delta t)\,P(0,t) \quad \ldots(2)$$

จาก (1) และ (2)

$$P(n,t+\delta t)-P(n,t) = -\lambda\delta t\,P(n,t)+\lambda\delta t\,P(n-1\ ,t)+0(\delta t);n > 0$$

$$P(0,t +\delta t,- P(0,t)= -\lambda\delta t\,P(0,t)+0(\delta t)$$

ขณะที่ $\delta t \to 0;\ \lim\limits_{\delta t \to 0} \dfrac{P(n,t+\delta t)-P(n,t)}{\delta t} = P'(n,t)$

ฉะนั้น $P'(n,t) = -\lambda P(n,t) + \lambda P(n-1),t, \; n > 0$ ....(3)

$P'(0,t) = -\lambda P(0,t)$ ....(4)

ให้ $\pi(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)$ เป็น probability generating function ของ $P(n,t)$

ดิฟเฟอเรนชิเอท เทียบกับ t จะได้

$$\pi'(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P'(n,t)$$

คูณ(3) ด้วย s^n และหาผลบวก

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} s^n P'(n,t) = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} s^n P(n-1,t)$$

$$= -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t) + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} s^{i+1} P(i,t), i=n-1$$

$$\therefore \pi'(s,t) = -\lambda \pi(s,t) + \lambda s \pi(s,t)$$

$$= -\lambda(1-s)\pi(s,t)$$

$\pi(s,t) = Ae^{\lambda(s-1)t}$ เมื่อ A เป็นค่าคงที่

ตามคุณสมบัติของ Probability Generating Function ต้องได้ $\pi(1,t)=1$

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} P(n,t) = 1$

$$\therefore A = 1$$

$$\therefore \pi(s,t) = e^{\lambda(s-1)t}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s t)^n}{n!}$$ เพราะ $e^{\lambda s t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s t)^n}{n!}$

โดยที่ $P(n,t)$ คือสัมประสิทธิ์ของ s^n ในการกระจายของ $\pi(s,t)$

ฉะนั้น $$(P(n,t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

ซึ่งคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วง เวลา t ใดๆ ที่มีค่าเฉลี่ยของจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็น λt ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้าให้ x= จำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t ใด ๆ ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น λ และ x= 0,1,2,...

จะได้ว่า $$P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

ภาคผนวก จ.

Central Limit Theorem เป็นทฤษฎีที่ช่วยเน้นความสำคัญของการแจกแจงปกติ ทำให้สามารถนำการแจกแจงปกติไปใช้ประโยชน์ได้อย่างกว้างขวาง เราสามารถประมาณค่าการแจกแจงอื่น ๆ ทั้งแบบต่อเนื่องและแบบจำนวนเต็ม โดยใช้การแจกแจงปกติ ทั้งนี้มีข้อแม้ว่า ตัวแปรของการแจกแจงที่ต้องการประมาณค่า เป็นผลบวกของตัวแปรสุ่มอิสระที่มีการแจกแจงเหมือนกันและกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

The Central-Limit Theorem[1]

ให้ f(x) เป็น Density ซึ่งมีมัชฌิม μ ซึ่งมีค่าแน่นอนและความแปรปรวน $\sigma^2 > 0$ ให้ $\bar{X}_n$ เป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างขนาด n ซึ่งได้จากประชากรที่มี Density Function ให้ Y_n เป็นตัวแปรสุ่มโดยที่

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Density ของ Y_n จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ซึ่งมีมัชฌิม 0 และความแปรปรวน 1 เมื่อ n เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัดหรือจะกล่าวได้ว่า ถ้าเราสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรซึ่งมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 และถ้า n มีขนาดใหญ่แล้ว การแจกแจงของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างจะประมาณได้อย่างใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ ซึ่งมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2/n

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ต้องใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากมากจึงไม่อาจจะพิสูจน์ในที่นี้ได้ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่เราจำกัดโดยกำหนดให้การแจกแจงมี Moment Generating Function เราอาจแสดงได้ว่า Moment Generating Function ของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง เข้าใกล้ Moment Generating Function ของการแจกแจงปกติ ซึ่งเท่ากับ

[1] Mood and Graybill, loc.cit., pp.149-152.

