บทที่ 3

การสังเคราะห์และผลการสังเคราะห์ข้อมูล

1. ประวัติของการทดสอบไบโนเมียล

สำหรับการกระจายทวินาม $(a+b)^n$ เมื่อ a, b และ n เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ คนแรกที่คิดกฎนี้คือ เซอร์ ไอแซค นิวตัน (Sir Isacc Newton) ในจดหมายบงวันที่ 13 มิถุนายน ค.ศ. 1676 และอธิบายไว้เมื่อวันที่ 24 ตุลาคม ค.ศ.1676 นิวตันไม่ได้เป็นคนพิสูจน์การกระจายดังกล่าว แต่ใช้ในการคูณและการถอดราก ทฤษฎีบทไบโนเมียลเริ่มมานานก่อนสมัยของนิวตัน มีชาวอินเดียและอาหรับใช้การกระจายของ $(a+b)^2$ และ $(a+b)^3$ สำหรับการถอดราก วีเอตตา (Vieta) รู้จักการกระจายของ $(a+b)^4$ บี. ปาสคาล (B. Pascal) คิดค่าสัมประสิทธิ์ไบโนเมียลจากวิธีการที่เรียกว่าสามเหลี่ยมเลขคณิต เมื่อ ค.ศ. 1665 แต่พบว่าสามเหลี่ยมเลขคณิตมีคนพบก่อนปาสคาล ในต้นปี ค.ศ. 1303 ในประเทศจีน คนพบชื่อ ชู ชิ ไช (Chu Shih Chiech)

การพิสูจน์สูตรไบโนเมียลครั้งแรก ในกรณีของตัวเลขกำลังบวก กระทำโดยจาคอบ (เจมส์) เบอร์นูลี (1654-1705) (Jacob (James) Bernoulli) การพิสูจน์จะยากมากเมื่อใช้กับอนุกรมอนันต์ เลียวนาร์ด ออยเลอร์ (Leornhard Euler) เป็นผู้คิดการพิสูจน์ทั่ว ๆ ไป[1]

2. การแจกแจงไบโนเมียล (Binomial Distribution)

2.1 ลักษณะของการแจกแจงไบโนเมียล

---

[1] Encyclopedia Britannica (Vol.3, Encyclopedia Britannica, Inc., 1958), pp. 588-9.

การแจกแจงความน่าจะเป็นไบโนเมียล เป็นการแจกแจงที่ใช้กับตัวแปรที่เป็นตัวเลขจำนวนเต็ม (Discrete Variables)

การแจกแจงไบโนเมียลจะเกี่ยวกับผลที่เกิดขึ้นที่เป็นประเภทไดโคโตมัส[1] (Dichotomous) หมายถึง ประชากรที่แบ่งออกได้เป็น 2 พวกด้วยลักษณะใดลักษณะหนึ่ง เช่น ความสำเร็จหรือความไม่สำเร็จ บวกหรือลบ หนึ่งหรือศูนย์ ข้างบนหรือข้างล่าง เป็นต้น

ตัวอย่างที่ใช้ในการแจกแจงไบโนเมียลอาจจะเป็นไปได้ดังนี้

1. การโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง
2. เพศของเด็กที่อยู่ในครรภ์
3. ทางเลือกของคนสอบเข้ามหาวิทยาลัย วิทยาลัย หรือความสำเร็จจากการศึกษา
4. การตรวจสอบทางอุตสาหกรรมว่าสิ่งที่ผลิตมีคุณภาพดีหรือเสีย

คุณสมบัติบางประการของการแจกแจงไบโนเมียล[2] (Some Properties of the Binomial Distribution) มีดังนี้

1. ค่าเฉลี่ย[3] (Mean) $\mu = np$
2. ความแปรปรวน[4] (Variance) $\sigma^2 = npq$
3. การเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) $\sigma = \sqrt{npq}$

---

[1] Edward J. Kane, Economics Statistics and Econometrics, (Harper & Row Publishers., 1968), p.149.

[2] Murray R. Spiegel, Theory and Problems of Statistics, (New York, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, ©.1961), p.122.

[3] ดูภาคผนวก ก.

[4] ดูภาคผนวก ก.

4. โมเมนต์สัมประสิทธิ์ของความเบ้ (Moment Coefficient of Skewness)

$$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

5. โมเมนต์สัมประสิทธิ์ของเคอร์โตซีส (Moment Coefficient of Kurtosis)

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

2.2 คุณลักษณะของการทดลองไบโนเมียล[1] (The Characteristics of the Binomial Trials)

004262

1. การทดลองมี n ครั้ง ที่แต่ละครั้งทำภายใต้เงื่อนไขหรือสภาพที่เหมือนกัน (Identical Trials)

2. แต่ละการทดลองมีผลเกิดได้เพียง 2 อย่าง ใช้สัญลักษณ์ S สำหรับความสำเร็จ และ F สำหรับความไม่สำเร็จ

3. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละการทดลอง ให้มีค่าเท่ากับ p และมีค่าคงที่ตลอดทุกการทดลอง ความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จให้มีค่าเท่ากับ 1-p=q

4. การทดลองเป็นอิสระ (Independent)

5. ให้ x เป็นจำนวนความสำเร็จหลังจากการทดลอง n ครั้ง $x = 0,1,2,\ldots,n$

2.3 ทฤษฎีไบโนเมียล (Binomial Theorem)

สูตรที่ใช้ในการกระจายของผลบวกของสองเทอมยกกำลังใด ๆ n ที่เป็นเลขจำนวนจริง เรียกว่าทฤษฎีไบโนเมียล[2] การกระจายไบโนเมียลทั่ว ๆ ไปคือ[3]

---

[1] William Mendenhall, Introduction to Probability and Statistics, (2nd.ed., Wadsworth Publishing Company, Inc., 1969), p.101.

[2] Harold T. Davis and W.F.C. Nelson, Elements of Statistics (2nd.ed. The Principia Press, Inc., 1937), p.30.

[3] J.P. Guildford, Fundamental Statistics in Psychology and Education, (3rd ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, © 1956), p.206.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3 + \ldots n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)a^{n-r}b^r + \ldots + b^n$$

หรือ $= \binom{n}{o} a^n b^o + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \ldots + b^n$

เมื่อ $\binom{n}{r} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$

และสัญลักษณ์ $r!$ อ่านว่า "Factorial r" โดยที่

$r! = 1.\ 2.\ 3\ldots r$

$\therefore\ ^nC_x = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}$

$x! = 1.\ 2.\ 3\ldots x$, $x!$ เป็นผลคูณของเลขตั้งแต่ 1 ถึง x

$x!$ อ่านว่าแฟคทอเรียลเอกซ์ (Factorial x)

หรืออาจเขียนอีกแบบก็ได้ คือ $\underline{|x}$

$2! = 1.2 = 2$

$3! = 1.2.3 = 6$ และ $0! = 1$

$p+q = 1$ เสมอ ไม่ว่า n จะมีค่าเป็นอะไรก็ตาม ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ คือ $P(S) = p$ ความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จ คือ $P(F) = 1-p=q$

ไบโนเมียลมีพารามีเตอร์ 2 ตัว คือ n และ p

2.4 การหาความน่าจะเป็นไบโนเมียล

การทดลองเบอร์นูลี่ n ครั้ง แบบไม่เรียงลำดับที่ จำนวนความสำเร็จอาจจะเป็น 0, 1, 2,...n. การทดลอง n ครั้งนี้ให้ผลสำเร็จ x ครั้ง และไม่สำเร็จ n-x ครั้ง ซึ่งอาจเกิดได้ ^nC_x วิธี แต่ละวิธีมีความน่าจะเป็น $p^x q^{n-x}$ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี</u> ให้ $b(x; n, p)$ เป็นความน่าจะเป็นที่การทดลองเบอร์นูลี่ n ครั้ง ด้วยความน่าจะเป็นความสำเร็จ p และ $q = 1-p$ เป็นความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จ ในการ

ทดลองได้ความสำเร็จ x ครั้ง ความไม่สำเร็จ n-x ครั้ง แล้ว

$$b(x;n,p) = {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} \qquad (1)$$

ความน่าจะเป็นของความไม่มีความสำเร็จเลย = q^{n} และความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยมีความสำเร็จ 1 ครั้ง คือ $1 - q^{n}$

เราให้ p เป็นค่าคงที่ และให้ S_n เป็นจำนวนความสำเร็จ ในการทดลอง n ครั้ง แล้ว $b(x;n,p) = P\{S_n = x\}$ และ S_n เป็นตัวแปรสุ่ม และ (1) เป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม S_n และเราเรียกการแจกแจงนี้ว่าการแจกแจงไบโนเมียล เนื่องมาจาก "ไบโนเมียล" อ้างถึงความจริงที่ว่า (1) แทนเทอมที่ r ของการกระจายไบโนเมียล $(q + p)^{n}$ จากคำอ้างนี้จึงแสดงได้ด้วยว่า $b(0;n,p)+b(1;n,p)$

$$+ \dots + b(n;n,p) = (q + p)^{n} = 1$$

2.5 ความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Probabilities)

สมมุติต้องการหาความน่าจะเป็นในการหยิบลูกปัดให้ได้สีแดง อย่างน้อยที่สุด 3 ลูก ในการทดลอง 5 ครั้ง หมายถึงการหาความน่าจะเป็นของการเลือกได้ลูกปัดสีแดง 3, 4 หรือ 5 ลูก

จากตาราง ก. ของภาคผนวก ฉ.

$$P(x \geqslant 3/n=5,\ p=0.3) = P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)$$

$$= \sum_{x=3}^{5} {}^{5}C_{x}(0.3)^{x}(0.7)^{5-x}$$

โดยทั่วไปมี $P(x \geqslant 3/n,p) = \sum {}^{n}C_{x}\, p^{x}q^{n-x}$

$$P(x \geqslant 3/n=5,\ p=0.3) = 0.1630800$$

เมื่อ $P > 0.50$ ใช้วิธีเปลี่ยนเหมือนกับกรณีความน่าจะเป็นเฉพาะค่า และหาสูตรที่สมนัยกันกับ $P < 0.50$ เช่น ให้ $p = 0.7$ ให้หาค่าความน่าจะเป็นที่จะได้ความสำเร็จอย่างน้อยที่สุด 3 ครั้ง ในการทดลอง 5 ครั้ง

$$P(x \geq 3/n=5,\ P=0.7) = P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)$$

$$= 1-P(x=0)-P(x=1)-P(x=2)$$

$$= 1-{}^5C_0p^0q^{5-0}-{}^5C_1p^1q^{5-1}-{}^5C_2p^2q^{5-2}$$

จาก ${}^nC_x = {}^nC_{n-x}$ จะได้ว่า

$$P(x \geq 3/n=5,\ P=0.7) = 1-{}^5C_5q^5p^{5-5}-{}^5C_4q^4p^{5-4}-{}^5C_3q^3p^{5-3}$$

$$= 1-\sum_{k=5-3+1}^{5} {}^nC_xq^xp^{n-x}$$

$$= 1 - P(x \geq 5-3+1/n,q)$$

จากตารางสะสมได้ $1-P(x \geq 3/n=5,\ q=0.3)=1-0.1630800$

$$= 0.8369200$$

โดยทั่ว ๆ ไปจะได้ว่า $P(x \geq x_0/n,p)=1-P(x \geq n-x_0+1/n,q)$

$$q = 1-p$$

ตัวอย่าง จงหาความน่าจะเป็นในการเลือกลูกปัดสีแดงอย่างน้อยที่สุด 2 ลูก มี $n = 5,\ p = 0.7$

$$P(x \geq 2/n = 5,p=0.7)= 1-P(x \geq 5-2+1/n=5,q=0.3)$$

$$= 1-0.307800$$

$$= 0.9692200$$

แปลความหมาย : ความน่าจะเป็นของการเลือกลูกปัดสีแดงอย่างน้อยที่สุด 2 ลูก ในการทดลอง 5 ครั้ง มี p =0.7 จะเท่ากับ 1 ลบด้วยความน่าจะเป็นของการเลือกลูกปัดสีแดงอย่างน้อยที่สุด 4 ลูก ในการทดลอง 5 ครั้ง ด้วย q=0.3 และ ได้ความน่าจะเป็น = 0.969

ตัวอย่างการแจกแจงไบโนเมียล

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าครอบครัวหนึ่งมีบุตร 6 คน จงแสดงตารางแจกแจงความถี่ของความน่าจะเป็นของจำนวนบุตรผู้ชายในครอบครัวที่มีบุตร 6 คน และเขียนฮิสโตแกรมด้วย

วิธีทำ ให้ p =ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ คือการได้บุตรผู้ชาย

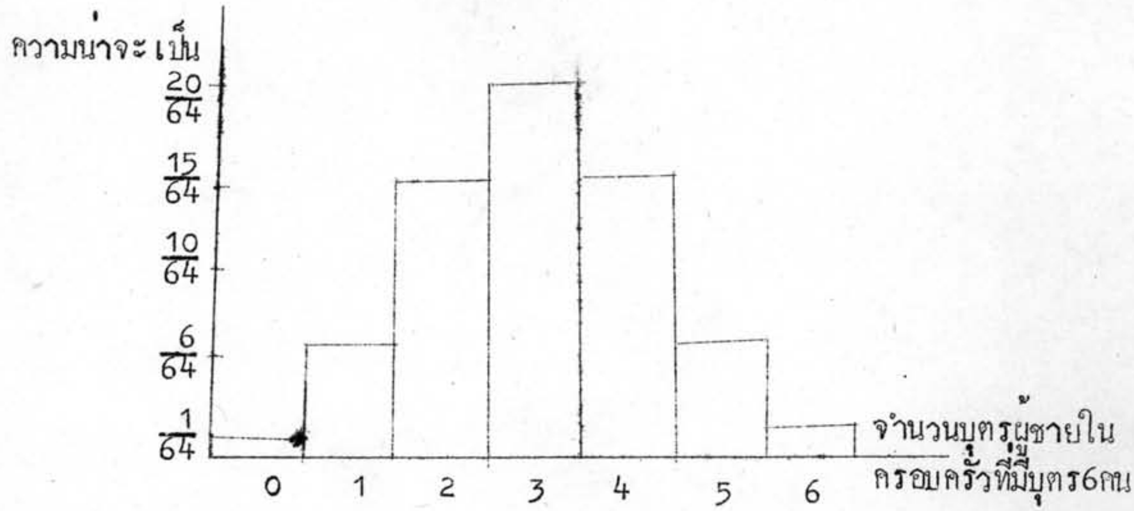
q =ความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จ คือการไม่ได้บุตรผู้ชาย

$n = 6$ = จำนวนบุตรในครอบครัวหนึ่ง

ตารางที่ 1 การแจกแจงไบโนเมียลด้วย $p = \frac{1}{2}$

x = จำนวนบุตรผู้ชาย	$P(x) = {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$	
0	$1(\frac{1}{2})^6$	$= \frac{1}{64}$
1	$6(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^5$	$= \frac{6}{64}$
2	$15(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^4$	$= \frac{15}{64}$
3	$20(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3$	$= \frac{20}{64}$
4	$15(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^2$	$= \frac{15}{64}$
5	$6(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^5$	$= \frac{6}{64}$
6	$1(\frac{1}{2})^6$	$= \frac{1}{64}$
รวม		$= 1$

ภาพที่ 1 ฮิสโตแกรมของการแจกแจงไบโนเมียล



ตัวอย่างที่ 2 ถ้า x เป็นจำนวนหน้า 6 ที่ได้จากการโยนลูกเต๋า 4 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของการโยนแต่ละครั้งว่าลูกเต๋าจะขึ้นหน้า 6 เท่าไร แสดงตารางการแจกแจงความน่าจะเป็น และเขียนฮิสโตแกรมด้วย

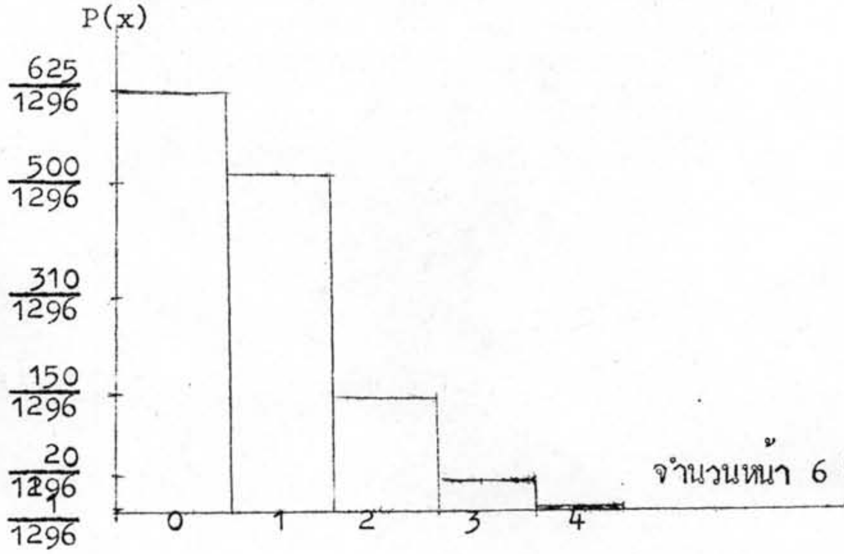
วิธีทำ $p = \frac{1}{6}$, $n = 4$

มัชฌิมเลขคณิต $= np = 4 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3} = 0.67$

ตารางที่ 2 การแจกแจงไบโนเมียลด้วย $p = \frac{1}{6}$

จำนวนหน้า 6 ที่ขึ้น	P (x) ที่ได้จาก ${}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$	
0	${}^{4}C_{0}p^{0}q^{4-0}$	$=\frac{625}{1296}$
1	${}^{4}C_{1}p^{1}q^{4-1}$	$=\frac{500}{1296}$
2	${}^{4}C_{2}p^{2}q^{4-2}$	$=\frac{150}{1296}$
3	${}^{4}C_{3}p^{3}q^{4-3}$	$=\frac{20}{1296}$
4	${}^{4}C_{4}p^{4}q^{4-4}$	$=\frac{1}{1296}$
รวม		$= 1$

ภาพที่ 2 ฮิสโตแกรมของการแจกแจงไบโนเมียลด้วย $p = \frac{1}{6}$



3. การทดสอบทางสถิติของความเป็นไบโนเมียลและปัวซอง

ข้อมูลที่ใช้ทดสอบ เป็นความถี่และทดสอบสมมุติฐานสูญว่าความสำเร็จที่สังเกตได้นั้นมีค่าพอจะเปรียบเทียบได้กับจำนวนความสำเร็จที่คาดหวังหรือไม่ ทั้งนี้การทดสอบจะต้องเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

3.1 สมมุติฐานทางสถิติและการทดสอบ

สมมุติฐาน หมายถึง ข้อความที่คาดคะเน[1] ว่า "สิ่งนี้จะมีความสัมพันธ์กับสิ่งนั้น" ซึ่งมักอยู่ในรูปข้อความที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของของสองสิ่ง สมมุติฐานที่ดีนั้นมีหลักเกณฑ์อยู่สองประการ ประการแรก เป็นข้อความแสดงความสัมพันธ์ของของสองสิ่ง หรือกล่าวทางการวิจัยและสถิติก็ว่า ความสัมพันธ์ของตัวแปรสองตัว ประการที่สองก็คือ สมมุติฐานนั้นแสดงความสำคัญที่จะสามารถทำการทดสอบความสัมพันธ์นั้น ๆ ได้ หรืออาจกล่าวว่า

---

[1]Merle W. Tate, Statistics in Education and Psychology (New York: The Mamillan Company, C.1965), p.222.

ตัวแปรหรือของสองสิ่งนั้นต้องเป็นของหรือตัวแปรที่วัดออกมาเป็นตัวเลข เพื่อจะได้เอามาศึกษาดูความสัมพันธ์ได้

ขั้นสำคัญในงานวิจัยคือ การทดสอบสมมุติฐาน และการทดสอบสมมุติฐานนี้มักจะหวังว่าสมมุติฐานนั้นเป็นจริง ความจริงกับสมมุติฐานมีความสัมพันธ์กัน ความจริงเป็นแนวในการตั้งสมมุติฐาน และสมมุติฐานเป็นเครื่องมืออธิบายความจริง

ความจำเป็นของการใช้สมมุติฐานในการทดสอบทางสถิติเนื่องมาจากขาดความรู้เกี่ยวกับประชากร การจะรู้เรื่องประชากรจำเป็นต้องอาศัยกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้การทดสอบสมมุติฐานที่ประกอบด้วยเหตุผลที่น่าเชื่อถือเพื่ออ้างถึงประชากร วิธีที่มีประโยชน์และประสบผลมากในการทดสอบสมมุติฐานขึ้นอยู่กับข้อตกลงเบื้องต้นว่า สมมุติฐานภายใต้การทดสอบเป็นจริง[1] (ไบโนเมียลและปัวซองทดสอบภายใต้สมมุติฐานที่เป็นจริง) สมมุติฐานมีลักษณะเป็น ถ้า...แล้ว" (If... then) ถ้าความคาดหวังนั้นเป็นไปตาม "ถ้า" สมมุติฐานก็เป็นจริง "ถ้าไม่" เป็นไปตามที่คาดหวังก็ปฏิเสธ

ในวิชาสถิติ สมมุติฐานที่ทดสอบภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นว่าสมมุติฐานนั้นเป็นจริงเรียกว่า "สมมุติฐานสูญ" (Null Hypothesis) สมมุติฐานสูญยอมรับว่าพารามิเตอร์นั้นมีค่าที่แน่นอน และทดสอบสมมุติฐานว่าค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างแตกต่างไปจากพารามิเตอร์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ ถ้าแตกต่างก็ปฏิเสธ ถ้าไม่แตกต่างก็ยอมรับค่านั้น เช่น ต้องการทราบว่าเกณฑ์ภาคเชาวน์ (I.Q.) ของคนที่มีอาชีพในท้องถิ่นแห่งหนึ่งเท่ากับ 100 หรือไม่ สมมุติฐานสูญคือ มัชฌิมประชากรเท่ากับ 100 วิธีการเริ่มจากการสุ่มหยิบกลุ่มตัวอย่างคนในอาชีพนั้นอย่างสุ่มและคำนวณมัชฌิม แล้วทดสอบตามระเบียบวิธีทางสถิติเพื่อดูว่าความแตกต่างนั้นเป็นไปโดยบังเอิญหรือไม่ ถ้าแตกต่างอย่างบังเอิญก็ยอมรับว่ากลุ่มคนอาชีพนั้นมีเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ย 100 หรือถ้าแตกต่างจริง ก็ปฏิเสธสมมุติฐานสูญว่าเกณฑ์ภาคเชาวน์เฉลี่ยไม่เท่ากับ 100

---

[1] Charles E. Clark, An Introduction to Statistics, (New York: John Wiley & Sons, Inc., © 1953), p.178.

โดยทั่วไปการทดสอบสมมุติฐานสูญก็คือ การกำหนดว่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าพารามิเตอร์กับค่าที่ประมาณจากกลุ่มตัวอย่างเป็นไปโดยบังเอิญหรือไม่ ความคลาดเคลื่อนกำหนดได้ด้วยความน่าจะเป็น (Probability) ถ้าความน่าจะเป็นของการเกิดสมมุติฐานสูญน้อย แสดงว่าความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมาก ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนเรียกว่าระดับความมีนัยสำคัญ (Level of Significance) มีต่าง ๆ กัน เช่น ถ้ายอมรับสมมุติฐานว่าเป็นจริงที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 หมายความว่าความน่าจะเป็นของ ความคลาดเคลื่อนจะเกิดขึ้นไม่มากกว่า 10 ครั้ง ใน 100 ครั้ง ในทางปฏิบัติมักใช้ระดับความมีนัยสำคัญที่ 10 %, 5 % หรือต่ำกว่านี้ ขึ้นอยู่กับผู้วิจัยจะเลือกใช้ ที่ระดับความมีนัยสำคัญหนึ่งอาจเหมาะกับงานวิจัยอย่างหนึ่ง แต่ไม่เหมาะกับอีกงานหนึ่ง

3.2 ความคลาดเคลื่อนในการทดสอบสมมุติฐาน

สมมุติฐานที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์อาจจะผิดหรือถูกก็ได้เพราะไม่สามารถทำการสำรวจประชากรทั้งหมดได้ เมื่อกระทำกับกลุ่มตัวอย่างจึงมีความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริง หรือยอมรับสมมุติฐานที่ผิดก็ได้

การทดสอบสมมุติฐาน จึงเกี่ยวข้องกับผล 4 ประการ คือ

1. ยอมรับสมมุติฐานที่ถูก
2. ปฏิเสธสมมุติฐานที่ผิด
3. ปฏิเสธสมมุติฐานที่ถูก
4. ยอมรับสมมุติฐานที่ผิด

ความผิดพลาดของการทดสอบทางสถิติคือข้อ 1 และ 2 การปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริง เรียกว่าความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่ง α (Type-One Error) และการยอมรับสมมุติฐานที่ผิด เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนชนิดที่สอง β (Type-Two Error) เช่น ความแตกต่างระหว่างมัชฌิม 2 ค่า $\mu_1 - \mu_2 = 0$ และการทดสอบทางสถิติได้ผลว่าค่ามัชฌิมนั้นมีนัยสำคัญ คือ สรุปว่ามัชฌิม 2 ค่านั้นแตกต่างกัน เราก็ปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริง จึงเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่งขึ้น ในทางตรงกันข้าม ถ้าค่ามัชฌิม 2 ค่านั้นแตกต่างกันจริง $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ แต่ผลการทดสอบทางสถิติไม่มีนัยสำคัญ คือทดสอบได้ว่าค่ามัชฌิม 2 ค่านั้นเท่ากัน แสดงว่า

เรายอมรับความคลาดเคลื่อนชนิดสอง

การทดสอบข้อมูลโดยใช้ค่าสถิติโดยทั่วไปนั้น จะต้องทราบสมมุติฐานที่ไม่มีความแตกต่าง เพราะจะทำให้ได้ผลที่แน่นอนประการเดียว

ความพยายามที่จะควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่ง เป็นการจำกัดการปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริง การเลือกความน่าจะเป็นที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับธรรมชาติของปัญหา ถ้าการปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริงมีผลเกี่ยวข้องกับเรื่องร้ายแรง ควรตั้งระดับความมีนัยสำคัญให้ต่ำเช่น 0.01, 0.005 หรือน้อยกว่านั้น แต่ถ้าการปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็นจริงแล้วผลที่เกิดไม่ค่อยสำคัญนัก อาจตั้งค่าของความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนให้สูงก็ได้ เช่น 0.10, 0.05 เช่น การทดลองใช้วิธีการสอนฟิสิกส์แบบใหม่กับกลุ่มนักเรียน ถ้าผลของวิธีสอนนั้นจำเป็นต้องมีการเปลี่ยนแปลงที่สิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายมาก เช่น ขนาดห้องเรียน ตารางสอน เครื่องมือ เจ้าหน้าที่ ฯลฯ ก็อาจเลือกความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนในการปฏิเสธสมมุติฐานที่ระดับความมีนัยสำคัญต่ำ[1] การลดความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่งนี้ทำให้ความคลาดเคลื่อนชนิดที่สองเพิ่มขึ้น ปัญหานี้ขึ้นอยู่กับหลายเรื่อง เช่น ค่าใช้จ่าย ความไว้วางใจ เงิน ความปลอดภัย ความสูญเปล่าในอนาคต เป็นต้น การควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่สองไม่เพียงแต่ลดความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่งเท่านั้น แต่ต้องกระทำไปพร้อม ๆ กันทั้งสองอย่าง ในบางกรณีความคลาดเคลื่อนอย่างใดอย่างหนึ่งอาจมีความสำคัญกว่า เช่น ถ้าปฏิเสธสมมุติฐานสูญแล้วอาจจะนำไปสู่ผลที่จะใช้ยาไม่มีคุณภาพ ก็ต้องใช้ระดับความมีนัยสำคัญให้น้อย (0.01) ในกรณีที่ให้เกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่สองไม่ได้ ควรตั้งระดับความมีนัยสำคัญให้สูง (0.10) หรือเลือกใช้สถิติทดสอบให้เหมาะสม[2]

เมื่อกำหนดความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่งแล้วก็ควรพิจารณาความคลาดเคลื่อนชนิดที่สองด้วย ถ้าสมมุติฐานนั้นผิด ค่าพารามิเตอร์มักจะมากกว่าหรือ

---

[1] Merle W. Tate, op.cit., p.223.

