บทที่ 4

การวิเคราะห์และการสร้างรูปแบบการพยากรณ์

เนื่องจากการพยากรณ์ในการวิจัยครั้งนี้แบ่งเป็น 2 ตอน

1. เป็นการพยากรณ์อัตราการเข้าเรียนในระดับประถมศึกษา และจำนวนนักเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ของแต่ละอำเภอ

2. เป็นการพยากรณ์จำนวนนักเรียนและจำนวนนักเรียนจำแนกตามชั้นปีของแต่ละโรงเรียนภายในอำเภอ

ดังนั้นในการวิเคราะห์และการสร้างรูปแบบการพยากรณ์จึงจำเป็นต้องแยกกล่าวโดยละเอียดเป็นตอน ๆ ไป

<u>การวิเคราะห์และการสร้างรูปแบบการพยากรณ์อัตราการเข้าเรียนในระดับประถมศึกษา และจำนวนนักเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ของแต่ละอำเภอ</u>

1. การพยากรณ์อัตราการเข้าเรียนในระดับประถมศึกษาในอนาคต อาศัยข้อมูลเกี่ยวกับอัตราการเข้าเรียนในอดีตที่ผ่านมาตั้งแต่ปีการศึกษา 2517 ถึง 2521 ซึ่งอัตราการเข้าเรียนคำนวณได้จากสูตร

$$\text{อัตราการเข้าเรียน (Admission rate)} = \frac{\text{จำนวนนักเรียน ป. 1}}{\text{จำนวนประชากรที่มีอายุครบเกณฑ์เข้าเรียน}}$$

คือ อัตราการเข้าเรียน ป. 1

ข้อมูลจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ของอำเภอหาได้จากผลรวมของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนทั้งหมดภายในอำเภอ แต่ข้อมูลจำนวนประชากรที่มีอายุครบเกณฑ์เข้าเรียนในปีการศึกษา 2517 ถึง 2521 ไม่สามารถรวบรวมมาได้ จึงจำเป็น

ต้องคำนวณหาจำนวนประชากรอายุครบเกณฑ์เข้าเรียนในปีการศึกษาดังกล่าว ใช้เกณฑ์ 7 ปีบริบูรณ์ โดยอาศัยข้อมูลจำนวนประชากรกลุ่มอายุต่าง ๆ ในปีสำรวจ หรือปีฐาน คือ ปี 2522 ประกอบกับค่าอัตราการย้ายเข้า อัตราการย้ายออก และอัตราการตาย โดยถือว่าอัตราดังกล่าวมีค่าคงเดิมทั้งในอดีตและปัจจุบันตามข้อสมมุติเบื้องต้นในการวิจัย เนื่องจากอัตราการย้ายเข้า อัตราการย้ายออก และอัตราการตายของกลุ่มอายุใด ๆ เป็นอัตราที่คิดตั้งแต่เริ่มย่างเข้าสู่กลุ่มอายุนั้น จนถึงมีอายุครบกลุ่มอายุนั้นบริบูรณ์ เช่น อัตราการย้ายเข้า อัตราการย้ายออก และอัตราการตายของกลุ่มอายุ 4 ปี เป็นอัตราที่คิดตั้งแต่เริ่มย่างเข้าอายุ 4 ปี จนถึงมีอายุ 4 ปีบริบูรณ์ ดังนั้น สูตรทั่วไปเพื่อใช้คาดคะเนจำนวนประชากรกลุ่มอายุต่าง ๆ คือ

$$P^{y+1}_{A+1} = P^{y}_{A}+(P^{y}_{A}\cdot I_{A+1}/1000)-(P^{y}_{A}\cdot E_{A+1}/1000)-(P^{y}_{A}\cdot D_{A+1}/1000)$$

y = ช่วงระยะเวลา (ปี)

A = กลุ่มอายุ

I = อัตราการย้ายเข้าต่อประชากร 1000 คน

E = อัตราการย้ายออกต่อประชากร 1000 คน

D = อัตราการตายต่อประชากร 1000 คน

P = ประชากร

ประชากรกลุ่มอายุ 7 ปี ในปี 2517 จะมีอายุ 8 ปี ในปี 2518 9 ปี ในปี 2519 10 ปี ในปี 2520 11 ปี ในปี 2521 12 ปี ในปี 2522 โดยในแต่ละปีจะเกิดการเคลื่อนไหวของประชากร ซึ่งได้แก่การย้ายเข้า ย้ายออก ตาย ของแต่ละกลุ่มอายุ เป็นผลทำให้จำนวนประชากรแต่ละกลุ่มอายุเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม และเนื่องจากปีสำรวจ คือ ปี 2522 จึงมีข้อมูลของจำนวนประชากรกลุ่มอายุ 12 ปี ซึ่งก็คือประชากรที่เกิดในปี 2510 อีกทั้งมีข้อมูลเกี่ยวกับอัตราการย้ายเข้า อัตราการย้ายออก และอัตราการตายของแต่ละกลุ่มอายุ จึงสามารถคำนวณหาจำนวนประชากรกลุ่มอายุ 7 ปี ดังนี้

$$P_7^{17}+(P_7^{17}\cdot I_8/1000)-(P_7^{17}\cdot E_8/1000)-(P_7^{17}\cdot D_8/1000) = P_8^{18}$$

$$P_8^{18}-(P_8^{18}\cdot I_9/1000)-(P_8^{18}\cdot E_9/1000)-(P_8^{18}\cdot D_9/1000) = P_9^{19}$$

$$P_9^{19}+(P_9^{19}\cdot I_{10}/1000)-(P_9^{19}\cdot E_{10}/1000)-(P_9^{19}\cdot D_{10}/1000) = P_{10}^{20}$$

$$P_{10}^{20}+(P_{10}^{20}\cdot I_{11}/1000)-(P_{10}^{20}\cdot E_{11}/1000)-(P_{10}^{20}\cdot D_{11}/1000) = P_{11}^{21}$$

$$P_{11}^{21}+(P_{11}^{21}\cdot I_{12}/1000)-(P_{11}^{21}\cdot E_{12}/1000)-(P_{11}^{21}\cdot D_{12}/1000) = P_{12}^{22}$$

เพราะฉะนั้น

$$P_7^{17} = \frac{P_{12}^{22}}{(1+I_8/1000-E_8/1000-D_8/1000)(1+I_9/1000-E_9/1000-D_9/1000)\ldots(1+I_{12}/1000-E_{12}/1000-D_{12}/1000)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P_7^{18} = \frac{P_{11}^{22}}{(1+I_8/1000-E_8/1000-D_8/1000)(1+I_9/1000-E_9/1000-D_9/1000)\ldots(1+I_{11}/1000-E_{11}/1000-D_{11}/1000)}$$