เราได้วางโครงร่างในการพิสูจน์ทฤษฎีนี้

ให้ $Y = \frac{X' - \mu'}{\sigma'}$; X' มีการแจกแจงเป็นปกติ Moment Generating Function ของ Y จะเป็น

$$m_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(X'; \mu', \sigma'^2)\, dX' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma'}\, e^{t(X' - \mu')/}\ e^{-1/2(X' - \mu')^2/\sigma'^2} \quad \ldots(2)$$

$$= e^{1/2t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

สมมุติให้ X มี Density Function โดยมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 และมี Moment Generating Function, Moment Generating Function $(X - \mu)/\sigma$ จะเป็น

$$m_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X - \mu)/\sigma} f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

กลุ่มตัวอย่างขนาด n จะมีมัชฌิม $\bar{X}$ โดยมีการแจกแจงบางลักษณะ สมมุติให้มี Density $g(\bar{X})$ ซึ่งเราทราบแล้วว่าจะต้องมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2/n Moment Generating Function สำหรับ $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ จะเป็น

$$m_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t\, \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) g(\bar{X})\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

เราต้องการแสดงว่า $m_3(t)$ เข้าใกล้ $m_1(t)$ เมื่อ n ใหญ่ เราอาจกำหนด $m_3(t)$ ให้อยู่ในรูป $m_2(t)$ $m_3(t)$ เป็นค่าที่คาดหวัง

$$E\left[\exp\left(t\, \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] = E\left[\exp\left(\frac{t}{n} \sum \frac{X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \quad \ldots(6)$$

และเนื่องจากการแจกแจงร่วม (Joint Distribution) ของ $X_1, X_2, \ldots X_n$ เป็น $\prod_{i=1}^{n} f(X_i)$ เราจึงเขียนได้ว่า

$$M_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t}{\sqrt{n}} \sum \frac{X_i - \mu}{\sigma}} \prod_{i=1}^{n} f(X_i)\,dX_i$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t}{\sqrt{n}} \frac{X_i - \mu}{\sigma}} f(X_i)\,dX_i \right] \quad \ldots\ldots\ldots(7)$$

จาก (4) เราจะเห็นว่า ตัวประกอบแต่ละตัวในผลคูณใน (7) เท่ากับ $m_2(t/\sqrt{n})$ ดังนั้น

$$m_3(t) = \left[m_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Derivative ตัวที่ r ของ $m_2(t/\sqrt{n})$ เมื่อ t=0 จะเท่ากับ Moment ตัวที่ r รอบมัชฌิม หารด้วย $(\sigma/\sqrt{n})^r$ ดังนั้นเราอาจเขียนได้ว่า

$$m_2(t/\sqrt{n}) = 1 + \frac{\mu_1}{\sigma} \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2!}\frac{\mu_2}{\sigma^2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\mu_3}{\sigma^3}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \ldots) \quad \ldots\ldots(9)$$

แต่ $\mu_1 = 0$ และ $\mu_2 = \sigma^2$

$$\therefore \quad m_2(t/\sqrt{n}) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{\sigma^3}t^3 + \frac{1}{4!n}\frac{\mu_4}{\sigma^4}t^4 + \ldots\right) \ldots(10)$$

นั่นคือ $m_3(t) = \left\{ 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{\sigma^3}t^3 + \frac{1}{4!n}\frac{\mu_4}{\sigma^4}t^4 + \ldots\right)\right\} \ldots(11)$

จาก $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n = e^u$

ให้ u แทนเทอมในวงเล็บใน (11) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} m_3(t) = e^{1/2t^2} = m_1(t)$$

ดังนั้น เมื่อ $n \to \infty$ Z มี Moment Generating Function เช่นเดียวกับ Y และย่อมมีการแจกแจงเป็นปกติเช่นเดียวกัน ทั้งนี้โดยอาศัยทฤษฎี Uniqueness ของ Moment Generating Function

เพราะฉะนั้น เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ เรากล่าวได้ว่ามัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงประมาณได้กับการแจกแจงปกติ ไม่ว่าการแจกแจงของประชากรจะเป็นอย่างไรก็ตาม ตามปกติการแจกแจงของมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติในช่วงรอบ ๆ มัชฌิมมากกว่าในระยะห่างจากมัชฌิมออกมา