[2] Jenne S. Philips and Richard F. Thompson, Statistics for Nurse, (New York : The Macmillan Company, 1967), p.109.

น้อยกว่าที่ตั้งไว้ ตัวอย่างเช่น การจัดขอบเขตของการปฏิเสธ (Region of Rejection) และขอบเขตของการยอมรับของมัชฌิม (ดังในภาพที่ 3) ความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมุติฐานว่ามัชฌิมเป็นจริงเท่ากับ 0.05 ความน่าจะเป็นวัดได้ 3 ลักษณะ (a) และ (c) เป็นการทดสอบสมมุติฐานทางเดียว (b) เป็นการทดสอบสมมุติฐานชนิดสองทาง

ภาพที่ 3 แสดงขอบเขตการปฏิเสธชนิดทางเดียวและสองทาง

3.3 ขอบเขตการปฏิเสธ (Region of Rejection)

ขอบเขตของการปฏิเสธขึ้นอยู่กับสมมุติฐานสำรอง ถ้าสมมุติฐานสำรองบ่งทิศทางการทำนายความแตกต่าง จะใช้การทดสอบชนิดทางเดียว ถ้าสมมุติฐานสำรองไม่ได้บ่งทิศทางของความแตกต่าง ก็ใช้การทดสอบชนิดสองทาง การทดสอบทางเดียวและการทดสอบสองทางแตกต่างกันที่ตำแหน่งที่ตั้งของขอบเขตการปฏิเสธ (แต่ไม่แตกต่างกันในขนาด) นั่นคือ ในการทดสอบทางเดียว ขอบเขตของการปฏิเสธจะอยู่ที่ปลายด้านใดด้านหนึ่งของการแจกแจงตัวอย่างในการทดสอบสองทาง ขอบเขตของการปฏิเสธจะอยู่ที่ปลายทั้งสองของการแจกแจงตัวอย่าง

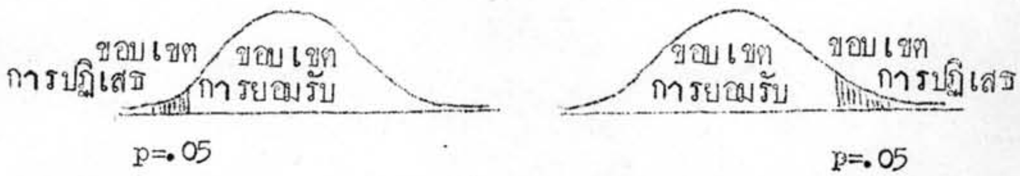
ขนาดของขอบเขตการปฏิเสธใช้ α (Level of Significance) ถ้า $\alpha = 0.5$ ขนาดของขอบเขตการปฏิเสธเป็น 5 เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ทั้งหมด ภายใต้ส่วนโค้งของการแจกแจงตัวอย่าง

ภาพที่ 4 แสดงขอบเขตของการทดสอบสองทาง

การทดสอบสองทาง ประกอบด้วยขอบเขตของการปฏิเสธ 2 แห่ง คือทางด้านขวามือและซ้ายมือของโค้งของการแจกแจง ขอบเขตของการปฏิเสธจะประกอบด้วยค่าของ x (จำนวนความสำเร็จในการทดลอง) ค่าของ x ทั้งมากและน้อยที่ตรงกันข้ามกับสมมุติฐานสูญ ซึ่ง $x \leq x_1$ และ $x \geq x_2$ x_1 มีค่ามากที่สุดที่จะทำให้ $P(x \leq x_1) \leq \alpha_0/2$ หรือ x_2 เป็นค่าน้อยที่สุด (ของ x) ที่ทำให้ $P(x \geq x_2) \leq \alpha_0/2$ ระดับความมีนัยสำคัญที่แท้จริงคือ $\alpha = P(x \leq x_1) + P(x \geq x_2)$ ค่าของ P(x) ที่อยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งจะได้รับการปฏิเสธ เช่น สมมุติว่าต้องการทดสอบว่า p=0.5 หรือไม่ แบ่งเขตของการปฏิเสธออกเป็น 2 ส่วนเท่ากัน ถ้าเป็นที่ระดับความมีนัยสำคัญ .05 จากตารางภาคผนวก ฉ. ด้านบนเป็นความน่าจะเป็นของการแจกแจงไบโนเมียลสะสม ด้านสดมภ์ซ้ายสุดที่ 1 เป็นจำนวนการทดลอง (n) ด้านสดมภ์ที่ 2 เป็นจำนวนความสำเร็จ (x) ดูด้านสดมภ์ที่ n = 100 และ x ที่ 60 และด้านแถวที่ความน่าจะเป็น = .5 จะได้ค่า $P(x \geq 60)=0.02844$ และที่ x = 40 ที่ n=100 และ p =.5 ที่เดิม ได้ค่า $P(x \leq 40) = 0.02844$ ดังนั้นขอบเขตของการปฏิเสธคือ $P(x \geq 60) = .02844$ หรือ $P(x \leq 40) = 0.02844$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ถ้าเป็นการทดสอบชนิดทางเดียว ค่าของ P(x) จะปรากฏอยู่ทางซ้ายมือหรือขวามือของการกระจายขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของผู้วิจัย ดูภาพที่ 5

ภาพที่ 5 แสดงการทดสอบทางเดียว



ถ้าต้องการทดสอบ p = 0.5 ชนิดทางเดียวคือ $p < 0.5$ ขอบเขตของการปฏิเสธจะอยู่ด้านซ้ายมือ คือ $P(x \leq x_1) = 0.02844$ หรือถ้าต้องการทดสอบ $p > .05$ ขอบเขตของการปฏิเสธจะอยู่ด้านขวามือ คือ $P(x \geq x_2) = 0.02844$ การทดสอบทั้งสองชนิดต้องเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นกับค่าระดับความมีนัยสำคัญ

3.4 สมมุติฐานธรรมดา (Simple Hypothesis) และสมมุติฐานประกอบ (Composite Hypothesis)

สมมุติฐานธรรมดาคือสมมุติฐานที่กำหนดค่าพารามิเตอร์ไว้อย่างแน่นอน เช่น ถ้าวิศวกรตั้งสมมุติฐานในการทดสอบความน่าจะเป็นของผลิตภัณฑ์ที่ใช้ไม่ได้ คือ $p = .10$ หรือนักจิตวิทยาทดสอบสมมุติฐานที่ว่า ค่าเฉลี่ยของเชาวน์ของคนกลุ่มหนึ่งคือ $\mu = 115$ สมมุติฐานทั้งสองนั้นเป็นการทดสอบสมมุติฐานธรรมดา ถ้าพารามิเตอร์สองค่าแตกต่างกันอย่างถูกต้อง เช่น $\mu_1 - \mu_2 = 0$ กรณีนี้ก็จะเป็นสมมุติฐานธรรมดาด้วย ส่วนสมมุติฐานประกอบกำหนดพารามิเตอร์เป็นขอบเขต เช่น สมมุติฐานที่ว่า $p \leq .10$, $\mu \neq 100$ และ $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

การทดสอบสมมุติฐานจะไม่ตั้งสมมุติฐานเพียงอย่างเดียว แต่จะตั้งสมมุติฐานที่แตกต่างกันสองอย่าง สมมุติฐานเหล่านี้ต้องตั้งว่า ถ้าสมมุติฐานอย่างหนึ่งเป็นจริง สมมุติฐานอีกอย่างหนึ่งก็ไม่เป็นจริง เนื่องจากแต่ละสมมุติฐานกำหนดค่าพารามิเตอร์เป็นขอบเขต (range) จึงต้องจัดค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ได้เป็นสองกลุ่ม เพื่อว่าค่าจริงของพารามิเตอร์ต้องอยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง พิจารณาตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว วิศวกรอาจตั้งสมมุติฐาน $p < .10$

หรือ $p > .10$ หรือ $p = .10$ นักจิตวิทยาอาจตั้งสมมุติฐานประกอบและสมมุติฐานธรรมดา แทนที่จะใช้สมมุติฐานประกอบทั้งสองแบบวิศวกร สมมุติฐานธรรมดาอาจตั้งว่าเชาวน์เฉลี่ย คือ $\mu = 100$ (หรือความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่มเป็นศูนย์) และตั้งสมมุติฐานประกอบว่าค่าเฉลี่ยของเชาวน์ของประชากรไม่เท่ากับศูนย์ คือ $\mu \neq 100$ (หรือความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่มไม่เท่ากับศูนย์)

ใช้ H_0 และ H_1 ในการทดสอบสมมุติฐาน

จากตัวอย่างดังกล่าว นักจิตวิทยาต้องการทดสอบประชากรสองกลุ่มว่ากลุ่มใดมีเชาวน์เฉลี่ยมากกว่า 100 ต้องสร้างสมมุติฐานดังนี้

$$H_0 : \mu \leq 100$$
$$H_1 : \mu > 100$$

หรือถ้าต้องการทดสอบความแตกต่างของเชาวน์ของประชากรสองกลุ่ม ต้องตั้งสมมุติฐานดังนี้

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

H_0 และ H_1 อาจเป็นได้ทั้งสมมุติฐานธรรมดาหรือสมมุติฐานประกอบ เช่น ตั้งสมมุติฐานธรรมดา ทดสอบกับสมมุติฐานสำรองธรรมดา ดังนี้

$$H_0 : \mu = 100$$
$$H_1 : \mu = 120$$
หรือ $$H_1 : \mu = 75$$

หรือทดสอบกับสมมุติฐานสำรองประกอบที่ 1

$$H_1 : \mu \neq 100$$
หรือ $$H_1 : \mu > 100$$
หรือ $$H_1 : \mu < 75$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าตั้งสมมุติฐานสูญประกอบการทดสอบกับสมมุติฐานสำรองธรรมดา เช่น

$$H_0 : \mu < 100$$

$$H_1 : \mu = 100$$

หรือ $H_1 : \mu < 120$

หรือทดสอบกับสมมุติฐานสำรองประกอบที่ว่า

$$H_1 : \mu \geq 100$$

หรือ $H_1 : \mu \geq 120$

จากการทดสอบทางสถิติ แบบที่ง่ายที่สุดควรใช้สมมุติฐานสูญธรรมดาทดสอบกับสมมุติฐานสำรองประกอบ แต่ปัญหาที่เกิดขึ้นจริงไม่อาจนำมาใช้กับแบบนี้ได้ แต่มักจะใช้แบบสมมุติฐานสูญประกอบ หรือสมมุติฐานสำรองประกอบ หรืออาจใช้ทั้งสองอย่างก็ได้

ถ้าในปัญหาไม่บ่งการทดสอบว่าต้องเป็นการทดสอบสมมุติฐานธรรมดาทั้งสองแล้ว แบบที่ดีที่สุดคือการทดสอบระหว่างสมมุติฐานสูญธรรมดากับสมมุติฐานสำรองประกอบ

ให้สังเกตว่าสมมุติฐานสำรองประกอบต้องกำหนดค่าพารามิเตอร์เป็นขอบเขต ซึ่งเป็นค่าที่สูงกว่าทั้งหมด หรือต่ำกว่าทั้งหมด หรือเป็นค่าที่มีขอบเขตอยู่สองด้านที่กำหนดด้วยสมมุติ-ฐานสูญ การทดสอบทางสถิติที่มีสมมุติฐานสำรองกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่มีค่าสูงกว่าทั้งหมดหรือต่ำกว่าทั้งหมด ค่าพารามิเตอร์จะสมนัยกับสมมุติฐานสูญที่เรียกว่าการทดสอบทางเดียว สมมุติฐานสำรองซึ่งไม่กำหนดค่าพารามิเตอร์ว่ามีค่าพารามิเตอร์ว่ามีค่าทางด้านใดด้านหนึ่ง ค่าพารามิเตอร์จะสมนัยกับสมมุติฐานสูญที่ว่าการทดสอบสองทาง เช่น $H_0 : \mu = 100$ ทดสอบกับสมมุติฐานสำรองที่ว่า $H_1 : \mu > 100$ ซึ่งเป็นการทดสอบทางเดียว หรืออาจจะทดสอบกับสมมุติฐานสำรอง $H_1 : \mu \neq 100$ เป็นการทดสอบสองทาง[1]

---

[1]Donald L. Harnett. Introduction to Statistical Methods. (Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, 1970), pp.213-216.

3.5 การทดสอบที่ใช้การแจกแจงไบโนเมียล

ตัวอย่างที่ 1 ครูผู้หนึ่งทดสอบนักเรียนด้วยข้อสอบถูกผิด 10 ข้อ ต้องการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นายก. ได้คะแนนโดยการเดาข้อสอบแต่ละข้อหรือไม่ โดยการตั้งสมมุติฐาน H_0 : นาย ก. เดาคำตอบ[1]

1. $H_0 : p = 0.5$

   $H_1 : p \neq 0.5$

2. การทดสอบทางสถิติ ใช้การทดสอบแบบไบโนเมียล

   x = จำนวนคำตอบที่ถูกจากการเดา

3. ระดับความมีนัยสำคัญ ให้ $\alpha = 0.05$

4. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง ค่าความน่าจะเป็นรวมของค่า x ได้จากตาราง ก[2]

5. ขอบเขตของการปฏิเสธ ถ้าพิจารณาค่า x ทั้งมากและน้อย ในขอบเขตของการปฏิเสธ ถ้า $p > .5$, $np > 5$ และถ้า $p < .5, np < 5$ และใช้ตาราง ก หาค่าขอบเขตของการปฏิเสธ

พิจารณา $x = 0, 10$ ขอบเขตของการปฏิเสธคือ

$P\left(x=0,10/p=0.5\right) = 0.002$ เป็นตัวเลขที่มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ $\alpha = 0.05$ จึงขยายขอบเขตนี้โดยรวม $x = 1, 9$

$\alpha = P\left(x = 0,1,9,10/p=0.5\right) = 0.022$

ถ้ารวม $x = 2,8$ ด้วยใน $\alpha = P\left(x = 0,1,2,8,9,10/p = 0.5\right) = 0.110$ เป็นตัวเลขที่มีค่ามากเกินไป เมื่อเปรียบเทียบกับ $\alpha = 0.05$ จึงไม่รวมค่า $x = 2$ และ

---

[1] Barnett Frederie, Beaver Robert and Mendenhall William, A Programmed Study Guide for Introduction to Probability and Statistics (California:Wadsworth Publishing Company,Inc.,1968) pp.159-160.

[2] ดูภาคผนวก ฉ.

$x = 8$ เข้าด้วย

6. การสรุปผล ปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $x = 0, 1, 9, 10$ ด้วย

$\alpha = P$ (ความผิดพลาดชนิดที่ 1) = 0.022

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากตัวอย่างที่ 1 ถ้าความน่าจะเป็นในการเลือกคำตอบถูก = 0.8 จงหาค่า β (ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดชนิดที่ 2)

β = P (ความผิดพลาดชนิดที่ 2)

= P (ยอมรับ H_0 เมื่อ H_0 ไม่จริง/$p=0.8$)

ถ้า H_1 เป็นจริง และเรายอมรับ H_0 ซึ่งไม่จริง เมื่อ $x = 2,3,\ldots,7,8$

ดังนั้น $\beta = [x = 2,3,\ldots 7,8/p = .8]$

$$= \sum_{x=0}^{8} P(x) - \sum_{x=0}^{1} P(x)$$

$$= 0.624-0.000$$

$$= 0.624$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ในการสอบซึ่งใช้ข้อสอบแบบถูกผิด 10 ข้อนั้น ความน่าจะเป็นจะมีค่าเท่าไรที่ผู้ตอบจะเดาถูก 70 % หรือมากกว่า และความน่าจะเป็นมีค่าเท่าไรที่ผู้ตอบจะเดาถูก 7 ข้อ พอดี[1]

<u>วิธีทำ</u> ตรวจสอบดูสถานการณ์นี้ว่า

ก. สมมุติว่าข้อสอบนี้มีการตอบ และต้องมีถูกกับผิด

ข. ข้อสอบทุกข้อมีค่าความน่าจะเป็นที่จะเดาถูกคือ $p = \frac{1}{2}$

ค. ข้อสอบแต่ละข้อเป็นอิสระต่อกัน ข้อสอบทุกข้อไม่มีอิทธิพลที่จะช่วยผู้ตอบให้เดาข้ออื่นถูก สรุปว่าการสอบนี้เป็นการสอบที่ดี ไม่มีการแนะ

ง. มีข้อสอบ 10 ข้อ

ดังนั้นแบบของความน่าจะเป็นไบโนเมียลก็เหมาะสมถูกต้อง และเราต้องการหาค่าความน่าจะเป็นของการเดาถูก จำนวน 7,8,9 และ 10 ข้อ ได้ดังนี้

---

[1]ภูมล สุดประเสริฐ, <u>วิชาสถิติศาสตร์และวัดผล</u> (พระนคร:สำนักพิมพ์สหมิตร, 2514), หน้า 50.

$$\sum_{x=7}^{10} b(x;10,\tfrac{1}{2}) = 1 - \sum_{x=0}^{6} b(x;10,\tfrac{1}{2})$$
$$= 1-0.82812$$
$$= 0.17188$$

แทนที่จะหาค่าความน่าจะเป็นของ 7, 8, 9 และ 10 แล้วเอามาบวกกัน ใช้วิธีเปิดดูตารางภาคผนวก ก.[1] ซึ่งจะบอกค่าผลรวมของความน่าจะเป็น จาก 1 ถึง 6 แล้วเอาไปลบออกจาก 1 ก็จะได้เป็น

ความน่าจะเป็นของ 7 ข้อพอดี จะได้ (ได้จากตารางแจกแจงความถี่สะสมไบโนเมียล) $\sum_{x=0}^{7} b(x;10,\tfrac{1}{2}) = \sum_{x=0}^{6} b(x;\ 10,\tfrac{1}{2})$

$$= 0.94531 - 0.82812$$
$$= 0.11719$$

(วิธีอ่านตารางก็คือจำนวนข้อสอบ 10 มีค่าเป็น $n = 10$ และดูตัวเลขที่สดมภ์ที่ $p=.50$ ดูที่ $x = 6$ จะได้ค่าความน่าจะเป็น = 0.82812, $x=7$ ได้ 0.94531)

ก.1) ทดสอบสมมุติฐานที่ว่าผู้ตอบจะเดาถูก 70 % หรือมากกว่า

$H_0 : p = 0.7$

$H_1 : p \geqslant 0.7$

2) การทดสอบทางสถิติ ใช้การทดสอบแบบไบโนเมียล x เป็นจำนวนข้อสอบที่ตอบถูก และตรวจดูลักษณะการใช้แบบไบโนเมียลแล้วจากการหาความน่าจะเป็นแบบไบโนเมียล

3) ระดับความมีนัยสำคัญ ให้ $\alpha = 0.05$

4) การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง ค่าความน่าจะเป็นรวมของค่า x ได้จากตาราง ก. ที่ภาคผนวก ค.

---

[1] ดูภาคผนวก ฉ.

5) ขอบเขตของการปฏิเสธ H_1 เป็นการทดสอบทางเดียว

6) การสรุปผล

จากการคำนวณความน่าจะเป็นของการเดาถูก $\geqslant$ 7 ข้อ = 0.17188 ซึ่งมีค่ามากกว่า 0.05

ฉะนั้น จึงยอมรับสมมุติฐานสูญที่ว่าผู้ตอบเดาถูก 70 % หรือมากกว่า

ข.1) ทดสอบสมมุติฐานที่ว่าผู้ตอบจะเดาถูก 7 ข้อ พอดี

$H_0 : p = 0.7$

$H_1 : p \neq 0.7$

2) และ 3) เหมือนกับตอน ก.

4) ขอบเขตของการปฏิเสธ H_1 เป็นการทดสอบสองทาง

5) การสรุปผล

จากการคำนวณความน่าจะเป็นของการเดาถูก 7 ข้อพอดี = 0.11719 ซึ่งมีค่ามากกว่า 0.025

ฉะนั้น จึงยอมรับสมมุติฐานสูญที่ว่าผู้ตอบเดาถูก 7 ข้อพอดี

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> ในการสอบซึ่งใช้ข้อสอบแบบถูกผิด 10 ข้อ จงทดสอบสมมุติฐานที่ว่านักเรียนเดาตอบ โดยมี

1. ถ้านักเรียนตอบถูก $\geqslant$ 7 ข้อ แสดงว่านักเรียนไม่เดา

2. ถ้านักเรียนตอบถูก < 7 ข้อ แสดงว่านักเรียนเดาตอบ[1]

และให้หาความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมุติฐานสูญซึ่งถูกต้องด้วย

<u>วิธีทำ</u> วิธีการดำเนินงานเหมือนกับตัวอย่างที่ 3 หน้า 31

ให้ p = ความน่าจะเป็นที่จะตอบแต่ละคำถามถูก = 0.5

ความน่าจะเป็นที่จะตอบคำถาม x คำถามถูกจาก 10 คำถามคือ

---

[1] Spiegel, <u>op.cit.</u>, p.183.

$^{10}C_x p^x q^{10-x}$ และ $q = 1-p$

$H_0 : P = 0.5$

$H_1 : P > 0.5$

ที่ระดับ $\alpha = 0.05$ และ 0.01 และเป็นการทดสอบทางเดียว

P(นักเรียนตอบคำถามถูก ≥ 7 คำถาม) $= P(7)+P(8)+P(9)+P(10)$

$$= {}^{10}C_7(\tfrac{1}{2})^7(\tfrac{1}{2})^3 + {}^{10}C_8(\tfrac{1}{2})^8(\tfrac{1}{2})^2 + {}^{10}C_9(\tfrac{1}{2})^9(\tfrac{1}{2})$$

$$+ {}^{10}C_{10}(\tfrac{1}{2})^{10}$$

$$= 0.1719$$

ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญที่ว่านักเรียนไม่เดา สรุปได้ว่าความจริงแล้วนักเรียนเดาตอบ แม้จะทำข้อสอบถูก 7 ข้อหรือมากกว่าใน 10 ข้อ

ก.1) ทดสอบสมมุติฐานที่ว่าผู้ตอบจะเดาถูก 70% หรือมากกว่า

$H_0 : P = 0.5$

$H_1 : P \geq 0.5$

2) $\alpha = 0.05$

3) สถิติที่ใช้คือไบโนเมียล x เป็นจำนวนข้อสอบที่ตอบถูก และตรวจคุณลักษณะการใช้แบบไบโนเมียลแล้ว

4) ขอบเขตวิกฤต (Critical region) คือ $x \leq b$

5) คำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการเดาถูกจำนวน 7,8,9 และ 10 ข้อ ได้ดังนี้

$$\sum_{x=7}^{10} b(x;10,\tfrac{1}{2}) = 1 - \sum_{x=0}^{6} b(x;10,\tfrac{1}{2})$$

$$= 1-0.82812$$

$$= 0.17188$$

เพราะว่าค่าความน่าจะเป็นของการเดาถูกมากกว่า 7 ข้อ = 0.17188 จึงรับสมมุติฐานสูญได้ที่ระดับนัยสำคัญ 5 %

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จากตัวอย่างที่ 4 จงหาความน่าจะเป็นของการรับสมมุติฐาน $p = 0.5$

เมื่อความจริง $p = 0.7$

$$H_0 : p = 0.7$$

$$H_1 : p = 0.5$$

(นักเรียนตอบคำถามได้ถูก < 7 ข้อ) = 1- P [ข้อหรือมากกว่า]

$$= 1- \left[{}^{10}C_7(.7)^7).3)^3 + {}^{10}C_8(.7)^8(.3)^2 + {}^{10}C_9(.7)^9(.3) + {}^{10}C_{10}(.3)^{10} \right]$$

$$= 0.3504$$

เป็นความน่าจะเป็นของความผิดพลาดชนิดที่สอง หรือ Type II Error แทนด้วย β ฉะนั้นพลังของการทดสอบคือ $1 - \beta = 1 - 0.3504$

$$= 0.6496$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จากตัวอย่างที่ 5 จงหาความน่าจะเป็นของการรับสมมุติฐาน $p = 0.5$ เมื่อความจริง ก. $p = .6$ ข. $p=.8$ ค. $p=.9$ ง. $p=.4$ จ. $p = .3$ ฉ. $p = .2$ ช. $p = .1$

$$H_0 : p = 0.6$$

$$H_1 : p = 0.5$$

ก. ถ้า $p = 0.6$ ความน่าจะเป็น $= 1-[P(7)+P(8)+P(9)+P(10)]$

$$= 1- \left[{}^{10}C_7(.6)^7(.4)^3 + {}^{10}C_8(.6)^8(.4)^2 + {}^{10}C_9(.6)^9(.4) + {}^{10}C_{10}(.6)^{10} \right] = 0.618$$

คำตอบข้อ ข.,ค.,...ช. สามารถหาได้วิธีเดียวกัน ดังแสดงในตาราง พร้อมด้วยค่า $p=.6$ และ $p=.7$ และความน่าจะเป็นเหล่านี้คือ β และสำหรับ $p=.5$ ให้ค่า $\beta = 1- .1719=.828$ จากตัวอย่างที่ 1 และจาก $p=0.7$ จากตัวอย่างที่ 2