โดย P_{11}^{22} คือ ประชากรกลุ่มอายุ 11 ปี เมื่อปี 2522 หรือประชากรที่เกิดปี 2511

$$P^{19}_{7} = \frac{P^{22}_{10}}{(1+I_8/1000-E_8/1000-D_8/1000)(1+I_9/1000-E_9/1000-D_9/1000)(1+I_{10}/1000-E_{10}/1000-D_{10}/1000)}$$

โดย P^{22}_{10} คือ ประชากรกลุ่มอายุ 10 ปี เมื่อปี 2522 หรือประชากรที่เกิดปี 2512

$$P^{20}_{7} = \frac{P^{22}_{9}}{(1+I_8/1000-E_8/1000-D_8/1000)(1+I_9/1000-E_9/1000-D_9/1000)}$$

โดย P^{22}_{9} คือ ประชากรกลุ่มอายุ 9 ปี เมื่อปี 2522 หรือประชากรที่เกิดปี 2513

$$P^{21}_{7} = \frac{P^{22}_{8}}{(1+I_8/1000-E_8/1000-D_8/1000)}$$

โดย P^{22}_{8} คือ ประชากรกลุ่มอายุ 8 ปี เมื่อปี 2522 หรือประชากรที่เกิดปี 2514

เมื่อคำนวณหาจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และจำนวนประชากรที่มีอายุครบเกณฑ์เข้าเรียน ในปีการศึกษา 2517 ถึง 2521 ได้ ก็สามารถคำนวณหาอัตราการเข้าเรียนในปีการศึกษาดังกล่าวได้

การพยากรณ์อัตราการเข้าเรียนในอนาคตจะอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มข้อมูลเหล่านี้ จึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคการพยากรณ์เชิงปริมาณประเภทที่ใช้พฤติกรรมในอดีตพยากรณ์พฤติกรรมต่าง ๆ ในอนาคต ค่าอัตราการเข้าเรียนในปี 2517 – 2521 เป็นค่าประมาณที่เกิดขึ้นจากการใช้

ค่าประมาณของจำนวนประชากรอายุครบเกณฑ์เข้าเรียนในปีการศึกษาดังกล่าว จึงไม่สามารถนำมาวิเคราะห์เพื่อสรุปว่าเป็นอนุกรมเวลาคงที่หรือไม่คงที่ได้ ดังนั้น ไม่เหมาะสมที่จะใช้เทคนิคการพยากรณ์อนุกรมเวลาบ๊อกซ์และเจนกินซ์ นอกจากนี้การพยากรณ์อัตราการเข้าเรียนไม่ได้เกี่ยวข้องกับปัจจัยทั้ง 4 ประการ คือ ปัจจัยแนวโน้ม ปัจจัยวัฏฏะ ปัจจัยฤดูกาล และ-ความรบกวนสุ่ม จึงไม่เหมาะสมที่จะใช้เทคนิคการพยากรณ์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิค และเนื่องจากช่วงเวลาที่กำลังพิจารณาเป็นปีซึ่งเป็นช่วงระยะเวลาปานกลาง จึงไม่เหมาะสมที่จะใช้เทคนิคการทำให้เรียบ เพราะเทคนิคนี้เหมาะสำหรับใช้สำหรับการพยากรณ์ระยะสั้น ดังนั้นเทคนิคการพยากรณ์ที่เหมาะสมควรเป็นการกรองแบบปรับได้ ซึ่งค่าพยากรณ์อาจเขียนเป็นผลรวมถ่วงน้ำหนักของค่าที่เกิดขึ้นจริงในคาบเวลาก่อน ๆ ซึ่งเขียนเป็นสัญญลักษณ์ได้ ดังนี้

$$S_{t+1} = W_1X_t+W_2X_{t-1}+\ldots+W_NX_{t-N+1}$$

หรือเขียนในรูปที่กระทัดรัดกว่า เป็น

$$S_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} W_iX_{t-i+1}$$

เมื่อ t = คาบเวลาซึ่งเท่ากับ 1, 2, ...

S_{t+1} = ค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ $t+1$ เมื่อ $t = N, N+1, \ldots$

W_i = ค่าถ่วงน้ำหนักที่สมนัยกับค่าที่เกิดขึ้นจริงที่คาบเวลา $t-i+1$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, N$

X_t = ค่าที่เกิดขึ้นจริงที่คาบเวลา t

N = จำนวนตัวถ่วงน้ำหนัก

ในที่นี้จะนำเอาค่าอัตราการเข้าเรียนที่ได้จากการคำนวณตั้งแต่ปีการศึกษา 2517 ถึง 2521 ซึ่งเป็นค่าที่เกิดขึ้นในคาบเวลาที่ 1, 2, ..., 5 ตามลำดับ มาพยากรณ์ค่าอัตราการ–

เข้าเรียนในปีการศึกษา 2522 ซึ่งเป็นค่าพยากรณ์ของคาบเวลาที่ 6 โดยใช้ N = 2 (จากประสบการณ์ของ มาร์กรีดากีส (Markrikakis) และวีลไรท์ (Wheelwright) พบว่าปกติค่า N จะใช้เพียง 2 หรือ 3 นอกจากกระสวนความของข้อมูลเป็นในลักษณะที่เป็นอนุกรมเวลาแบบที่มีฤดูกาลหรือวัฏจักร ในกรณีนั้นก็อาจใช้ค่า N ตามวัฏจักร)

คาบเวลา	1	2	3	4	5	6
ค่าที่เกิดขึ้นจริง	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
ตัวถ่วงน้ำหนัก	W_2	W_1		W_2	W_1	
ค่าพยากรณ์			S_3			S_6

ขบวนการปรับตัวถ่วงน้ำหนักใน 1 รอบ ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้นของ $W_1=W_2=\frac{1}{N}=\frac{1}{2}=0.5$ (การเลือกใช้ค่า W_i ชุดเริ่มต้นก็อาจใช้ $W_1=W_2=\ldots=W_n=\frac{1}{N}$ ได้ บางกรณีอาจใช้ค่าเริ่มต้นอย่างอื่นโดยอาศัยประสบการณ์ของผู้ทำการพยากรณ์ ซึ่งอาจจะช่วยลดจำนวนรอบที่ใช้คำนวณลงได้)

2. คำนวณหาค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ 3 (S_3) โดยใช้ค่าผลบวกถ่วงน้ำหนักของค่าที่เกิดขึ้นจริงใน 2 คาบเวลาแรก นั่นคือ $S_3 = W_1X_2 + W_2X_1$