จี โพลยา (G. Polya) เป็นผู้ตั้งชื่อทฤษฎีนี้เมื่อปี คริสต์ศักราช 1920 ส่วนผู้ที่เสนอทฤษฎีนี้ขึ้นมาเป็นคนแรกคือ อับราฮัม เดอร์ มัว (Abraham De Moire, ค.ศ. 1667 - 1754) เดอ มัว ได้อธิบายทฤษฎีนี้ไว้หลายแบบ แบบที่สำคัญอีกแบบหนึ่งอธิบายในรูปผลบวกของตัวแปรสุ่มอิสระที่มีการแจกแจงเหมือนกัน ดังนี้[1]

ให้ S เป็นผลบวกของตัวแปรสุ่มอิสระ จำนวนมากที่มีการแจกแจงเหมือนกัน แต่ละตัวมีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว ตัวแปร $(S - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ จะแจกแจงเข้าใกล้การแจกแจงปกติมาตรฐาน เมื่อ n เข้าใกล้ ∞ ดังนั้นเมื่อ **n** ใหญ่ เราจึงสามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงของ S โดยอาศัยพื้นที่ใต้โค้งปกติ โดยที่

$$P(S \leq s) = P(Z \leq \frac{s - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})^2$$

The Law of Large Numbers[2]

ถ้ากลุ่มตัวอย่างขนาด n ได้จากประชากรซึ่งมี Density Function และมีค่าที่คาดหวังหรือมัชฌิม μ ความน่าจะเป็นที่มัชฌิมของกลุ่มตัวอย่าง $(\bar{X})$ จะแตกต่างไปจาก μ น้อยกว่าค่าเล็ก ๆ ที่กำหนดใด ๆ จะสามารถทำให้เข้าใกล้ 1 ได้ตามต้องการ

---

[1] Chou, op.cit., pp. 242-243.

[2] Alexander M. Mood and Franklin A. Graybill, Introduction to The Theory of Statistics. (2nd. ed.; New York : McGraw-Hill Book Company, 1963), pp.149-152.

หรือกล่าวว่า สำหรับค่าเล็ก ๆ ϵ, δ ใด ๆ ที่เลือกมาโดยที่ $\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่งถ้ากลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาดเท่ากับหรือใหญ่กว่า n ได้จากประชากรที่มี Density Function และมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ $\bar{X}$ ความน่าจะเป็นที่ $\bar{X}$ จะแตกต่างไปจาก μ น้อยกว่า ϵ (แสดงว่า $\bar{X}$ เข้าใกล้ μ) จะมากกว่า $1 - \delta$ (แสดงว่าความน่าจะเป็นเข้าใกล้ 1 ได้ตามที่ต้องการ)

ทฤษฎี ให้ f(x) เป็น Density มีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 ให้ $\bar{X}$ เป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n ซึ่งได้จากประชากรที่มี Density Function ให้ ϵ กับ δ เป็นค่าเล็ก ๆ ที่กำหนดโดยที่ $\epsilon > 0$ และ $0 < \delta < 1$ ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่งมีค่ามากกว่า $\sigma^2/\epsilon^2\delta$ แล้ว

$$P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) \geqslant 1 - \delta$$

พิสูจน์ จาก Chebyshev Inequality

$$P(|X - \mu|) \geqslant a\sigma \leqslant \frac{1}{a^2}$$

เมื่อนำมาประยุกต์กับ $\bar{X}$ ซึ่งเป็นมัชฌิมของกลุ่มตัวอย่างขนาด n ที่ได้จากประชากรซึ่งมี Density Function มีมัชฌิม μ และความแปรปรวน σ^2 เราทราบว่า $\mu_{\bar{X}} = \mu$ และ $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$ ดังนั้นเราจะได้

$$P(|\bar{X} - \mu|) \geqslant \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{a^2} \quad \text{........(4)}$$

หรือเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$P(|\bar{X} - \mu|) \leqslant \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \geqslant 1 - \frac{1}{a^2} \quad \text{........(5)}$$