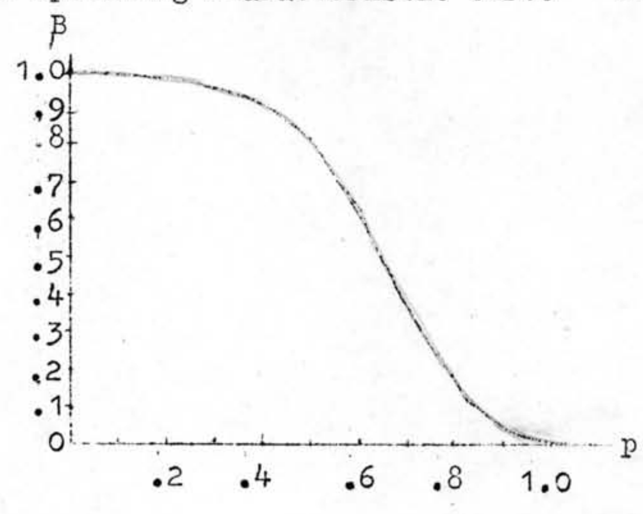
I 17121462

ตารางที่ 3. แสดงค่า p และ β

p	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
β	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	0.013

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จากตัวอย่างที่ 6 จงสร้างกราฟของ β และ p ที่ได้เป็นโค้ง Operating Characteristic ของกฎการตัดสินในตัวอย่างที่ 1 กราฟที่ได้ดังแสดงตามภาพที่ 6

ภาพที่ 6 แสดง Operating Characteristic Curve ของตารางที่ 3

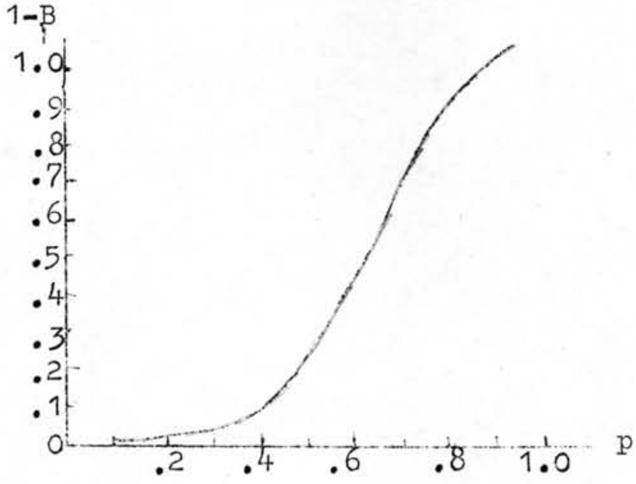


ถ้าเขียนกราฟ 1-β กับ p จะได้กราฟของกำลังการทดสอบดังนี้

ตารางที่ 4 แสดงค่า p และ 1 - β

p	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
1-β	0	0.001	0.011	0.055	0.172	0.382	0.650	0.879	0.987

ภาพที่ 7 แสดงกราฟของพลังการทดสอบ



<u>ตัวอย่างที่ 8</u> การสอบซ้อมครั้งหนึ่งมีข้อสอบ 20 ข้อ แต่ละข้อมีคำตอบย่อย 5 คำตอบ ให้เลือกตอบคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว ถามว่าความน่าจะเป็นจะมีค่าเท่าไรที่จะมีผู้เดาถูก 6 ข้อ หรือมากกว่า

<u>วิธีทำ</u> ตรวจสอบดูสถานการณ์นี้ว่า

ก. สมมุติไว้ว่าผู้ตอบจะตอบคำถามทุกข้อ แต่ละข้อมีถูกหรือผิด

ข. คำถามแต่ละข้อมีค่าความน่าจะเป็นของการเดาคือ $p = \frac{1}{5}$

ค. เมื่อข้อสอบข้อหนึ่งข้อใดถูกเดา ข้อสอบนั้นจะไม่มีอิทธิพลต่อคำถามของข้ออื่นด้วย ในการใช้ข้อสอบแบบเลือกตอบนั้นยังมีความแคลงใจจริง ๆ ว่า สภาพของการสอบนั้นจะเป็นอิสระแก่กันจริงหรือไม่

ง. การสอบนี้ประกอบด้วยคำถาม 20 คำถาม

ดังนั้นแบบของความน่าจะเป็นไบโนเมียล ซึ่งมี $n=20$, $p=\frac{1}{5}$ หรือ 0.20 พอจะบอกลักษณะสถานการณ์นี้ได้ ซึ่งจะต้องหาค่า

$$P(\text{เดาถูก 6 ข้อ}) + \dots + P(\text{เดาถูก 20 ข้อ}) = \sum_{x=6}^{20} b(x;20,.20)$$

$$= 1-\sum_{x=0}^{5} b(x;20,.20)$$

$$= 1 - .80421$$ [1]

$$= .19579$$

4. การประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปกติ (The Normal Approximation to the Binomial Distribution)

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ สำหรับค่าความน่าจะเป็น (p) คงที่ ไบโนเมียลที่มีค่าความน่าจะเป็นของความสำเร็จเข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ ใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียล[2] โดยใช้ทฤษฎีค่าจำกัดส่วนกลาง[3] (Central Limit Theorem) และใช้พื้นที่ของโค้งปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นไบโนเมียล ที่มีค่าเฉลี่ย (np) เท่ากับศูนย์ ความแปรปรวน (npq) เท่ากับหนึ่ง ผลบวกของความน่าจะเป็นทั้งหมดในช่วงมีค่าเท่ากับหนึ่ง หรือ $b(x;n,p) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} e^{-(x-np)^2/2npq}$; $-\infty < x < \infty$

x เป็นผลบวกของการทดลองไบโนเมียลที่เป็นอิสระ n ครั้ง เมื่อ n ใหญ่พอ ตัวแปรสุ่ม x จะแจกแจงเข้าใกล้การแจกแจงปกติ และให้ x อยู่ในรูปของการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยให้

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

อ่านค่าความน่าจะเป็นจากตารางมาตรฐานปกติ

เมื่อ $p = q = \frac{1}{2}$ การแจกแจงไบโนเมียล จะมีลักษณะสมมาตร ดังนั้นการแจกแจงปกติจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นของการแจกแจงไบโนเมียลได้ดีที่สุดเมื่อ p เข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ สำหรับทุกค่าของ n ถ้า p เบี่ยงเบนจาก $\frac{1}{2}$ ออกไปเท่าไร n จะต้องเพิ่มขึ้น การประมาณค่าจึงจะยังคงใช้ได้ดี พิจารณาโค้งแจกแจงต่อเนื่อง เมื่อความ

---

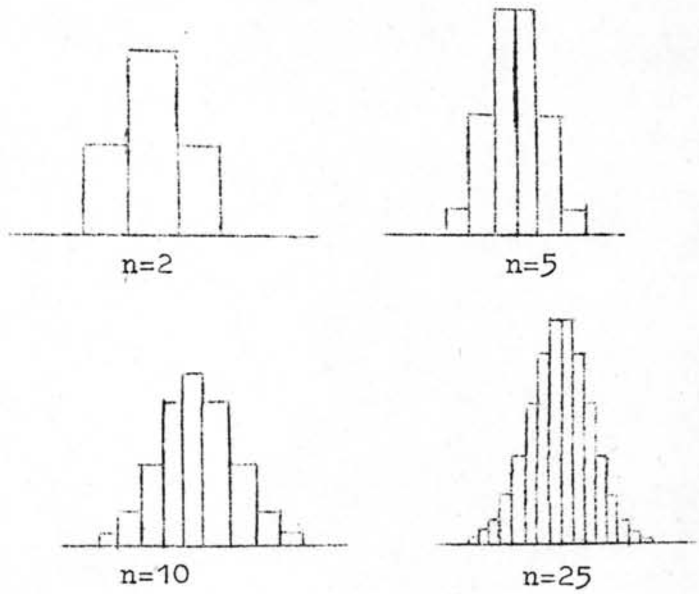
[1] ดูภาคผนวก ฉ.

[2] John E. Freund, Modern Elementary Statistics, (Prentice-Hall, Inc., Maruzen Company Ltd., 2nd ed., © 1960), p.180.

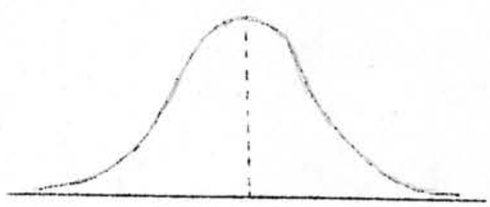
[3] ดูภาคผนวก จ.

น่าจะเป็นของความสำเร็จเข้าใกล้ 0.5 การประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลจากการแจกแจงปกติ มีรูปโค้งเข้าใกล้รูประฆังของโค้งปกติ ดังภาพที่ 9 เมื่อขนาดของจำนวนการทดลอง (n) เพิ่มขึ้น เช่น n = 2, 5, 10 และ 25 ดังภาพที่ 8

ภาพที่ 8 แสดงกราฟของจำนวนการทดลองที่เพิ่มขึ้น



ภาพที่ 9 แสดงโค้งปกติ



การแจกแจงปกติมีประโยชน์ในการพิจารณาการกระจายต่าง ๆ มากมาย เช่น

1. ระดับคะแนนของนักเรียน (Course Grades)
2. ความสามารถของบุคคล เช่น สติปัญญา ทักษะ

3. ผลิตผลทางเกษตรประจำปี

4. สถิติต่าง ๆ โดยเฉพาะค่าเฉลี่ยตัวกลาง

5. เปอร์เซ็นต์ของผู้ออกเสียงเลือกตั้ง

6. งานส่วนตัวที่ทำในช่วงเวลาสั้น ๆ เช่น นักเรียนสอบทุกวัน ใช้เวลา 10 นาที

การประมาณค่าจะเหมาะสมต่อเมื่อ np และ nq $\geqslant$ 5 และจะเหมาะสมยิ่งขึ้นถ้า np และ nq $\geqslant$ 10 โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $p \neq q$ และใช้ประมาณค่าในการทดสอบทางเดียว ทั้งนี้เพราะเมื่อ $p \neq q$ และ n เล็ก การแจกแจงไบโนเมียลจะเบ้ แต่เมื่อ n เพิ่มขึ้น การแจกแจงไบโนเมียลจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติมากขึ้น แม้ว่า $p \neq q$ ก็ตาม[1]

การประมาณค่าจะดีเมื่อ n $\geqslant$ 30 np และ nq $\geqslant$ 5[2] และการประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปกติ ดังตารางที่ 5 หน้า 41

ถ้า npq $>$ 25 ความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าจะน้อยกว่า $0.15/\sqrt{npq}$ อย่างไรก็ตาม สำหรับ n ที่กำหนด การประมาณค่าจะดีเมื่อ p เข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ มากกว่าเมื่อ p เข้าใกล้ 0 หรือ 1[3]

ในการประมาณค่าความน่าจะเป็น เรากำหนดให้มัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติที่ใช้ประมาณ เท่ากับมัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงไบโนเมียลที่ต้องการประมาณค่า นั่นคือ $\mu = np$ และ $\sigma^2 = npq$ ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็ม

---

[1]Henry E. Klugh. Statistics: The Essentials for Research (New York : John Wiley & Sons, Inc., 1970), p.146.

[2]Harold J. Larson, Introduction to Probability Theory and Statistical Inference (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969), p. 191.

[3]Mood and Graybill, op.cit., p.156.

a และ b ($a < b$) ใด ๆ ในช่วง (0,n) ค่าประมาณจะมีรูปดังต่อไปนี้

$$P\left[a \le x \le b\right] \cong P\left(\frac{(a-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{(b+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left(a < x \le b\right] \cong P\left(\frac{(a+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} < Z \le \frac{(b+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P\left[a \le x < b\right] \cong P\left(\frac{(a-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} \le Z < \frac{(b-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

หรือ

$$P\left(a < x < b\right] \cong P\left(\frac{(a+\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}} < Z < \frac{(b-\frac{1}{2})-np}{\sqrt{npq}}\right)$$ [1]

ตารางที่ 5 ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมในการใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงไบโนเมียล

p	np ที่เล็กที่สุด	ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง (n)
0.5	15	30
0.4 หรือ 0.6	20	50
0.3 หรือ 0.7	24	80
0.2 หรือ 0.8	40	200
0.1 หรือ 0.9	60	600
0.05 หรือ 0.95	70	1400

---

[1] Bernard Ostle, Statistics in Research, (2nd ed. Ames, Iowa: The Iowa State University Press, 1963), pp. 77

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างจากสมาชิก 100 จำนวน ได้จากประชากรไบโนเมียล ซึ่งมี $p = .2$ ให้หาค่า

ก. $P[10 \leq x \leq 25]$

ข. $P[10 < x \leq 25]$

ค. $P[x > 26]$[1]

เนื่องจาก $np = 100(.2) = 20$, $nq = 100(1-.2) = 80$ จึงใช้การแจกแจงปกติประมาณความน่าจะเป็นที่ต้องการได้ โดยที่

$$\mu = np = 20, \quad \sigma = npq = \sqrt{100(.2)(.8)} = 4$$

ก.

$$P[10 \leq x \leq 25] \cong P\left[\frac{9.5-20}{4} \leq Z \leq \frac{25.5-20}{4}\right]$$
$$= P[-2.62 \leq Z \leq 1.38]$$
$$= P(Z = 1.38) - P(Z = -2.62)$$
$$= 0.9162 - 0.0044 \qquad = 0.9118$$

ข.

$$P(10 < x \leq 25) \cong P\left(\frac{10.5-20}{4} < Z \leq \frac{25.5-20}{4}\right)$$
$$= P[-2.37 < Z < 1.38]$$
$$= P[(Z = 1.38) - P(Z = -2.37)]$$
$$= 0.9162 - 0.0089$$
$$= 0.9073$$

ค.

$$P[x > 26] \cong P\left[Z > \frac{26.5-20}{4}\right]$$

---

[1] <u>Ibid.</u>, p.78

$$= P\left[Z > 1.62 \right]$$
$$= 1 - P(Z = 1.62)$$
$$= 1 - 0.9474$$
$$= 0.0526$$

หอสมุดกลาง สำนักงานวิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถ้า n ใหญ่พอ ($n \geqslant 100$) การประมาณค่าจะเป็นที่น่าพอใจสำหรับเกือบทุกค่าของ p แต่ถ้า p เข้าใกล้ 0 หรือ 1 มาก การประมาณค่าในส่วนปลาย (Tails) ของการแจกแจงจะเชื่อมั่นได้น้อยกว่าการประมาณค่าในส่วนใกล้ศูนย์กลางของการแจกแจง ดังนั้น ในงานที่ต้องการความเชื่อมั่นมาก ๆ เมื่อค่า p น้อยมาก ไม่ควรประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ อาจประมาณด้วยการแจกแจงปัวซอง หรือคำนวณความน่าจะเป็นที่แท้จริงเลย[1]

เนื่องจากการแจกแจงปกติใช้ข้อมูลต่อเนื่อง แต่การแจกแจงไบโนเมียลใช้ข้อมูลจำนวนเต็ม เมื่อให้ได้ค่าประมาณที่ดียิ่งขึ้น จึงบวกหรือลบ $\frac{1}{2}$ จากขีดจำกัดของช่วงที่ต้องการประมาณค่าความน่าจะเป็น จำนวน $\pm \frac{1}{2}$ เรียกว่า ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง (Correction of Continuity)

$$\therefore Z = \frac{(x \pm \frac{1}{2}) - np}{\sqrt{npq}}$$

ในการประมาณค่าความน่าจะเป็น เรากำหนดให้มัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงปกติที่ใช้ประมาณ เท่ากับมัชฌิมและความแปรปรวนของการแจกแจงไบโนเมียลที่ต้องการประมาณ นั่นคือ $\mu = np$ $\sigma^2 = npq$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>[2] ข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 คำตอบ ที่มีคำตอบถูกต้องเพียงคำตอบเดียว จำนวน 200 ข้อ จงทดสอบสมมุติฐานที่ว่า ผู้ตอบเดาคำตอบถูก 25 ถึง 30 คำตอบ

---

[1] <u>Ibid.</u>, p.78

[2] Ronald E. Walpole. <u>Introduction to Statistics</u> (Collier-Macmillan International Edition, 1970), pp. 136-7.

จากข้อสอบ 80 ข้อ ในจำนวนทั้งหมด 200 ข้อ โดยใช้ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05 และ 0.01

1. H_0: ผู้ตอบเดาคำตอบถูก 25 ถึง 30 คำตอบ จากข้อสอบ 80 ข้อ

H_1: ผู้ตอบเดาคำตอบถูกนอกเหนือจากนั้น

2. การทดสอบทางสถิติ ใช้การทดสอบปกติประมาณค่าการทดสอบแบบไบโนเมียล

x = จำนวนคำตอบถูกจากการเดา

3. ระดับความมีนัยสำคัญ ให้ $\alpha = 0.05$

4. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง ค่าความน่าจะเป็นรวมของค่า x ได้จากตาราง ข. ของภาคผนวก ค.

5. ขอบเขตของการปฏิเสธ H_1 เป็นการทดสอบสองทาง

$\therefore$ P (Z) ที่คำนวณได้จะต้องมีค่ามากกว่า 1.96 หรือน้อยกว่า -1.96

6. การสรุปผล จากการคำนวณ ความน่าจะเป็นของการเดาคำตอบถูกในแต่ละข้อคือ $p = \frac{1}{4}$

$$\therefore P(25 \le x \le 30) = \sum_{x=25}^{30} b(x;\ 80, \tfrac{1}{4})$$

ใช้การแจกแจงปกติประมาณด้วย $\mu = np = (80)(\frac{1}{4}) = 20$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(80)(\tfrac{1}{4})(\tfrac{3}{4})} = 3.87$$

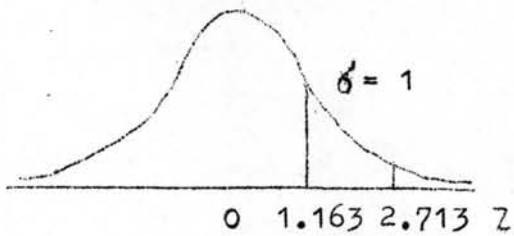
ต้องการพื้นที่ระหว่าง $x_1 = 24.5$ และ $x_2 = 30.5$ ค่า Z ที่สมนัยคือ

$$Z_1 = \frac{24.5-20}{3.87} = 1.163$$

$$Z_2 = \frac{30.5-20}{3.87} = 2.713$$

ความน่าจะเป็นของการเดาคำตอบถูก 25 ถึง 30 คำตอบ หาได้จากพื้นที่แรเงา ดังรูปภาพที่ 10

ภาพที่ 10 การทดสอบการประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปกติ เมื่อความน่าจะเป็นของการทดสอบที่ต้องการอยู่ทางด้านขวาของโค้งการแจกแจงปกติ



จากตาราง ข. ภาคผนวก ฉ. เปิดหาค่าความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
P\ (25 \leq x \leq 30) &= \sum_{x=25}^{30} b(x; 80, \tfrac{1}{4}) \\
&= P\ (1.163 < Z < 2.713) \\
&= P\ (Z < 2.713) - P(Z < 1.163) \\
&= 0.9967 - 0.8776 \\
&= 0.1191
\end{aligned}
$$

เพราะว่า 0.1191 < 1.96 ฉะนั้นจึงยอมรับสมมุติฐานศูนย์ที่ว่า ผู้ตอบเดาคำตอบถูก 25 ถึง 30 ข้อ จากข้อสอบ 80 ข้อ

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>[1] ให้ทดสอบสมมุติฐานที่ผู้สอบจำนวน 25 ถึง 40 คน จะสอบผ่านจากคนทั้งหมด 100 คน ถ้าทราบว่าโดยเฉลี่ยมี 30 % เท่านั้นที่สามารถจะสอบผ่านได้

1. H_0 : ผู้สอบจำนวน 25 ถึง 40 คน จะสอบผ่านจากคนทั้งหมด 100 คน

   H_1 : นอกเหนือจากกรณีที่กล่าวแล้ว

---

[1] John E. Freund, <u>Modern Elementary Statistics</u>, (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1952), p.140.

2. ใช้การทดสอบปกติประมาณค่าการทดสอบไบโนเมียล

x = จำนวนผู้สอบสอบได้

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง ค่าความน่าจะเป็นรวมของ x ได้จากตาราง ข. ของภาคผนวก ฉ.

4. ระดับความมีนัยสำคัญ α = 0.05

5. ขอบเขตของการปฏิเสธ H_1 เป็นการทดสอบสองทาง ค่า $P(Z)$ ที่คำนวณได้จะต้องไม่อยู่ใน ± 1.96

6. สรุปผล จากการคำนวณ ความน่าจะเป็นของการสอบได้ของแต่ละคน คือ $p = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $P(25 \leq x \leq 40) = \sum_{x=25}^{40} b(x; 100, \frac{1}{2})$

ใช้การประมาณค่าด้วยการแจกแจงปกติ ดังนี้ $\mu = np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

$$\sigma^2 = npq = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

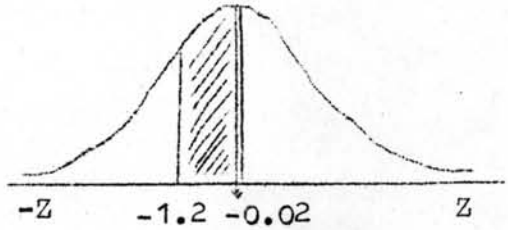
พื้นที่ใต้โค้งปกติระหว่าง $x_1 = 24.5$ และ $x_2 = 40.5$ ค่า Z ที่สมนัยคือ

$$Z_1 = \frac{24.5 - 50}{\sqrt{25}} = -1.2$$

$$Z_2 = \frac{40.5 - 50}{\sqrt{25}} = \frac{-0.5}{\sqrt{25}} = -0.02$$

ความน่าจะเป็นของผู้สอบได้ 25 ถึง 40 คำตอบ หาได้จากพื้นที่แรเงา ดังภาพที่ 11

ภาพที่ 11 การทดสอบการประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปกติเมื่อความน่าจะเป็นของการทดสอบที่ต้องการอยู่ทางด้านซ้ายของโค้งการแจกแจงปกติ



จากตาราง ข. เปิดหาค่าความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$P\ (25 \le x \le 40) = \sum_{x=25}^{40} b(x;100,\ \tfrac{1}{2})$$

$$= P\ (-1.2 < Z < -0.02)$$

$$= P\ (Z < -0.02) - P(Z < -1.2)$$

$$= 0.4207 - 0.1151$$

$$= 0.3156$$

เพราะว่า $0.3156 > -1.96$ ฉะนั้นจึงยอมรับสมมุติฐานสูญที่ว่า ผู้สอบสอบผ่าน 25 ถึง 40 คน จากจำนวนคนทั้งหมด 100 คน

5. การประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจงแจงเอฟ (The F Approximation to the Binomial Distribution)

การทดสอบที่ไม่อาจใช้การแจกแจงปกติ เพราะขนาดของตัวอย่างน้อย และความน่าจะเป็นของความสำเร็จมีค่าน้อย ก็อาจใช้การแจกแจงเอฟ ทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับสัดส่วน ดังนั้น

ลักษณะสำคัญของการทดสอบสัดส่วนโดยใช้การแจกแจงเอฟ คือไม่จำเป็นต้องใช้ขนาดตัวอย่างมาก ซึ่งเป็นเงื่อนไขสำคัญในการประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปกติ การแจกแจงเอฟใช้ได้สำหรับขนาดตัวอย่างเล็กและค่า p ใหญ่หรือเล็กก็ได้

สมมุติว่ามีการทดลองเบ่อร์นูลี่อยู่ชุดหนึ่ง (n) ซึ่งมีความสำเร็จ k ครั้ง ให้ p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จ และความน่าจะเป็นของความสำเร็จที่รวมตั้งแต่ k ครั้งขึ้นไป คิดจากการแจกแจงไบโนเมียล

$$P\ (x \ge k) = \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

สามารถแสดงได้ว่า

$$P\ (x \ge k) = P(F > F_0)$$

เมื่อ $F_0 = \frac{\phi_2(1-p)}{\phi_1 p}$

มีการแจกแจง F ด้วย

$\phi_1 = 2(n-k+1)$ ชั้นของความอิสระ

และ $\phi_2 = 2k$ ชั้นของความอิสระ

ซึ่งนำมาใช้ในการทดสอบทางขวา (Right-Tail Test) ที่ระดับความมีนัยสำคัญ α

$H_0 : P = P_0$

$H_1 : P > P_0$

และสำหรับกรณี

$P(x \leq k) = 1 - P(x > k)$

$P(x \leq k) = P(F < F_0)$

เมื่อ $F_0 = \frac{\phi_2 p}{\phi_1(1-p)}$

มีการแจกแจงเอฟด้วย

$\phi_1 = 2(k+1)$ ชั้นของความอิสระ

และ $\phi_2 = 2(n-k)$ ชั้นของความอิสระ

ซึ่งนำมาใช้ในการทดสอบทางซ้ายด้วยระดับความมีนัยสำคัญ α

$H_0 : P = P_0$

$H_1 : P < P_0$

สำหรับการทดสอบสองทาง (Two-Tail Test) ก็ใช้ผลจากกรณีดังกล่าวแล้วคือ

$H_0 : P = P_0$

$H_1 : P \neq P_0$

หาค่าสัดส่วนของตัวอย่างจาก $\frac{k}{n} = p$

จากข้อมูล พบว่า $P > P_0$ ใช้ $F_0 = \frac{\phi_2(1-p)}{\phi_1 p}$ และหาค่าเอฟจากตารางด้วย

ค่าระดับความมีนัยสำคัญ $\alpha/2$

ถ้า $p < p_0$ ใช้ $F_0 = \dfrac{\phi_2 \, p}{\phi_1(1-p)}$ หาค่าเอฟจากตารางด้วยระดับความมีนัยสำคัญ $\alpha/2$

จากกรณีทั้งสาม แสดงด้วยตัวอย่างดังต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> สมมุติมีข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ข้อ ที่ให้ตอบในเวลาสั้น ๆ จากจำนวนนักเรียนที่สอบ 36 คน มีนักเรียนเลือกตอบข้อ 1 รวม 12 คน จะเป็นการยืนยันได้ไหมว่าความน่าจะเป็นในการเลือกข้อ 1 มีมากกว่า $\frac{1}{4}$?

$$H_0 : P = \frac{1}{4}$$
$$H_1 : P > \frac{1}{4}$$

เป็นการทดสอบทางขวา ใช้ $F = \dfrac{\phi_2(1-p)}{\phi_1 \, p}$

$$= \frac{24(1-\frac{1}{4})}{50(\frac{1}{4})} = 1.44$$

$$\phi_1 = 2(n-k+1) = 2(36-12+1) = 50$$
$$\phi_2 = 2k = 2 \times 12 = 24$$

ค่า F ด้วย (24, 50) d.f. & α = 50 % คือ $F_{50}^{24} = 1.86$

∴ จึงยอมรับสมมุติฐานที่ว่า $p = \frac{1}{4}$ นั่นคือ ยังยืนยันไม่ได้ว่ามีสัดส่วนของผู้เลือกตอบข้อ 1 มากกว่า $\frac{1}{4}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> สมมุติทราบว่าเปอร์เซ็นต์ของจำนวนข้อสอบที่ไม่ดีในการออกข้อสอบครั้งหนึ่งเป็น 5 % เมื่อเลือกข้อสอบเป็นตัวอย่างแบบสุ่มมา 100 ข้อ และพบว่ามีข้อสอบที่ไม่ดีอยู่เพียง 3 ข้อ จะมีการลดเปอร์เซ็นต์ของข้อสอบที่เคยเชื่อว่าไม่ดีลงอีกหรือไม่

$H_0 : P = 0.05$

$H_1 : P < 0.05$

เป็นการทดสอบทางซ้าย และใช้ $F_0 = \dfrac{\phi_2 \, p}{\phi_1(1-p)}$

$$\phi_1 = 2(k + 1) = 2(3+1) = 8$$

$$\phi_2 = 2(n-k) = 2(100-3) = 194$$

$$F = \frac{\phi_2 p}{\phi_1(1-p)} = \frac{194(.05)}{8(.95)} = 1.28$$

จากตารางเอฟ[1] ด้วยชั้นของความอิสระ (8, 194) และ $\alpha = .05$

$$F^{8}_{194} > 1.98$$

เพราะว่า F = 1.28 จากการคำนวณมีค่าน้อยกว่าค่าเอฟจากตาราง จึงยอมรับสมมุติฐานที่ว่าข้อสอบที่ใช้ไม่ได้คงมีอยู่ 5 % หมายความว่าจะยังไม่มีการลดเปอร์เซ็นต์ของข้อสอบที่ไม่ดีลงอีก

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จากข้อมูลที่ว่ามีนิสิตที่เป็นรีพับลิกันอยู่ 30 % มีเหตุผลที่จะเชื่อได้ว่าควรมีการเปลี่ยนเปอร์เซ็นต์นี้ได้หรือยัง ถ้าจากการเลือกนิสิตแบบสุ่มมา 50 คน และมีเพียง 10 คน เท่านั้นที่เป็นรีพับลิกัน

$H_0 : P = 30 \%$

$H_1 : P \neq 30 \%$

ใช้การทดสอบสองทาง

สัดส่วนตัวอย่าง $p = k/n = 10/50 = \frac{1}{5}$ $\quad P_0 = 30 \%$

---

[1]ดูภาคผนวก ฉ.

$$\therefore \text{ใช้} \quad F = \frac{\phi_2 p}{\phi_1 (1-p)} = \frac{80 \times 0.3}{22 \times 0.7} = 1.56$$

$$\phi_1 = 2(k+1) = 2(10+1) = 22$$

$$\phi_2 = 2(n-k) = 2(50-10) = 80$$

$\alpha = 2.5\ \%$ จากตารางเอฟ[1]

$$F^{22}_{80} > 1.76$$

เพราะว่า ค่าเอฟจากการคำนวณน้อยกว่าค่า F จากตาราง จึงยอมรับสมมุติฐานที่ว่า เปอร์เซ็นต์ที่นิสิตเป็นรีพับลิกันยังคง คือ 30 % อยู่ จะนั้นจึงยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงในเปอร์เซ็นต์ดังกล่าว[2]

6. การประมาณค่าสัดส่วน

สัดส่วนของประชากร (π) เป็นผลหารระหว่างจำนวนความสำเร็จกับจำนวนทั้งหมดของประชากร (N)

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \quad ; \quad x_i = 1 \quad \text{ถ้าผลที่ได้เป็นความสำเร็จ}$$

$$x_i = 0 \quad \text{ถ้าผลที่ได้เป็นความไม่สำเร็จ}$$

ตัวประมาณค่า π คือสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง (p)

$$p = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{Y}{n}$$

จะเห็นได้ว่า Y เป็นจำนวนรวมของการเกิดผล "สำเร็จ" ในการทดลองไบโนเมียล n ครั้ง จึงอาจจะพิจารณา p ว่าเป็นสัดส่วนของจำนวนผล "สำเร็จ" ในการทดลอง

---

[1] ดูภาคผนวก ฉ.

[2] Yamane, op.cit., pp. 661-664.

ไบโนเมียล n ครั้ง

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ p

1. ถ้ากลุ่มตัวอย่างสุ่มมาอย่างอิสระ คือสุ่มแบบแทนที่จากประชากรขนาดจำกัด หรือสุ่มจากประชากรขนาดไม่จำกัด p จะแจกแจงแบบไบโนเมียลโดยมีมัชฌิม

$$\mu_p = E(p) = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

$$\sigma_p = \sqrt{Var(p)} = \sqrt{\frac{n\pi(1-\pi)}{n^2}} = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

ดังนั้นเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงตัวอย่าง p ย่อมเข้าใกล้การแจกแจงปกติ

2. ถ้ากลุ่มตัวอย่างสุ่มมาอย่างไม่อิสระ คือสุ่มแบบไม่แทนที่จากประชากรขนาดจำกัด p จะแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริค โดยมีมัชฌิม $\mu_p = \pi$

และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

อย่างไรก็ตาม ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับประชากร (กลุ่มตัวอย่างเล็กกว่า 5 % ของประชากร) $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ จะเข้าใกล้ 1 จึงอาจตัดทิ้งได้ กล่าวได้ว่า ถ้ากลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กได้จากประชากรขนาดใหญ่ เราอาจจะถือว่า กลุ่มตัวอย่างสุ่มมาอย่างอิสระ การแจกแจงตัวอย่างของ p ย่อมเข้าใกล้การแจกแจงไบโนเมียล นั่นคือเข้าใกล้การแจกแจงปกติ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

การพิจารณาขนาดกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอสำหรับการใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการแจกแจงตัวอย่างของ p ก็เช่นเดียวกับเมื่อใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการแจกแจงไบโนเมียล หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปคือ $n\pi$ และ $n(1-\pi) \geq 5$

เนื่องจาก $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ แต่ค่า π เราไม่ทราบ จึงต้องประมาณ σ_p จากกลุ่มตัวอย่าง โดยที่

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}} = \sqrt{\frac{pq}{n-1}}$$

เมื่อกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ เพื่อความสะดวกจะใช้

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอสำหรับการใช้การแจกแจงปกติเป็นตัวประมาณการแจกแจงตัวอย่างของ p จะได้ความสัมพันธ์

$$P\left[\left(p-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) < \pi < \left(p+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\right] = 1-\alpha$$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ π ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = \left(p-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ p+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

ถ้า n เล็ก เพื่อให้การประมาณค่าถูกต้องยิ่งขึ้น อาจใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง (Correction for Continuity) เช่นเดียวกับเมื่อประมาณการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปกติ แต่ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องในกรณีนี้จะเป็น $\pm \frac{1}{2n}$ เพราะสัดส่วน p ได้จากการหารจำนวนการเกิดผล "สำเร็จ" ด้วย n ดังนั้นเราจะได้

$$P\left[\left(p-\frac{1}{2n}\right)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} < \pi < \left(p+\frac{1}{2n}\right)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = 1-\alpha$$

หรือ
$$P\left[p-\left(\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) < \pi < p+\left(\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\right] = 1-\alpha$$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ π ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$p \pm \left(\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(p-\frac{1}{2n}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ p+\frac{1}{2n}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

จะเห็นได้ว่า เมื่อใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ π จะกว้างขึ้นเล็กน้อย

<u>ตัวอย่าง</u> สุ่มตัวอย่างนิสิตในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมา 100 คน เมื่อสำรวจความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียนภาคฤดูร้อน ปรากฏว่ามี 20 คน ที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน ให้ประมาณสัดส่วนนิสิตมหาวิทยาลัยแห่งนี้ ที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน กำหนดให้ระดับความเชื่อมั่นเป็น 95 % ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % $\alpha = 0.05$

$$\therefore\ z_{\alpha/2} = z_{.025} = 1.96$$

$$p = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$q = 1-p = 1-0.2 = 0.8$$

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.2)(.8)}{100}} = 0.04$$

∴ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของสัดส่วนของนิสิต ที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน (π) ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % คือ

$$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.2 \pm 1.96(0.04)$$

$$= 0.2 \pm 0.0784 = (0.1216,\ 0.2784)$$

ถ้าใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง คือ $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2(100)} = 0.0005$

ช่วงแห่งความเชื่อมั่น π จะเป็น

$$p \pm (\frac{1}{2n} + z_{/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}) = 0.2 \pm (0.0005+0.0784)$$

$$= (0.1211,\ 0.2789)$$

ค่าที่ได้ต่างไปจากเมื่อใช้ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องเพียงเล็กน้อย กำหนดขนาดกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมในการประมาณค่าสัดส่วนของประชากร ให้ E แทนความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่จะยอมให้มีได้ในแบบประมาณค่า

$$\therefore\ E = z_{\alpha/2} \cdot \sigma_p = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

$$n = z^2_{\alpha/2}\ \frac{\pi(1-\pi)}{E^2}$$

$\pi(1-\pi)$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\pi = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{4E^2}$$ [1]

---

[1] Ann Hughes and Dennis Grawoig, Statistics : A Foundation for Analysis (Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1971), p.216.

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าต้องการประมาณสัดส่วนของนิสิตในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งที่เห็นด้วยกับการเรียนภาคฤดูร้อน โดยให้ความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 5 % ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เหมาะสมหาได้ดังนี้

ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % $\alpha = 0.05$

$$Z_{\alpha/2} = Z_{.025} = 1.96$$

$$E = 5\% = 0.05$$

$$\therefore \; n = \frac{Z^2_{\alpha/2}}{4E^2} = \frac{(1.96)^2}{4(0.05)^2}$$

$$= 384.16 \simeq 385$$

นั่นคือต้องสุ่มตัวอย่างนิสิตมาอย่างน้อย 385 คน

การประมาณค่าความแตกต่างระหว่างสัดส่วนประชากร 2 กลุ่ม $(\pi_1 - \pi_2)$ กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม กลุ่มแรกมีขนาด n_1 ได้จากประชากรไบโนเมียลซึ่งมีสัดส่วน π_1 กลุ่มที่ 2 มีขนาด n_2 ได้จากประชากรไบโนเมียลซึ่งมีสัดส่วน π_2 ประชากรไบโนเมียล 2 กลุ่ม นี้เป็นอิสระต่อกัน ความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มนี้คือ $p_1 - p_2$ จะใช้เป็นค่าประมาณความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร $(\pi_1 - \pi_2)$

ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างของ p_1-p_2

1. มัชฌิมของการแจกแจงตัวอย่างของ $p_1-p_2 = \mu_{p_1-p_2} = \pi_1-\pi_2$

2. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

3. เมื่อกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม มีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงตัวอย่างของ $p_1 - p_2$ จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอในกรณีนี้ นั่นคือ n_1 และ $n_2 \geq 100$[1]

---

[1]Gene V. Glass and Julian C. Stanley, <u>Statistical Methods in Education and Psychology</u> (Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1970), p.325.

เนื่องจาก $\sigma_{p_1-p_2}$ ติดค่า π_1 และ π_2 ซึ่งไม่ทราบ จึงต้องประมาณ $\sigma_{p_1-p_2}$ โดยใช้

$$\hat{\sigma}_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}$$

เมื่อทั้ง n_1 และ n_2 มีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของ $p_1 - p_2$ เข้าใกล้การแจกแจงปกติ จะได้ความสัมพันธ์

$$P\left((p_1-p_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}} < \pi_1-\pi_2 < (p_1-p_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

$\therefore$ ช่วงแห่งความเชื่อมั่นของ $\pi_1 - \pi_2$ ที่ระดับความเชื่อมั่น $1-\alpha$ คือ

$$(p_1-p_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}$$

$$= \left((p_1-p_2)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\ ,\ (p_1-p_2)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\right)$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> สุ่มตัวอย่างนักเรียนจากโรงเรียน ก. มา 125 คน และจากโรงเรียน ข. มา 100 คน ทำการทดสอบนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม โดยใช้แบบทดสอบชุดเดียวกัน ปรากฏว่านักเรียนจากโรงเรียน ก. สอบตก 50 คน และจากโรงเรียน ข. สอบตก 25 คน จะประมาณความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียนทั้งสองที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้

ให้ π_1 = สัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียน ก. ที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้

และ π_2 = สัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียน ข. ที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้

$$p_1 = \frac{50}{125} = 0.4\ ,\quad q_1 = 1-0.4 = 0.6$$

$$p_2 = \frac{25}{100} = 0.25\ ,\quad q_2 = 1-0.25 = 0.75$$

$$\hat{\sigma}_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(.4)(.6)}{125}+\frac{(.25)(.75)}{100}}$$

$$= 0.0616$$

เลือกระดับความเชื่อมั่น 0.95; α = 0.05

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$

$\therefore$ ความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของนักเรียนในโรงเรียน ก.กับโรงเรียน ข. ที่สอบไม่ผ่านแบบทดสอบชุดนี้ ที่ระดับความเชื่อมั่น 0.95 จะเป็น

$$(p_1-p_2) \pm z_{\alpha/2}\sigma_{p_1-p_2} = (0.4-0.25) \pm (1.96)(0.0616)$$
$$= 0.15 \pm 0.1207$$
$$= (0.0293,\ 0.2707)$$

7. ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วน[1]

ถ้าค่าสถิติ s เป็นสัดส่วนของความสำเร็จจากขนาดตัวอย่าง n จากประชากรไบโนเมียลที่มี P เป็นสัดส่วนของความสำเร็จ (ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ) ค่าจำกัดความเชื่อมั่นของ P คือ $p \pm z_c \sigma_p$ และ p คือสัดส่วนความสำเร็จของขนาดตัวอย่าง n

ค่าจำกัดความเชื่อมั่นของสัดส่วนประชากรสำหรับขนาดตัวอย่างที่หยิบแบบคืนที่เดิม คือ $p \pm z_c\sqrt{\frac{PQ}{n}} = p \pm z_c\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

z_c คือระดับความเชื่อมั่น

และสำหรับขนาดตัวอย่าง n_p ที่หยิบแบบไม่คืนที่เดิมคือ

$$p \pm z_c\sqrt{\frac{n_p}{n}}\sqrt{\frac{PQ - n}{PQ - 1}}$$

การคำนวณค่าจำกัดความเชื่อมั่น เราประมาณค่า P ด้วย p และจะให้ค่าประมาณดีที่สุด เมื่อ $n \geq 30$

---

[1] Spiegel, op.cit., p. 158.

8. ช่วงความเชื่อมั่นในการประมาณค่าสัดส่วน[1]

ถ้า p เป็นสัดส่วนความสำเร็จของขนาดตัวอย่าง n ค่าจำกัดความเชื่อมั่นในการประมาณค่าสัดส่วนประชากรของความสำเร็จ P ที่ระดับความเชื่อมั่น Z_c คือ

$$P = \frac{p + \frac{Z_c^2}{2n} \pm Z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n} + \frac{Z_c^2}{4n^2}}}{1 + \frac{Z_c^2}{n}} \quad \text{---- (1)}$$

ถ้า n มีค่ามาก สูตร(1) คือ

$$P = p \pm Z_c\sqrt{p(1-p)/n} \quad \text{---- (2)}$$

<u>พิสูจน์</u> สัดส่วนตัวอย่าง p แบบมาตรฐาน $= \frac{p-P}{\sigma_p} = \frac{p-P}{\sqrt{P(1-P)/n}}$

ค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดของตัวแปรมาตรฐานคือ $\pm Z_c$

จากค่ามากที่สุดจะได้ว่า $p - P = \pm Z_c\sqrt{P(1-P)/n}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\therefore p^2 - 2pP + P^2 = Z_c^2 P(1-P)/n$$

คูณทั้งสองข้างด้วย n จะได้ว่า

$$(n+Z_c^2)P^2 - (2np+Z_c^2)P + np^2 = 0$$

ถ้า $a = n+Z_c^2$, $b = -(2np+Z_c^2)$ และ $c = np^2$ สมการนั้นคือ

$aP^2 + bP + c = 0$ หาค่า P ได้จากสมการกำลังสอง

$$\therefore P = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2np+Z_c^2 \pm \sqrt{(2np+Z_c^2)^2 - 4(n+Z_c^2)(np^2)}}{2(n+Z_c^2)}$$

$$P = \frac{2np + Z_c^2 \pm Z_c\sqrt{4np(1-p)+Z_c^2}}{2(n+Z_c^2)}$$

---

[1] Spiegel, <u>op.cit.</u>, p.162.

หารทั้งเศษและส่วนด้วย 2n จะได้ว่า

$$P = \frac{p+\frac{Z_c^2}{2n} \pm Z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}+\frac{Z_c^2}{4n^2}}}{1+\frac{Z_c^2}{n}}$$

ตัวอย่าง ในการเลือกนายกสโมสรนิสิตของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง มีนิสิตลงคะแนน 100 คน ซึ่งเลือกมาแบบสุ่มจากนิสิตทั้งมหาวิทยาลัย และมี 55 % ลงคะแนนให้ผู้สมัครคนหนึ่ง จงหา 99.73 % Confidence Limits (ค่าจำกัดความเชื่อมั่น) ของสัดส่วนของผู้ลงคะแนนทั้งหมดให้กับผู้สมัครคนนั้น

ก. ค่าจำกัดความเชื่อมั่น 99.73 %, $Z_c = 3$ ใช้ $p=.55$ และ $n=100$

$$P = \frac{.55+\frac{3^2}{(2\times100)} \pm 3\sqrt{\frac{.55(1-.55)}{100}+\frac{3^2}{4(100)^2}}}{1+\frac{3^2}{100}}$$

$$= .55 \pm .15$$

ถ้า n มีค่ามาก $Z_c^2/(2n)$, $Z_c^2/(4n^2)$ และ Z_c^2/n มีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้ ดังนั้นจึงได้สูตร (2) ดังนี้

$$P = p \pm Z_c\sqrt{P(1-p)/n}$$

9. การทดสอบสัดส่วนของประชากร

สมมุติฐาน $H_0 : \pi = \pi_0 \quad (0 \leq \pi_0 \leq 1)$

H_1 : ก. $\pi \neq \pi_0$ สำหรับการทดสอบสองทาง

ข. $\pi > \pi_0$
ค. $\pi < \pi_0$ } สำหรับการทดสอบทางเดียว

ข้อตกลงเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n ได้จากประชากรซึ่งมีสมาชิก 2 พวก คือ พวกที่มีลักษณะที่สนใจกับพวกที่ไม่มีลักษณะที่สนใจ สัดส่วนของจำนวนสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจใน

ประชากรเป็น π ในกลุ่มตัวอย่างเป็น p เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ การแจกแจงตัวอย่างของ p จะเข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม $\mu_p = \pi$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$

สถิติที่ใช้ทดสอบ

$$Z = \frac{(p \pm \frac{1}{2n}) - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \quad \text{------(1)}$$

$\pm \frac{1}{2n}$ เป็นค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง ทั้งนี้เนื่องจากการแจกแจงตัวอย่างของ p เป็นจำนวนเต็มทำนองเดียวกับเมื่อใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณการแจกแจงไบโนเมียล ใช้ $\pm \frac{1}{2}$ เป็นค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง แต่ในกรณีของอัตราส่วน p ได้จากการหารมัชฌิมของการแจกแจงไบโนเมียล np ด้วย n ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องจึงเป็น $\pm \frac{1}{2n}$

ถ้า $p > \pi$ ให้ใช้ $-\frac{1}{2n}$

ถ้า $p < \pi$ ให้ใช้ $+\frac{1}{2n}$

อย่างไรก็ตาม เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 100$) ค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่องจะมีค่าน้อยมาก ก็อาจตัดทิ้งได้[1] ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ถือว่าใหญ่พอ โดยการใช้การแจกแจงปกติ หลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไปคือ $n\pi$ และ $n(1-\pi) \geq 5$

ตัวอย่าง สมมุติทำการทดสอบความคิดเห็นของนักเรียนในโรงเรียนมัธยมศึกษาแห่งหนึ่งเกี่ยวกับการสอบ สุ่มตัวอย่างนักเรียนมา 100 คน ปรากฏว่ามี 60 คนที่เห็นด้วยกับการสอบแบบปรนัย อีก 40 คน ไม่เห็นด้วย จะสรุปได้หรือไม่ว่าจำนวนนักเรียนที่เห็นด้วยกับการสอบแบบปรนัยมีมากกว่า 50 % ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

1. สมมุติฐาน $H_0 : \pi = .5$

$H_1 : \pi > .5$

---

[1] Yamane, op.cit., p.572.

2. การทดสอบทางสถิติ : ใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าการแจกแจงของสัดส่วน

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : จะคำนวณโดยใช้สูตร (1) โดยถือว่ามีการแจกแจงเป็นปกติ

4. ขอบเขตของการปฏิเสธ : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z > 1.64$

5. การตัดสิน คำนวณหาค่า z ได้จากสูตร (1)

$$p = \frac{60}{100} = .6, \qquad n = 100$$

จะได้ $z = 1.9 > 1.64$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปได้ว่า จำนวนนักเรียนในโรงเรียนนี้ที่เห็นด้วยกับการทดสอบแบบปรนัยมีมากกว่า 50 %

การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม ใช้กลุ่มตัวอย่างอิสระ

สมมุติฐานที่จะทดสอบ

$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = b$ (ตามปกติทดสอบ $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$ นั่นคือ $H_0 : \pi_1 = \pi_2$)

$H_1 :$ ก. $\pi_1 - \pi_2 \neq b$ สำหรับการทดสอบสองทาง

ข. $\pi_1 - \pi_2 > b$

หรือ ค. $\pi_1 - \pi_2 < b$ สำหรับการทดสอบทางเดียว

ข้อตกลงเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่างอิสระ 2 กลุ่ม ขนาด n_1 กับ n_2 สุ่มมาจากประชากรซึ่งมีสัดส่วน π_1 และ π_2 ตามลำดับ ทั้ง n_1 และ n_2 มีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้การแจกแจงตัวอย่างของความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง $p_1 - p_2$ เข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีมัชฌิม $\mu_{p_1-p_2} = \pi_1 - \pi_2$ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน $\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

ขนาด n_1 และ n_2 ที่ถือว่าใหญ่พอในกรณีนี้ ก็ใช้หลักทั่ว ๆไป คือ $n_1\pi_1$, $n_1(1-\pi_2)$ $n_2\pi_2$ และ $n_2(1-\pi_2) \geqslant 5$ นอกจากนี้ กลาส (Gene V. Glass) กับ สแตนเลย์[1] (Julian C. Stanley) ยังแนะนำให้ใช้ n_1 และ $n_2 \geqslant 100$

สถิติที่ใช้ทดสอบ $$Z = \frac{p_1 - p_2 - b}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{}}} \quad \text{------(2)}$$

ตามปกติจะไม่ทราบค่า π_1 และ π_2 จึงต้องประมาณค่า $\sigma_{p_1-p_2}$ จาก p_1 และ p_2 ดังนี้

กรณีที่ 1. $\pi_1 = \pi_2 = \pi$

ค่าประมาณที่ดีที่สุดของ π คือ

$$\hat{p} = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1 + n_2}$$

$$\sigma_{p_1-p_2} = S_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1} + \hat{p}\frac{(1-\hat{p})}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$$

สถิติที่ทดสอบคือ $$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{p}\,\hat{q}\,(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \quad \text{----- (3)}$$

กรณีที่ 2 $b \neq 0$ หรือ $\pi_1 \neq \pi_2$ ต้องประมาณค่าแยกกัน

p_1 เป็นค่าประมาณไม่เอนเอียงของ π_1

และ p_2 เป็นค่าประมาณไม่เอนเอียงของ π_2

$$\therefore \sigma_{p_1-p_2} = S_{p_1-p_2} = \frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}$$

---

[1] Glass and Stanley, loc.cit., p.325.

สถิติที่ใช้ทดสอบ

$$z = \frac{(p_1-p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}} \qquad ------(4)$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาความขัดแย้งระหว่างพ่อแม่กับลูก พบว่าใน 100 ครอบครัว ซึ่งพ่อแม่ฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งหรือทั้งสองฝ่ายไม่ไว้วางใจกัน มี 85 ครอบครัว ที่พ่อแม่ขัดแย้งกับลูก ส่วนในอีก 100ครอบครัว ซึ่งพ่อแม่ไว้วางใจกัน มี 30 ครอบครัว ที่พ่อแม่ขัดแย้งกับลูก อยากทราบว่าความขัดแย้งระหว่างพ่อแม่กับลูกของครอบครัวที่พ่อแม่ไม่ไว้วางใจกัน กับครอบครัวที่พ่อแม่ไว้วางใจกัน แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่[1]

1. $H_0 : \pi_1 = \pi_2$

   $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$

2. การทดสอบทางสถิติ : ใช้สูตร (3)

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : ประมาณเป็นการแจกแจงปกติ

4. ขอบเขตของการปฏิเสธ : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z \geqslant 2.58$ หรือ $z \leqslant -2.58$

5. การตัดสิน : $p_1 = \frac{85}{100} = .85, \quad q_1 = 1-.85 = .15$

$$p_2 = \frac{30}{100} = .30, \quad q_2 = 1-.30 = .70$$

$$n_1 = n_2 = 100$$

$$\hat{p} = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2} = \frac{85+30}{200} = .575$$

$$\hat{q} = 1 - .575 = .425$$

แทนค่าต่าง ๆ ในสูตร (3) จะได้ $z = 7.86 > 2.58$ จึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ และ

---

[1]Lillian Cohen, Statistical Methods for Social Scientists (Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1954), p.119.

ลงความเห็นว่า ความขัดแย้งระหว่างพ่อแม่กับลูกของครอบครัวที่พ่อแม่ไม่ไว้วางใจกัน กับครอบครัวที่พ่อแม่ไว้วางใจกัน แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> ในการสำรวจว่าชายหญิงจะชอบภาพยนต์เรื่องหนึ่งด้วยสัดส่วนเท่ากันหรือไม่ โดยใช้วิธีการถามผู้ชมภาพยนต์ชาย 100 คน หญิง 80 คน ปรากฏว่าชอบ 70 คน และ 60 คน ตามลำดับ ด้วยความเชื่อมั่น 95 %

ก. จงหาขอบเขตที่เชื่อมั่นได้ของ $\pi_1 - \pi_2$

ข. จงทดสอบว่าชายกับหญิงชอบภาพยนต์เรื่องนี้เหมือนกันหรือไม่

ก.) $p_1 = \frac{70}{100} = .7,\quad p_2 = \frac{60}{80} = .75,\quad q_1 = .3,\quad q_2 = .25$

$$\therefore \hat{p} = \frac{70+60}{100+80} = \frac{130}{180} = \frac{13}{18}$$

$$\therefore \hat{q} = 1-\frac{13}{18} = \frac{5}{18}$$

$$s_p = \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{13}{18} \times \frac{5}{18}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{80}\right)} = .067$$

$\therefore$ ขอบเขตที่เชื่อมั่นได้ของ $\pi_1 - \pi_2$ มีค่าเป็น

$(.75 - .7) \pm (1.96)(.067) = .05 \pm .13 = -.08$ ถึง $.18$

ข.) 1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$

$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

2. การทดสอบทางสถิติ ใช้การแจกแจงปกติประมาณค่า เนื่องจากข้อมูลมีลักษณะเป็นการแจกแจงไบโนเมียล

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง จะคำนวณโดยใช้สูตร (2) โดยถือว่ามีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ

4. ขอบเขตของการปฏิเสธ ค่าของ z ที่มีค่ามากที่สุดที่ใช้การทดสอบชนิดสองทาง $z \geq z_{.025}$ หรือ $z \leq -z_{0.025}$

5. การตัดสิน

ค่า z หาได้จากสูตร (2)

$$z = \frac{(p_1-p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\hat{p}\,\hat{q}\,(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$= \frac{(.7 - .6) - 0}{.067}$$

$$= \frac{.1}{.067}$$

$$= 1.49$$

จากตาราง ข. ภาคผนวก ฉ. $z = 1.96$ การทดสอบนี้จึงไม่มีนัยสำคัญที่ $\alpha = 0.05$ สรุปได้ว่าชายกับหญิงชอบภาพยนต์เรื่องนี้พอ ๆ กัน

การทดสอบของสัดส่วนสำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก

ในกรณีที่มีตัวอย่างขนาดเล็ก สัดส่วน p ที่ได้อาจจะไม่ใช่ตัวแทนที่ดีของสัดส่วน π ของประชากร จึงถือว่า p ไม่มีค่าที่ใช้ได้ทางสถิติ ในกรณีเช่นนี้จึงควรใช้การทดสอบไคสแควร์ โดยเปลี่ยนข้อมูลให้เป็นรูปตารางการณ์จรเสียก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนหญิง 20 คน นักเรียนชาย 25 คน ปรากฏผลการสอบไล่ได้เป็นนักเรียนชาย 6 คน นักเรียนหญิง 3 คน จงทดสอบว่านักเรียนชายมีความสามารถในการเรียนเท่า ๆ กับนักเรียนหญิงหรือไม่

เนื่องจากจำนวนตัวอย่างมีจำนวนน้อย ฉะนั้นจึงใช้การทดสอบไคสแควร์ โดยใช้สูตรค่าแก้ของเยท (Yate's Correction)

$$\chi^2_{[1]} = \Sigma \frac{(|O-E| - 0.5)^2}{E}$$

1. H_0 : การสอบไล่ได้ของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงไม่มีความแตกต่างกัน

   H_1 : การสอบไล่ได้ของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีความแตกต่างกัน

2. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ χ^2 ทดสอบ เนื่องจากข้อมูลบรรจุในตารางการณ์จรเป็นความถี่ที่เป็นอิสระจากกันเป็นแบบไดโคโตมี

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : χ^2 ที่คำนวณได้โดยใช้สูตร

$$\chi^2_{[1]} = \sum \frac{(|O-E| - 0.5)^2}{E}$$

ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้ค่าแก้ของเยท (Yate's Correction) เพราะว่ามีตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่า 5 คือจำนวนนักเรียนหญิง

4. ขอบเขตของการปฏิเสธ : เนื่องจากเป็นการทดสอบชนิดสองทาง ขอบเขตของการปฏิเสธ ประกอบด้วยค่า $\chi^2_{[1]}(\alpha/2) \leq \chi^2$ หรือ $\chi^2 \leq \chi^2_{[1]}(1-\alpha/2)$

5. การตัดสิน

ตารางที่ 6 การทดสอบความเป็นอิสระในตารางการณ์จร 2 × 2

	สอบไล่ได้	สอบไล่ไม่ได้	รวม
นักเรียนชาย	6 (5)	19 (20)	25
นักเรียนหญิง	3 (4)	17 (16)	20
รวม	9	36	45

$$\chi^2_1 = \sum \frac{(|O-E| - 0.5)^2}{E}$$

$$= (1-0.5)^2 (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16})$$

$$= (.25)(.2+.05+.25+.06)$$

$$= .14$$

จากตารางภาคผนวก ฉ. $\chi^2_{[1]\ (.025)} = 3.84$

∴ การทดสอบจึงไม่มีนัยสำคัญที่ $\alpha = 0.05$ สรุปได้ว่า นักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีความสามารถในการเรียนหนังสือเท่า ๆ กัน

การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม ใช้กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ

สมมุติฐาน

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2$$

$$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$$

ข้อตกลงเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มมีขนาด n ทั้งคู่ ได้จากประชากรซึ่งมีสัดส่วน π_1 และ π_2 ตามลำดับ แต่กลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 นี้ไม่เป็นอิสระ ดังนั้นสมาชิกในกลุ่มตัวอย่างที่ 1 กับกลุ่มตัวอย่างที่ 2 อาจอยู่ในลักษณะที่ถูกจับคู่ หรือเป็นค่าสังเกตที่ได้จากการสังเกต "ก่อน" กับ "หลัง" การทดลอง ที่ใช้กันมากคือกลุ่มตัวอย่างทั้งสองเป็นกลุ่มตัวอย่างเดียวกัน แต่ถูกสังเกตคนละเวลา ค่าสังเกตที่ได้ในช่วงเวลาที่ 1 จัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 1 และค่าสังเกตที่ได้ในช่วงที่ 2 จัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ดังในตารางที่ 7

ตารางที่ 7 ค่าสังเกตของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวแต่ต่างช่วงเวลา

ความถี่

		กลุ่มตัวอย่างที่ 2		
		ไม่ใช่	ใช่	
กลุ่มตัวอย่างที่ 1	ใช่	A	B	A+B
	ไม่ใช่	C	D	C+D
		A+C	B+D	n

อัตราส่วน

		กลุ่มตัวอย่างที่ 2		
		ไม่ใช่	ใช่	
กลุ่มตัวอย่างที่ 1	ใช่	$a = \frac{A}{n}$	$b = \frac{B}{n}$	p_1
	ไม่ใช่	$c = \frac{C}{n}$	$d = \frac{D}{n}$	q_1
		q_2	p_2	1.0

ใช่ หมายความว่า สมาชิกของกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะที่สนใจ

ไม่ใช่ หมายความว่า สมาชิกของกลุ่มตัวอย่างไม่มีลักษณะที่สนใจ

สมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรกแต่กลับไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลัง

นับเป็น A

สมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรก และมีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลัง นับเป็น B

สมาชิกที่ไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรกและไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลัง นับเป็น C

สมาชิกที่ไม่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรกแต่กลับมีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลัง นับเป็น D

จำนวนรวมของสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งแรก $= A + B$

$$\therefore p_1 = \frac{A + B}{n}$$

จำนวนรวมของสมาชิกที่มีลักษณะที่สนใจในการสังเกตครั้งหลัง $= B + D$

$$\therefore p_2 = \frac{B + D}{n}$$

ให้สังเกตว่า p_1 จะต่างจาก p_2 ต่อเมื่อ A ต่างไปจาก D เท่านั้น

จำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนลักษณะทั้งหมดเท่ากับ $A + D$

A เปลี่ยนจากมีลักษณะที่สนใจไปสู่ ไม่มีลักษณะที่สนใจ

D เปลี่ยนจากไม่มีลักษณะที่สนใจไปสู่ มีลักษณะที่สนใจ

ตามสมมุติฐานสูญ เราคาดหวังว่า จำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนจากมีลักษณะที่สนใจไปสู่ไม่มีลักษณะที่สนใจ จะเท่ากับจำนวนสมาชิกที่เปลี่ยนจากไม่มีลักษณะที่สนใจไปสู่มีลักษณะที่สนใจ $= \frac{A+D}{2}$

จะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนจากไม่มีลักษณะที่สนใจไปสู่มีลักษณะที่สนใจของสมาชิกจำนวน $A + D$ เป็นไปตามการแจกแจงไบโนเมียล ซึ่งมีมัชฌิม $\frac{A + D}{2}$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sqrt{(A+D)(.5)(.5)}$ นั่นคือ $n = A+D$ และ $p = \frac{1}{2}$ ดังนั้น การทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่าง D (หรือ A) กับ $\frac{A+D}{2}$ จะบอกให้เราทราบว่า D แตกต่างจาก A อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

สถิติที่ใช้ทดสอบ

ถ้า A + D < 10 จะทดสอบโดยใช้การแจกแจงไบโนเมียลโดยตรง แต่ถ้า $A+D \geq 10$ จะใช้การแจกแจงปกติเป็นค่าประมาณ สถิติที่ใช้ทดสอบเป็น

$$Z = \frac{D - (A+D)/2}{\sqrt{(A+D)(.5)(.5)}} = \frac{.5D - .5A}{.5\sqrt{A+D}} = \frac{D-A}{\sqrt{A+D}} \quad \text{-----(5)}$$

ถ้า A + D ไม่ใหญ่นัก คืออยู่ในระหว่าง 10 ถึง 20 การประมาณค่าทำให้ดีขึ้นได้โดยมีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง เอา 1 ลบออกจากค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ D-A

$$\therefore \; Z = \frac{|D - A| - 1}{\sqrt{A+D}} \quad \text{------- (6)}$$

ถ้าต้องการคำนวณในรูปอัตราส่วน ก็เอา n หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$Z = \frac{\frac{D}{n} - \frac{A}{n}}{\sqrt{\frac{A}{n^2} + \frac{D}{n^2}}} = \frac{d - a}{\sqrt{\frac{a}{n} + \frac{d}{n}}} = \frac{d - a}{\sqrt{(a+d)/n}} \quad \text{-----(7)}$$

และถ้ามีค่าแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง ซึ่งจะเท่ากับ $\frac{1}{n}$ จะได้

$$Z = \frac{|d - a| - \frac{1}{n}}{\sqrt{(a+d)/n}} \quad \text{------- (8)}$$

ให้สังเกตว่าเนื่องจาก $p_1 = a + b$ และ $p_2 = b + d$

$$\therefore \; p_1 + p_2 = d - a$$

แสดงว่า การทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่าง D กับ A ย่อมเป็นการทดสอบความมีนัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างอัตราส่วน p_1 กับ p_2 ด้วย[1]

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> สุ่มตัวอย่างคนมา 60 คน เพื่อศึกษาว่า การเห็นด้วยกับไม่เห็นด้วย

---

[1]Quinn McNemar. <u>Psychological Statistics</u> (3rd.ed., New York : John Wiley & Sons, Inc., 1962), pp.52-55.

ในการลงโทษ จะเปลี่ยนไปหรือไม่ หลังจากที่ให้ฟังปาฐกถาชักจูงเกี่ยวกับการยกเลิกการลงโทษ ความคิดเห็นของคน 60 คนนี้ ก่อนให้ฟังปาฐกถาจัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 1 และความคิดเห็นหลังจากฟังปาฐกถา จัดเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ข้อมูลที่ได้ปรากฏดังในตารางที่ 8 จงสรุปผลการศึกษาครั้งนี้[1]

ตารางที่ 8 การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัดส่วนของประชากร 2 กลุ่ม ใช้กลุ่มตัวอย่างไม่อิสระ

		กลุ่มตัวอย่างที่ 1 ก่อนฟังปาฐกถา ไม่เห็นด้วย	กลุ่มตัวอย่างที่ 1 ก่อนฟังปาฐกถา เห็นด้วย	
กลุ่มตัวอย่างที่ 2 หลังจากฟังปาฐกถา	เห็นด้วย	10 (A)	16 (B)	26
	ไม่เห็นด้วย	8 (C)	26 (D)	34
		18	42	60=n

1. $H_0 : \pi_1 = \pi_2$

   $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$

2. การทดสอบทางสถิติ : ใช้สูตร (5)

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : ประมาณเป็นการแจกแจงปกติ

4. ขอบเขตของการปฏิเสธ : จะปฏิเสธสมมุติฐานสูญ ถ้า $z \geq 1.96$ หรือ $z \leq -1.96$

5. การตัดสิน : $Z = 2.67 > 1.96$ ฉะนั้นจึงปฏิเสธสมมุติฐานสูญ สรุปว่าการเห็นด้วยกับการไม่เห็นด้วยในการลงโทษ หลังจากที่ให้ฟังปาฐกถาชักจูงเกี่ยวกับการ

---

[1] Glass and Stanley, <u>op.cit.</u>, p.328.

ยกเลิกการลงโทษ จะเปลี่ยนไปอย่างมีนัยสำคัญ

10. การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี (Testing Goodness of Fit)

การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี หมายถึง การทดสอบตารางที่บรรจุความถี่ที่สังเกตได้นั้นเป็นกลุ่มสมาชิกที่สมนัยกับความถี่ที่คาดหวังตามที่สมมุติฐานกำหนดไว้หรือไม่ ถ้ามีข้อมูลอยู่กลุ่มหนึ่ง เราจำเป็นต้องชี้ให้เห็นว่าข้อมูลกลุ่มนั้นได้มามีลักษณะการแจกแจงอย่างไร มีความเหมาะสมและใกล้เคียงกับข้อมูลเดิมหรือไม่ การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีสามารถทดสอบกับการแจกแจงไบโนเมียล มัลติโนเมียล และปัวซอง ซึ่งมีความถี่ที่สังเกตได้เปรียบเทียบกับความถี่ทางทฤษฎี ตั้งแต่ 2 คู่ขึ้นไป เช่น มีจำนวนการทดลอง n ครั้ง และการทดลองได้รับความสำเร็จ x ครั้ง ซึ่งมีความน่าจะเป็น p_i, $i = 1,2,\ldots n$ แต่ละค่าความถี่ของความสำเร็จจะบรรจุอยู่ในหนึ่งชั้นของจำนวน k ชั้น

ผู้วิจัยใช้ไคสแควร์เพื่อทดสอบภาวะสารูปสนิทดี เพื่อตัดสินใจว่ากลุ่มตัวอย่างประชากรนั้นมีการกระจายเป็นรูปใด มีความถี่ที่สังเกตได้สมนัยกับความถี่ที่คาดหวังหรือไม่[1] โดยใช้ χ^2 คำนวณ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{x} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad \text{----(1)}$$

x คือ จำนวนคู่ของความถี่ที่สังเกต (O_i) กับความถี่ที่คาดหวัง (E_i) ที่เปรียบเทียบกัน และ $\Sigma O_i = \Sigma E_i = n$ และจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k

ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการทดสอบภาวะสารูปสนิทดี

1. สิ่งที่ได้จากการสังเกตแต่ละสิ่งจะอยู่ในชั้นใดชั้นหนึ่งเท่านั้น
2. ผลที่เกิดจากสิ่งที่สังเกตได้จะต้องเป็นอิสระจากกัน

---

[1] Paul G. Hoel, Introduction to Mathematical Statistics. (2nd.ed., Wiley Publications in Statistics, 1958), pp. 164-5.

[2] William L Hays, Statistics, (New York : Holt, Rinehart and Winston, c 1963), p.583.

3. ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง n ที่หยิบมาจากประชากร ควรมีขนาดใหญ่กว่า 50

4. ค่าความถี่ที่คาดหวังในแต่ละชั้นไม่ควรน้อยกว่า 5 ถ้าน้อยกว่า 5 ให้รวมความถี่นั้นกับชั้นที่อยู่ติดกัน เป็นชั้นเดียวกัน[1]

5. นอกนั้นเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นทั่วไปของไคสแควร์ ซึ่งมีลักษณะดังต่อไปนี้[2]

5.1 สิ่งที่สังเกตได้ที่ใช้ไคสแควร์ทดสอบเป็นความถี่ หรือจำนวนเต็มที่เป็นอิสระต่อกันและสิ่งที่สังเกตได้นี้จะอยู่ในชั้นใดชั้นหนึ่งเพียงชั้นเดียวเท่านั้น

5.2 ต้องแบ่งจำนวนชั้นของความถี่เพื่อไม่ทำให้เกิดความถี่ที่คาดหวังน้อยจนเกินไป

5.3 ความถี่ของสิ่งที่ไม่ปรากฏของลักษณะที่ไม่ใช้ในการทดสอบ จะต้องนำมาพิจารณาในการวิเคราะห์ข้อมูลด้วย เช่น ในการเพาะเมล็ดพืชชนิดหนึ่ง ถ้าต้องการทดสอบว่าจำนวนเมล็ดพืชที่ขึ้นมีการกระจายเป็นทฤษฎีไบโนเมียลหรือไม่ ก็ต้องนับความถี่ของจำนวนเมล็ดที่ไม่ขึ้นด้วย

5.4 ความถี่ที่คาดหวังไม่ควรน้อยกว่า 10 แต่ถ้าจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระมีมากและค่าความถี่ที่คาดหวังไม่น้อยกว่า 5 ก็อาจใช้การทดสอบนี้ได้

5.5 ถ้าความถี่ที่คาดหวังในแต่ละชั้นน้อยกว่า 10 (บางครั้งใช้ 5 เป็นค่าต่ำสุด) เราสามารถรวมความถี่นั้นกับช่วงที่ถัดไป แต่ถ้าความถี่ที่คาดหวังของชั้นต่าง ๆ มีค่าน้อยกว่า 10 เกิน 20 % ของจำนวนชั้นทั้งหมด ก็ไม่ควรใช้ไคสแควร์ทดสอบ

5.6 ผลบวกของความถี่ที่คาดหวังจะต้องเท่ากับผลบวกของความถี่จากการสังเกต

การกระจายของประชากรนั้นสามารถจัดเป็นกลุ่มเป็นช่วง ๆ ได้ และจำนวนความถี่

---

[1]Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers. <u>Probability and Statistics for Engineers and Scientists</u>, (New York: The Macmillan Company, c 1972), p.266.

[2]Philips and Thompson, <u>op.cit.</u>, pp.209-25.

ที่คาดหวังในแต่ละชั้นต้องมีขนาดใหญ่ ดังนั้นผู้วิจัยต้องตัดสินใจในการกำหนดจำนวนชั้นและช่วง เพื่อหาค่าความถี่ที่คาดหวังและความถี่ที่สังเกตได้ ในกรณีทั่ว ๆ ไปมักจะใช้จำนวนชั้นระหว่าง 10 - 25 ชั้น[1] และมีช่วงระหว่างชั้นเท่ากัน ซึ่งทำให้ง่ายต่อการใส่ความถี่ช่วงที่เท่ากันนี้ไม่ได้เป็นเครื่องกำหนดพลังของการทดสอบของไคสแควร์ เพียงแต่แนะนำว่าเป็นขบวนการที่ดีเท่านั้น การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี เราต้องคำนวณหาค่าคงที่บางค่าเช่น มัชฌิม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็นต้น เพื่อกำหนดความโค้งที่เหมาะสม แล้วหาขอบเขตของชั้นที่จะให้ค่าความถี่ในแต่ละชั้น พร้อมทั้งนับจำนวนความถี่ที่สังเกตได้ x_i ที่อยู่ในแต่ละชั้นตามลำดับ

อย่างไรก็ตาม จำนวนชั้นควรแปรตามขนาดของข้อมูล ถ้าข้อมูลมีขนาดใหญ่ ก็ควรให้มีจำนวนชั้นมากขึ้นด้วย ถ้าขนาดข้อมูลน้อย จำนวนชั้นก็ต้องน้อยตามด้วย ในกรณีที่อันตรภาคชั้นไม่เท่ากัน เราคำนวณความถี่ที่คาดหวังได้จากสูตรการกระจายของปัวซองหรือทฤษฎีไบโนเมียล

วิธีการ

1. กำหนดจำนวนชั้นความถี่และอันตรภาคชั้นให้เหมาะกับขนาดของข้อมูลแล้วใส่ความถี่ แล้วหามัชฌิม และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ x_i

2. คำนวณความถี่ที่คาดหวังในแต่ละชั้น ถ้าเป็นการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงไบโนเมียล ค่าความถี่ที่คาดหวังได้จากสูตร

$$P(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x}(1-p)^{n-x}; \; x = 0, 1, 2, \ldots n$$

เป็นความน่าจะเป็นที่จะได้ x ในการทดลอง n ครั้ง และความน่าจะเป็น P(x) นั้นคูณด้วย n จะได้ความถี่ที่คาดหวัง E_i

---

[1] William G. Cochran, "χ^2 Test of Goodness of Fit" The Annuals of Mathematical Statistics, Vol.35, (1952), pp.332-33.

สำหรับการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงมัลติโนเมียล คำนวณความถี่ที่คาดหวังได้จากสูตร

$$f(n_1, n_2, \ldots n_x) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_x!}\; p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_x^{n_x}$$

หรือสำหรับการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีปัวซอง คำนวณความถี่ที่คาดหวังได้จาก

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$\lambda = np$ = มัชฌิม

$e = 2.71828$

แล้วคูณ $P(x)$ ด้วยขนาดของกลุ่มตัวอย่างก็จะได้ความถี่ที่คาดหวัง

3. ตั้งสมมุติฐานศูนย์และสมมุติฐานสำรอง

4. กำหนดระดับความมีนัยสำคัญและขอบเขตของการปฏิเสธ

5. คำนวณค่า $\chi^2 = \sum_{i=1}^{x} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ $x = 0, 1, 2, \ldots$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงไบโนเมียลในการทดสอบครั้งหนึ่ง ผู้วิจัยจะใช้การโยนเหรียญเพื่อจัดกลุ่มอย่างสุ่ม จึงทำการโยนเหรียญ 4 อัน 112 ครั้ง เพื่อดูว่ามีการแจกแจงเป็นแบบไบโนเมียลหรือไม่ คือความน่าจะเป็นของการเกิดหัว = .5

<u>วิธีทำ</u>

1. H_0 : การแจกแจงของการโยนเหรียญเป็นแบบไบโนเมียล
   H_1 : การแจกแจงของการโยนเหรียญไม่เป็นแบบไบโนเมียล
2. การทดสอบทางสถิติใช้ χ^2 สูตร (1) ทดสอบ
3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะเป็นแบบไบโนเมียล จึงหาความถี่ที่คาดหวังจาก $P(x; n) = {}^{n}C_{x}\, p^{x}(1-p)^{n-x}$ แล้วคูณด้วย n การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างนี้เป็นค่าประมาณของ χ^2 ที่ df = 5-1=4
4. ขอบเขตของการปฏิเสธ: ขอบเขตของการปฏิเสธประกอบด้วยค่าของ

$\chi_4^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}$ หรือ $\chi_4^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}$

ตารางที่ 9 ข้อมูลการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงแบบไบโนเมียล

จำนวนหัวที่โยนได้	ความถี่ที่สังเกตได้
0	11
1	26
2	39
3	31
4	5
รวม	112 = n

ตารางที่ 10 การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงแบบไบโนเมียล

จำนวนหัว	ความถี่ที่สังเกตได้	ความถี่ที่คาดหวัง
0	11	$122(0)^4(.5)^0(.5)^4 = 7$
1	26	$122(1)^4(.5)^1(.5)^3 = 28$
2	39	$122(2)^4(.5)^2(.5)^2 = 42$
3	31	$122(3)^4(.5)^3(.5)^3 = 28$
4	5	$122(4)^4(.5)^0(.5)^4 = 7$

5. การตัดสินใจ

$$\chi^2 = \frac{(11-7)^2}{7} + \frac{(26-28)^2}{28} + \frac{(39-42)^2}{42} + \frac{(31-28)^2}{28} + \frac{(5-7)^2}{7} = 3.58$$

จากตารางภาคผนวก จ. $\chi_4^2 = 3.58 < \chi^2_{4(.025)} = 11.1$ และ $\chi_4^2 < \chi^2_{4(.005)} = 14.9$ ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .05 และ .01 การแจกแจงของการโยนเหรียญเป็นแบบไบโนเมียล คือความน่าจะเป็นของการเกิดหัวเท่ากับ .5

ตัวอย่างที่ 2 การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงมัลติโนเมียล การฝึกนักเรียนทหารผู้ช่วยแพทย์เพื่อการสงครามครั้งหนึ่ง นักเรียนจะต้องมีความสามารถพิเศษด้วยการทดสอบความแม่นปืนด้วยการยิงเป้า 4 ครั้ง มีนักเรียนฝึกทั้งหมด 200 คน ตารางการทดสอบความแม่นปืนดังต่อไปนี้

ตารางที่ 11 ข้อมูลการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงแบบมัลติโนเมียล

จำนวนชั้น	1	2	3	4	5
O	54	44	40	35	27
E	40	40	40	40	40

จงทดสอบว่านักเรียนแต่ละกลุ่มมีความสามารถในการยิงปืนน้อยกว่ากัน

วิธีทำ

1. $H_0 : p_1 = \dots = p_5 = \frac{1}{5}$

   $H_1 : P_1 < \dots < P_5 = \frac{1}{5}$

2. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ χ^2 สูตร (1) ทดสอบ

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างเป็นแบบมัลติโนเมียล และเป็นค่าประมาณของ χ^2 ที่ df = 5-1=4

4. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ขอบเขตของการปฏิเสธประกอบด้วยค่าของ $\chi_4^2 \geqslant \chi_2^2$ หรือ $\chi_4^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}$

5. การตัดสิน ใช้สูตร χ^2 (1) คำนวณ

$$\chi^2 = \frac{(54-40)^2}{40} + \frac{(44-40)^2}{40} + \frac{(40-40)^2}{40} + \frac{(35-40)^2}{40} + \frac{(27-40)^2}{40}$$

$$= 10.1$$

จากตารางภาคผนวก จ. $\chi^2_4 = 10.1 > \chi^2_{4(.05)} = 9.49$ มีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 การแจกแจงของความแม่นปืน เป็นแบบมัลติโนเมียล คือความน่าจะเป็นของความสามารถในการยิงปืนน้อยกว่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงปัวซอง ตารางข้างล่างนี้เป็นกลุ่มเด็กที่สอบแบบทดสอบของ บิเนท์ (แบบสั้น 5 ชุด) ผ่านทั้งหมด เมื่อการทดสอบผ่านไป 1 ปี จึงขยายการทดสอบออกไปใหม่ และให้เด็กสอบ เพื่อดูว่าจะมีเด็กตกแบบทดสอบเป็น 1 หรือ 2 ชุด หรือมากกว่านั้น[1]

ตารางที่ 12 ความถี่ของการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงปัวซอง

จำนวนแบบทดสอบที่ตก	ความถี่ที่สังเกตได้ (O_i)	จำนวนความถี่ที่ตก
0	88	0
1	34	34
2	8	16
3	1	4
4	0	0
5	0	0
รวม	131	54

[1] Palmer O. Johnson, <u>Statistical Methods in Research</u> (New York : Prentice-Hall, Inc., 1949), pp.96-97.

<u>วิธีทำ</u>

1. H_0 : การแจกแจงการสอบตกในแบบทดสอบเป็นการแจกแจงแบบปัวซอง

H_1 : การแจกแจงการสอบตกในแบบทดสอบไม่เป็นการแจกแจงแบบปัวซอง

2. การทดสอบทางสถิติ : ใช้ χ^2 ทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของปัวซอง โดยใช้สูตร (1) มี $df = 3-2=1$

3. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง : การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะคล้ายกับการแจกแจงปัวซอง มีความน่าจะเป็นของการสอบตก $=\frac{1}{131}$ และสอบตก $n = 53$ ดังนั้นมัชฌิม $= \frac{53}{131} = 0.4046$

4. ขอบเขตของการปฏิเสธ : ขอบเขตของการปฏิเสธด้วยค่าของ

$$\chi^2_{(\alpha/2)} \leqslant \chi^2 \leqslant \chi^2_{(1-\alpha/2)}$$

5. การตัดสิน

ตารางที่ 13 การทดสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงแบบปัวซอง

จำนวนแบบทดสอบที่ตก	O_i ความถี่ที่สังเกตได้	E_i ความถี่ที่คาดหวัง $e^{-\lambda}\lambda^x/x!$	O_i-E_i ค่าเบี่ยงเบน	$(O_i-E_i)^2/E_i$ ค่าไคสแควร์
0	88	$131(.4046)^0 e^{-(.4046)}/0!$	88-87.41	0.004
1	34	$131(.4046)^1 e^{-(.4046)}/1!$	34-35.37	0.53
2	8	$131(.4046)^2 e^{-(.4046)}/2!$		
3	1	$131(.4046)^3 e^{-(.4046)}/3!$	9-8.24	0.070
4	0	$131.(4046)^4 e^{-(.4046)}/4!$		
5	0	$131.(4046)^5 e^{-(.4046)}/5!$		
รวม	131	131.02		0.127

การคำนวณความถี่ที่คาดหวัง จำเป็นต้องใช้ลาการิธึม เข้าช่วย[1]

ค่า χ^2 จากสูตร (1) ได้ = 0.127 จากตารางในภาคผนวก ฆ.

$\chi^2_{1(.995)} = .00003 < \chi^2_1$ และ $\chi^2_{1(.975)} = .0009 < \chi^2_1 = 0.127$

ไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ .05 และ .01 ยอมรับสมมุติฐานที่ว่าการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างเป็นแบบป้วซอง คือเด็กจะสอบตกในแบบทดสอบย่อยน้อยมาก

11. การทดสอบทางสถิติแบบไม่มีพารามิเตอร์ (Nonparametric Statistics)

การทดสอบทางสถิติแบบไม่มีพารามิเตอร์ ที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานโดยมีกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว การทดสอบนี้จะทำให้เราทราบว่า กลุ่มตัวอย่างนั้นมาจากมวลประชากรที่เราต้องการศึกษาหรือไม่

การทดสอบแบบกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวนี้ โดยปกติแล้วเป็นการทดสอบแบบเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบสุ่ม แล้วทดสอบสมมุติฐานว่า กลุ่มตัวอย่างนั้นมาจากมวลประชากรที่เราต้องการศึกษา โดยมีการแจกแจงเช่นเดียวกับมวลประชากรเดิมหรือไม่ การทดสอบแบบนี้สามารถที่จะตอบปัญหาต่าง ๆ ได้ เช่น มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญของแนวโน้มเข้าสู่ศูนย์กลาง (Central Tendency) ระหว่างกลุ่มตัวอย่างกับมวลประชากรที่เราจะศึกษาหรือไม่ มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างอัตราส่วนที่สังเกตได้ กับอัตราส่วนที่เราคาดหวังว่าจะเกิดขึ้นนั้นหรือไม่ มีเหตุผลพอที่จะเชื่อถือได้หรือไม่ว่ากลุ่มตัวอย่างนั้นได้เลือกมาโดยวิธีสุ่มจากประชากรที่เราต้องการศึกษา

ในกรณีกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวนี้ วิธีการที่ใช้ทางพารามิเตอร์ (Parametric) ใช้การทดสอบแบบที (t - test) เพื่อดูความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่สังเกตได้ กับค่าเฉลี่ยที่เราคาดหวัง (ของมวลประชากร) การทดสอบแบบที ถ้าจะพูดอย่างเคร่งครัดแล้ว เราต้องสมมุติว่า การสังเกตหรือคะแนนจากกลุ่มตัวอย่างนั้นจะต้อง

---

[1] Ibid., p.97.

มาจากมวลประชากรที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ และอีกประการหนึ่ง การใช้การทดสอบโดยที่มาตราของการวัดในการสังเกตนั้น อย่างน้อยที่สุดจะต้องเป็นช่วง(Interval Scale)

มีข้อมูลเป็นจำนวนมากที่ไม่อาจใช้การทดสอบแบบทีได้ ผู้ทำการทดลองพบว่า

1. ข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption) และข้อกำหนด (Requirements) ของการทดสอบที (t-test) ไม่เป็นจริงตามลักษณะของข้อมูล

2. ถ้าสามารถหลีกเลี่ยงข้อตกลงเบื้องต้นของการทดสอบทีได้จะดีกว่า เพราะทำให้สามารถขยายความของการสรุปผลได้กว้างขวางกว่า

3. ข้อมูลบางอย่างในการวิจัย เป็นเพียงขั้นการจัดอันดับ (Order Scale) ซึ่งไม่สามารถที่จะวิเคราะห์โดยการใช้แบบที (t-test) ได้

4. ข้อมูลบางอย่างเป็นแต่เพียงแบ่งประเภทหรือบอกไว้แต่เพียงจำนวนเท่านั้นจะใช้วิเคราะห์แบบทีไม่ได้

5. ไม่ต้องการที่จะศึกษาแต่เพียงความแตกต่างในด้านแนวโน้มเข้าสู่ศูนย์กลางเท่านั้น ต้องการที่จะศึกษาถึงความแตกต่างในด้านอื่น ๆ ด้วย

ในกรณีดังกล่าวนี้ ผู้ทำการทดลองจะต้องเลือกใช้ วิธีทดสอบทางสถิติแบบนอนพาราเมตริค (Nonparametric Statistics) วิธีใดวิธีหนึ่ง เช่น การทดสอบไบโนเมียล (Binomial Test) การทดสอบเครื่องหมาย (Sign Test) เป็นต้น

11.1 การทดสอบไบโนเมียล (Binomial Test)

ลักษณะปัญหาและการใช้การทดสอบ

การแจกแจงแบบไบโนเมียล เป็นการแจกแจงกลุ่มตัวอย่างของอัตราส่วนโดยการดึงเอากลุ่มตัวอย่างนี้มาจากทั้งสองประเภทของมวลประชากร นั่นก็คือ ใช้ค่าต่างๆเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ นั่นก็คือ ค่ามวลประชากร (Population Value) เป็นอัตราส่วน p ดังนั้นถ้าคะแนนจากการวิจัยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท เราก็อาจใช้การแจกแจงไบโนเมียลทดสอบสมมุติฐานได้ การทดสอบเป็นแบบภาวะสารูปสนิทดี (Test of Goodness of Fit) จะบอกให้เราทราบว่าพอที่จะเชื่อถือได้หรือไม่ว่ากลุ่มตัวอย่าง

ได้เลือกมาจากมวลประชากร โดยมีค่าของอัตราส่วน p เช่นเดียวกัน

วิธีการ (Method)

ความน่าจะเป็นของสิ่งที่ทดลอง (Objects) x สิ่ง ในประเภทหนึ่ง และสิ่งทดลอง n-x สิ่ง ในอีกประเภทหนึ่ง หาได้โดย

$$p(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x} q^{n-x}$$

เมื่อ p = อัตราส่วนของกรณีที่คาดหวังว่าจะเกิดขึ้นในประเภทหนึ่ง

q = 1-p = อัตราส่วนของกรณีที่คาดหวังว่าจะเกิดขึ้นในอีกประเภทหนึ่ง

$$^{n}C_{x} = \frac{n\,!}{x\,!\,(n-x)!} \quad \text{..........(1)}$$

$\sum_{i=0}^{x} {}^{n}C_{i}\, p^{i} q^{n-i}$.....(2) เป็นการหาความน่าจะเป็นของ $P(i \leq x)$

กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก (Small Sample)

ในกรณีที่เป็นกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว และเมื่อแบ่งเป็น 2 ประเภท ค่า $p = \frac{1}{2}$ จากตาราง ค[1] จะให้ค่าความน่าจะเป็นทางเดียว ของค่า x ต่าง ๆ ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า $p = q = \frac{1}{2}$ การใช้ตาราง ค. ให้ x เป็นจำนวนความถี่ที่สังเกตได้ของส่วนที่น้อยกว่า ตารางนี้ใช้ได้เพียง n=25 หรือน้อยกว่า ถ้าเกินไปจากนี้ ก็จะหาได้โดยใช้สูตร (2) และแม้ว่า $p \neq q$ ก็ใช้สูตรนี้ได้ ตาราง ค จะให้ค่าความน่าจะเป็นของความสัมพันธ์ระหว่างค่า x ต่าง ๆ กับค่า N (ตั้งแต่ 5 ถึง 25) ตัวอย่างเช่น จากการสังเกตพบว่า มีอยู่ 7 กรณีในประเภทหนึ่ง และมีอีก 3 กรณีในอีกประเภทหนึ่ง เพราะฉะนั้น n = 10, x = 3

จากตาราง ค[2] ความน่าจะเป็นทางเดียวตามสมมุติฐาน ในเมื่อ x=3 หรือ

---

[1]ดูภาคผนวก ฉ.

[2]ดูภาคผนวก ฉ.

น้อยกว่า n=10 ได้ค่า P = 0.172 (สังเกตว่าในตารางมิได้ใส่จุดทศนิยมไว้)

ค่า p ที่กำหนดไว้ในตาราง ค[1] เป็นการทดสอบแบบทางเดียว (One-Tailed Test) การทดสอบแบบนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ เราสามารถพยากรณ์ได้ว่าการที่จะเกิดขึ้นต่อไปจะอยู่ในประเภทของกรณีที่เป็นจำนวนน้อยกว่า และในเมื่อการพยากรณ์นั้นเป็นไปในลักษณะนี้ ความถี่ทั้งสองประเภทจะแตกต่างกัน จะต้องใช้การทดสอบแบบสองทาง (Two-Tailed Test)การทดสอบแบบนี้ ค่า p จะเป็น 2 เท่าของค่าในตาราง ค[2] เช่น n = 10, x=3 ความน่าจะเป็นแบบ 2 ทางตามสมมุติฐาน p = 2(.172) = .344

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ในการศึกษาถึงของความเครียด (Stress) ผู้ทำการทดลองได้ใช้วิธีสอนการผูกเงื่อน ๆ **เดียวกัน** 2 วิธี แก่นักเรียนในระดับวิทยาลัย จำนวน 18 คน โดยครึ่งหนึ่งให้เรียนวิธี A ก่อน แล้วจึงให้เรียนวิธี B และอีกครึ่งหนึ่งให้เรียนวิธี B ก่อน แล้วจึงเรียนวิธี A การแบ่งกลุ่มตัวอย่างแบ่งโดยการเลือกแบบสุ่ม (Random) ต่อมาตอนเที่ยงคืนของวันหลังจากนักเรียนดังกล่าวได้ผ่านการทดสอบมาแล้วเป็นเวลา 4 ชั่วโมง ก็ได้ขอร้องให้เขาผูกเงื่อน โดยคาดหวังว่าความเครียดคงจะทำให้เกิดอาการถดถอยต่างๆ ขึ้นได้ เช่นนักเรียนอาจจะย้อนกลับไปใช้วิธีผูกเงื่อนวิธีที่ได้เรียนมาครั้งแรก หรือนักเรียนแต่ละคนจะใช้วิธีใดในการผูกเงื่อนภายใต้สถานการณ์ที่กำลังมีความเครียดอยู่

1. สมมุติฐานสูญ (Null Hypothesis) $H_0: p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ คือความน่าจะเป็นของนักเรียนที่เรียนผูกเงื่อนโดยใช้วิธีที่ได้เรียนมาครั้งแรก (p_1) กับความน่าจะเป็นของนักเรียนที่ผูกเงื่อนโดยใช้วิธีที่ได้เรียนมาในครั้งหลัง (p_2) ภายใต้สถานการณ์แห่งความเครียด ไม่มีความแตกต่างกัน ความแตกต่างของความถี่ที่สังเกตได้ เป็นผลอันเนื่องมาจากขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เลือกมาจากมวลประชากรเท่านั้น ตามสมมุติฐาน (H_0)

$H_1 : p_1 \neq p_2$

---

[1] ดูภาคผนวก ฉ.

[2] ดูภาคผนวก ฉ.

ห้องสมุด คณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ

2. การทดสอบทางสถิติ (Statistical Test) ใช้วิธีการทดสอบแบบไบโนเมียล การที่ใช้การทดสอบแบบนี้เพราะว่า ข้อมูลได้แบ่งออกเป็น 2 ประเภทที่แยกออกจากกันได้โดยเด็ดขาด และเป็นแบบกลุ่มเดียว ถึงแม้ว่าวิธีสอน A และ B วิธีใดจะสอนก่อนหลังก็ตาม จะไม่ส่งผลให้ผู้เรียนชอบวิธีที่ได้เรียนมาครั้งแรกมากกว่าวิธีที่ได้เรียนทีหลัง ภายใต้สมมุติฐานนี้ และจะได้ว่า $p = q = \frac{1}{2}$

3. ระดับความมีนัยสำคัญ (Significance Level) ให้ $\alpha = 0.01$

N = จำนวนนักเรียน = 18 คน

4. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง (Sampling Distribution) ใช้สูตร (2) เมื่อ $n \leq 25$ และ $p=q= \frac{1}{2}$ ใช้ความน่าจะเป็นจากตาราง ค. ใต้ ภายใต้สมมุติฐาน ซึ่งค่าของ x มีค่าน้อย

5. ขอบเขตของการปฏิเสธ (Rejection Region) ขอบเขตของการปฏิเสธประกอบด้วยค่าของ x ทั้งหมด (เมื่อ x = จำนวนนักเรียนผู้ซึ่งใช้การผูกเงื่อนด้วยวิธีที่ได้เรียนทีหลัง ภายใต้สถานการณ์แห่งความเครียด) ซึ่งน้อยกว่า มีความน่าจะเป็นสัมพันธ์กับการเกิดภายใต้สมมุติฐานที่เท่ากับหรือน้อยกว่า $\alpha = 0.01$ ขอบเขตของการไม่ยอมรับสมมุติฐานเป็นแบบทางเดียว (One-Tail)

6. การตัดสินใจ (Decision) ในการทดสอบนี้ นักเรียนเกือบทั้งหมด (นอกจาก 2 คน) ใช้วิธีผูกเงื่อนวิธีที่ได้เรียนมาครั้งแรกภายใต้สถานการณ์แห่งความเครียด ซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 14 ตารางแสดงวิธีผูกเงื่อนซึ่งถูกเลือกภายใต้สถานการณ์แห่งความเครียด

ตารางที่ 14 การทดสอบไบโนเมียลแบบไม่มีพารามิเตอร์

	วิธีที่เลือก		
	วิธีที่เรียนครั้งแรก	วิธีที่เรียนครั้งหลัง	รวม
ความถี่	16	2	18

ในที่นี้ n = จำนวนของการสังเกตที่เป็นอิสระ (Independent Observation) = 18

x = จำนวนความถี่ที่เป็นประเภทที่น้อยกว่า = 2

จากตาราง ค[1] เมื่อ $n = 18$ ความน่าจะเป็น (p) ที่สัมพันธ์กับ $x \leq 2$ คือ $p = 0.001$ ซึ่ง $p < \alpha = 0.01$

$\therefore$ การตัดสินจึงปฏิเสธ H_0 และจะยอมรับ H_1 ซึ่งสรุปได้ว่า $p_1 > p_2$ นั่นก็คือ ผู้ซึ่งกำลังตกอยู่ภายใต้สถานการณ์แห่งความเครียดจะย้อนกลับไปใช้วิธีที่ได้เรียนมาครั้งแรกในวิธีที่ได้เรียนมาทั้ง 2 วิธี

กลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ (Large Sample)

เราไม่อาจใช้ตาราง ค[2] ได้ ในเมื่อ n มีค่ามากกว่า 25 แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อ n เพิ่มขึ้นมาก ๆ การแจกแจงไบโนเมียลมีแนวโน้มที่จะเป็นการแจกแจงปกติเร็วในเมื่อค่า p มีค่าใกล้เคียงกับ $\frac{1}{2}$ และโอกาสเป็นการแจกแจงปกติได้ช้าในเมื่อค่า p มีค่าใกล้เคียงกับ 1 หรือ 0

ในเมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ $\frac{1}{2}$ ค่าโดยประมาณแล้วอาจใช้การทดสอบทางสถิติ $n > 25$ ได้ ในเมื่อ p มีค่าใกล้เคียงกับ 1 หรือ 0 แต่จะต้องมีค่า npq อย่างน้อยที่สุด = 9 จึงจะถือว่าเป็นโค้งปกติโดยประมาณ จากข้อกำหนดดังกล่าวนี้ จะได้ว่าการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างของ x เป็นการแจกแจงปกติโดยประมาณ

$\therefore$ mean = np และ $S = npq$ ดังนั้นเราอาจทดสอบได้โดย

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{X} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad ....(3)$$

z เป็นการแจกแจงแบบโค้งปกติโดยประมาณ โดยมี $\bar{X} = 0$ และมี $\sigma^2 = 1$

---

[1]ดูภาคผนวก ฉ.

[2]ดูภาคผนวก ฉ.

ค่าประมาณนี้จะถูกต้องขึ้น ถ้ามีการแก้ไขให้เป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous) การแก้ไขนี้มีความสำคัญมาก เพราะการแจกแจงปกติใช้กับตัวแปรต่อเนื่อง (Continuous Variables) การแก้ไข้ให้เป็นแบบต่อเนื่องนี้ถือว่าความถี่ของ x ในสูตร (3) เป็นช่วง (Interval) มีขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนด้านละครึ่งหน่วย ดังนั้นการแก้ทำโดยใช้ความแตกต่างระหว่างค่าของ x ที่ได้จากค่าสังเกตได้ กับค่าของ x ที่เราคาดหวังว่าจะเป็น ลบด้วย 0.5 $\bar{X} = n_p$ ดังนั้นเมื่อ $X < \bar{X}$ เราบวก .05 เข้ากับ X และเมื่อ $X > \bar{X}$ เราเอา .05 ลบออกจาก X นั่นคือ

$$Z = \frac{(X \pm 0.5) - np}{\sqrt{npq}} \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

X+0.5 ใช้ในกรณีที่ $X < np$ และ X-0.5 เมื่อ $X > np$

ค่าของ Z ที่หาได้จากสูตร (4) เอาไปใช้กับการแจกแจงปกติที่มี mean = 0 และมี variance = 1 ดังนั้นค่านัยสำคัญของ Z สามารถใช้ค่าจากตาราง ข[1] จะให้ค่าความน่าจะเป็นทางเดียว ซึ่งเป็นไปตาม H_0 (ถ้าใช้การทดสอบแบบสองทาง ให้ใช้ค่า p เป็น 2 เท่าของค่าจากตาราง ข)

จะแสดงให้เห็นว่า ค่าที่ได้จะถูกต้องยิ่งขึ้น ในเมื่อ $p = \frac{1}{2}$, $n < 25$ เราสามารถใช้กับตัวอย่างข้างต้น ในกรณีที่ $n=18$, $x = 2$, $p = q = \frac{1}{2}$

ข้อมูลนี้ $X < np$ คือ $2 < 9$ จากสูตร (4)

$$Z = \frac{(2 + 0.5)-(18)(0.5)}{\sqrt{(18)(0.5)(0.5)}}$$

$$= -3.07$$

จากตาราง ข ค่า Z = -3.07 แบบความน่าจะเป็นทางเดียวภายใต้ H_0 = 0.0011 ซึ่งเป็นค่าความน่าจะเป็นอันเดียวกันกับการวิเคราะห์แบบอื่น ๆ ซึ่งใช้ตาราง

---

[1] ดูภาคผนวก ฉ.

ของความน่าจะเป็นนั้น ๆ โดยเฉพาะ

สรุปวิธีการในการทดสอบแบบไบโนเมียล ซึ่งสามารถลำดับขั้นต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. หาค่า n = จำนวนกรณีทั้งหมดที่สังเกตได้

2. หาค่าความถี่ที่เกิดขึ้นในแต่ละประเภท (Categories)

3. หาค่าความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นตาม H_0

(1) ถ้า $n \leq 25$ และ $p=q=\frac{1}{2}$ ก็ใช้ความน่าจะเป็นแบบทางเดียวจากตาราง ค[1] ได้ ตามค่าต่าง ๆ ของ x ถ้าเป็นแบบการทดสอบสองทาง ค่า p จะเป็นสองเท่าของค่าจากตาราง ค

(2) ถ้า $p \neq q$ การกำหนดความน่าจะเป็นตาม H_0 จะหาได้จากการใช้สูตร (2) และสามารถใช้ตาราง ค หาค่าสัมประสิทธิ์ของไบโนเมียล (Binomial Coefficient) ได้ในเมื่อ $n \leq 20$

(3) ถ้า $n > 25$ และค่า p มีค่าใกล้เคียงกับ 1 ก็สามารถทดสอบสมมุติฐานได้โดยใช้สูตร (4) และอาจใช้ตาราง ข[2] หาความน่าจะเป็นแล้วไปเปรียบเทียบกับค่า z จากการคำนวณจากสูตร ตาราง ข จะให้ค่าความน่าจะเป็นทางเดียว ถ้าเป็นการทดสอบแบบสองทาง ค่าความน่าจะเป็นต้องเป็น 2 เท่าของค่าในตาราง ค

ถ้าค่า p ที่ได้จากค่า x ที่สังเกตได้เท่ากันหรือน้อยกว่าค่าความน่าจะเป็น 2 เท่าของค่าในตาราง ค ก็ไม่ยอมรับ H_0

พลังของการทดสอบ (Power of the Test)

ยังไม่มีวิธีการที่ใช้ทางพารามิเตอร์อย่างใดที่จะใช้กับข้อมูลซึ่งจัดในแบบนามบัญญัติ (Nominal Scale) จึงไม่มีความหมายอะไรที่จะพูดถึงพลังของการทดสอบแบบไบโนเมียล

---

[1]ดูภาคผนวก ฉ.

[2]ดูภาคผนวก ฉ.

ในเมื่อใช้กับข้อมูลแบบนามบัญญัติ

ถ้าข้อมูลเป็นประเภทค่าต่อเนื่อง (Continuous Value) ที่ถูกแบ่งออกเป็น 2 ประเภท แล้วนำผลมาทดสอบแบบไบโนเมียล บางทีอาจจะทำให้เกิดผลเสียแก่ข้อมูลนั้นได้ ในกรณีเช่นนี้การทดสอบแบบไบโนเมียลจะมีพลังของการทดสอบ 95 % ในเมื่อ n=6 และจะต่ำสุด = $\frac{2}{\pi}$ = 63 %

11.2 การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (The Sign Test)

ลักษณะปัญหาและการใช้การทดสอบ

วิธีนี้ได้ชื่อมาจากความจริงที่ว่า มีการใช้เครื่องหมาย บวก(+) ลบ (-) มากกว่าที่จะวัดออกมาเป็นข้อมูลปริมาณ ใช้ได้ดีโดยเฉพาะในงานวิจัยที่ไม่อาจวัดปริมาณได้ โดยการจัดลำดับระหว่างสมาชิก 2 ตัว ในทุก ๆ คู่

วิธีนี้ใช้ได้กับกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่สัมพันธ์กัน เมื่อผู้วิจัยต้องการจะเห็นความแตกต่างระหว่าง เงื่อนไข 2 ประการ ข้อตกลงเบื้องต้นในการทดสอบวิธีนี้ก็คือตัวแปรที่พิจารณานั้นต้องมีการแจกแจงที่ต่อเนื่อง การทดสอบนี้ไม่พะวงข้อตกลงในเรื่องรูปของการแจกแจงหรือข้อตกลงที่ว่าตัวแปรทั้งหลายต้องมาจากประชากรกลุ่มเดียวกัน ความแตกต่างระหว่างคู่หนึ่งอาจมาจากประชากรที่ต่างกันในแง่ อายุ เพศ ความฉลาด ฯลฯ ต้องการแต่เพียงว่าในแต่ละคู่ผู้ทำการทดลองจะต้องจับคู่โดยถือตัวแปรภายนอกที่สำคัญดังกล่าวแล้วจึงจำต้องใช้วิธีจับคู่โดยลองซ้ำคนเดิม

วิธีการ (Method)

สมมุติฐานสูญคือ

$$P(X_A > X_B) = P(X_A < X_B) = \frac{1}{2}$$

เมื่อ X_A เป็นการตัดสินหรือคะแนนภายใต้เงื่อนไขอย่างหนึ่ง (หรือหลังการกระทำ)

X_B เป็นการตัดสินหรือคะแนนภายใต้เงื่อนไขอื่น (หรือก่อนการกระทำ)

นั่นคือ X_A และ X_B เป็นคะแนน 2 ชนิดที่ใช้ในการจับคู่ วิธีกล่าวถึง H_0 อีกวิธีหนึ่งก็คือความแตกต่างของมัธยฐานเป็น 0

การใช้การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย เราเน้นในเรื่องทิศทางของความแตกต่างระหว่างทุก ๆ X_{A_i} กับ X_{B_i} แล้วทำเครื่องหมายไว้ว่าความแตกต่างนั้นเป็น + หรือ - ภายใต้ H_0 เราคาดหวังว่าจำนวนคู่ซึ่ง $X_A < X_B$ จะเท่ากับจำนวนคู่ซึ่ง $X_A > X_B$ ถ้า H_0 เป็นจริง เราก็คาดหวังว่า ครึ่งหนึ่งของความต่างเป็น - อีกครึ่งหนึ่งเป็น + H_0 จะถูกปฏิเสธถ้ามีความแตกต่างของเครื่องหมายทั้งสองมากกว่า 2 - 3 วัน

กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก (Small Samples)

ความน่าจะเป็นรวมที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับจำนวนของ + และ - อาจหาได้โดยการแจกแจงแบบไบโนเมียล ที่ $p = q = \frac{1}{2}$ เมื่อ n = จำนวนคู่ ถ้าคู่ที่จับคู่กันไม่ต่างกัน (ต่างก็เป็น 0 จึงไม่มีเครื่องหมาย) ต้องตัดออกจากการวิเคราะห์ และ n ก็ลดลง ตาราง ข[1] ให้ค่าความน่าจะเป็นรวมซึ่งปรากฏภายใต้ H_0 ของค่าเล็กของ X สำหรับ $n \leq 25$ การใช้ตารางต้องใช้ X เป็นจำนวนเครื่องหมายน้อยกว่า

ตัวอย่างสมมุติว่ามี 20 คู่ด้วยกัน แต่ 16 คู่เป็นผลต่างอย่าง + อีก 4 คู่ต่างอย่าง - ในที่นี้ $n=20$, $X=4$ จึงใช้ตาราง ข. ได้ค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจง + และ - นี้มีค่าสูงสุดภายใต้ H_0 เป็น $p = .006$ (ทางเดียว)

การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (Sign Test) อาจทำได้ทั้งทางเดียวและสองทาง ทางเดียวใช้ทดสอบว่าเครื่องหมาย + หรือ - จะมีความถี่มากกว่ากัน สำหรับการทดสอบสองทางใช้ทดสอบว่าเครื่องหมายทั้งสองชนิดมีจำนวนต่างกันเท่านั้น สำหรับสองทางนี้ ค่า P ต้องเป็น 2 เท่าของค่าในตาราง ค. ของภาคผนวก

<u>ตัวอย่าง</u>

ในการทดสอบผลทางการพัฒนาของเด็กที่เกิดเมื่อพ่อไม่อยู่ ได้ลองสัมภาษณ์คู่สมรสที่พ่อบ้านต้องจากไปในสงคราม และบุตรคนแรกเกิดในระหว่างพ่อไม่อยู่บ้าน โดย

---

[1] ดูภาคผนวก ฉ.

แยกสอบถามพ่อและแม่ทีละคน โดยถามถึงเรื่องราวต่าง ๆ ของปีแรกที่ไม่พบพ่อ

1. สมมุติฐานศูนย์ (Null Hypothesis) H_0 : ความแตกต่างของมัธยฐานเป็น 0 นั่นคือความรู้สึกของพ่อที่เห็นว่าการที่ลูกเชื่อฟังมากกว่าแม่กับความรู้สึกของแม่ที่เห็นว่าลูกเชื่อฟังมากกว่าพ่อ มีเท่า ๆ กัน

H_1: มัธยฐานต่างกัน เป็น +

2. การทดสอบทางสถิติ (Statistical Test) ใช้การจัดอันดับด้วยตัวเลข (Rating Scale) เป็นเครื่องวัด ผลย่อมได้เพียงว่าทั้งคู่ (พ่อและแม่)มีค่าเป็น + หรือ – คู่สมรสถูกจัดเป็นแบบจับคู่ (Match) กันในแง่ที่ว่าทั้งคู่อภิปรายถึงเด็กคนเดียวกันในครอบครัวเดียวกัน การทดสอบแบบเครื่องหมายเหมาะสมเพราะการวัดเป็นไปในทางกลุ่มตัวอย่างสัมพันธ์กัน

3. ระดับความมีนัยสำคัญ (Significance Level)ให้ $\alpha = 0.05$, $n = 17$ คือจำนวนคู่สมรสที่ต้องจากกันในสงคราม (ค่า n อาจลดลงถ้าผลต่างคู่ใดเป็น 0)

4. การแจกแจงกลุ่มตัวอย่าง (Sampling Distribution) ค่าความน่าจะเป็นรวมของค่า x ซึ่งเล็กในการแจกแจงไบโนเมียล ที่ $p = q = \frac{1}{2}$ ได้จากตาราง ค[1]

5. ขอบเขตของการปฏิเสธ H_1 บอกทิศทางของการทดสอบ จึงใช้ทางเดียว ประกอบด้วยค่า x (x คือจำนวน – เพราะมีน้อย) ที่ความน่าจะเป็นรวมเกิดขึ้นภายใต้ $H_0 \leq 0.05$

6. การตัดสิน (Decision) จากตารางการจัดอันดับ เลข 1 แทนความเห็นสูงยิ่ง 5 แทนความเห็นต่ำสุด ซึ่งปรากฏผลดังตารางที่ 15

จากตารางมี 3 คู่ ที่แสดงผลต่างทิศทาง คือ ฮอลแมนส์ (Holmans) แมทิวส์ (Mathewses) และซูลส์ (Soules) หรือ $X_F < X_M$ มี 3 คู่ ที่ไม่มีผลต่าง คือ แฮทโลส์ (Hatlows) มาร์สโตนส์ (Marstons) และวากเนอร์ (Wagners)

---

[1]ดูภาคผนวก ฉ.

หรือ $X_F = X_M$ นอกนั้นอีก 11 คู่ แสดงผลต่างไปในทิศทางที่คาดหวังไว้

จากข้อมูล x = จำนวนเครื่องหมาย ที่น้อยคือ 3 และคู่ที่จับคู่เหลือเพียง 14 เพราะมีคู่ไม่ต่างกัน 3 คู่ จากตาราง ค. เมื่อ $n = 14$, $x \leq 3$ ทดสอบทางเดียว ความน่าจะเป็นในการเกิดภายใต้ H_0 คือ $p = 0.029$ ค่านี้อยู่ในขอบเขตของการปฏิเสธ ที่ $\alpha = 0.05$ ปฏิเสธที่ $\alpha = .05$ จึงไม่ยอมรับ H_0 และยอมรับ H_1 จึงสรุป

ตารางที่ 15 การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย

คู่สมรส	ความรู้สึกเกี่ยวกับความเชื่อฟังของลูก		ทิศทางของความแตกต่าง	เครื่องหมาย
	หญิง	ชาย		
Mr.and Mrs. Arnold	4	2	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Brown	4	3	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Bargman	5	3	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Ford	5	3	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Harlow	3	3	$X_F = X_M$	0
Mr.and Mrs. Holman	2	3	$X_F < X_M$	-
Mr.and Mrs. Irwin	5	3	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Marstone	3	3	$X_F = X_M$	0
Mr.and Mrs. Mathews	1	2	$X_F < X_M$	-
Mr.and Mrs. Moore	5	3	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Osborne	5	2	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Snyder	5	2	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Soules	4	5	$X_F < X_M$	-
Mr.and Mrs. Statle	5	2	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Wagner	5	5	$X_F = X_M$	0
Mr.and Mrs. Wolf	5	3	$X_F > X_M$	+
Mr.and Mrs. Wycoff	5	1	$X_F > X_M$	+

ได้ว่า การจากกันไปในสงคราม แม่มีความรู้สึกว่าลูกมีความเชื่อฟังมากกว่าที่พ่อมี

การซ้ำ

เมื่อค่าของคะแนนในแต่ละคู่เท่ากัน จะเรียกว่า "ซ้ำ" และตัดคู่ที่ซ้ำนี้ออก ดังนั้น n = จำนวนคู่ที่มีคะแนนต่างกันของคะแนนที่มีเครื่องหมาย

ความเกี่ยวข้องกับการกระจายแบบไบโนเมียล

ในการศึกษาเรื่องการทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย เราอาจคาดหวังภายใต้ H_0 ว่า ความถี่ของเครื่องหมาย + และ - เป็นแบบเดียวกับหัวและก้อย ในการโยนเหรียญปกติ 14 เหรียญ เทียบกับโยนเหรียญ 17 เหรียญ และเหรียญกลิ้งหายไป 3 เหรียญ จึงไม่นำมาวิเคราะห์ ความน่าจะเป็นในการได้เหรียญหงายหัว 3 เหรียญ และหงายก้อย 11 เหรียญ ได้จากการแจกแจง

$$\sum_{x=0}^{3} {}^{n}C_{x}\, p^{x} q^{n-x}$$

n = จำนวนเหรียญ

x = จำนวนเหรียญหงายหัว

จากสูตรนี้ได้

$$P(x) = \frac{{}^{14}C_0 + {}^{14}C_1 + {}^{14}C_2 + {}^{14}C_3}{2^{14}}$$

$$= \frac{1 + 14 + 91 + 364}{16284}$$

$$= 0.029$$

ซึ่งได้ค่าเท่ากับการอ่านค่าความน่าจะเป็นจากตาราง ก. ของภาคผนวก ฉ.

กลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ (Large Samples)

ถ้า $n > 25$ และ $p \to \frac{1}{2}$ อาจถือว่าการแจกแจงเป็นปกติได้ นั่นคือ

$$\text{Mean} = \mu_x = np = \frac{1}{2} n$$

$$\text{Standard Deviation} = \sigma_x = \sqrt{npq} = \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

ดังนั้น $Z = \dfrac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \dfrac{X - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$ ....(5)

เมื่อแก้ให้เป็นค่าต่อเนื่อง (Continuous Value) โดย ±0.5 ดังได้กล่าวแล้วใน สูตร (4) จะได้

$$Z = \frac{(X \pm 0.5) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{n}\sqrt{n}}$$ ....(6)

ให้ $X + 0.5$ เมื่อ $X < \frac{1}{2}n$ และ $X - 0.5$ เมื่อ $X > \frac{1}{2}n$ การหานัยสำคัญก็ต้องใช้ตาราง ข. ของภาคผนวกประกอบ ถ้าทดสอบสองทาง ค่า p ในตาราง ข. ของภาคผนวกต้องเป็น 2 เท่า

ตัวอย่างสำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่

สมมุติว่า เลือกกลุ่มตัวอย่างมาจากชุมชนหนึ่งได้จำนวน 100 คน ให้ตอบว่าควรให้มีการลงโทษเด็กมากขึ้นหรือน้อยลง แล้วฉายภาพยนต์ให้ดู จากนั้นก็ถามความเห็นใหม่ การศึกษานี้เป็นการศึกษาแบบ "ก่อน-หลัง"

1. สมมุติฐานสูญ (Null Hypothesis)

H_0 : ภาพยนต์ไม่มีผลต่อความเห็น

H_1 : ภาพยนต์มีผลต่อความเห็น

2. การทดสอบทางสถิติ (Statistical Test) ใช้ทดสอบโดยอาศัยเครื่องหมาย เพราะทดสอบข้อมูล 2 กลุ่มที่สัมพันธ์กัน และใช้อันดับ (Ordered Scale) ที่จัดได้จากความสัมพันธ์ของแต่ละคน ซึ่งแปลงมาเป็นเครื่องหมาย + และ - แล้วจะทดสอบเครื่องหมาย + และ - นี้ว่ามีความแตกต่างกันไหม

3. ระดับความมีนัยสำคัญ (Significant Level) ให้ $\alpha = 0.01$

n = จำนวนคู่ที่มีความต่างกัน

4. การแจกแจงกลุ่มตัวอย่าง (Sampling Distribution) ภายใต้ H_0 ที่คิดจากสูตร (6) เป็นค่าประมาณการแจกแจงปกติ เมื่อ $n > 25$ และ $P \to \frac{1}{2}$ ตาราง ข.

จะให้ค่าความน่าจะเป็นที่อาจเกิดขึ้นที่ชีดสุดของ x ของค่า z

5. ขอบเขตการปฏิเสธ (Rejection Region) H_1 ไม่บอกทิศทาง จึงใช้การทดสอบสองทาง ซึ่งมีค่า z ที่อาจเกิดภายใต้ $H_0 \leq$ (0.01)

6. สรุปผล (Conclusion) จากตารางที่ 16 ตารางแสดงความคิดเห็นของผู้ใหญ่ในการลงโทษเด็ก

ตารางที่ 16 แสดงการทดสอบโดยใช้เครื่องหมายของกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่

จำนวนผู้อยากให้ลงโทษก่อนดูภาพยนต์	จำนวนผู้อยากให้ลงโทษหลังดูภาพยนต์แล้ว: น้อยลง	มากขึ้น
มากขึ้น	59	7
น้อยลง	8	26

ตารางที่ 16 แสดงว่ามี 15 คน ที่การฉายภาพยนต์ไม่ก่อให้เกิดผล ส่วน 85 คน เกิดผล ถ้ามิใช่เปลี่ยนเพราะภาพยนต์ ความถี่ของพวกเปลี่ยนน่าจะเป็น $\frac{1}{2} \times 85 = 42.5$ เราใช้สูตร (6) หาค่า z ซึ่ง $x > \frac{1}{2}n$ $(59 > 42.5)$

$$z = \frac{(x \pm 0.5) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(59-0.5) - \frac{1}{2}(85)}{\frac{1}{2}\sqrt{85}}$$

$$= 3.47$$

จากตาราง ข.[1] ค่าความน่าจะเป็นของสองทางภายใต้ H_0 ของ $z \geq 3.47$ คือ $p = 2(0.0003) = 0.0006$ และ $P = 0.0006$ นี้ $< \alpha$ จึงปฏิเสธ H_0 รับ H_1

[1]ดูภาคผนวก ฉ.

แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงมีผลมาจากภาพยนต์ ตัวอย่างนี้ไม่เพียงแต่แสดงวิธีใช้การทดสอบโดยอาศัยเครื่องหมายเท่านั้น แต่ยังพยายามชี้ว่าโดยมากมักวิเคราะห์ข้อมูลแบบนี้กันผิดๆ เสมอ เราจะใช้วิธีการที่ข้อมูลเป็นอิสระต่อกันไม่ได้ (เพราะความจริงข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน) ตัวอย่างนี้อาจจะใช้การทดสอบแมกนีมาร์ (McNemar Test) ก็ได้ ดังนี้

$$\chi^2 = \frac{(/A-D/ - 1)^2}{A + D}$$

$$= \frac{(/59-26/-1)^2}{59+26}$$

$$= 12.05$$

จากตาราง ง[1] แสดงว่า $\chi^2 \geq 12.05$ ที่ df. = 1 ค่าความน่าจะเป็นในการเกิดภายใต้ H_0 เป็น $p < .001$ ซึ่งก็ไม่ขัดแย้งกับการทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย ความแตกต่างอยู่ที่ตาราง χ^2 มีค่าจำกัดเท่านั้นเอง[2]

สรุปวิธีการดำเนินงาน

1. กำหนดเครื่องหมายให้กับความเห็นที่แตกต่างกันของสมมุติฐานทุก ๆ คน
2. นับหา n ซึ่งคือจำนวนคู่ที่มีเครื่องหมายต่างกัน
3. หาค่าความน่าจะเป็นของการเกิดภายใต้ H_0 ของค่าที่สังเกตได้ที่สูงที่สุดของ X

3.1 ถ้า $n \leq 25$ ใช้ตาราง ค[3] ทางเดียว หาค่า P รวมที่ค่าเล็กของX

---

[1]ดูภาคผนวก ฉ.

[2]Sidney Siegel, Nonparametric Statistics (McGraw-Hill Book Company, Inc., c 1956), pp.36-42.

[3]ดูภาคผนวก ฉ.

x = จำนวนเครื่องหมายที่น้อยกว่า ถ้าทดสอบสองทาง p จากตาราง ค ต้องเป็น 2 เท่า

3.2 ถ้า n > 25 ใช้หาค่า z โดยใช้สูตร (6) ใช้ตาราง ค หาค่า P ทางเดียว ถ้าทดสอบสองทาง ค่า P ในตาราง ค ต้องเป็น 2 เท่า

ถ้าได้ค่า $P \leq \alpha$ ก็ปฏิเสธ H_0

พลังของการทดสอบ

การทดสอบโดยใช้เครื่องหมายมีพลัง ในการทดสอบ 95 % เมื่อ N=6 แต่จะลดลงเมื่อ N เพิ่ม และจะคงอยู่ 63 %

12. ความน่าจะเป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมตริก (The Hypergeometric Probability Model)

คุณสมบัติของความน่าจะเป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมตริกซึ่งมีที่คล้ายและที่ต่างกับแบบไบโนเมียล ดังนี้

1. ผลของการทดลองแต่ละครั้งแบ่งเป็น 2 ชนิด คือ ความสำเร็จและความไม่สำเร็จ

2. ความน่าจะเป็นในแต่ละการทดลองไม่คงที่

3. ผลของความสำเร็จขึ้นอยู่กับการทดลองแต่ละครั้ง

4. กำหนดจำนวนการทดลองแน่นอน

ข้อ 2 และข้อ 3 ต่างไปจากความน่าจะเป็นแบบไบโนเมียล เพราะความน่าจะเป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมตริกเกิดจากการทดลองที่แต่ละครั้งของการหยิบ ตัวอย่างจะไม่มีการวางซ้ำกลับที่เดิม จึงทำให้ความน่าจะเป็นในแต่ละการทดลองเปลี่ยนไป

โดยทั่ว ๆ ไป ความน่าจะเป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมตริกใช้ได้ดีเมื่อ

1. ทำการทดลองด้วยจำนวน N

2. เลือกจำนวนตัวอย่างขนาดสุ่ม n

3. ให้ k เป็นจำนวนลักษณะที่อาจจะไม่สำเร็จจากจำนวน N และต้องการความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จ x ในการทดลอง n ครั้ง จำนวน N, n และ k

คงที่ จำนวน X เป็นตัวแปรสุ่ม จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะได้จำนวน n คือ ${}^{N}C_{n}$ ต้องการจะได้จำนวนที่ไม่สำเร็จจริง ๆ เท่ากับ X ต้องชี้ให้เห็นว่า จำนวนที่ใช้ได้เท่ากับ n-x ต้องมาจากจำนวน N-k ทั้งหมด

จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะได้ x ที่ไม่สำเร็จ และn-x ที่สำเร็จเท่ากับ ${}^{k}C_{x}\ {}^{N-k}C_{n-x}$

ความน่าจะเป็นของจำนวนที่ไม่สำเร็จ X จากจำนวน n คือ

$$p(N,n,k,x) = \frac{{}^{k}C_{x}\ {}^{N-k}C_{n-x}}{{}^{N}C_{n}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความน่าจะเป็นในการหยิบลูกแอปเปิล 2 ผล หรือน้อยกว่า จากถุงใบหนึ่งที่มีแอปเปิล 6 ผล และส้ม 4 ผล ถ้าหยิบผลไม้ครั้งละ 5 ผล

<u>วิธีทำ</u> ตัวอย่างนี้เหมาะสมกับการแจกแจงไฮเปอร์จีออเมตริค เพราะเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นดังกล่าวทุกประการ

$\therefore N = 10,\ n = 5,\ k = 6$

$$\begin{aligned} P(X \le 2) = P(1 \le X \le 2) &= P(10,5,6,2) \\ &= P(10,6,5,2) \\ &= .261905 \end{aligned}$$ จากตาราง ฌ ภาคผนวก ฉ

โดยไม่ใช้ตารางคำนวณ ได้ดังนี้

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{4}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{42} + \frac{5}{21} = \frac{11}{42}$$

$= .261905$ ซึ่งมีค่าตรงกับการใช้ตาราง

13. การแจกแจงไบโนเมียลนิเสธ (Negative Binomial Distribution)

คุณสมบัติของความน่าจะเป็นแบบไบโนเมียลนิเสธ ซึ่งมีที่คล้ายและที่ต่างกับแบบไบโนเมียล ดังนี้

1. ผลของการทดลองแต่ละครั้งแบ่งเป็น 2 ชนิด คือ ความสำเร็จและความไม่สำเร็จ

2. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละการทดลองคงที่

3. แต่ละการทดลองเป็นอิสระต่อกัน

4. ทำการทดลองจนกระทั่งได้จำนวนความสำเร็จตามที่กำหนดไว้

เฉพาะข้อ 4 เท่านั้นที่ต่างไปจากความน่าจะเป็นแบบไบโนเมียล

ให้ N เป็นจำนวนการทดลองที่ทำซ้ำ ๆ กันจนกระทั่งได้ผลสำเร็จ c ครั้ง สำหรับความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จครั้งที่ c ในการทดลองครั้งที่ N ตัวแปรสุ่ม N เป็นไปได้ดังนี้คือ c, c+1, c+2,... คำว่า negative Binomial มาจากความจริงที่ว่า $b^*(N;c,p)$ เป็นเทอมหนึ่งในการกระจายของ $p^c(1-q)^{-c}$

ความน่าจะเป็นไบโนเมียลนิเสธคำนวณได้จากตารางไบโนเมียล และสูตรของไบโนเมียลนิเสธมีดังนี้

$$B^*(r;c,p) = \sum_{N=c}^{r} \binom{N-1}{c-1} p^c q^{N-c} = \sum_{X=c}^{r} \binom{r}{X} p^x q^{r-x}$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{c-1} \binom{r}{x} p^x q^{r-x}$$

$$= 1-B(c-1\ ;r,p)$$

<u>ตัวอย่าง</u> นักเรียนคนหนึ่งสอบข้อสอบแบบที่แต่ละข้อมีคำตอบย่อย 5 คำตอบ และให้เลือกตอบคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว โดยการสอบปากเปล่า เขาพยายามตอบคำถามจนได้คำตอบที่ถูก 5 ข้อ ให้หาความน่าจะเป็นก่อนที่เขาจะตอบคำถามข้อที่ 25 ถ้าเขาเดาทุกข้อ

<u>วิธีทำ</u> ตัวอย่างนี้เหมาะสมกับการแจกแจงไบโนเมียลนิเสธ เพราะเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นดังกล่าวทุกประการ

จำนวนคำถามที่ต้องการให้ได้ความสำเร็จ 5 ครั้ง เป็นตัวแปรที่สุ่ม ดังนั้นจึงใช้การแจกแจงแบบไบโนเมียลนิเสธด้วย $c=5,\ r=25,\ p=\frac{1}{5}$

$$\therefore B^*(25;5,\tfrac{1}{5}) = \sum_{N=5}^{25} \binom{N-1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^{N-5} \text{ หรือ } \sum_{N=5}^{25} b^*(N;5,\tfrac{1}{5})$$

$$= \sum_{x=5}^{25} \binom{25}{x} \left(\frac{1}{5}\right)^{x} \left(\frac{4}{5}\right)^{25-x} \quad \text{หรือ} \quad \sum_{x=5}^{25} b(x;25,\tfrac{1}{5})$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{4} \binom{25}{x} \left(\frac{1}{5}\right)^{x} \left(\frac{4}{5}\right)^{25-x}$$

$$= 1 - B\,(4;25,\ \tfrac{1}{5})$$

$$= 1 - .42067 \qquad \text{(จากตาราง ก. ภาคผนวก ฉ.)}$$

$$= .57733$$

14. การแจกแจงแบบมัลติโนเมียล (Multinomial Distribution)

การแจกแจงของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ 2 อย่าง เรียกว่า การแจกแจงแบบไบโนเมียล แต่ถ้ามีเหตุการณ์เกิดขึ้นมากกว่า 2 อย่าง เรียกว่าการแจกแจงแบบมัลติโนเมียล ซึ่งเป็นไปตามกฎต่อไปนี้

1. การทดลองประกอบด้วย n ครั้งที่คล้ายคลึงกัน

2. ผลของการทดลองแต่ละการทดลองอยู่ใน 1 ช่องของ k ช่อง หรือจำนวนชั้น

3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ปรากฏในการทดลองครั้งหนึ่งที่อยู่ในแต่ละช่องของ i คือ $P_i (i=1,2,\ldots, k)$ และเป็นอย่างเดียวกันทุก ๆ การทดลอง นั่นคือ

$$p_1+p_2+\ldots + p_k = 1$$

4. แต่ละการทดลองเป็นอิสระต่อกัน

5. จำนวนการทดลอง $n_i (i=1,2,3,\ldots,k)$ ปรากฏผลในช่อง i และ $n_1 + n_2 + \ldots+n_k = n$

พิจารณาจำนวนชั้น k ชั้น ที่เป็นอิสระต่อกันมีความน่าจะเป็นในแต่ละชั้นเป็น $p_1,p_2,\ldots,p_k$ ถ้ามีสิ่งที่สังเกตได้ n สิ่ง ที่ได้มาอย่างสุ่มและเป็นอิสระต่อกันแล้ว ความน่าจะเป็นที่ n_1 จะอยู่ในช่อง 1, n_2 จะอยู่ในช่อง 2 จนถึง n_k ในช่อง k ที่ $n_1+ n_2+ \ldots + n_k =n$ กำหนดโดย

$$\frac{n\,!}{n_1!\ n_2!\ldots n_k!} (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2}\ldots(p_k)^{n_k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ถ้าเขย่าลูกเต๋า 5 ครั้ง ให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้า 1 หน้า 2 และหน้าอื่น ๆ ที่ไม่ใช่หน้า 1 หรือหน้า 2

<u>วิธีทำ</u> ตัวอย่างนี้เหมาะสมกับการแจกแจงมัลติโนเมียล เพราะเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นดังกล่าวทุกประการ ดังนี้

1. เขย่าลูกเต๋าแต่ละครั้ง จะได้หน้า 1 หน้า 2 หรือไม่ใช่หน้า 1 หรือหน้า 2
2. ความน่าจะเป็น $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{1}{6}$ เท่ากันทุกครั้งในการเขย่า
3. การเขย่าแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน
4. เขย่าลูกเต๋า 5 ครั้ง ซึ่งเป็นจำนวนคงที่

$\therefore$ การแจกแจงมัลติโนเมียลเหมาะสมกับตัวอย่างนี้

$$x_1 = 1, \; x_2 = 2, \; x_3 = 3$$

ความน่าจะเป็นของหน้า 1 หน้า 2 และหน้าอื่น ๆ คือ

$$\frac{5!}{1!\,1!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จัดนักเรียน 15 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม ๆ ละ 5 คนเพื่อเล่นบาสเกตบอลล์ มีกี่วิธีในการจัดตั้งทีม

$$\text{จำนวนวิธี} = \binom{15}{5}\binom{15-5}{5}\binom{15-5-5}{5}$$

$$= \frac{15!}{5!\,5!\,5!} = 756,756 \text{ วิธี}$$

15. การแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson Distribution)

15.1 ประวัติ

ปัวซอง (Simeon Denis Poisson) (1781-1840) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส แรกทีเดียวได้ศึกษาเกี่ยวกับยา แต่ไม่สนใจกลับชอบศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ด้านวิจัยและการสอน รวมทั้งคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ อีกมาก เขาคิดสูตร

ปัวซองได้ในตอนต้นคริสตวรรษที่ 19 สูตรนี้ได้ตั้งชื่อตามชื่อเขา เพื่อเป็นการให้เกียรติ[1]

ความน่าจะเป็นแบบปัวซอง (The Poisson Probability Model) ใช้กับตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายเกี่ยวกับเวลา เช่น

จำนวนเครื่องยนต์เสียต่อเดือนในเมืองใหญ่ ๆ

จำนวนแบคทีเรียในการเพาะ

จำนวนเม็ดเลือกแดงในเลือด

จำนวนคำพิมพ์ผิดในกระดาษ 1 แผ่น

จำนวนอะตอมที่เกิดจากสารกัมมันตภาพรังสีต่อวินาที

จำนวนครั้งของโทรศัพท์ที่แต่ละคนรับต่อวัน

และจำนวนทหารของแต่ละกองทัพในประเทศปรัสเซียที่ถูกม้าเตะตายแต่ละปี ในระยะ 20 ปี[2] เป็นต้น

การหาความน่าจะเป็นไบโนเมียล บางครั้งเป็นเรื่องเสียเวลาในการคำนวณ แต่เราสามารถประมาณค่าที่ได้อย่างถูกต้องด้วยการแจกแจงสองอย่าง คือ การแจกแจงปกติและการแจกแจงปัวซอง เมื่อ n มีค่ามาก และ p มีค่าไม่เข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ ใช้การแจกแจงปัวซองประมาณค่า

การใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นประมาณการแจกแจงอื่น การแจกแจงทั้งสองต้องมีคุณลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะเราควรหวังว่าทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงทั้งสองเท่ากัน หรือเกือบเท่ากัน เช่น ถ้าเราต้องการประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปัวซอง ค่าเฉลี่ยของปัวซอง ($\mu = \lambda$) ควรให้มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของไบโนเมียล ($\mu = np$) นั่นคือ $\mu = np = \lambda$ และความ

---

[1]Encyclopedia Britannica, (Vol.10), op.cit., p.126

[2]William C. Guenther, Concepts of Statistical Inference, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965), p.52.

แปรปรวนมีค่าเท่ากับ np

การแจกแจงปัวซอง มีที่ใช้อย่างกว้างขวาง อธิบายที่มาได้ 2 แหล่งด้วยกันดังนี้[1]

15.2 การแจกแจงปัวซองเป็นลิมิตหรือค่าจำกัดของการแจกแจงไบโนเมียล[2] จะใช้สูตร $f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$

สูตรนี้ใช้ได้กับค่า x ที่เป็นศูนย์ และเลขจำนวนเต็มบวก จะให้ค่าโดยประมาณเท่ากับความน่าจะเป็นโดยสูตรไบโนเมียล ถ้า n มีค่ามาก และ np มีค่าน้อย ($np < 5$) การแจกแจงปัวซองจะให้ค่าใกล้เคียงกับการแจกแจงไบโนเมียล เช่น ไบโนเมียลที่มี $n = 40$, $P = 0.02$ คือ

$$f(x) = {}^{40}C_x(0.02)^x(0.98)^{40-x}$$

สำหรับการแจกแจงแบบปัวซอง $\lambda = np = 0.8$ ความน่าจะเป็นคิดเป็นราย ๆ ได้โดยใช้สูตรไบโนเมียล และสำหรับการแจกแจงปัวซองอ่านได้จากตาราง จ ของภาคผนวก ฉ เปรียบเทียบความน่าจะเป็นไบโนเมียลสำหรับ $n=40$, $p=0.02$ และความน่าจะเป็นปัวซองสำหรับ $\lambda = 0.8$

การแจกแจงปัวซองจะประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลได้ดีขึ้นเมื่อ n มีค่ามาก ($n \to \infty$) เพราะว่าพารามิเตอร์ λ เป็นค่าคงที่ ขณะที่ n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $\lambda = np$ แสดงว่า p ต้องลดลง และ p ต้องมีค่าเล็กพอที่จะประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลได้ดี นั่นคือ $p \leq .10$ และ $n \geq 30$ จึงจะเป็นการประมาณค่าที่ดี แต่ตัวอย่างต่อไปนี้ถึงแม้จะมีขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 30 ก็ยังให้การประมาณค่าที่ดีได้

สมมุติว่าต้องการประมาณค่าความน่าจะเป็นของผลิตภัณฑ์ที่ใช้ไม่ได้จำนวนจาก 0 ถึง 13 ชิ้น ในขนาดตัวอย่าง .20 ด้วย $p = .10$ ให้ $\lambda = np$ ฉะนั้น

---

[1] ดับเบิลยู เจ ดิกสัน และ เอฟ เจ แมสซี่, สถิติวิเคราะห์ แปลโดยนราศรี ผดุงชีวิต (กรุงเทพฯ โรงพิมพ์ ส.ศิลป, 2510), หน้า 526.

[2] ดูภาคผนวก ข.

ตารางที่ 17 การแจกแจงปัวซองที่เป็นลิมิตหรือค่าจำกัดของการแจกแจงไบโนเมียล

x	${}^{40}C_x\ (0.02)^x(0.98)^{40-x}$	$(0.8)^x e^{-0.8}/x!$
5 หรือมากกว่า	0.001	0.001
4	0.007	0.008
3	0.037	0.038
2	0.145	0.144
1	0.364	0.360
0	0.446	0.449
	1.000	1.000

ตารางที่ 18 แสดงการประมาณค่าการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปัวซอง ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 30

x	$P(x) = {}^{20}C_x(.10)^x(.90)^{20-x}$	$P(x) = \frac{e^{-2.0}(2.0)^x}{x!}$
0	0.1216	0.1353
1	0.2702	0.2707
2	0.2852	0.2707
3	0.1901	0.1804
4	0.0898	0.0902
5	0.0319	0.0361
6	0.0089	0.0120
7	0.0020	0.0034
8	0.0004	0.0009
9	0.0001	0.0002

$\lambda = 20(.10) = 2.0$ ความน่าจะเป็นไบโนเมียลและปัวซองดังแสดงในตารางที่ 17

ตัวอย่างที่ 1 สมมุติว่าในการสร้างข้อสอบจำนวนมาก และทราบว่าสัดส่วนของข้อสอบที่ใช้ไม่ได้คือ $p = 0.01$ เลือกกลุ่มตัวอย่างข้อสอบ 100 ข้อ ให้หาความน่าจะเป็นที่มีข้อสอบใช้ไม่ได้ในตัวอย่างนี้ k ข้อ โดยการใช้การแจกแจงไบโนเมียล จะได้ว่า

$$b(k;n=100,p=0.01)=\binom{100}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}$$

ถ้าประมาณด้วยการแจกแจงปัวซอง จะได้ดังนี้

$$p(k;\ \lambda=np=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

โดยใช้ตาราง เช่น $k = 2$ จะได้ $b(2, 100, 0.01) = 0.1839$

$$p(k=2;\ \lambda=1) = 0.1839$$

แสดงว่าความน่าจะเป็น = 0.1839 ที่จะมีข้อสอบที่ใช้ไม่ได้ 2 ข้อ ในตัวอย่างข้อสอบจำนวน 100 ข้อ

ตัวอย่างที่ 2 ในบรรดานักเรียน 1000 คนให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียน k คน จะมีวันเกิดวันเดียวกัน โดยการใช้ความน่าจะเป็นไบโนเมียล จะได้ว่า

$$b(k;n = 1000,\ p = \frac{1}{365}) = \binom{1000}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}$$

แต่ถ้าใช้การประมาณค่าด้วยปัวซอง $\lambda = np = (1000)\left(\frac{1}{365}\right) = 2.7397$

จากตาราง จ. ของภาคผนวก ฉ.

$$P(x=0,\ \lambda = 2.74) = 0.067$$

$$P(x=1,\ \lambda = 2.74) = 0.181$$

$$P(x=2,\ \lambda = 2.74) = 0.245$$

จากตาราง จ. มีค่าจาก 2.7 ถึง 2.8 จึงใช้ $\lambda = 2.7$ และค่าความน่าจะเป็นเป็นค่าประมาณ

ดังนั้นความน่าจะเป็นมีค่าประมาณ 0.181 (หรือ 18.1 เปอร์เซ็นต์) ที่จะมีนักเรียนมีวันเกิดตรงกัน

15.3 การแจกแจงปัวซองที่มาจากทฤษฎีความน่าจะเป็น[1]

เราพิจารณาระยะเวลา t (อาจจะเป็นวินาที วัน หรือ สัปดาห์) ซึ่งมี (หรือไม่มี) เหตุการณ์ที่เราสนใจเกิดขึ้น โดยสมมุติว่าการเกิดของเหตุการณ์ในช่วงนั้นเป็นอิสระต่อกัน และเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นยาก[2] (Rare Event) การคำนวณหาความน่าจะเป็นปัวซองได้จากสูตร

$$P(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$e = 2.71828$$

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่งไม่ซ้อนกับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาอื่น

2. ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้นๆจะเกิดขึ้นเป็นสัดส่วนกับช่วงเวลาเพียงอย่างเดียว

3. ความน่าจะเป็นที่มีเหตุการณ์ 2 อย่างหรือมากกว่าเกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้นๆ ใด ๆ จะมีค่าน้อยมาก (โดยกำหนดให้ช่วงเวลาเล็กมาก ๆ) และอาจตัดทิ้งได้

4. เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นไม่ขึ้นกับขณะเวลา แต่ขึ้นกับช่วงเวลาเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

---

[1] ดูภาคผนวก ง.

[2] Spiegel, op.cit., p.124.

คุณสมบัติบางประการของการแจกแจงปัวซอง[1] มีดังนี้

1. มัชฌิม[2] (Mean) $\mu = \lambda$
2. ความแปรปรวน[3] (Variance) $\sigma^2 = \lambda$
3. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) $\sigma = \sqrt{\lambda}$
4. โมเมนต์สัมประสิทธิ์ของความเบ้ (Moment Coefficient of Skewness) $\alpha_3 = 1/\sqrt{\lambda}$
5. โมเมนต์สัมประสิทธิ์ของความโด่ง (Moment Coefficient of Kurtosis) $\alpha_4 = 3+1/\lambda$

ค่าของ P(x) ของการแจกแจงปัวซองสามารถคำนวณโดยตรงหรือหาได้จากตารางในหนังสือสถิติส่วนมาก ตาราง จ. ในภาคผนวก ฉ. ให้ค่าความน่าจะเป็น P(x) ที่สมนัยกับค่า λ จาก λ = .005 ถึง λ = 8.0 เช่น จำนวนคำพิมพ์ผิดในกระดาษ 1 หน้า เป็นไปตามกฎความน่าจะเป็นปัวซอง ค่าความน่าจะเป็นที่กำหนด λ = 3.8 ในตาราง จ. มีค่าสมนัยกับความถี่สัมพันธ์จากการเกิดขึ้นจริงในตารางที่ 18 ตัวอย่าง เช่น ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ 1 ครั้ง จากตาราง จ. ของภาคผนวก ฉ. คือ P(x) = .085 ความถี่ที่สังเกตได้คือ 0.08 ค่าความถี่ทั้ง 2 ใกล้เคียงกันมาก ส่วนค่าอื่นนอกจากนี้ก็มีค่าใกล้กันมาก ดังภาพที่ 12

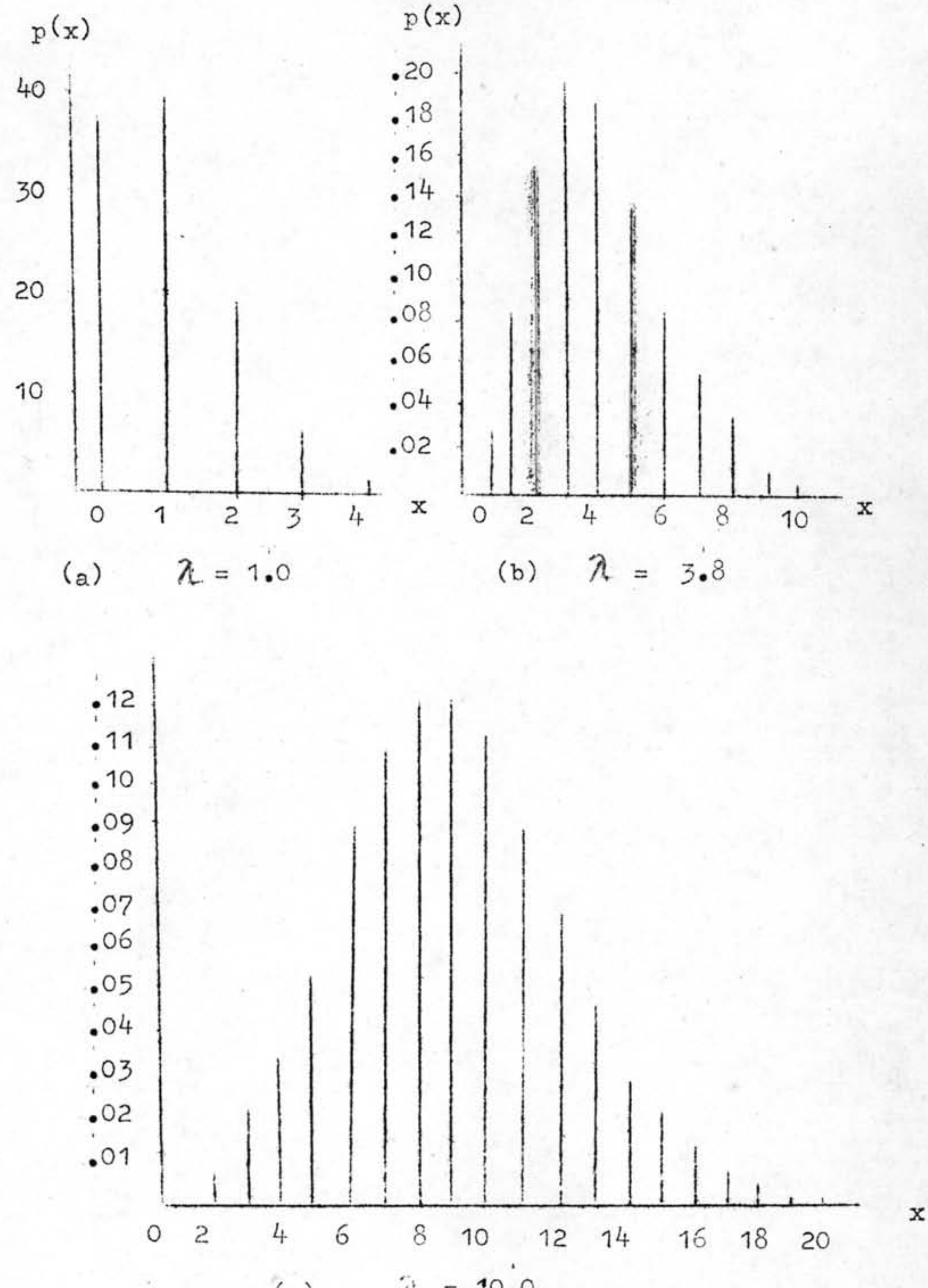
---

[1]Spiegel, loc.cit.

[2]ดูภาคผนวก ค.

[3]ดูภาคผนวก ค.

ภาพที่ 12 การแจกแจงปัวซอง : $P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x\,!}$



(a) $\lambda = 1.0$ (b) $\lambda = 3.8$

(c) $\lambda = 10.0$

ตารางที่ 19 การแจกแจงปัวซองที่มาจากทฤษฎีความน่าจะเป็น

จำนวนความสำเร็จ	ความน่าจะเป็นจากการคำนวณ	$P(x)= \frac{e^{-3.8}(3.8)^x}{x\,!}$ จากตาราง
0	.010	.0224
1	.080	.0850
2	.190	.1615
3	.230	.2046
4	.170	.1944
5	.150	.1477
6	.080	.0936
7	.030	.0508
8	.030	.0241
9	.020	.0102
10	.010	.0039
11	.000	.0013
12	.000	.0004
13	.000	.0001

ถ้าเราตรวจสอบคุณลักษณะของการแจกแจงปัวซองโดยการใช้ค่า $P(x)$ ในตารางที่ 19 ดูภาพที่ 12 (a) การแจกแจงปัวซองเบ้ไปทางขวา ค่า x เป็นบวกและไม่มีค่าต่ำกว่าศูนย์ เมื่อ λ มีค่าไม่ใกล้ศูนย์นัก การแจกแจงปัวซองจะมีรูปสมมาตร

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จำนวนทหารปรัสเซียที่ถูกม้าเตะตายจากบันทึกของกองทหาร 10 กอง ในเวลา 20 ปี[1] ดังตารางที่ 20

ตารางที่ 20 แสดงการทดสอบโดยใช้การแจกแจงปัวซอง

X	N_x	$p(x; \lambda = 0.60)$	N_p
0	109	0.55	110
1	65	0.32	64
2	22	0.10	20
3	3	0.02	4
4	1	0.003	0.6
5	0	0.0004	0
	200		198.6

เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นนี้เกิดในช่วงเวลาต่อเนื่องกัน ความน่าจะเป็นของทหารที่ตายปีต่อน้อยมาก

แบ่งช่วง (ต่อปีต่อกองทหาร) เป็นช่วงย่อย n มากมาย ความน่าจะเป็นที่จะเกิดมากกว่า 1 รายมีน้อย และการเกิดเหตุการณ์ในแต่ละช่วงย่อยไม่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงอื่น จึงใช้การทดสอบปัวซองด้วย

$$p(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^x}{x!}$$

[1]Yamane, <u>op.cit.</u>, pp.601-2.

x = จำนวนทหารที่ตายในช่วงที่กำหนดให้ (ต่อปีต่อกองทหาร)

λt= จำนวนทหารตายโดยเฉลี่ย ในช่วงเวลาที่กำหนดให้

t = ช่วงเวลาที่กำหนดให้ (ต่อปีต่อกองทหาร)

ตัวอย่างนี้ต้องประมาณค่า λt จำนวนทหารที่ตายคือ

$$T = N_1+2N_2+3N_3+4N_4+5N_5$$

$$= 65 + 2x22+3x3+4x1+5x0 = 122$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของทหารตายต่อปีต่อกองคือ

$$\lambda t = \frac{T}{N} = \frac{122}{200} = 0.61$$

$$P(x; \lambda=0.61) = \frac{e^{-0.61}(0.61)^x}{x!}$$

หาค่าความน่าจะเป็นในตาราง จ. ภาคผนวก ฉ. เพราะว่าในตารางไม่มีค่า $\lambda = .61$ จึงใช้ $\lambda = .60$ เป็นค่าประมาณ เช่น ความน่าจะเป็นของ $x = 1$ คือ 0.32

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> นักเรียนจำนวน 1,000 คน ได้รับการทดสอบเกี่ยวกับการสะกดตัวหนังสือ

T หมายถึงจำนวนตัวสะกดผิดทั้งหมด

N_x คือ จำนวนนักเรียนสะกดคำผิด x คำ

ผลปรากฏในตารางที่ 21 ให้หาความน่าจะเป็นที่นักเรียนสะกดคำผิด x คำ

$$\lambda = \frac{T}{N} = \frac{2980}{1000} = 2.98$$

จากการแจกแจงปัวซอง ความน่าจะเป็นที่นักเรียนจะสะกดคำผิด x คำคือ

$$p(x; 2.98) = \frac{e^{-2.98}(2.98)^x}{x!}$$

ความน่าจะเป็นหาได้จากตาราง จ. ของภาคผนวก ฉ. เพราะว่าตาราง จ. ไม่มีค่า $\lambda = 2.98$ จึงใช้ $\lambda = 3.0$ เป็นค่าประมาณ

ตารางที่ 21 การทดสอบปัวซอง

X	N_x	xN_x	P(x; 2.98)	N_p(x;2.98)
0	50	0	0.050	50
1	150	150	0.149	149
2	220	440	0.224	224
3	230	690	0.224	224
4	170	680	0.168	168
5	100	500	0.101	101
6	50	300	0.050	50
7	20	140	0.022	22
8	10	80	0.008	8
9	0	0	0.003	3
	1000	2980		999

16. การประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซองด้วยความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

อาศัย Central Limit Theorem เมื่อ n ใหญ่พอ Y จะแจกแจงเข้าใกล้ปกติ โดยมีมัชฌิม $n\lambda$ และความแปรปรวน $n\lambda$ จึงสามารถใช้การแจกแจงปกติประมาณค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซองได้ โดยที่

$$P(Y=t) = P(Z = \frac{t-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}})$$

เนื่องจากการแจกแจงปัวซองเป็นการแจกแจงตัวแปรจำนวนเต็ม เพื่อให้การ

ประมาณค่าเหมาะสมยิ่งขึ้น จึงมีการแก้เพื่อให้ต่อเนื่อง เช่นเดียวกับเมื่อประมาณการแจกแจงไบโนเมียลด้วยการแจกแจงปกติ

การประมาณการแจกแจงปัวซองด้วยการแจกแจงปกติ จะดีขึ้นเมื่อ $n\lambda$ มีค่ามากขึ้น ดังนั้น ถ้า λ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ร่วมของตัวแปร X_i มีค่าน้อยแล้ว จำนวนตัวแปร X_i ซึ่งรวมเป็นตัวแปร Y จะต้องมีมากพอ นั่นคือ ถ้า λ เล็ก n ต้องใหญ่ แต่ถ้า λ ค่อนข้างใหญ่ n ก็ลดลงได้

การประมาณนี้ ถือว่าเหมาะสมเมื่อ $n\lambda \geqslant 10$ และการประมาณในส่วนใกล้ศูนย์กลางของการแจกแจง จะเชื่อถือได้มากกว่าในส่วนปลายของการแจกแจง[1]

<u>ตัวอย่าง</u> แผนกอนามัยของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง พบว่า มีนิสิตเป็นบาดทะยักโดยเฉลี่ยแล้ว 5 รายต่อเดือน และมีเหตุผลเพียงพอที่จะถือว่าการเป็นบาดทะยักของนิสิตในแต่ละเดือนในปีการศึกษาหนึ่งเป็นอิสระ ให้หาความน่าจะเป็นที่จะมีนิสิตเป็นบาดทะยักในปีการศึกษานี้

ก. 40 ถึง 50 ราย

ข. 45 ราย[2]

ให้จำนวนนิสิตที่เป็นบาดทะยักในปีการศึกษานี้ $= Y = \sum_{i=1}^{9} X_i = 45$

Y ย่อมเป็นตัวแปรปัวซอง ซึ่งมีมัชฌิม = (9)(5) = 45 และความแปรปรวน = 45

ก. ความน่าจะเป็นที่จะมีนิสิตเป็นบาดทะยักในปีการศึกษานี้ ระหว่าง 40-50 คน

$$P(40 \leq Y \leq 50) = P\left(\frac{39.5-45}{\sqrt{45}} \leq Z \leq \frac{50.5-45}{\sqrt{45}}\right)$$

---

[1] William S. Peters and George W. Summers, <u>Statistical Analysis for Business Decisions.</u> (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1968), p.87.

[2] Larson, <u>op.cit.</u>, p.191.

$= P(-.82 \leq Z \leq .82)$

$= P(Z = .82) - P(Z = -.82)$

$= .5878$

ถ้าคำนวณจากการแจกแจงปัวซองโดยตรง จะได้ความน่าจะเป็น = .5879

ข. ความน่าจะเป็นที่จะมีนิสิตเป็นบาดทะยัก 45 คน

$$P(Y=45) = P\left(\frac{44.5-45}{\sqrt{45}} \leq Z \leq \frac{45.5-45}{\sqrt{45}}\right)$$

$= P(-.0745 \leq Z \leq .0745)$

$= P(Z = .0745) - P(Z=-.0745)$

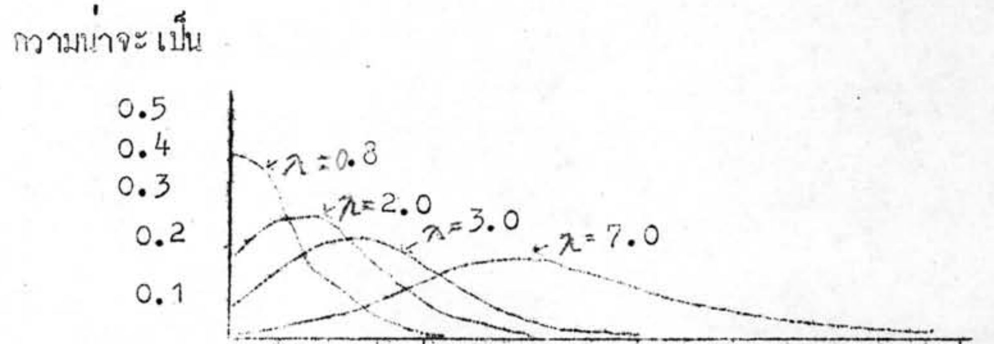
$= .0558$

ถ้าคำนวณจากการแจกแจงปัวซองโดยตรง จะได้ความน่าจะเป็น = .0594

กราฟของการแจกแจงปัวซองสำหรับค่า λ หลาย ๆ ค่า คือ λ = 0.8,1,2,3 และ 7

ภาพข้างล่างนี้เป็นกราฟของความน่าจะเป็นของ λ ดังกล่าว ค่าความน่าจะเป็นไม่ต้องบวกสะสม เมื่อ $\lambda = 2$ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงปัวซอง = 2 ด้วย

ภาพที่ 13 แสดงกราฟการแจกแจงปัวซอง เมื่อ λ = 0.8,2,3, และ 7



ตารางที่ 22 แสดงค่า = 0.8, 1, 2, 3, และ 7

x	0.8	1.0	2.0	3.0	7.0
0	0.45	0.37	0.14	0.05	0.00
1	0.36	0.37	0.27	0.15	0.01
2	0.14	0.18	0.27	0.22	0.02
3	0.04	0.06	0.18	0.22	0.05
4	0.01	0.02	0.09	0.17	0.10
5			0.04	0.10	0.13
6			0.01	0.05	0.15
7				0.02	0.15
8				0.01	0.15
9					0.10
10					0.07
11					0.05
12					0.03
13					0.01
14					0.00

λ - 0.8 โค้งการแจกแจงเป็นรูปตัวเจกลับ ถ้า $\lambda > 1$ กราฟเหล่านั้นมีการแจกแจงเข้าใกล้การแจกแจงปกติเมื่อ λ เพิ่มขึ้น

เมื่อ λ มีค่าน้อย ความน่าจะเป็นของค่า x (น้อย) เช่น x = 0,1 มีค่ามาก ขณะที่ x เพิ่ม ความน่าจะเป็นของ x ลดลงอย่างเร็ว ค่า $\lambda < 1$ ความน่าจะเป็นของ x > 1 มีค่ามาก.