Bibliography

1. Flugge, W. (ed) 1962. Handbook of Engineering Mechanics. 1st ed. New York : McGraw Hill Book Co.

2. Jaeger, L.G. 1974. Elementary theory of Elastic Plates. Pergamon Press Ltd.

3. Majumdar, Saurindranath. Sept. 1971. Buckling of Thin Annular Plate Under Uniform Compression. AIAA Journal V. 9, N. 9 pp. 1701 - 1707

4. Ramaiah, G.K. and Vijayakumar, K. Aug. 1974. Buckling of Polar Orthotropic Annular Plates Under Uniform Internal Pressure. AIAA Journal. V. 12, N. 8 pp. 1045 - 1050

5. Sokolnikoff, I.S 1956. The Mathematical Theory of Elasticity New York : McGraw Hill Book Co.

6. Szilard, Rudolph. 1974. Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods. New Jersey : Pentice - Hall , Inc.

7. Timoshenko, S.P. and Gere. 1971. Theory of Elastic Stability. Tokyo : Kogakusha Company, Ltd.

8. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. 1970. Theory of Elasticity 3rd. ed. Tokyo : Kogakusha Company, Ltd.

9. Timoshenko, S.P. and Woinowsky - Krieger, S. 1959. Theory of Plates and Shells 2nd. ed. Tokyo : McGraw - Hill koga Kusha, Ltd.

10. Uthgenant, Ernest B. and Brand, Ronald S. Nov. 1970. Buckling of Orthotropic Annular Plates. AIAA Journal V. 8, N. 11 pp. 2102 - 2104

11. Vijayakumar, K. and Joga Rao, C.V June 1971. Buckling of Polar Orthotropic Annular Plates. Transactions of the ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division. V. 97 N. EM. 3 pp. 701 - 710

12. Yamaki, N. 1958. Buckling of a Thin Annular Plate Under Uniform Compression. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME 25 E. pp. 267 - 273

ภาคผนวก

ผนวก ก.

การแก้ปัญหาโดยวิธีของ Galerkin

สมมุติว่าเราต้องการแก้สมการ Governing **Differential Equation** ซึ่งอยู่ในรูป

$$GDE = L(u) + q = 0 \text{ ใน region } R \text{ .... } (1\ ก)$$

เมื่อ L เป็น differential operator และ q ไม่เป็น function ของ u ถ้าใน region R เป็นแบบ 2 มิติ และสมมุติให้คำตอบมีรูปเป็น

$$u_n(x, y) = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x, y) \text{ ....} (2\ ก)$$

เมื่อ f_j เป็น coordinate function ที่เหมาะสมกล่าวคือ จะต้องสอดคล้องกับ boundary conditions ทุก ๆ ข้อในปัญหานั้น และ a_j เป็นตัวคงที่

แทนค่า u_n ลงในเทอมซ้ายมือของสมการ (1 ก) จะได้

$$L(u_n) + q = \epsilon_n(x, y),\ \epsilon_n(x, y) \# 0 \text{ ใน} R$$

ถ้า $\epsilon_n(x, y)$ มีค่าเท่ากับ 0 แสดงว่า $u_n(x, y)$ เป็นคำตอบที่ถูกต้อง นั่นคือ u_n สอดคล้องทั้ง boundary conditions และ GDE ถ้าค่า $\epsilon_n(x, y)$ เป็นค่าที่น้อยเท่าไหร่ $u_n(x, y)$ ก็จะเป็นคำตอบที่ใกล้เคียงความจริงเท่านั้น นั่นคือ ถือว่า $\epsilon_n(x, y)$ เป็นตัวคลาดเคลื่อนของคำตอบที่ต้องการ ดังนั้น จึงต้องพยายามเลือก a_j เพื่อให้ค่า $\epsilon_n(x, y)$ มีค่าน้อยที่สุด โดยใช้หลักการ orthogonality เพื่อให้ $\epsilon_n(x, y)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ

$$\iint_R \left[L(u_n) + q\right] f_i(x, y)\, dxdy = 0, \quad (i = 1, 2.....n)$$

$$\iint_R \left[L\left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\right) + q\right] \cdot f_i(x, y)\, dxdy = 0, (i = 1, 2...n)$$

$$\text{.,....,.} (3ก)$$

สมการที่ (3 ก) นี้จะประกอบสมการ algebra จำนวน n สมการโดยมีค่าคงที่ a_1, $a_2 \ldots a_n$ ที่ต้องการจะหาดังต่อไปนี้

$$\iint_R \left[L(a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nf_n) + q\right] \cdot f_1(x, y)\, dxdy = 0$$

$$\iint_R \left[L(a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nf_n) + q\right] \cdot f_2(x, y)\, dxdy = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots(4\ ก)$$

$$\iint_R \left[L(a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nf_n) + q\right] f_n(x, y)\, dxdy = 0$$

เมื่อแก้สมการ (4 ก) หาค่า $a_1, a_2 \ldots a_n$ ออกมาได้แล้ว แทนค่าเหล่านี้กลับไปในสมการที่ (2 ก) ก็จะได้คำตอบที่ต้องการ

ในกรณีของการโก่งงอเราจะได้ GDE ในรูป $L(u) = 0$, $(q = 0)$ ดังนั้น สมการ (4 ก) จะเป็นสมการ homogeneous algebraic equations ในเทอมของสัมประสิทธิ์ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ เมื่อให้ determinant ของ(4 ก) เท่ากับศูนย์ จะหาเงื่อนไขของแรงวิกฤติออกมาได้

ผนวก ข

การหา Membrane Solution

ใน Polar Coordinate เราจะได้สมการทั่วไปของ membrane equilibrium ดังต่อไปนี้ [8]

$$N_{rr,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{N_{rr} - N_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta} + N_{r\theta,r} + \frac{2}{r} N_{r\theta} = 0 \qquad \text{..........(1 ข)}$$

จากสมการ (1 ข) หรือสมการที่ (1) ในบทที่ 2 เราสามารถหา $N_{rr}, N_{\theta\theta}, N_{r\theta}$ มาแทนค่าแล้วสอดคล้องกันได้ดังนี้

$$N_{rr} = \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta}$$

$$N_{\theta\theta} = \phi_{,rr} \qquad \text{..........(2 ข)}$$

$$N_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta} - \frac{1}{r} \phi_{,r\theta}$$

เมื่อ ϕ เป็น stress function อยู่ในเทอมของ r และ θ

และจากการแก้สมการที่ปัญหาเป็นแบบ 2 มิติ เราจะได้ GDE ในรูปของ polar coordinate ดังนี้ [8]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \quad \text{...(3 ข)}$$

จะเห็นว่าสมการ (3 ข) นี้คลุมสมการ (1 ข) ด้วย เพราะ stress function ϕ ที่ใช้ทั้งสองสมการเป็นตัวเดียวกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ สมการ (3 ข) ได้จากการแทนค่า $N_{rr}, N_{\theta\theta}$ ใน (2 ข) ลงใน Compatibility Equation ในเทอมของ Stress ดังนี้

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(N_{rr} + N_{\theta\theta}) = 0$$

ในกรณีของแผ่นวงแหวนรับแรงตามรูปที่ 4 คำตอบของแรงที่เกิดขึ้นภายในวงแหวนจะมีสมมาตรกับจุดศูนย์กลาง ฉะนั้น ϕ จึงไม่ขึ้นอยู่กับมุม θ นั่นคือสมการ (3 ข) จะลดรูปเป็น

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{d^4\phi}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr} = 0 \quad \ldots\ldots (4 \text{ ข})$$

และคำตอบทั่วไปของสมการ (4 ข) คือ

$$\phi = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4$$

จาก (2 ข) เราจะได้

$$\begin{aligned} N_{rr} &= \frac{1}{r}\phi_{,r} = \frac{c_1}{r^2} + c_2(1 + 2\ln r) + 2c_3 \\ N_{\theta\theta} &= \phi_{,rr} = -\frac{c_1}{r^2} + c_2(3 + 2\ln r) + 2c_3 \qquad \ldots\ldots\ldots (5 \text{ ข}) \\ N_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

สำหรับในกรณีแผ่นวงแหวน คำตอบที่เป็น single - valued สำหรับ (5 ข) จะได้เมื่อให้ $c_2 = 0$ [8] ดังนั้น

$$\begin{aligned} N_{rr} &= \frac{c_1}{r^2} + 2c_3 \\ N_{\theta\theta} &= -\frac{c_1}{r^2} + 2c_3 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6 \text{ ข})$$

คำตอบ (6 ข) นี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาที่เป็นรูปทรงกระบอกกลวง หรือแผ่นวงแหวนที่มีแรงดันสม่ำเสมอตามผิวขอบนอก และขอบใน หรือมีแรงดันกระทำตามผิวขอบใดขอบหนึ่งก็ได้ ถ้า P_i และ P_o เป็นแรงดันตามขอบในและขอบนอก และ a กับ b เป็นรัศมีของขอบใน และขอบนอกตามลำดับ

จะได้ boundary conditions

$$(N_{rr})_{r=a} = -P_i$$

$$(N_{rr})_{r=b} = -P_o$$

แทนค่าลงใน (6 ข) จะได้

$$c_1 = \frac{a^2b^2(P_o - P_i)}{b^2 - a^2}$$

$$2c_3 = \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2}$$

นั่นคือ

$$N_{rr} = \frac{a^2b^2(P_o - P_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\ldots\ldots(7\ \text{ข})$$

$$N_{\theta\theta} = -\frac{a^2b^2(P_o - P_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2}$$

$$N_{r\theta} = 0$$

ในกรณีของเรา $P_i = 0$ ฉะนั้นสมการ (7 ข) จะลดรูปเหลือ

$$N_{rr} = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{P_o}{r^2} - \frac{P_o b^2}{b^2-a^2}$$

$$N_{\theta\theta} = -\frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{P_o}{r^2} - \frac{P_o b^2}{b^2-a^2}$$

หรือตามรูปที่ 4 $\quad P_o = \bar{N}$

เพราะฉะนั้น

$$N_{rr} = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \frac{\bar{N}}{r^2} - \frac{b^2}{b^2-a^2} \cdot \bar{N}$$

$$\ldots\ldots(8\ \text{ข})$$

$$N_{\theta\theta} = -\frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \frac{\bar{N}}{r^2} - \frac{b^2}{b^2-a^2} \bar{N}$$

สมการที่ (8 ข) นี้คือ สมการที่ 5 ในบทที่ 2 เป็น Membrane Solution ที่นำไปแก้ปัญหาการโก่งงอของแผ่นวงแหวนตามรูปที่ 4 นั่นเอง

ผนวก ค

การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในการเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณหาแรงโก่งงออกมานี้ เราต้องพยายามแยกตัวคงที่เป็นกลุ่ม ๆ ไป เพื่อให้จัดกรุ๊ปเข้าโปรแกรมได้ง่ายขึ้น จากตัวอย่างของการคำนวณในบทที่ 2 เราได้สมการ (c) ออกมาเมื่อแทนค่า $s_1, s_2 \ldots\ldots s_n$ ลงไป เราจะได้สมการของ (c) ออกมาในรูปใหม่ดังนี้

$$D_1 + (D_2 \cdot n^2 + D_3)\alpha_1 + D_4\alpha_2 + D_5\alpha_3 = 0$$

โดย $D_1, D_2, \ldots D_5$ ติดอยู่ในค่าของ $c_o, c_2, \ldots\ldots c_8$ และ x_n หรืออีกนัยหนึ่ง D_1 ถึง D_5 เป็น function ของ a และ b เท่านั้น และเมื่อแทนค่า $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ อีกครั้งหนึ่ง แล้วจัดเทอมใหม่จะได้

$$N = -\frac{1}{b^2}\left[\frac{D_1 + D_4(1 + 2n^2) + D_5(n^4 - 4n^2)}{(D_3B + D_4A) + (D_2B - D_5A)\,n^2}\right] \qquad \ldots\ldots(1\text{ ค})$$

สมการที่ (1 ค) นี้ D_1 ถึง D_5 เป็น function ของ (a/b) หรือ k โดยให้ a = bk แล้วดึง b ตัวร่วมออกมา เทอมในวงเล็บทั้งหมดก็คือ λ นั่นเอง

ข้อจำกัดและวิธีใช้โปรแกรม

สำหรับโปรแกมที่นำมาแสดงนี้ มีข้อจำกัดในการใช้ดังนี้

1) ใช้คำนวณการโก่งงอด้วยวิธีของ Galerkin โดยมีแรงกดสม่ำเสมอตามแนวรัศมีโดยกระทำตามขอบนอกของแผ่นวงแหวนบางเท่านั้น

2) สำหรับสมการที่เหมาะสมกับ boundary conditions ต่าง ๆ นั้นเมื่อกระจายเทอมออกมาจะต้องได้รูปแบบดังนี้

$$f(r) = c_o + c_2r^2 + c_4r^4 + c_6r^6 + c_8r^8 \qquad \ldots\ldots(2\text{ ค})$$

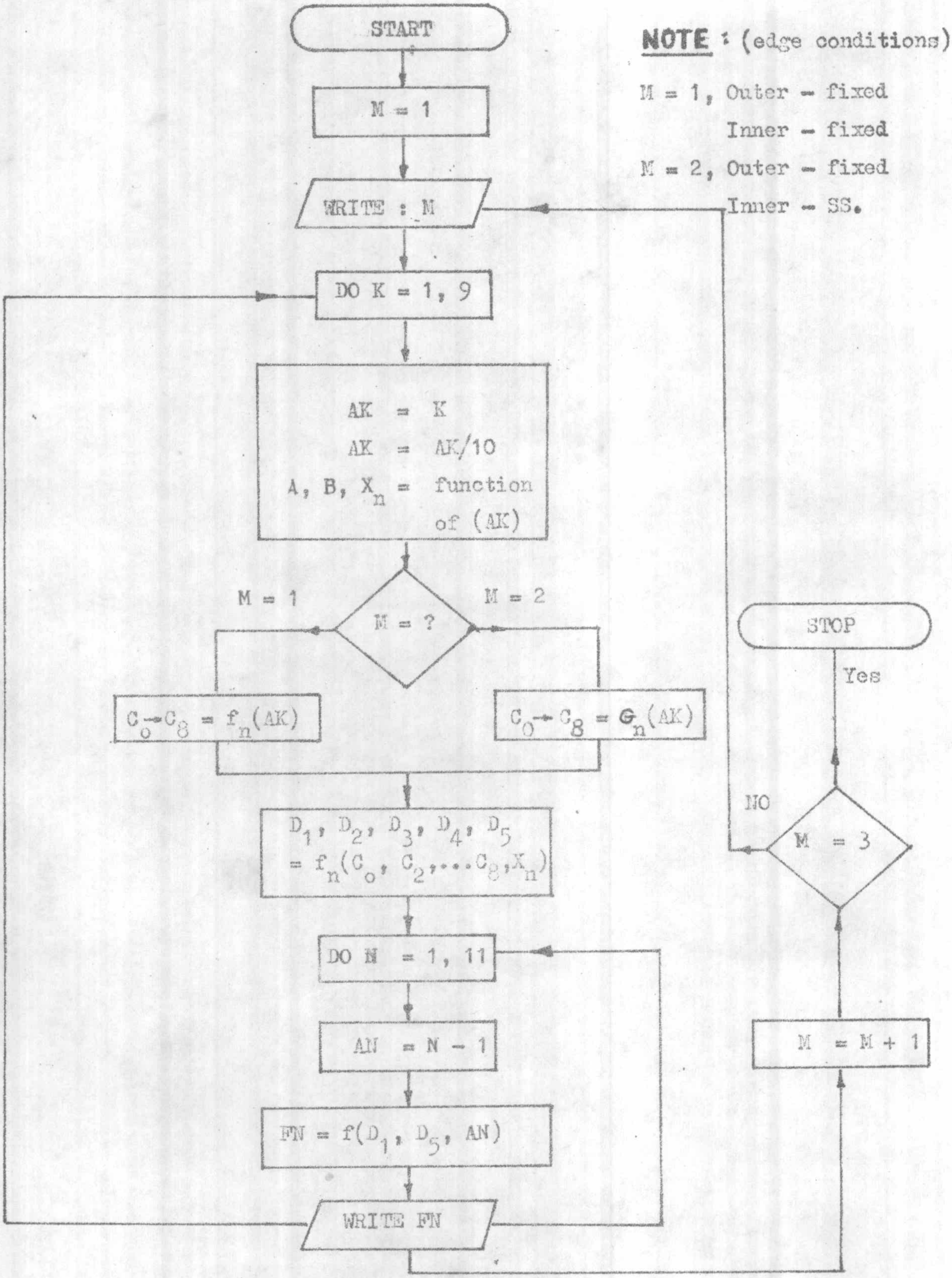
ในกรณีที่กำลังของ r เป็นเลขคี่ หรือเกินกว่า 8 จะต้องหา expression ของ D_1 ถึง D_5 ออกมาใหม่

3) ใช้คำนวณ ค่า $k = 0.1, 0.2, \ldots\ldots\ldots 0.9$

$n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots 10$

(k, n คือ AK, AN ในโปรแกรม)

วิธีใช้ : เมื่อกระจายเทอมออกมาดังสมการ 2 ก. แล้ว เขียน $c_o, c_2, \ldots c_n$ ในรูป $f_n(k)$. b^i คือให้ $a = kb$ แล้วดึง b^i ตัวร่วมออกมา นำ $c_n = f_n(k)$ มาเขียนโปรแกรมเท่านั้น (สำหรับ b^iนั้น นำไปคิดคำนวณแล้วจะได้คำตอบสุดท้ายดัง ๆ ก) แล้วคำตอบ (λ = FN ในโปรแกรม) จะถูกเขียนออกมาตามขั้นตอนที่แสดงด้วย flow chart ในหน้าต่อไปนี้



รูปที่ 11 Flow Chart

โปรแกรมการหาแรงโก่งงอของแผ่นวงแหวนบาง

```
C
C
C        BUCKLING LOAD ANALYSIS ( GALERKIN-METHOD )
C        M = 1, OUTER-C., INNER-C.
C               F(R) = C((A**2-R**2)(B**2-R**2))**2
C        M = 2, OUTER-C., INNER-SS.
C               F(R) = C(A**2-R**2)(B**2-R**2)**2
C
C
           DIMENSION X(20)
           M = 1
      6  WRITE (3,7) M
      7  FORMAT (1H1,//////////30X,9H FOR M = ,I3)
C
           DO 20  K   = 1,9
                  AK  = K
                  AK  = AK/10.
           A   = AK**2/(1.-A<**2)
           B   = 0.-1./(1.-A<**2)
C
C               TO FIND THE VALUES OF X(N),
C               WHERE  XN3 = X(-3), XN1 = X(-1),
C                      X(1)= X(1)  AND SO ON
C
        XN3 = 0.-(1.-1./A<**3)/3.
        XN1 = 0.-(1.-1./A<)
         DO 10 I = 1,15,2
               AI = I
     10          X(I) = (1.-A<**I)/AI
C
           GO TO (1,2), M
C
      1  C0 = AK**4
         C2 = -2.*(AK**2 + 1.)*AK**2
         C4 = AK**4 + 4.*A<**2 + 1.
         C6 = -2.*(AK**2 + 1.)
         C8 = 1.
               GO TO  8
      2  C0 = AK**2
         C2 = -(2.*AK**2 + 1.)

         C4 = AK**2 + 2.
         C6 = -1.
         C8 = 0.
```

```
033         8    D1 = 72.*C0*C4*X(1) + (72.*C2*C4 + 600.*C0*C6)*X(3)
               *      +(72.*C4**2 + 600.*C2*C6 + 2352.*C0*C8)*X(5)
               *      +(672.*C4*C6 + 2352.*C2*C8)*X(7) + (600.*C6**2
               *      +2424.*C4*C8)*X(9) + (2952.*C6*C8)*X(11) +
               *      2352.*C8**2*X(13)
034              D2 = C0**2*XN1 + 2.*C0*C2*X(1) + (C2**2 + 2.*C0*C4)
               *      *X(3) + 2.*(C2*C4 + C0*C6)*X(5) + (C4**2 +
               *      2.*C2*C6 + 2.*C0*C8)*X(7) + 2.*(C4*C6 + C2*C8)*
               *      X(9) + (C6**2 + 2.*C4*C8)*X(11) + 2.*C6*C8*X(13)
               *      +C8**2*X(15)
035              D3 = 0.-(4.*C0*C2*X(1) + (4.*C2**2 + 16.*C0*C4)*X(3)
               *      +(20.*C2*C4 + 36.*C0*C6)*X(5) + (16.*C4**2 +
               *      40.*C2*C6 + 64.*C0*C8)*X(7) + ( 52.*C4*C6 +
               *      68.*C2*C8)*X(9) + (36.*C6**2 + 80.*C4*C8)*X(11)
               *      +(100.*C6*C8)*X(13) + 64.*C8**2*X(15) )
036              D4 = 0.-(8.*C0*C4*X(1) + (8.*C2*C4 + 24.*C0*C6)*X(3)
               *      +(8.*C4**2 + 24.*C2*C6 + 48.*C0*C8)*X(5) +
               *      (32.*C4*C6 + 48.*C2*C8)*X(7) + (24.*C6**2 +
               *      56.*C4*C8)*X(9) + 72.*C6*C8*X(11) + 48.*C8**2
               *      *X(13) )
037              D5 = C0**2*XN3 + 2.*C0*C2*XN1 + ( C2**2 + 2.*C0*C4)*
               *      X(1) + 2.*(C2*C4 + C0*C6)*X(3) + (C4**2 +
               *      2.*C2*C6 + 2.*C0*C8)*X(5) + 2.*(C4*C6 + C2*C8)
               *      *X(7) + (C6**2 + 2.*C4*C8)*X(9) + 2.*C6*C8*X(11)
               *      + C8**2*X(13)
          C
040              WRITE (3,15) AK
041        15    FORMAT (1H1,////30X,9H FOR K = ,F6.2)
          C
042                 DO 20 N = 1,16
043                    AN = N-1
044             FN = 0.-(D1+D4*(1.+2.*AN**2)+D5*(AN**4-4.*AN**2))/((B*
               *     D3+A*D4)+(B*D2-A*D5)*AN**2)
045              WRITE (3,17) AN,FN,FN
046        17    FORMAT(/20X,5H N = ,F6.2,5X,12H SOLUTION IS,5X,E13.6,
               *         3X,4H OR ,3X,F8.2)
047        20    CONTINUE
050                 M = M + 1
051                 IF (M.EQ.3) STOP
052                 GO TO 6
053                 END
```

ประวัติการศึกษา

นายวิวัฒน์ คล่องพานิช เกิดเมื่อวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2494 ที่จังหวัดเชียงใหม่ จบการศึกษาชั้นมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 2 ที่โรงเรียนมัธยมสารภี จังหวัดเชียงใหม่ แล้วเข้ามาศึกษาต่อชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่โรงเรียนอำนวยศิลป์ธนบุรี และจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาพระนคร จากนั้นเข้ารับการศึกษา และจบการศึกษาขั้นปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ที่มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปี พ.ศ. 2516 ปัจจุบันรับราชการเป็นอาจารย์ในคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่