เลือกค่า a ให้ $\frac{1}{a^2} = \delta$ นั่นคือ $a^2 = \frac{1}{\delta}$, $a = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

เลือกค่า n ให้ $\frac{a\sigma}{\sqrt{n}} < \epsilon$ นั่นคือ $n > \frac{\sigma^2}{\delta\epsilon^2}$

แทนค่าใน (5)

$$\therefore \; P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) > 1 - \delta$$

ทฤษฎีนี้เรียกว่า ทฤษฎีของคินท์ชั่น (Khintchine's Theorem) สำหรับ Law of Large Numbers ที่พิมพ์เมื่อปี 1929[1]

โมเม้นต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่น (Moment Generating Function)

โมเมนต์เจนเนอร์เรติงฟังก์ชั่น คือ ค่าความคาดหวังของฟังก์ชั่นของตัวแปร x ใด ๆ ในรูป

$$E(e^{tx})$$

โมเม้นต์เจนเนอร์เรติง g(x) กำหนดด้วย

$$M_{g(x)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tg(x)} f(x)\,dx$$

คุณสมบัติ[2]

1. ถ้า c เป็นค่าคงที่ และ h(x) เป็นฟังก์ชั่นของ x

$$M_{ch}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tch(x)} f(x)\,dx$$

$$= M_h(tc)$$

2. ถ้า $g(x) = h(x) + c$ แล้ว

---

[1] Ya-lun Chou, Statistical Analysis (New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969), p.240.

[2] Paul G. Hoel, Introduction to Mathematical Statistics, 3d ed., (New York : John Wiley & Sons, Inc., C 1962), p.96.

$$M_{h+c}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\left[h(x)+c\right]} f(x)\,dx$$

$$= e^{tc} \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} f(x)\,dx$$

$$= e^{tc} M_h(t)$$

ภาคผนวก ฉ.

ตาราง ก.

ตารางความน่าจะเป็นแบบไบโนเมียล

ค่าในตารางเป็นแบบความถี่สะสม ($\sum_{x=0}^{a} P(x)$)

n = 5

x \ P	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	P / x
0	.951	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000	.000	0
1	.999	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000	.000	1
2	1.000	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001	.000	2
3	1.000	1.000	1.000	.993	.969	.913	.812	.663	.472	.263	.081	.023	.001	3
4	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.869	.922	.832	.672	.410	.226	.049	4

n=10

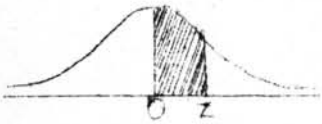
x \ P	0.01	0.05	.010	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	P / x
0	.904	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.996	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000	.000	3
4	1.000	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000	.000	4
5	1.000	1.000	1.000	.994	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.002	.000	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086	.004	8
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401	.096	9

n = 25

ตาราง ก. (ต่อ)

x \ P	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
0	.07179	.00373	.00075	.00012	.00000	.00000
1	.27121	.02739	.00702	.00157	.00005	.00000
2	.53709	.09823	.03211	.00896	.00043	.00001
3	.76359	.23399	.09621	.03324	.00237	.00008
4	.90201	.42067	.21374	.09047	.00947	.00046
5	.96660	.61669	.37828	.19349	.02936	.00204
6	.99052	.78004	.56110	.34065	.07357	.00732
7	.99774	.89088	.72651	.51185	.15355	.02164
8	.99954	.95323	.85056	.67693	.27353	.05388
9	.99992	.98267	.92867	.81056	.42462	.11476
10	.99999	.99445	.97033	.90220	.58577	.21218
11	1.00000	.99846	.98027	.95575	.73228	.34502
12		.99963	.99663	.98253	.84623	.50000
13		.99992	.99908	.99401	.92220	.65498
14		.99999	.99979	.99822	.96561	.78782
15		1.00000	.99996	.99955	.98683	.88524
16			.99999	.99990	.99567	.94612
17			1.00000	.99998	.99879	.97836
18				1.00000	.99972	.99268
19					.99995	.99796
20					.99999	.99954
21					1.00000	.99992
22						.99999
23						1.00000

ตาราง ข.