3. หาค่าความผิดพลาด (error) ของค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ 3 ได้ โดยหาผลต่างระหว่าง X_3 และ S_3 นั่นคือ $e_3 = X_3-S_3$

4. เมื่อได้ค่าความผิดพลาดแล้ว นำค่าความผิดพลาดนี้มาปรับค่าถ่วงน้ำหนัก W_1, W_2 ใหม่ โดยอาศัยแนวความคิดจากสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า กล่าวคือ

$$W_i' = W_i + 2k\,e_{t+1}X_{t-i+1}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, N$

W_i' = ตัวถ่วงน้ำหนักตัวที่ i ซึ่งได้ปรับค่าแล้ว

W_i = ตัวถ่วงน้ำหนักตัวที่ i ก่อนการปรับค่า

k = ค่าคงที่ซึ่งเรียกว่า learning constant

e_{t+1} = ค่าความผิดพลาดของค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ t+1

X_{t-i+1} = ค่าที่เกิดขึ้นจริงที่คาบเวลา t-i+1

สำหรับการกำหนดค่า k นั้น ถ้าให้มีค่ามากเกินไปจะทำให้การปรับค่า W_i ไม่ลู่เข้า (diverge) ทำให้ไม่ได้ค่า W_i ที่เหมาะสม แต่ถ้าให้ค่า k น้อยเกินไป จำนวนรอบที่ใช้จนกว่าจะได้ค่า W_i ชุดที่ต้องการก็จะมาก ซึ่งทำให้เสียค่าใช้จ่ายมาก การพยากรณ์ครั้งนี้กำหนดค่า k=0.10 และจากผลการศึกษาของมาร์กรีดากีส(Markridakis) และวีลไรท์ (Wheelwright) พบว่าอัตราการลู่เข้าจะสูงขึ้นถ้าปรับปรุงสูตรดังกล่าว ซึ่งใช้ในการปรับค่าถ่วงน้ำหนักใหม่ดังนี้

$$W_i' = W_i + 2k\, e^*_{t+1}\, X^*_{t-i+1}$$

เมื่อ e^*_{t+1} และ X^*_{t-i+1} เป็นค่าที่ปรับใหม่ของ e_{t+1} และ X_{t-i+1} ตามลำดับ คือ

$$e^*_{t+1} = \frac{e_{t+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} X^2_{t-i+1}}}$$

$$X^*_{t-i+1} = \frac{X_{t-i+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} X^2_{t-i+1}}}$$

5. ตัด X_1 ทิ้งไป นำค่า X_3 มาใช้ในการพยากรณ์ และใช้ค่าตัวถ่วงน้ำหนักที่หาได้ในขั้นที่ 4 มาหาค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ 4 โดยที่ $S_4 = W_1X_3+W_2X_2$

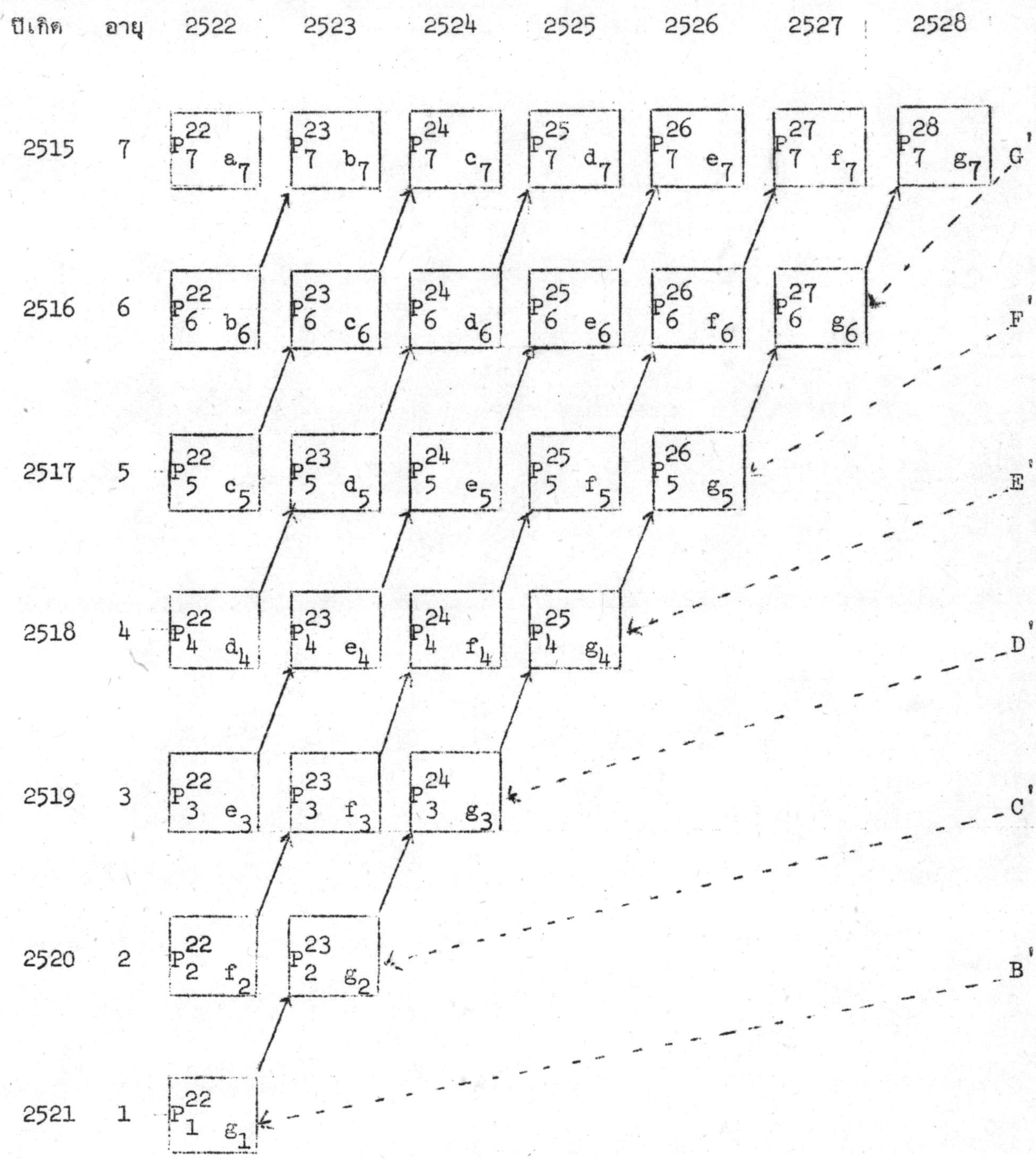
6. กลับไปทำคล้ายขั้นที่ 3 คือ หา e_4 แล้วทำต่อไปในขั้นตอนที่ 4 และ 5 ดังนี้ต่อไปจนในที่สุด เราจะหาค่าพยากรณ์สำหรับคาบเวลาที่ 6 (คือ ค่า S_6) ได้โดย

