รูปการบางอย่างเกี่ยวกับการวิเคราะห์ฮาร์โมนิคแบบคลาสสิค

นางสาว วิไล สิระสุทธิรัตน์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2516

SOME ASPECTS IN CLASSICAL HARMONIC ANALYSIS

Miss Vilai Sirasuittirut

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1973

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of science.

B. Tamthai

Dean of the Graduate School

Thesis Committee

Virool Boonyasombat Chairman

Calvin F.K. Jung

[illegible]

Thesis Supervisor Dr. Calvin F.K. Jung

หัวข้อวิทยานิพนธ์ : รูปการบางอย่างเกี่ยวกับการวิเคราะห์ฮาร์โมนิคแบบคลาสสิค

ชื่อ : นางสาว วิไล สิระสุทธิรัตน์

แผนกวิชา : คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา : 2515

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษารูปการบางอย่างบนรากฐานของการวิเคราะห์ฮาร์โมนิคบนทอรัสหนึ่งมิติ 甲 เราไม่ได้รวมทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียงของวินเนอร์ไว้ ณ ที่นี้ด้วย เพราะเหตุว่าการพิสูจน์อยู่นอกขอบเขตของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราได้นำวิธีการของบานาชสเปสมาประยุกต์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเราได้พิสูจน์ว่ามีอนุบรรพ $\{a_n\}$ ของจำนวนเชิงซ้อนที่มีคุณสมบัติว่า a_n ลู่เข้าสู่ศูนย์ในขณะที่ $|n|$ ลู่เข้าสู่อนันต์ เพื่อว่าไม่มี f ใน L^p(甲) $(1 \le p \le \infty)$ ที่สัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์เท่ากับ a_n สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ดังนั้นทฤษฎีบทแบบรีสซ์-ฟิชเชอร์ไม่เป็นจริงใน L^1(甲) เรายังแสดงด้วยว่ามีฟังก์ชัน f ใน L^p(甲) $(1 \le p < \infty)$ ซึ่งอนุกรมฟูเรียร์ของ f ไม่ลู่เข้าสู่ f ของแต่ละจุดหรือเกือบทุกจุดในช่วง $(0,1)$ อย่างไรก็ดี ค่าเฉลี่ยแบบ $(C,1)$ และค่าเฉลี่ยแบบเอเบลของอนุกรมฟูเรียร์ของ f ใน L^1(甲) ลู่เข้าสู่ $f(x)$ เกือบทุกจุด x ในช่วง $(0,1)$

Thesis Title : Some Aspects in Classical Harmonic Analysis

Name : Miss Vilai Sirasuittirut

Department : Mathematics

Acadamic Year : 1972

ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of some aspects of the foundation of harmonic analysis on the 1-dimensional torus $\mathbb{T}$. The renown theorem of Wiener is not included mainly because its proof is slightly beyond the scope of this thesis.. Applying the Banach space technique, we prove, in particular, that there exists a sequence $\{a_n\}$ of complex number with the property $a_n \longrightarrow 0$ as $|n| \longrightarrow \infty$ so that no $f \in L^p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p < \infty)$ satisfies $\hat{f}(n) = a_n$ for all integers n ; that is, a Riesz - Fisher type of theorem does not hold in $L^1(\mathbb{T})$. We also show that there are functions f in $L^p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p < \infty)$ such that their Fourier series do not converge to f pointwise in $(0,1)$ or almost all points in $(0,1)$. However, the $(C,1)$ means and the Abel means of Fourier series of $f \in L^1(\mathbb{T})$ converge to $f(x)$ for almost all x in $(0,1)$.

ACKNOWLEDGEMENT

I wish to express here my sincere gratitude to Dr. Calvin F.K. Jung, my thesis supervisor, for introducing me to this subject and for his valuable assistance in preparing this thesis.

I also thank to all my lecturers who taught me in under-graduate and graduate at Chulalongkorn University.

Vilai Sirasuittirut

TABLE OF CONTENTS

CHAPTER O

INTRODUCTION

In this thesis, we assume a working knowledge of classical analysis. However, we have given complete proofs of some basic theorems from modern analysis. In particular, we prove in chapter I, the very useful theorem of Baire. In chapter II, we prove three basic theorems in Banach space theory, namely , The Open Mapping Theorem, The Banach Steinhaus Theorem and The Hahn Banach Theorem. Arm with these facts, we then attack the central problems in the study of Fourier series. Particularly, in chapter III, we consider the following questions :

(1) Is it true that for every $f \in L^p(\Psi)$ $(1 \leq p < \infty)$ the Fourier series of f converges to f(x) at every point of x or for almost all points x ?

(2) If $\{a_n\}$ is a sequence of complex number such that $a_n \rightarrow 0$ as $n \longrightarrow \pm\infty$, does it follow that there is an $f \in L^p(\Psi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ so that $\hat{f}(n) = a_n$ for all integers n ?. The answers are no for both questions. In relation to the first question, we introduce some methods of summability and show in chapter IV that the (C, 1) means and the Abel means of Fourier series of $f \in L^1(\Psi)$ converge to f(x) for almost all x in (0,1). Moreover in the final chapter, we show that, for any $f \in L^1(\Psi)$ the limits of Abel means of the Fourier series of f and Able means of the conjugate Fourier series of f exist for almost everywhere in (0,1).

Finally, I would like to point out that most of the materials in this thesis are drawn from the references given in page 80.