ตารางพื้นที่ใต้โค้งการแจกแจงปกติ

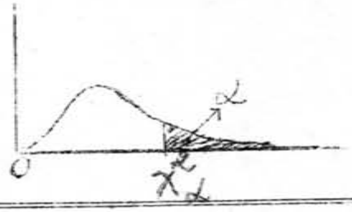
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0479	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1180	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1661	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3451	.3485	.3508	.3531	.3554	.2577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4773	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4825	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4887	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4989	.4989	.4989	.4989	.4989	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993

ตาราง ค.

ตารางความน่าจะเป็นของ x ที่มีค่าน้อยในการทดสอบไบโนเมียล ค่าความน่าจะเป็นในตารางนี้เป็นการทดสอบสมมุติฐานสูญสำหรับการทดสอบไบโนเมียลทางเดียว เมื่อ $p = q = \frac{1}{2}$ ตัวเลขไม่ได้ใส่จุดทศนิยม

N \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969	†										
6	016	109	344	656	891	984	†									
7	008	062	227	500	773	938	992	†								
8	004	035	145	363	637	855	965	966	†							
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998	†						
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	999	†					
11		006	033	113	274	500	726	887	967	994	†	†				
12		003	019	073	194	387	613	806	927	981	997	†	†			
13		002	011	046	133	291	500	709	867	954	989	998	†	†		
14		001	006	029	090	212	395	605	788	910	971	994	999	†	†	
15			004	018	059	151	304	500	696	849	941	982	996	†	†	†
16			002	011	038	105	227	402	598	773	895	962	989	998	†	†
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	†
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999
19				002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	998
20				001	006	021	058	132	252	412	588	748	868	942	979	994
21				001	004	013	039	095	192	332	500	668	808	905	961	987
22					002	008	026	067	143	262	416	584	738	857	933	974
23					001	005	017	047	105	202	334	500	661	798	895	953
24					001	003	011	032	076	154	271	419	581	729	846	924
25						002	007	022	054	115	212	345	500	655	788	885

† 1.0 หรือประมาณ 1.0



ตาราง ง.

ค่าของ χ^2 ที่ระดับความมีนัยสำคัญต่าง ๆ

df	.99	.98	.95	.90	.80	.70	.50	.30	.20	.10	.05	.02	.01	.001
1	.00016	.00063	.0039	.016	.064	.15	.46	1.07	1.64	2.71	3.84	5.41	6.64	10.83
2	.02	.04	.10	.21	.45	.71	1.39	2.41	3.22	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	.12	.18	.35	.58	1.00	1.42	1.37	3.66	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	.30	.43	.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	.55	.75	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.52
6	.87	1.13	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.46
7	1.24	1.56	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.32
8	1.65	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.09	26.12
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.68	21.67	22.88
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	21.16	23.21	29.59
11	3.05	3.61	4.58	5.58	6,99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	22.62	24.72	31.26
12	3.57	4.18	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	1855	21.03	24.05	16.22	32.91
13	4.11	4.76	5.89	7.40	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.36	25.47	27.69	34.53
14	4.66	5.37	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.06	23.68	26.87	29.14	36.12
15	5.23	5.98	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	28.26	30.58	37.70
16	5.81	6.61	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.46	23.54	26.30	29.63	32.00	39.29
17	6.41	7.26	8.67	10.08	12.00	13.53	16.34	19.51	21.62	24.77	27.59	31.00	33.41	40.75
18	7.02	7.91	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.60	22.76	25.99	28.87	32.35	34.80	42.31
19	7.63	8.57	10.12	11.65	13.72	15.35	18.34	21.69	23.90	27.20	30.14	33.69	36.19	43.82
20	8.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.78	25.04	28.41	21.41	35.02	37.51	45.32
21	8.90	9.92	11.59	13.24	15.44	17.18	20.34	23.86	26.17	29.62	32.67	36.34	38.93	46.80
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	18.10	21.34	24.94	27.30	30.81	33.92	37.66	40.29	48.27
23	10.20	11.29	13.09	14.85	17.19	19.02	22.34	26.02	28.43	32.01	35.17	38.97	41.64	49.73
24	10.86	11,99	13.85	15.66	18.06	19.94	23.32	27.10	29.55	33.20	36.42	40.27	42.98	51.18
25	11.52	12.70	14.61	16.47	18.94	20.87	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	41.57	44.31	52.62
26	12.20	13.41	15.38	17.[illegible]9	19.82	21.79	25.34	29.25	31.80	35.56	38.88	42.86	45.64	54.05

ตาราง จ.