$S_6 = W_1X_5 + W_2X_4$

แต่ละครั้งที่ทำการพยากรณ์จะได้ค่า W_1, W_2 ชุดใหม่เสมอ ในการปรับค่า W_1, W_2 นี้ เมื่อหาจนถึงชุดที่ใช้หาค่าพยากรณ์ S_6 แล้ว จะใช้ค่า W_1, W_2 ชุดสุดท้ายนี้เป็นชุดเริ่มต้นของรอบที่ 2 โดยเอาค่า W_1, W_2 ไปพยากรณ์หาค่า S_3 แล้วทำต่อไปตามขั้นตอนดังกล่าว ก็จะได้ค่า W_1, W_2 ชุดที่ใช้คำนวณหาค่า S_6 ใหม่ คือ เป็นค่า W_1, W_2 ของรอบที่ 2 ถ้าทำซ้ำ ๆ กันอย่างนี้ต่อไปค่า W_1, W_2 ชุดท้ายของรอบที่ 3 จะเป็นค่าที่ทำให้ค่าพยากรณ์ดีขึ้นเรื่อย ๆ โดยผลรวมของกำลังสองของค่าความผิดพลาดมีค่าลดลงเรื่อย ๆ และเมื่อทำจำนวนรอบมากพอค่า W_1, W_2 จะลู่เข้า (Converge) เข้าหาค่า W_1^*, W_2^* ซึ่งเป็นชุดที่ดีที่สุด ซึ่งเป็นค่าที่เมื่อนำมาใช้ในการพยากรณ์แล้ว จะทำให้ผลรวมของกำลังสองของค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำสุด (minimum sum square of error)

ค่าพยากรณ์อัตราการเข้าเรียนที่ได้เป็นอัตราการเข้าเรียนในปีการศึกษา 2522 ค่าดังกล่าวจะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ต่อไป

2. การพยากรณ์จำนวนนักเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในปีการศึกษา 2522 ใช้ค่าพยากรณ์อัตราการเข้าเรียนในปีการศึกษา 2522 จากตอน 1 ประกอบกับค่าคาดคะเนจำนวนประชากรอายุครบเกณฑ์เข้าเรียนในปีการศึกษา 2522 โดยใช้เกณฑ์ 7 ปีบริบูรณ์ เนื่องจากมีข้อมูลประชากรกลุ่มอายุ 1 ถึง 15 ปี ในปีสำรวจคือ ปี 2522 ดังนั้น จึงสามารถคำนวณหาประชากรกลุ่มอายุ 7 ปี ได้ถึง 7 ปี คือ ในปี 2522 ถึง 2528 โดยอาศัยข้อมูลจำนวนประชากรแต่ละกลุ่มอายุ และอัตราการย้ายเข้า อัตราการย้ายออก อัตราการตายของแต่ละกลุ่มอายุเมื่อสมมุติให้อัตราดังกล่าวคงที่ทั้งในอดีตและอนาคต ตามข้อสมมุติเบื้องต้นในการวิจัย ดังนี้



B', C', ..., G' เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของกลุ่มอายุ 2 ถึง 7 ปี โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากร แต่ละกลุ่มอายุคำนวณได้จาก

$$C_x/1000 = I_x/1000 - E_x/1000 - D_x/1000$$

a_7, b_7, c_7, d_7, e_7, f_7, g_7 คือ ประชากรที่มีอายุครบ 7 ปีบริบูรณ์ ในปี 2522, 2523, ..., 2528 ตามลำดับ ค่า a_7 เป็นค่าที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยตรง ส่วนค่า b_7, c_7, d_7, e_7, f_7, g_7 คำนวณหาได้ดังนี้

$$g_2 = \frac{g_1 \times B'}{1000} + g_1$$

$$g_3 = \frac{g_2 \times C'}{1000} + g_2$$

$$g_4 = \frac{g_3 \times D'}{1000} + g_3$$

$$g_5 = \frac{g_4 \times E'}{1000} + g_4$$

$$g_6 = \frac{g_5 \times F'}{1000} + g_5$$

$$g_7 = \frac{g_6 \times G'}{1000} + g_6$$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถคำนวณหาค่า b_7, c_7, d_7, e_7, f_7 ได้ ก็จะได้ประชากรที่ครบเกณฑ์เข้าเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในปี 2522 ถึง 2528

ค่าคาดคะเนจำนวนประชากรครบเกณฑ์เข้าเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จะถูกนำไปใช้คำนวณหาจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เมื่อทราบอัตราการเข้าเรียนในปีการศึกษาดังกล่าว โดยคำนวณได้ดังนี้

จำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 = อัตราการเข้าเรียน x จำนวนประชากรที่มีอายุครบเกณฑ์เข้าเรียน

<u>การวิเคราะห์และการสร้างรูปแบบการพยากรณ์จำนวนนักเรียนและจำนวนนักเรียนจำแนกตามชั้นปีของแต่ละโรงเรียนภายในอำเภอ</u>

ระบบการศึกษามีลักษณะเป็นระบบพลวัต (dynamic system) โดยแต่ละปีนักเรียนที่สอบไล่ได้จะได้เลื่อนไปเรียนในชั้นที่สูงกว่า และจะมีการรับนักเรียนใหม่เข้ามาเรียนทุกปี ลักษณะการเปลี่ยนแปลงเช่นนี้ โดยทั่วไปสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบเชิงเส้น (linear differential equation) คือ

$$X(k+1) = F(k)X(k) + U(k+1)$$

โดย

$X(k)$ เป็นเมตริกซ์ (matrix) ขนาด $n \times 1$ ซึ่งแทนจำนวนนักเรียนที่อยู่ในชั้นต่าง ๆ ในปีการศึกษาที่ k เรียงลำดับจากชั้นต่ำไปชั้นสูง และ n แทนจำนวนชั้นทั้งหมดที่มีในระบบการศึกษา

$U(k+1)$ เป็นเมตริกซ์ (matrix) ขนาด $n \times 1$ ซึ่งแทนจำนวนนักเรียนใหม่ที่รับเข้ามาเรียนในชั้นต่าง ๆ เมื่อต้นปีการศึกษาที่ $k + 1$

$F(k)$ เป็นเมตริกซ์การเปลี่ยนสภาวะ (transition matrix) ขนาด $n \times n$ สำหรับปีการศึกษาที่ k

เมตริกซ์แสดงการเปลี่ยนสภาวะ เขียนในรูปใหม่ คือ

$$F(k) = \left[f_{ij}(k)\right] \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

โดย $f_{ij}(k)$ เป็นอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนในชั้น j ที่ได้เลื่อนไปเรียนในชั้นที่ i เมื่อสิ้นปีการศึกษาที่ k กับจำนวนนักเรียนในชั้นที่ j ในปีการศึกษาที่ k

$f_{ij}(k) = 0$ เมื่อ $j > i$ เพราะการเลื่อนชั้นจากชั้นสูงไปชั้นต่ำ เป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น เมตริกซ์ $F(k)$ ส่วนประกอบ $f_{ij}(k)$ จะมีค่าเฉพาะตำแหน่งตามเส้นทแยงมุมหลัก (main diagonal) กับตำแหน่งเส้นทแยงมุมที่อยู่ติดกับเส้นทแยงมุมหลักและต่ำกว่า (lower diagonal) หรือกล่าวโดยสรุปได้ว่า $f_{ij}(k)$ จะมีค่าเฉพาะตำแหน่งที่ $i = j$ และ $i = j+1$ นอกนั้นมีค่าเป็น 0 $f_{ij}(k)$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

เนื่องจากการศึกษาระดับประถมศึกษาในอดีตจนถึงปีการศึกษา 2520 จะประกอบด้วยชั้นต่าง ๆ จำนวน 7 ชั้น และนับตั้งแต่ปีการศึกษา 2521 เป็นต้นไป จะประกอบด้วยชั้นต่าง ๆ จำนวน 6 ชั้น (ประกาศแผนการศึกษาแห่งชาติฉบับปีพุทธศักราช 2520 เป็นผลทำให้ระบบการศึกษาเปลี่ยนจากระบบ 7-3-2 เป็น 6-3-3) ดังนั้น รูปแบบเพื่อการพยากรณ์จำนวนนักเรียนในอนาคต โดยสมมุติให้มีการรับนักเรียนใหม่เข้ามาเรียนเฉพาะในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 คือ

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21}(k) & f_{22}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{32}(k) & f_{33}(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{43}(k) & f_{44}(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{54}(k) & f_{55}(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{65}(k) & f_{66}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(k+1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_i(k)$ จำนวนนักเรียนต้นปีในชั้นที่ i เมื่อปีการศึกษาที่ k

$u_1(k+1)$ จำนวนนักเรียนใหม่ที่รับเข้ามาเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เมื่อต้นปีการศึกษาที่ $k+1$

ค่า $f_{11}(k), f_{22}(k), \ldots, f_{66}(k)$ หมายถึงอัตราส่วนนักเรียนที่สอบตกซ้ำชั้นเดิมในปีการศึกษาที่ k ซึ่งค่าดังกล่าวในปีการศึกษา 2517 ถึง 2521 คำนวณได้จากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาโดย

$f_{ij}(k)$ = อัตราส่วนนักเรียนที่สอบตกซ้ำชั้น j ในปีการศึกษาที่ k = $\dfrac{\text{จำนวนนักเรียนที่สอบตกซ้ำชั้นที่ } j \text{ ในปีการศึกษาที่ } k}{\text{จำนวนนักเรียนต้นปีชั้นที่ } j \text{ ในปีการศึกษาที่ } k}$

$(i=j)$

จำนวนนักเรียนสอบตกซ้ำชั้น = จำนวนนักเรียนที่สอบตกเพราะเวลาเรียนไม่พอหรือไม่เข้าสอบ + จำนวนนักเรียนที่สอบไล่ตก

จำนวนนักเรียนที่สอบตกเพราะเวลาเรียนไม่พอหรือไม่เข้าสอบ = จำนวนนักเรียนปลายปี - จำนวนนักเรียนที่เข้าสอบ

จำนวนนักเรียนที่สอบไล่ตก = จำนวนนักเรียนเข้าสอบ - จำนวนนักเรียนที่สอบไล่ได้

ค่า $f_{21}(k)$, $f_{32}(k), \ldots, f_{65}(k)$ หมายถึงอัตราส่วนนักเรียนที่สอบไล่ได้ในปีการศึกษาที่ k เพื่อเลื่อนไปเรียนในชั้นที่สูงกว่าในปีการศึกษาที่ k+1

$f_{ij}(k)$ = อัตราส่วนนักเรียนที่สอบไล่ได้ในชั้นที่ j ได้ เลื่อนไปเรียนชั้นที่ i ในปีการศึกษาที่ k

$(i=j+1)$

$$= \frac{\text{จำนวนนักเรียนที่สอบไล่ได้ในชั้นที่ } j \text{ ในปีการศึกษาที่ } k}{\text{จำนวนนักเรียนต้นปีชั้นที่ } j \text{ ในปีการศึกษาที่ } k}$$

ค่าของจำนวนนักเรียนที่ลาออกจากชั้นต่าง ๆ และจำนวนนักเรียนเข้าใหม่ในชั้นต่าง ๆ ในปีการศึกษา 2517 ถึง 2521 คำนวณได้โดย

จำนวนนักเรียนที่ลาออกจากชั้น j ระหว่างปีการศึกษาที่ k = จำนวนนักเรียนต้นปีปีการศึกษาที่ k - จำนวนนักเรียนปลายปีปีการศึกษาที่ k

จำนวนนักเรียนเข้าใหม่ในชั้น j+1 ในปีการศึกษาที่ k+1

= จำนวนนักเรียนต้นปีชั้น j+1 ในปีการศึกษา k+1 - จำนวนนักเรียนที่สอบได้ชั้น j ในปีการศึกษาที่ k - จำนวนนักเรียนตกซ้ำชั้น j+1 ในปีการศึกษาที่ k

จำนวนนักเรียนเข้าใหม่ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในปีการศึกษาที่ k+1

= จำนวนนักเรียนต้นปีชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในปีการศึกษาที่ k+1 - จำนวนนักเรียนตกซ้ำชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในปีการศึกษาที่ k

ถ้าค่าจำนวนนักเรียนเข้าใหม่มีค่าเป็นลบ หมายความว่ามีนักเรียนลาออกจากโรงเรียนเดิมเมื่อจบปีการศึกษาที่ k ก่อนเริ่มปีการศึกษาที่ k+1

การพยากรณ์จำนวนนักเรียนจำแนกตามชั้นปีต่าง ๆ เริ่มต้นด้วยการพยากรณ์ค่า f_{ij} ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยข้อมูล f_{ij} ในอดีต ดังนั้น เทคนิคการพยากรณ์ที่ใช้เป็นการพยากรณ์เชิงปริมาณที่อาศัยพฤติกรรมในอดีตพยากรณ์ค่าต่าง ๆ ในอนาคต การพยากรณ์ค่า f_{ij} ไม่ได้เกี่ยวข้องกับปัจจัยทั้ง 4 คือ ปัจจัยแนวโน้ม ปัจจัยวัฏฏะ ปัจจัยฤดูกาล และความรบกวนสุ่ม จึงไม่เหมาะสมที่จะใช้เทคนิคการพยากรณ์อนุกรมเวลาแบบคลาสสิค การพยากรณ์ค่า f_{ij} ช่วงเวลาที่กำลังพิจารณาเป็นปี ซึ่งเป็นช่วงระยะเวลาปานกลางจึงไม่เหมาะสมที่จะใช้เทคนิคการทำให้เรียบ เพราะเทคนิคนี้เหมาะสมสำหรับการพยากรณ์ช่วงสั้น ดังนั้น จึงสามารถใช้เทคนิคการกรองแบบปรับได้ เพราะเทคนิคนี้ใช้ได้สำหรับการพยากรณ์ช่วงระยะปานกลาง แต่เนื่องจากในการพยากรณ์ค่า f_{ij} แต่ละค่าสำหรับแต่ละโรงเรียน ถ้าใช้เทคนิคการกรองแบบปรับได้จะเปลืองเวลาและค่าใช้จ่ายมากเกินความจำเป็น และเมื่อทำการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ออโตคอริเลชั่นของตัวอย่าง (Sample Autocorrelation Coefficient : r_s) ของค่า f_{ij} ในปีการศึกษา 2517 - 2521 ซึ่งเป็นเลขอนุกรมเวลาของแต่ละโรงเรียน ดังตัวอย่างแสดงไว้ในภาคผนวก ฉ. ปรากฏว่ามีการเปลี่ยนแปลงค่าในทางที่ลดลงค่อนข้างเร็ว ซึ่งจะเป็นลักษณะของอนุกรมเวลาคงที่ และเมื่อนำค่า r_s นี้ไปสร้างกราฟโดยให้ค่า s เป็นแกนนอน ค่า r_s เป็นแกนตั้ง ดังตัวอย่างแสดงไว้ในภาคผนวก ฉ. แล้วนำไปเปรียบเทียบกับกราฟของค่าสัมประสิทธิ์ออโตคอริเลชั่น (Theoritical Autocorrelation Coefficient ; ρ_s) ดังแสดงไว้ในภาคผนวก ช. ปรากฏว่าสอดคล้องกับรูปแบบ AR(1) ดังนั้น ในการพยากรณ์ค่า f_{ij} จึงมีความเหมาะสมในการที่จะใช้เทคนิคการพยากรณ์อนุกรมเวลาบ๊อกซ์และเจนกินซ์ด้วยรูปแบบ AR(1) หรือเรียกว่ารูปแบบการถดถอยในตัวเองอันดับที่ 1 (First Order Autoregressive Model) เพราะประหยัดเวลาและเสียค่าใช้จ่ายน้อยกว่าการกรองแบบปรับได้

รูปแบบการถดถอยในตัวเองอันดับที่ 1 จะประกอบด้วย 2 ส่วนด้วยกัน คือ ส่วนของผลคูณอัตราส่วนของความห่างจากค่าเฉลี่ยของตัวแปร $f_{ij}(k-1)$ ในงวดก่อนหน้าบวกกับส่วนของ shock $e_{ij}(k)$

รูปแบบ $\dot{f}_{ij}(k) = \alpha_{ij}\dot{f}_{ij}(k-1) + e_{ij}(k)$ โดยที่ $\dot{f}_{ij}(k) = f_{ij}(k) - \mu_{ij}, |\alpha_{ij}| < 1$

$k = 1, 2, \ldots, N$

เมื่อ

$f_{ij}(k)$ เป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่ต้องการศึกษา ณ เวลา k

μ_{ij}, α_{ij} เป็นปารามิเตอร์ของรูปแบบ

$e_{ij}(k)$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนของความสัมพันธ์ระหว่าง $f_{ij}(k)$ และ $f_{ij}(k-1)$ หรือเรียกว่า "Shock"

โดยรูปแบบอยู่ภายใต้ข้อสมมุติดังนี้

1. $E\left[e_{ij}(k)\right] = 0$, Variance $e_{ij}(k) = \sigma^2_{e_{ij}}$ ทุกค่าของ k

2. $E\left[e_{ij}(k)e_{ij}(k')\right] = 0$ สำหรับ $k \neq k'$

3. $E\left[e_{ij}(k)f_{ij}(k')\right] = 0$ สำหรับ $k' < k$

$$f_{ij}(k) - \mu_{ij} = \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\} + e_{ij}(k)$$

$$f_{ij}(k) = \mu_{ij} + \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\} + e_{ij}(k)$$

$$E\left[f_{ij}(k) \,\middle|\, \text{previous } f_{ij}\text{'s}\right] = E\left[f_{ij}(k) \,\middle|\, f_{ij}(k-1)\right] = \hat{f}_{ij}(k) = \mu_{ij} + \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\} + E\left[e_{ij}(k)\right]$$

$$= \mu_{ij} + \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\}$$

โดยที่ $f_{ij}(k)$ คือ ข้อมูล ณ เวลา k ที่นำมาวิเคราะห์ $E\left[f_{ij}(k) \middle| \text{previous } f_{ij}\text{'s}\right]$ $= \hat{f}_{ij}(k)$ คือ ค่าคาดหมายของ $f_{ij}(k)$ ในเวลาที่ k และจากสมมุติฐานข้อ 1 $E\left[e_{ij}(k)\right] = 0$

$$f_{ij}(k) - \mu_{ij} = \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\} + e_{ij}(k)$$

$$e_{ij}(k) = \left\{f_{ij}(k) - \mu_{ij}\right\} - \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{N} e_{ij}^2(k) = \sum_{k=1}^{N}\left[\left\{f_{ij}(k) - \mu_{ij}\right\} - \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\}\right]^2$$

$$\sum_{k=2}^{N} e_{ij}^2(k) = \sum_{k=2}^{N}\left[\left\{f_{ij}(k) - \bar{f}_{ij}\right\} - \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \bar{f}_{ij}\right\}\right]^2$$

เมื่อ $k = 1$ $f_{ij}(k-1) = f_{ij}(0)$ ซึ่งไม่มีค่าจริง

$\bar{f}_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_{ij}(k)$ เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลและเป็นค่าคงที่ในทางปฏิบัติใช้ค่า $\bar{f}_{ij}$ แทนค่า μ_{ij}

การประมาณค่า $_{ij}$ จะใช้วิธีการกำลังสองน้อยที่สุด โดยการทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนของความสัมพันธ์ระหว่าง $f_{ij}(k)$ และ $f_{ij}(k-1)$ คือ $\sum_{k=2}^{N} e_{ij}^2(k)$ มีค่าต่ำสุดด้วยการหาอนุพันธ์เทียบกับ α_{ij} แล้วกำหนดให้ค่าของสมการเป็น 0 ก็จะได้

$$\sum_{k=2}^{N}\left[\left\{f_{ij}(k) - \bar{f}_{ij}\right\} - \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \bar{f}_{ij}\right\}\right]\left\{f_{ij}(k-1) - \bar{f}_{ij}\right\} = 0$$

$$\text{estimate }(\alpha_{ij}) = \hat{\alpha}_{ij} = \frac{\sum_{k=2}^{N}\left\{f_{ij}(k) - \bar{f}_{ij}\right\}\left\{f_{ij}(k-1) - \bar{f}_{ij}\right\}}{\sum_{k=2}^{N}\left\{f_{ij}(k-1) - \bar{f}_{ij}\right\}^2}$$

กรณีค่า f_{ij} เมื่อ i เป็น 1, 2, ..., 6 N=5 เพราะว่าข้อมูลที่เก็บมามีข้อมูลของชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ทั้ง 5 ปี คือ ปีการศึกษา 2517 – 2521 แต่เมื่อ i เป็น 7 N=4 เพราะว่าในปี 2521 ไม่มีชั้นประถมศึกษาปีที่ 7

เมื่อคำนวณค่าประมาณ α_{ij} ได้แล้วนำไปแทนลงในรูปแบบก็จะได้รูปแบบที่เหมาะสม (Fitted Model) และจากรูปแบบนี้นำไปหาค่าคาดหมายของ $f_{ij}(k)$; k=1, 2, ..., N (Fitted values หรือ Estimated of $f_{ij}(k)$)

การทดสอบว่ารูปแบบที่เลือกนั้นมีความถูกต้อง และเหมาะสมนั้นค่าสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ ไค-สแควร์ : χ^2 - Test โดยการนำเอาค่าความคลาดเคลื่อน (Residuals) สัญญลักษณ์ คือ $\hat{e}_{ij}(k)$ ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างค่าข้อมูลจริง (Observed Values) กับค่าคาดหมาย (Fitted Values) $f_{ij}(k) - f_{ij}(k)$ มาคำนวณหาค่าไค-สแควร์ โดย

$$\chi^2_{ij} = N \sum_{s=1}^{S} r_s^2(\hat{e}_{ij}) \quad ; \quad \text{Degree of Freedom} = S - a$$

$$r_s(\hat{e}_{ij}) = \frac{\frac{1}{N-s} \sum_{k=1}^{N-s} \hat{e}_{ij}(k)\, \hat{e}_{ij}(k+s)}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^2_{ij}(k)}$$

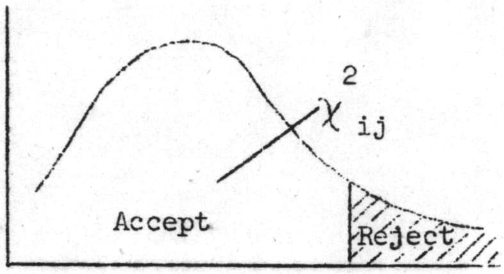
เมื่อ

N คือ จำนวนของ Residuals ทั้งหมด

S = lag ที่สงสัยว่า r_s มีค่าหรือไม่ (ถ้าจำนวนของ Residuals มีมาก ตามกฎของ Thumb ให้ $S \leq \sqrt{N}$ ก็เพียงพอในการทดสอบรูปแบบ ซึ่งถ้าค่าของ S ยิ่งมากเท่าไร ยิ่งทำให้เกิดความมั่นใจในรูปแบบมากขึ้น)

a = จำนวนปารามิเตอร์ในรูปแบบ

ถ้า $\chi^2_{ij} < \chi^2_{(1-\alpha)}$ จากตารางสถิติ, Degree of Freedom = S-a แสดงว่ารูปแบบที่เลือกมีความเหมาะสมกับข้อมูล



$\chi^2(1-\alpha)$, degree of freedom S-a

เนื่องจากตั้งแต่ปีการศึกษา 2521 เป็นต้นไป ระดับชั้นสูงสุด คือ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ดังนั้น การพยากรณ์ค่า f_{ij} จึงพยากรณ์เฉพาะค่า f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{32}, f_{33}, f_{43}, f_{44}, f_{54}, f_{55}, f_{65} และ f_{66} เท่านั้น การทดสอบความเหมาะสมของรูปแบบจึงนำค่า χ^2_{ij} ที่เกิดจากการคำนวณเฉพาะ $\chi^2_{11}, \chi^2_{21}, \chi^2_{22}, \chi^2_{32}, \chi^2_{33}, \chi^2_{43}, \chi^2_{44}, \chi^2_{54}, \chi^2_{55}, \chi^2_{65}$ และ χ^2_{66} มาทำการทดสอบรูปแบบ AR(1) ที่ใช้สำหรับพยากรณ์ค่า f_{ij} แต่ละค่าดังกล่าว มีปารามิเตอร์ 2 ค่า คือ μ_{ij}, α_{ij} ดังนั้น a = 2 จำนวนของ residuals เมื่อ i = 1, 2, ..., 6 มี 4 จำนวน กำหนด S = 3 การทดสอบจึงนำค่า χ^2_{ij} แต่ละค่าที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับค่า χ^2 จากตารางสถิติ ณ ระดับนัยสำคัญ 0.01 ตัวอย่างแสดงการทดสอบรูปแบบแสดงไว้ในภาคผนวก ช.

การหาค่าคาดคะเนในอนาคตของ f_{ij} โดยใช้รูปแบบที่กำหนดขึ้น และจาก Observed data ของข้อมูลอนุกรมเวลา ค่าคาดคะเนที่จะคำนวณหา คือ ค่าคาดคะเนของ $f_{ij}(N+\ell)$ โดยที่ ℓ เรียกว่า Lead Time ซึ่ง ℓ = 1, 2, ..., q เมื่อ $f_{ij}(N)$ คือ ค่าสุดท้ายของเลขอนุกรมเวลา และถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นของการคาดคะเน (Forecast origin) เราจะใช้สัญญลักษณ์ $E_N\left[f_{ij}(N+\ell)\right]$ หรือ $\hat{f}_{ij}\{N(\ell)\}$ แทนค่าคาดคะเนของ $f_{ij}(N+\ell)$ ซึ่งจะเป็นค่าคาดคะเนที่ดีที่สุด ต่อเมื่อค่าคาดหมาย ณ เวลาที่ N ของผลต่างกำลังสองของ $\hat{f}_{ij}\{N(\ell)\}$ กับ $f_{ij}(N+\ell)$ (Expected mean square error) มีค่าน้อยมาก :

$$E_N\left[\hat{f}_{ij}\{N(\ell)\} - f_{ij}(N+\ell)\right]^2$$

การคาดหมาย ณ จุดเริ่มต้นของการคาดคะเนที่ N สำหรับเทอมของ f_{ij} และค่าความคลาดเคลื่อน สรุปได้ดังนี้

$$E_N\left[f_{ij}(N+v)\right] = \begin{cases} \hat{f}_{ij}\left\{N(v)\right\} & \text{เมื่อ } v > 0 \text{ (เป็นค่าคาดคะเน)} \\ f_{ij}(N+v) & \text{เมื่อ } v \leq 0 \text{ (ค่าจากการสังเกต)} \end{cases}$$

$$E_N\left[e_{ij}(N+v)\right] = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } v > 0 \text{ (เพราะไม่ทราบค่า)} \\ e_{ij}(N+v) & \text{เมื่อ } v \leq 0 \text{ (เป็นค่าความคลาดเคลื่อนของ } f_{ij}(N+v)-\hat{f}_{ij}(N+v) \text{ เรียกว่า Observed Error} \end{cases}$$

ค่าประมาณปารามิเตอร์ $\alpha_{ij} = \hat{\alpha}_{ij}$ ได้จากการประมาณกำลังสองน้อยที่สุด และใช้ค่า $\bar{f}_{ij} = \hat{\mu}_{ij}$ แทน μ_{ij} $\hat{e}_{ij}(N+v)$; $v \leq 0$ เป็นค่าประมาณของ $e_{ij}(N+v)$ คำนวณหา $f_{ij}\left\{N(\ell)\right\}$ ดังนี้

$$f_{ij}(k) - \mu_{ij} = \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(k-1) - \mu_{ij}\right\} + e_{ij}(k)$$

ให้ $k = N+\ell$

$$f_{ij}(N+\ell) = \mu_{ij} + \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(N+\ell-1) - \mu_{ij}\right\} + e_{ij}(N+\ell)$$

โดยการใช้ค่าคาดคะเน ณ จุดเริ่มต้นของการคาดคะเนที่ N

$$\begin{aligned} E_N\left[f_{ij}(N+\ell)\right] &= E_N\left[\mu_{ij} + \alpha_{ij}\left\{f_{ij}(N+\ell-1) - \mu_{ij}\right\} + e_{ij}(N+\ell)\right] \\ &= \mu_{ij} + \alpha_{ij}E_N\left[f_{ij}(N+\ell-1) - \mu_{ij}\right] + E_N\left[e_{ij}(N+\ell)\right] \\ &= \mu_{ij} + \alpha_{ij}E_N\left[f_{ij}(N+\ell-1) - \mu_{ij}\right] \end{aligned}$$

โดยที่ $E_N\left[e_{ij}(N+\ell)\right] = 0$; $\ell > 0$

$$\hat{f}_{ij}\{N(\ell)\} = \bar{f}_{ij} + \hat{\alpha}_{ij}E_N\left[f_{ij}(N+\ell-1)-\bar{f}_{ij}\right]$$

เมื่อ $\ell = 1 : \hat{f}_{ij}\{N(1)\} = E_N\left[f_{ij}(N+1)\right] = \bar{f}_{ij} + \hat{\alpha}_{ij}\left[f_{ij}(N) - \bar{f}_{ij}\right]$

$f_{ij}(N)$ เป็น Observed value

และ $\ell \geq 2 : \hat{f}_{ij}\{N(\ell)\} = E_N\left[f_{ij}(N+\ell)\right] = \bar{f}_{ij} + \hat{\alpha}_{ij}\left[\hat{f}_{ij}\{N(\ell-1)\} - \bar{f}_{ij}\right]$

$\hat{f}_{ij}\{N(\ell-1)\}$ เป็นค่าคาดคะเนก่อนหน้า $\hat{f}_{ij}\{N(\ell)\}$

การพยากรณ์จำนวนนักเรียนและจำนวนนักเรียนจำแนกตามชั้นปีต่าง ๆ ตั้งแต่ปีการศึกษา 2522 ถึง 2528 ของแต่ละโรงเรียน กำหนดให้ปีการศึกษา 2521 เป็นจุดเริ่มต้นการพยากรณ์ การพยากรณ์ในปีการศึกษา 2522 ใช้เมตริกซ์ $F(k)$, $X(k)$, $U(k+1)$ เมื่อ k คือ ปีการศึกษา 2521 ค่า $f_{ij}(k)$ ของเมตริกซ์ $F(k)$ เป็นค่าที่ทราบแล้วจากข้อมูลปีการศึกษา 2521 ค่า $x_1(k), \ldots, x_6(k)$ ของเมตริกซ์ $X(k)$ เป็นจำนวนนักเรียนต้นปีชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งทราบค่าแล้วจากข้อมูลในปีการศึกษา 2521 เช่นกัน ส่วนค่า $u_1(k+1)$ ของเมตริกซ์ $U(k+1)$ แทนจำนวนนักเรียนใหม่ที่จะรับเข้ามาเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในปีการศึกษา 2522 ซึ่งถูกกำหนดขึ้นตามนโยบายของแต่ละโรงเรียน ค่าดังกล่าวทั้งหมดจะถูกนำมาใช้เพื่อคำนวณหาจำนวนนักเรียนจำแนกตามชั้นปีตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในปีการศึกษา 2522 ส่วนค่าจำนวนนักเรียนของแต่ละโรงเรียนเกิดจากผลรวมของจำนวนนักเรียนจำแนกตามชั้นปีตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในปีการศึกษา 2522 ในทำนองเดียวกันนี้สามารถจะทำการพยากรณ์ในปีการศึกษาต่อ ๆ ไปได้ โดยใช้ค่า $f_{ij}(k)$ ที่ได้จากการพยากรณ์ตามวิธีการที่กล่าวมาแล้ว ค่า $x_i(k)$, $i=1, \ldots, 6$ จะใช้ค่าที่ได้จากการพยากรณ์ในปีการศึกษาก่อนหน้า ส่วนค่า $u_1(k+1)$ เป็นค่าที่ถูกกำหนดขึ้นในปีการศึกษานั้น