ความน่าจะเป็นปัวซอง

λ

k	.005	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0	.9950	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
1	.0050	.0099	.0142	.0291	.0384	.0476	.0565	.0653	.0738	.0823
2	.0000	.0000	.0002	.0004	.0008	.0012	.0017	.0023	.0030	.0037
3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

λ

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

λ

k	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9.	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

λ

k	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0904	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

ความน่าจะเป็นปัวซอง (ต่อ)

					λ					
k	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1509	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0608	.0551	.0595
8	.0095	.0011	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

					λ					
k	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1482	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0097	0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

ความน่าจะเป็นปัวซอง (ต่อ)

λ

k	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

λ

k	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1070	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1320	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

ความน่าจะเป็นปัวซอง (ต่อ)

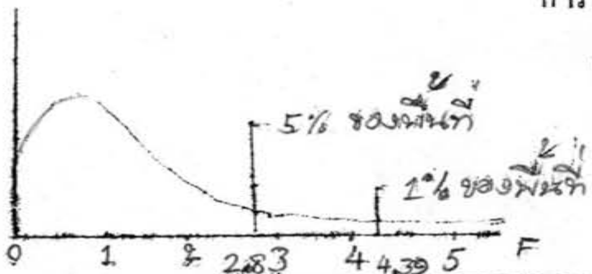
λ

k	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

ตาราง ฉ.

การแจกแจงเอฟ

ตัวอย่าง



สำหรับ $n_1=9$, $n_2=12$ ชั้นของความอิสระ $P[F > 2.8] = 0.05$

$P[F > 4.39] = 0.01$

$\emptyset_2$	$\emptyset$ ชั้นของความอิสระ (for greater mean square) 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24
50	4.03 7.17	3.18 5.06	2.79 4.20	2.56 3.72	2.40 3.41	2.29 3.18	2.20 3.02	2.13 2.88	2.07 2.78	2.02 2.70	1.98 2.62	1.95 2.56	1.90 2.46	1.85 2.39	1.78 2.26	1.74 2.18
55	4.02 7.12	3.17 5.01	2.78 4.16	2.54 3.68	2.38 3.37	2.27 3.15	2.18 2.98	2.11 2.85	2.05 2.75	2.00 2.66	1.97 2.59	1.93 2.53	1.88 2.43	1.83 2.35	1.76 2.23	1.72 2.15
60	4.00 7.08	3.15 4.98	2.76 4.13	2.52 3.65	2.37 3.34	2.25 3.12	2.17 2.95	2.10 2.82	2.04 2.72	1.99 2.63	1.95 2.56	1.92 2.50	1.86 2.40	1.81 2.32	1.75 2.20	1.70 2.12
65	3.99 7.04	3.14 4.95	2.75 4.10	2.51 3.62	2.36 3.31	2.24 3.09	2.15 2.93	2.08 2.79	2.02 2.70	1.98 2.61	1.94 2.54	1.90 2.47	1.85 2.37	1.80 2.30	1.73 2.18	1.68 2.09
70	3.98 7.01	3.13 4.92	2.74 4.08	2.50 3.60	2.35 3.29	2.32 3.07	2.14 2.91	2.07 2.77	4.01 2.67	1.97 2.59	1.93 2.51	1.89 2.45	1.84 2.35	1.79 2.28	1.72 2.15	1.67 2.07
80	3.96 6.96	3.11 4.88	2.72 4.04	2.48 3.56	2.33 3.25	2.21 3.04	2.12 2.87	2.05 2.74	1.99 2.64	1.95 2.55	1.91 2.48	1.88 2.41	1.82 2.32	1.77 2.24	1.70 2.11	1.65 2.03
100	3.94 6.90	3.09 4.82	2.70 3.98	2.46 3.51	2.30 3.20	2.19 2.99	2.10 2.82	2.03 2.69	1.97 2.58	1.92 2.51	1.88 2.43	1.85 2.36	1.79 2.26	1.75 2.19	1.68 2.06	1.68 1.98
125	3.92 6.84	3.07 4.78	2.68 3.94	2.44 3.47	2.29 3.17	2.17 2.95	2.08 2.79	2.01 2.65	1.95 2.56	1.90 2.47	1.86 2.40	1.83 2.33	1.77 2.23	1.72 2.15	1.65 1.03	1.60 1.94

ตาราง ช.

การแจกแจงไฮเปอร์จีออเมตริค

N	n	k	r or x	P(r)	p(x)
10	1	1	0	0.900000	0.900000
10	1	1	1	1.000000	0.100000
10	2	1	0	0.800000	0.800000
10	2	1	1	1.000000	0.200000
10	2	2	0	0.622222	0.622222
10	2	2	1	0.977778	0.355556
10	2	2	2	1.000000	0.022222
10	3	1	0	0.700000	0.700000
10	3	2	1	1.000000	0.300000
10	3	2	0	0.466667	0.466667
10	3	2	1	0.933333	0.466667
10	3	2	2	1.000000	0.066667
10	3	3	0	0.291667	0.291667
10	3	3	1	0.816667	0.525000
10	3	3	2	0.991667	0.175000
10	3	3	3	1.000000	0.008333
10	4	1	0	0.600000	0.600000
10	4	1	1	1.000000	0.400000
10	4	2	0	0.333333	0.333333
10	4	2	1	0.866667	0.533333
10	4	2	2	1.000000	0.133333
10	4	3	0	0.166667	0.166667
10	4	3	1	0.666667	0.500000
10	4	3	2	0.966667	0.300000
10	4	3	3	1.000000	0.033333
10	4	4	0	0.071429	0.071429
10	4	4	1	0.452381	0.380952
10	4	4	2	0.880952	0.428571
10	4	4	3	0.995238	0.114286
10	4	4	4	1.000000	0.004762
10	5	1	0	0.500000	0.500000
10	5	1	1	1.000000	0.500000
10	5	2	0	0.222222	0.222222
10	5	2	1	0.777778	0.555556
10	5	2	2	1.000000	0.222222
10	5	3	0	0.007333	0.083333
10	5	3	1	0.500000	0.416667
10	5	3	2	0.916667	0.416667
10	5	3	3	1.000000	0.083333
10	5	4	0	0.023810	0.023810
10	5	4	1	0.261905	0.238095
10	5	4	2	0.738095	0.476190
10	5	4	3	0.976190	0.238095
10	5	4	4	1.000000	0.023810
10	5	5	0	0.003968	0.003968
10	5	5	1	0.103175	0.099206
10	5	5	2	0.500000	0.396825
10	5	5	3	0.896825	0.396825
10	5	5	4	0.996032	0.099206
10	5	5	5	1.000000	0.003968
10	6	1	0	0.400000	0.400000
10	6	1	1	1.000000	0.600000
10	6	2	0	0.133333	0.133333
10	6	2	1	0.666667	0.533333
10	6	2	2	1.000000	0.333333
10	6	3	0	0.033333	0.033333
10	6	3	1	0.333333	0.300000
10	6	3	2	0.833333	0.500000
10	6	3	3	1.000000	1.166667
10	6	4	0	0.004762	0.004762
10	6	4	1	0.119048	0.114286
10	6	4	2	0.547619	0.428571
10	6	4	3	0.928571	0.380952
10	6	4	4	1.000000	0.071429
10	6	5	1	0.023810	0.023810
10	6	5	2	0.261905	0.238095
10	6	5	3	0.738095	0.476190
10	6	5	4	0.976190	0.238095
10	6	5	5	1.000000	0.023810
10	6	6	2	0.071429	0.071429

ประวัติการศึกษา

นางรำพรรณ จันทวิวัฒน์ ได้รับปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิตจากจุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย เมื่อปีพุทธศักราช 2508 ปัจจุบันเป็นนิสิตปริญญาโท แผนกวิชาวิจัยการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

สำหรับการวิจัยเรื่องนี้ผู้วิจัยได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย จำนวนเงิน 1,200.- บาท สำหรับเป็นค่าใช้จ่ายในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณา จึงขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย.