บทที่ 1

บทนำ

เนื่องจากเป็นที่ยอมรับกันว่าในเวลานี้ยังไม่มีผู้ใดสามารถเข้าใจกลศาสตร์ของเม็ดของแข็งขณะที่ไหลอย่างแท้จริง เพราะมีการศึกษาเกี่ยวกับการไหลของเม็ดของแข็งน้อยมาก ถึงแม้ว่าจะมีงานที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนี้ อย่างมากมายในอุตสาหกรรม

ตลอดระยะเวลา 50 ปีที่ผ่านมา ได้มีผู้พยายามสร้างสูตรสำเร็จเพื่อใช้คำนวณหาอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งผ่านรูกลมของท่อทรงกระบอกและกรวยแต่ยังไม่มีสูตรใดเป็นที่ยอมรับกันแน่นอน จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1961 เบเวอร์ลู (Beverloo)(1) ได้สร้างสูตรซึ่งเป็นที่เชื่อถือของคนทั่วไป ในปี ค.ศ. 1973 เดวิดสันและเนดเดอร์แมน (Davidson and Nedderman)(2) สามารถสร้างทฤษฎีเพื่ออธิบายความสัมพันธ์ของสูตรของเบเวอร์ลูที่กล่าวว่า $W \propto D_o^{5/2}$ ได้สำเร็จ นอกจากนั้นเดวิดสันและเนดเดอร์แมนยังสามารถแสดงให้เห็นว่าความสูงของเม็ดของแข็งทั้งหมดที่ถูกบรรจุอยู่ภายในภาชนะไม่มีอิทธิพลต่ออัตรามวลการไหล

ขณะที่ขนาดของเม็ดของแข็งเล็กลง อิทธิพลของความดันที่กระทำต่อเม็ดของแข็งในทิศทางที่ตรงกันข้ามกับแรงโน้มถ่วงของโลกจะมีค่ามากขึ้น ดังนั้นอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งจะมีค่าน้อยลง สพิงค์ (Spink)(3) ได้ศึกษาถึงอิทธิพลของขนาดของเม็ดของแข็งที่มีต่ออัตรามวลการไหล บิงแฮมและไวคอฟ (Bingham and Wikoff)(4) วัดอัตรามวลการไหลของทรายแห้งที่ไหลผ่านท่อกลวงที่มีขนาดเล็ก และพบว่าอัตรามวลการไหลมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อท่อมีความยาวมากขึ้น ริชาร์ด (Richards)(5) ก็ค้นพบผลของการทดลองที่เหมือนกัน ปรากฏการณ์อันนี้ไม่ต้องสงสัยเลยว่าเกิดจากอิทธิพลของลม และอิทธิพลของอากาศที่อยู่ระหว่างเม็ดของแข็ง

นอกจากการศึกษาเรื่องอัตรามวลการไหลแล้ว ยังมีผู้พยายามศึกษาปรากฏการณ์ขณะที่เม็ดของแข็งเกิดการไหล บราวน์และฮอกส์เลย์ (Brown and Hawksley)(6) พบ

ว่าขณะที่เม็ดของแข็งไหลออกจากถังที่มี 2 มิติ จะมีอาณาเขตที่มีการไหลแตกต่างกันอยู่ 5 อาณาเขต ระดับบนของเม็ดของแข็งที่อยู่ภายในถัง จะไม่เคลื่อนที่จนกว่าช่องว่างระหว่างเม็ดของแข็งทั้งหมดที่ถูกบรรจุอยู่ในถังมีมากพอ บราวน์และริชาร์ด **(Brown and Richards)**[7] ได้ศึกษาช่องว่างระหว่างเม็ดของแข็งขณะที่เกิดการไหลด้วยภาพถ่ายและพบว่ามีช่องว่างระหว่างเม็ดของแข็งเกิดขึ้นรอบรูทางออก **(empty annulus)** นอกจากนั้นยังได้ทำการทดลองหาตำแหน่งของแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระ **(free-fall arch)** ซึ่งอยู่ใกล้กับรูทางออก แนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระคือพื้นที่ที่เม็ดของแข็งเริ่มจะตกอย่างอิสระ ภายใต้อิทธิพลของแรงโน้มถ่วงของโลกแต่เพียงประการเดียว บราวน์ **(Brown)**[8] ได้สร้างทฤษฎีพลังงานที่น้อยที่สุดเพื่อพิสูจน์ว่าแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระนี้มีอยู่จริง เปอร์รี่และแฮนด์เลย์ **(Perry and Handley)**[9] ได้ทำการทดลองวัดความดันของเม็ดของแข็งขณะที่ไหลออกจากถังและพบว่าอาณาเขตที่มีความดันค่าที่สุดจะอยู่ที่ตำแหน่งต่ำกว่าแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระเล็กน้อย ความหนาแน่นขณะไหลของเม็ดของแข็งมีค่าต่ำที่สุดที่บริเวณที่อยู่เหนือแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระ กล่าวคือเม็ดของแข็งมีช่องว่างระหว่างกันมากที่บริเวณรูทางออก

หัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงสภาวะของเม็ดของแข็งที่อยู่ในภาชนะ สมการของเจนเสน ซึ่งเป็นสมการที่พิสูจน์ว่าความสูงของเม็ดของแข็งทั้งหมดที่ บรรจุอยู่ภายในท่อทรงกระบอกไม่มีอิทธิพลต่อความดันของเม็ดของแข็ง ทฤษฎีพลังงานที่น้อยที่สุดของบราวน์ซึ่งเป็นทฤษฎีที่พิสูจน์ว่าอัตราความเร่งมีอิทธิพลต่ออัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งที่อยู่บริเวณรูทางออก สมการของเบเวอร์ลู ซึ่งเป็นสมการสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งผ่านรูกลมของท่อทรงกระบอก ทฤษฎีนาฬิกาทรายสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งผ่านรูกลมของกรวย

1.1 <u>สภาวะของเม็ดของแข็งที่อยู่ในภาชนะ</u>

เนื่องจาก เม็ดของแข็งและของเหลวมีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน ปรากฏการณ์ที่เห็นได้ชัดคือกรณีที่เราเทเม็ดของแข็งลงบนโต๊ะ เม็ดของแข็งสามารถกองตัวอยู่บนโต๊ะได้เพราะเม็ดของแข็งมีแรงเฉือนและแรงความเค้นดึงเป็นคุณสมบัติประจำตัว เม็ดของแข็งจึงอยู่ในสภาวะสมดุลย์ได้แม้ว่าจะมีแรงภายนอกกระทำต่อมัน แต่ของเหลวไม่มีคุณสมบัติอันนี้ดังนั้นเมื่อเราเทของเหลวลง

บนโต๊ะของเหลว ไม่สามารถกองตัวอยู่บนโต๊ะได้ ของเหลวจึงแผ่ขยายไปตามพื้นผิวของโต๊ะ

เมื่อเราบรรจุเม็ดของแข็งลงในภาชนะ แล้วเปิดรูที่ก้นภาชนะเพื่อให้เม็ดของแข็งไหลออกมา เม็ดของแข็งจะเริ่มไหลออกมาได้ก็ต่อเมื่อมันสามารถเอาชนะแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด และแรงเกาะกันของเม็ดของแข็ง.

เราสามารถอธิบายสภาวะขณะที่เม็ดของแข็งเริ่มจะไหลออกมาด้วยกฎของการแตกหักของมอร์-คูลอมบ์ **(Mohr-Coulomb's failure Criterion)** ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้คือ

$$\tau = \sigma \tan \phi + C_o \qquad (1.1.1)$$

โดย τ = ความเค้นเฉือนที่มีค่ามากที่สุดของเม็ดของแข็ง ก่อนที่เม็ดของแข็งไหล

σ = ความเค้นตรง

ϕ = มุมแห่งความเสียดทานภายในของเม็ดของแข็ง

C_o = ค่าคงที่ของแรงเกาะกันระหว่างเม็ดของแข็ง

จากแผนภูมิของวงกลมมอร์ รูป(2.1.1) สมการ (2.1.1) แสดงเส้นที่สัมผัสวงกลมของมอร์และตัดแกนของความเค้นเฉือนที่จุด C_o ความชาดของเส้นคือ $\tan \phi$

C_o มีค่ามากขึ้นเมื่อเม็ดของแข็งมีขนาดเล็กลง แรงตึงผิว แรงแวนเดอร์วาว และแรงดึงดูดไฟฟ้าสถิตย์ ต่างมีอิทธิพลต่อ C_o

เราสามารถวัดค่าของ C_o โดยใช้วิธีสปลิทเพลตเทส **(split plate test)** เม็ดของแข็งที่ใช้ในการศึกษาคือเมล็ดพืชซึ่งมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางประมาณ 0.2-0.4 ซ.ม. และผิวของเมล็ดพืชมีความมัน C_o ที่วัดได้มีค่าเป็นศูนย์[10] ดังนั้นเมล็ดพืชจึงเป็นเม็ดของแข็งที่ไม่มีแรงเกาะกันระหว่างเม็ดของแข็ง **(cohesionless material)**

จากสมการ (1.1.1) เราได้สูตรว่า

$$\tau = \sigma \tan \phi \qquad (1.1.2)$$

สูตรนี้ทำให้เราสามารถคำนวณหาค่า ϕ ซึ่งเป็นค่ามุมแห่งความเสียดทานภายใน บทที่ 3 จะกล่าวถึงการทดลองเพื่อหาค่า ϕ

เราสามารถใช้สมการ (1.1.2) สำหรับกรณีที่เมล็ดพืชเริ่มจะไหลแต่เมื่อเมล็ดพืชไหลแล้ว เราจะพบปัญหาในการเลือก ϕ เป็นค่าของมุมแห่งความเสียดทานภายใน สาเหตุเพราะ ϕ มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามความเครียดและช่องว่างขณะไหล **(flowing voidage)**[11] ถ้าความหนาแน่นขณะไหล **(flowing density)** ρ_f มีค่าเปลี่ยนไปตามตำแหน่งต่าง ๆ ในภาชนะที่บรรจุเมล็ดพืช ϕ จะมีค่าเปลี่ยนไปตามตำแหน่งต่าง ๆ ในภาชนะนั้นด้วย เนื่องจากยังไม่มีผู้ใดสามารถหาความสัมพันธ์ที่แน่นอนระหว่างค่าของ ρ_f กับตำแหน่งต่าง ๆ ของเมล็ดพืชที่อยู่ในภาชนะได้ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจึงสมมุติให้ ρ_f และ ϕ มีค่าคงที่ จากผลของการทดลองที่จะกล่าวถึงในบทที่ 3 เราพบว่า ρ_f เฉลี่ยมีค่าคงที่ ถึงแม้ว่า ρ_f ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในภาชนะ จะมีค่าไม่คงที่ก็ตาม

จากหัวข้อ 1.2 ทำให้เรารู้ว่า เมื่อเราบรรจุเมล็ดพืชลงในท่อทรงกระบอกความสูงของเมล็ดพืชทั้งหมดที่บรรจุอยู่ภายในท่อ ไม่มีอิทธิพลต่อความดันของเมล็ดพืช สาเหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะผนังของท่อรับน้ำหนักทั้งหมดของเมล็ดพืชเอาไว้[12] **(passive state)**

แต่เมื่อเราบรรจุของเหลวลงในท่อความดันของของเหลวมีค่ามากหรือน้อย แปรตามความสูงของของเหลวที่บรรจุอยู่ภายในท่อ

มีผู้ทำการทดลองวัดความเร็วในสองมิติของเมล็ดพืชโดยใช้ท่อสี่เหลี่ยมที่มีความแคบน้อยมากเมื่อเทียบกับความกว้าง[13] จากผลของการทดลองของเขาทำให้เรารู้ว่าความเร็วของเมล็ดพืชที่คงที่อยู่ในบริเวณที่มีความสูงของระดับเมล็ดพืชในท่อสี่เหลี่ยมมากกว่าสองเท่าของความกว้างของท่อสี่เหลี่ยม

สาเหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะเมล็ดพืชบางส่วนที่ค้างอยู่บริเวณใกล้ ๆ กับรูทางออกทำให้เกิดเป็นอาณาเขตที่เมล็ดพืชหยุดนิ่ง **(stagnant zone)** (รูป 1.1.2) อาณาเขตนี้ทำให้การไหลของเมล็ดพืชประกอบด้วยความเร็วในแนวราบและความเร่ง

ในกรณีของของเหลว ความเร็วของของเหลวขณะที่ไหลออกจากท่อสี่เหลี่ยมจะเปลี่ยน

ไปตามความสูงของท่อ ด้วยความสัมพันธ์ซึ่งเราอธิบายได้ด้วย **Bernoulli's equation** ดังนี้คือ

$$\Delta \frac{1}{2}\langle \bar{v}^2 \rangle + g\Delta h + \frac{1}{\rho}(\Delta P) = 0$$

$$\frac{1}{2}(\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2) + g(h_1 - h_2) = 0$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_1}$$

โดย v_1 v_2 คือความเร็วของของเหลวที่ระดับบนสุดและที่รูของท่อตามลำดับ

h_1 h_2 คือความสูงของของเหลวที่ระดับบนสุดและที่รูของท่อตามลำดับ

P_1 P_2 คือความดันของของเหลวที่ระดับบนสุดและที่รูของท่อตามลำดับ

P_1 และ P_2 มีค่าเท่ากับความดันของบรรยากาศ

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

ρ คือ ความหนาแน่นของน้ำ

จากที่กล่าวมาข้างต้นเราสรุปได้ว่า เราไม่สามารถนำกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ของของเหลว ทั้งในกรณีที่ ของเหลวอยู่ในสภาวะหยุดนิ่ง หรือกำลังไหล มาอธิบายปรากฏการณ์ของของแข็งได้เลย

1.2 สมการของเจนเสนสำหรับคำนวณหาความดันของเม็ดของแข็งที่อยู่ในท่อทรงกระบอก

ในปี 1895 เจนเสน (Janssen)[12] ได้ทำการสร้างสมการสำหรับคำนวณหาความดันของเม็ดของแข็งที่อยู่ภายในท่อทรงกระบอก โดยพิจารณาท่อทรงกระบอกในรูป 1.2.1 ดังนี้คือ

ณ. ตำแหน่ง X พิจารณาปริมาตรของเม็ดของแข็งทั้งหมดที่อยู่ในท่อที่มีความหนา ΔX และมีพื้นที่ $\pi T^2/4$

แรงดันในแนวดิ่งที่กระทำต่อพื้นผิวของปริมาตรอันนี้คือ

$$\pi T^2 P_v/4$$

โดย T คือ เส้นผ่าศูนย์กลางภายในของท่อทรงกระบอก.

P_v คือ แรงแห่งความดัน (แรงดันต่อตารางพื้นที่) ในแนวดิ่ง ที่กระทำต่อพื้นผิวของปริมาตรอันนี้ แรงแห่งความดันนี้มีค่าคงที่ตลอดพื้นที่ในแนวราบ

ถ้าแรงแห่งความดันในแนวดิ่ง มีค่ามากขึ้นตามความลึก แรงดันขึ้นในแนวดิ่งที่กระทำโต้ตอบต่อพื้นผิวของปริมาตรอันนี้คือ

$$\pi T^2(P_v+\Delta P_v)/4$$

ดังนั้นแรงลัพธ์จะเป็นแรงดันขึ้นในแนวดิ่งและมีค่าเท่ากับ

$$\pi T^2(\Delta P_v)/4$$

ให้ P_h เป็นแรงแห่งความดันในแนวราบที่เม็ดของแข็งกระทำต่อผนังและ U_w เป็นสัมประสิทธิ์แห่งความเสียดทานที่ผนัง

เนื่องจากเม็ดของแข็งอยู่ในสภาวะที่กำลังจะไหลลง ดังนั้นแรงเสียดทานจะกระทำโต้ตอบในทิศทางขึ้น และมีค่าดังนี้คือ

$$\pi T\,\Delta X U_w P_h$$

น้ำหนักของปริมาตรที่เรากำลังพิจารณาคือ

$$\pi T^2 \Delta X \rho_b/4$$

โดย ρ_b คือความหนาแน่นปรากฏ สมมุติให้ ρ_b มีค่าคงที่ตลอดความลึกของท่อทรงกระบอก

เนื่องจากปริมาตรอันนี้อยู่ในสภาวะสมดุลย์ จึงสร้างสมการได้ดังนี้คือ

$$T\Delta P_v+4U_w P_h\Delta X = T\rho_b\Delta X$$

เจนเสนสมมุติว่า P_h แปรเป็นสัดส่วนตาม P_v และ P_h มีค่าน้อยกว่า P_v ดังนั้น

$$P_h = K_o P_v$$

โดย K_o คือค่าคงที่ ที่ไม่แปรตามความลึก

จะได้สูตรว่า

$$\frac{dP_v}{dX} + \frac{4U_wK_oP_v}{T} = \rho_b$$

$$\frac{d\,P_v e^{(4U_wK_o/T)X}}{dX} = \rho_b e^{(4U_wK_o/T)X}$$

อินทีเกรต

$$P_v e^{(4U_wK_o/T)X} = \frac{T\rho_b e^{(4U_wK_o/T)X}}{4U_wK_o} + A$$

ก. สมมุติว่ามีน้ำหนักกระทำณส่วนบนสุดของเม็ดของแข็งที่อยู่ภายในท่อทรงกระบอก ดังนั้น แรงแห่งความดันที่ตำแหน่ง $X = 0$ คือ P_{vo} A ซึ่งเป็นค่าคงที่ จะมีค่าดังต่อไปนี้

$$P_{vo} - T\rho_b/(4U_wK_o) = A$$

$$P_v = \frac{\rho_b T\,(1 - e^{-(4U_wK_o/T)X})}{4U_wK_o} + P_v e^{-(4U_wK_o/T)} \qquad (1.2.1)$$

ข. สมมุติว่าไม่มีน้ำหนักกระทำที่ตำแหน่ง $X = 0$ ดังนั้น P_{vo} จะมีค่าเป็น ศูนย์ ; เนื่องจาก

$$e^{-qX} = (1 - qX + \ldots)$$

ถ้า X มีค่าน้อย ดังนั้น

$$e^{-qX} = (1 - qX)$$

จากสมการ (1.1.1) จะได้ว่า

$$P_v \simeq \rho_b X \qquad (1.2.2)$$

กรณีนี้เป็นกรณีเดียวกับของของเหลว

แต่ถ้า X มีค่ามาก จากสมการ(1.2.1) จะได้ว่า

$$P_v \doteqdot T\rho_b/(4U_w K_o) \qquad (1.2.3)$$

กรณีนี้เป็นกรณีที่ความสูงไม่มีอิทธิพลต่อความดัน

รูป(1.2.2) แสดงกราฟของ P_v และ X

สมการเหล่านี้มีรากฐานมาจากสมมุติฐาน 4 ข้อคือ

1. P_v มีค่าคงที่ตลอดระนาบในแนวราบ
2. $K_o = P_h/P_v$ K_o เป็นค่าคงที่ และค่าของ K_o ไม่แปรตามความลึกของท่อทรงกระบอก
3. ค่าของ ρ_b คงที่ และค่าของ ρ_b ไม่แปรตามความลึก
4. เม็ดของแข็งอยู่ในสภาวะเริ่มจะไหล

ถ้าท่อทรงกระบอกมีความลึกมากพอ ความดันของเม็ดของแข็งทั้งหมดที่ บรรจุอยู่ภายในท่อจะมีค่าเป็น $T\rho_b / (4U_w K_o)$ และความดันนี้จะไม่แปรตามความลึกของท่อ

สาเหตุที่ความลึกของเม็ดของแข็งทั้งหมดที่ถูกบรรจุอยู่ภายในท่อทรงกระบอกไม่มีอิทธิพลต่อความดันของเม็ดของแข็งเพราะผนังของท่อทรงกระบอกรับน้ำหนักของเม็ดของแข็งทั้งหมดเอาไว้ **(passive state)**

กรณีที่ $P_{vo} \neq 0$ **อิทธิพลของ** P_{vo} จะหมดไปถ้าท่อมีความลึกมากพอ ถ้าสมมุติให้ P_{vo} เกิดขึ้นจากน้ำหนักที่กดลงมาของเม็ดของแข็งที่อยู่ในท่อทรงกระบอก ที่อยู่เหนือขึ้นไปจากระดับ $X = 0$ (รูป1.2.1)

จากสมการ(1.2.1) จะพบว่าน้ำหนักที่กดอยู่ที่ระดับ $X = 0$ จะทำให้ความดันมีค่าเพิ่มขึ้น ความดันส่วนที่เพิ่มขึ้นมีค่าเท่ากับ

$$P_{vo} e^{-(4U_w K_o/T)X}$$

ที่ $X = 4T$ จะได้ว่า

$$P_{vo} e^{-(16 U_w K_o)}$$

ค่า K_o และ U_w อยู่ในพิสัย $0 < X \leq 4T$

เนื่องจากเม็ดของแข็งส่วนใหญ่เช่น ข้าวสาลี ข้าวโพด ซีเมนต์ และก้อนกรวด มีค่า $U_w K_o$ ประมาณ 0.10-0.22[14]

ดังนั้นค่าของ $e^{-(16\, U_w K_o)}$ จึงน้อยมาก $(e^{-3} = 0.05\ ,\ e^{-4} = 0.02)$

กล่าวคือน้ำหนักที่กดอยู่ที่ระดับ $X = 0$ ไม่มีอิทธิพลต่อความดันของเม็ดของแข็งที่ถูกบรรจุอยู่ภายในท่อทรงกระบอกถ้า $X \simeq 4T$

1.3 ทฤษฎีพลังงานที่น้อยที่สุด (Minimum energy theorem)

ในปี ค.ศ. 1961 บราวน์[8] ได้สร้างทฤษฎีเพื่อพิสูจน์ว่า อัตรามวลความเร่ง (mass acceleration) มีอิทธิพลต่อเม็ดของแข็งที่อยู่บริเวณรูทางออก เม็ดของแข็งจะไหลออกมาอย่างอิสระ(freely falling) ขณะที่เม็ดของแข็งเคลื่อนที่มาถึงรูทางออก นั่นคือเม็ดของแข็งจะตกผ่านรูทางออกด้วยอิทธิพลของแรงโน้มถ่วงของโลก

ถึงแม้ว่าการเคลื่อนที่ของเม็ดของแข็งผ่านรูของท่อทรงกระบอกจะเป็นเรื่องสลับซับซ้อน แต่อัตรามวลการไหลของมันมีค่าคงที่ บราวน์สามารถหาอัตรามวลการไหลเฉลี่ยได้โดยพิจารณาจากลำท่อ (รูป 1.3.1) ที่มีความหนาแน่น ρ_b กรัม/ซ.ม.^{3} ดังนี้

จากหลักที่ถือว่าสิ่งต่าง ๆ ในโลกไม่มีการสูญหายไป (conservation) ดังนั้น จำนวนเม็ดของเม็ดของแข็งที่ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ของลำท่อ จะมีค่าคงที่ ที่การเคลื่อนที่ที่คงที่

$$N_1 dS_1 = N_2 dS_2 \qquad (1.3.1)$$

โดย N = จำนวนเม็ดต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ในหนึ่งหน่วยเวลา

S = พื้นที่ ที่ตั้งฉากกับทิศทางของการไหลของเม็ดของแข็งที่อยู่ในลำท่อ

ถ้า v = ความเร็วที่มีทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่ dS

m = น้ำหนักของเม็ดของแข็งหนึ่งเม็ด โดยสมมุติว่าเม็ดของแข็งแต่ละเม็ดมีน้ำหนักเท่ากัน

$$\rho_b v = mN \qquad (1.3.2)$$

ให้ลำท่อมีปริมาตร dV_o จะเห็นว่างานที่กระทำต่อเม็ดของแข็งคือแรงความเค้นที่กระทำบนพื้นผิวของปริมาตร dV_o เนื่องจากความสูงไม่มีอิทธิพลต่ออัตราเวลการไหล (4, 15, 16, 17, 18, 19) ดังนั้นงานที่กระทำบนพื้นที่ dS_1 และ dS_2 จึงมีค่าน้อยมาก อาจมีค่าเป็นศูนย์ เม็ดของแข็งจะใช้พลังงานส่วนใหญ่ไปในการชนกัน การหมุนตัว และความเสียดทานของเม็ดของแข็งที่อยู่ในลำท่อที่มีปริมาตร dV_o บราวน์อ้างว่า พลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร E จะมีค่าลดลงในทิศทางของการไหลไปตามลำท่อ ให้ EdV_o คือผลบวกของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ พิจารณาที่ตำแหน่ง R,θ ของลำท่อจะพบว่า

$$2EdV_o = \rho_b dV_o(v^2 + 2Rg\cos\theta)$$

$$2E = \rho_b(v^2 + 2Rg\cos\theta) \qquad (1.3.3)$$

(เนื่องจากเม็ดของแข็งที่อยู่ต่ำกว่า แนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระ(free-fall arch) จะตกอย่างอิสระโดยปราศจากการชนกันระหว่างเม็ดของแข็งที่อยู่ในแนวราบเดียวกัน ความดันในแนวรัศมีของเม็ดของแข็งที่อยู่เหนือแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระ นี้จะมีค่าไม่มาก[7] การที่บราวน์อ้างว่า พลังงานมีค่าลดลงในทิศทางของการไหล จึงยังคงใช้ได้อย่างน้อยที่สุดในบริเวณที่อยู่เหนือแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระขึ้นมาเล็กน้อย นั่นคือ แรงเกาะระหว่างกันของเม็ดของแข็ง (กรณีที่เม็ดของแข็งเป็นเม็ดของแข็งที่มีแรงเกาะระหว่างกัน) จะหมดไปเมื่อเม็ดของแข็งเคลื่อนที่มาถึงบริเวณนี้)

เนื่องจากทิศทางของการไหลที่อยู่เหนือแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระเป็นทิศทางของการไหลในแนวรัศมี (รูป 1.3.2) พื้นที่ dS ตั้งฉากกับรัศมี R ที่มุม θ พื้นที่ dS นั้นจะมีค่าลดลงเมื่อ R มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ (รูป 1.3.1)

เนื่องจาก $dS \propto R^2$

จากสมการ (1.3.1) และ (1.3.2) จะได้ว่า

$$v = \frac{\lambda(\theta)}{R^2} \qquad (1.3.4)$$

$\lambda(\theta)$ คือค่าคงที่ที่มีค่าเปลี่ยนไปตามค่าของ θ

สมมุติให้ ρ_b มีค่าคงที่เมื่อ $-\beta \leq \theta \leq \beta$.

จากสมการ (1.3.3) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้คือ

$$\frac{2dE}{dR} = \rho_b\left(\frac{dv^2}{dR} + 2g\cos\theta\frac{dR}{dR}\right)$$

$$\frac{dE}{dR} = \frac{1}{2}\rho_b\left(-\frac{4\lambda^2(\theta)}{R^5} + 2g\cos\theta\right)$$

ที่ตำแหน่ง $R = R_m$ E จะมีค่าคงที่ และมีค่าเท่ากับ E_m

$$\frac{dE_m}{dR} = 0$$

ดังนั้น

$$R_m^5 = 2\lambda^2(\theta)/(g\cos\theta) \qquad (1.3.5)$$

แทนสมการ (1.3.5) ลงในสมการ (1.3.3) เมื่อ $E = E_m$ จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$2E_m = \frac{5\rho_b g R_m\cos\theta}{2} \qquad (1.3.6)$$

เม็ดของแข็งจะใช้พลังงานในการไหลน้อยที่สุด ที่พื้นที่ R_m, θ เนื่องจาก E มีค่าลดลงในทิศทางของการไหลไปตามลำห้อ ดังนั้น พื้นที่ R_m, θ ต้องอยู่ต่ำกว่าหรือตำแหน่งเดียวกับพื้นที่ของแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระ (free-fall arch) แต่เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าพื้นที่ R_m, θ และพื้นที่ของแนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระอยู่ตำแหน่งเดียวกัน

ให้ f เป็นความเร่งในแนวรัศมีและมีค่าดังนี้คือ

$$f = -v\frac{dv}{dR} \qquad (1.3.7)$$

จากสมการ (1.3.4) จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$f = 2\lambda^2(\theta)/R^5 \qquad (1.3.8)$$

โดย f มีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่ R มีค่าลดลง

ที่พื้นที่ R_m, θ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้คือ (ใช้สมการ (1.3.5))

$$f_m = g\cos\theta \qquad (1.3.9)$$

f_m คือความเร่งในแนวรัศมีของการตกอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลกที่ตำแหน่ง R_m, θ

E มีค่าลดลง และมีค่าน้อยที่สุดที่แนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระ นั่นคือ แนวความโค้งแห่งการตกอย่างอิสระนี้มีอยู่จริง

1.4 สมการของเบเวอร์ลูสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหล

ในปี 1961 เบเวอร์ลู[(1)] ได้สร้างสมการสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลของเมล็ดพืชผ่านรูของท่อทรงกระบอก โดยใช้รูกลมที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 0.20–1.50 และ 0.50–3.00 ซ.ม สำหรับท่อที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 5.0, 10.0 ซ.ม ตามลำดับ นอกจากนั้นเบเวอร์ลูได้ทำการทดลองเปลี่ยนรูปร่างของรูเป็นรูสี่เหลี่ยมด้านเท่า รูสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูกลม และรูสามเหลี่ยม โดยใช้ท่อที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 15.0 ซ.ม.

จากผลของการทดลองเบเวอร์ลูพบว่า

1. เส้นผ่าศูนย์กลางของท่อไม่มีอิทธิพลต่ออัตรามวลการไหล
2. ความสูงของเมล็ดพืชทั้งหมดที่บรรจุอยู่ในท่อทรงกระบอก ($H = 0–30$ ซ.ม) ไม่มีอิทธิพลต่ออัตรามวลการไหล
3. เส้นผ่าศูนย์กลางของเมล็ดพืชมีอิทธิพลต่ออัตรามวลการไหลน้อยมาก
4. สำหรับรูที่มีพื้นที่เท่ากัน อัตรามวลการไหลจะลดลงในกรณีต่อไปนี้คือรูกลม รูสี่เหลี่ยมด้านเท่า รูสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูสามเหลี่ยม
5. ขณะที่เมล็ดพืชไหลผ่านรู D_o ช่องว่างวงแหวนที่เกิดขึ้นรอบรู ทำให้เส้นผ่าศูนย์กลางของรูที่เมล็ดพืชใช้ไปในการไหลผ่านจริง ๆ คือ $(D_o - K_L)$

K_L มีค่ามากหรือน้อยแปรตามค่าของเส้นผ่าศูนย์กลางของเมล็ดพืช d ดังนั้น $K_L = kd$

เบเวอร์ลูสรุปผลของการทดลองได้ว่า

$$W = f((D_o - K_L), g, \rho_b) \qquad (1.4.1)$$

โดย W = อัตรามวลการไหล

g = ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

d = เส้นผ่าศูนย์กลางของเมล็ดพืช

k = ค่าคงที่ของช่องว่างวงแหวน

ρ_b = ความหนาแน่นของเมล็ดพืชทั้งหมดที่อยู่ในท่อ

จากความสัมพันธ์ของสมการ (1.4.1) จะได้ว่า

$$\left(\frac{M}{t}\right) = L^{a}\left(\frac{M}{L^{3}}\right)^{b}\left(\frac{L}{t^{2}}\right)^{c} \qquad (1.4.2)$$

โดย L = ความยาว M = มวล

t = เวลา

และ $a = 5/2$ $b = 1$ $c = 1/2$

ดังนั้น สูตรสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลของเมล็ดพืชผ่านรูกลมคือ

$$W = C\rho_b g^{1/2} (D_o - kd)^{5/2} \qquad (1.4.3)$$

โดย C = ค่าคงที่

จากผลการทดลองกับเมล็ดพืชที่มีลักษณะค่อนข้างกลม มี $\rho_b = 0.57\text{–}0.71$ กรัม/ซ.ม^3

มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 0.16–0.30 ซ.ม.

เบเวอร์ลูพบว่า

$C = 0.58$

$k = 1.40$

อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์ที่น่าสนใจสำหรับสูตรของเบเวอร์ลูคือ

$$W \propto (D_o - kd)^{5/2} \qquad (1.4.4)$$

1.5 ทฤษฎีนาฬิกาทราย

ในปี 1973 เดวิดสันและเนดเดอร์แมน (Davidson and Nedderman)[2] ได้สร้างทฤษฎีสำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งผ่านรูของกรวย เม็ดของแข็งที่ใช้เป็นเม็ดของแข็งที่ไม่มีแรงเกาะระหว่างกัน (cohesionless material) เม็ดของแข็งไหลออกจากกรวยภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก

ทฤษฎีนี้มีรากฐานมาจากหลักเกณฑ์ดังนี้คือ

1. รูป 1.5.1 แสดงภาคตัดขวางของกรวยที่มีมุม α โดย $\alpha \ll \pi/2$
2. รูของกรวยอยู่ที่รัศมี r_o เม็ดของแข็งที่อยู่ส่วนบนสุดของกรวยจะไหลอย่างอิสระให้ระดับบนสุดของเม็ดของแข็งอยู่ที่ตำแหน่ง r_1

3. ผนังของกรวยเรียบ ดังนั้นความเค้นเฉือนที่ผนังของกรวยจึงมีค่าเป็นศูนย์

4. เม็ดของแข็งที่กำลังไหลมีค่ามุมแห่งความเสียดทานภายในคงที่

5. เม็ดของแข็งมีขนาดเล็กกว่ารูทางออกมาก (ขนาดของรูทางออกมีค่าเท่ากับ $2r_o \sin \alpha$)

ในการวิเคราะห์ ต้องมีข้อสมมุติ 2 ข้อคือ

1. เม็ดของแข็งเคลื่อนที่อยู่ในแนวรัศมี (r) นั่นคือเม็ดของแข็งทุกเม็ดเคลื่อนที่เข้าสู่จุด O

2. ความเค้นในแนวรัศมี σ_{r_o} และ σ_{r_1} มีค่าเป็นศูนย์ที่ r_o และ r_1 ตามลำดับ

จากหลักเกณฑ์และข้อสมมุติที่กำหนดขึ้นดังกล่าวแล้ว จะนำไปสู่ทฤษฎีนาฬิกาทราย ทฤษฎีนี้ใช้สำหรับคำนวณหาอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็งซึ่งไม่มีแรงเกาะระหว่างกัน

เนื่องจากมีผู้ได้ ทำการวัดอัตรามวลการไหลของเม็ดของแข็ง และได้แสดงความสัมพันธ์ของสูตรไว้ดังนี้คือ [1]

$$W = C\rho_b g^{1/2}(D_o - kd)^{5/2} \qquad (1.5.1)$$

โดย D_o = เส้นผ่าศูนย์กลางของรู

ρ_b = ความหนาแน่นเฉลี่ยของเม็ดของแข็งทั้งหมดที่บรรจุอยู่ภายในภาชนะ

g = ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

d = เส้นผ่าศูนย์กลางของเม็ดของแข็ง

C, k = ค่าคงที่

C เป็นค่าคงที่ แต่จะมีค่ามากหรือน้อยแปรตามมุมของกรวย และมุมแห่งความเสียดทานภายใน

เมื่อ $d \ll D_o$ $W \propto D_o^{5/2}$ ความสัมพันธ์ นี้สามารถอธิบายได้โดยใช้ทฤษฎีพลังงานที่น้อยที่สุดของบราวน์[8] เนื่องจากอัตรามวลความเร่งมีอิทธิพลต่อเม็ดของแข็งที่อยู่บริเวณ D_o ดังนั้นเม็ดของแข็งจึงตกอย่างอิสระขณะที่มันผ่านรู ทฤษฎีนาฬิกาทรายจะใช้ความสัมพันธ์ของ $W \propto D_o^{5/2}$ ด้วยเหตุผลอันเดียวกัน เทอมของอัตรามวลความเร่งจะปรากฏอยู่ในสมการของการเคลื่อนที่ของเม็ดของแข็งบริเวณรู ส่วนเม็ดของแข็งทั้งหลายที่อยู่ในบริเวณเหนือรูขึ้นไปมาก ๆ จะอยู่ในสภาวะหยุดนิ่งอย่างสมดุลย์ (**static equilibrium**)

ขณะที่เม็ดของแข็งเคลื่อนที่อยู่ภายในกรวย ความเร็วของเม็ดของแข็งเป็นความเร็ว

ในแนวรัศมี r (รูป 1.5.1)[20] มุม θ ไม่มีอิทธิพลต่ออัตรามวลการไหลดังนั้นจึงสมมุติได้ว่า อัตราความเครียดเฉือน (**shear strain rate**) $\gamma_{r\theta}$ มีค่าเป็นศูนย์ ความเค้นเฉือน $\tau_{r\theta}$ มีค่าเป็นศูนย์ด้วย ความจริงที่เห็นได้ชัด คือ $\tau_{r\theta}$ มีค่าเป็นศูนย์ที่ $\theta = 0$ และ α สาเหตุเพราะแกนของความเหมือน **(axis of symmetry)** อยู่ที่ $\theta = 0$ และผนังของกรวยซึ่งเป็นผนังเรียบอยู่ที่ $\theta = \alpha$

ψ คือมุมรอบแกนของความเหมือน **(axis of symmetry)** เนื่องจากมีการเคลื่อนที่ที่เหมือนกันรอบแกนของความเหมือน ดังนั้น $\tau_{r\psi} = \tau_{\theta\psi} = 0$ เนื่องจาก $\tau_{r\theta} = \tau_{r\psi} = \tau_{\theta\psi} = 0$ ดังนั้น $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\psi$ เป็นความเค้นหลัก

เนื่องจากผนังของกรวยเอียงเข้าสู่จุด 0 เม็ดของแข็งจึงเคลื่อนที่เข้าสู่จุด 0 **(passive type)** ดังนั้น σ_r คือ ความเค้นหลักที่มีค่าต่ำ σ_ψ และ σ_θ คือ ความเค้นหลัก ที่มีค่าสูง

$$\sigma_\psi = \sigma_\theta = K\sigma_r \qquad (1.5.2)$$

โดย

$$K = (1+\sin\phi)/(1-\sin\phi) \qquad (1.5.3)$$

ϕ = มุมแห่งความเสียดทานภายในของเม็ดของแข็งซึ่งไม่มีแรงเกาะระหว่างกัน **(cohesionless material)**

เม็ดของแข็งส่วนใหญ่มีค่า $\phi \simeq 30^\circ$ ค่า $K \simeq 3$

สมมุติว่าเม็ดของแข็งเคลื่อนที่โดยมีความหนาแน่นเฉลี่ยขณะไหลคงที่ ρ_f

$$v = \frac{V_2}{r} = \frac{W}{2\pi\rho_f r^2(1-\cos\alpha)} \qquad (1.5.4)$$

โดย W = อัตรามวลการไหล

v = ความเร็วในแนวรัศมี r (รูป 1.5.1)

V = อัตราส่วนที่แปรตามค่าของอัตราปริมาตรการไหล V มีค่าคงที่พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีของเม็ดของแข็ง จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\rho_f v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_r) + \frac{\sigma_\theta + \sigma_\psi}{r} - \rho_f g\cos\theta \qquad (1.5.5)$$

เนื่องจากสมมุติให้ θ มีค่าน้อยมาก ดังนั้นค่า σ_θ จึงไม่แปรไปตามค่าของมุม θ จากที่กล่าวมาแล้วจะพบว่า $\tau_{r\theta} = \tau_{r\psi} = \tau_{\psi\theta} = 0$ นั่นคือ ความเค้นตรงตั้งฉาก σ_r σ_θ และ σ_ψ มีค่าแปรไปตามค่าของ r แต่เพียงประการเดียว

$$\sigma_\theta = \sigma_\psi = \sigma_1 = f(r)$$

$$\sigma_r = \sigma_2 = f(r)$$

$$\sigma_1 = K\sigma_2 = f(r) \qquad (1.5.6)$$

เนื่องจาก θ มีค่าน้อย ค่า $\cos\theta \simeq 1$

จากสมการ (1.5.4) (1.5.5) และ (1.5.6) จะได้ว่า

$$2\rho_f \frac{V^2}{r^5} = \frac{d\sigma_2}{dr} - 2(K-1)\frac{\sigma_2}{r} + \rho_f g \qquad (1.5.7)$$

$$2\rho_f V^2 r^{(-3-2K)} = \frac{d}{dr}(\sigma_2 r^{(2-2K)}) + \rho_f g r^{(2-2K)} \qquad (1.5.8)$$

จากการอินทีเกรต จะได้ว่า

$$\frac{-\rho_f V^2 r^{(-2-2K)}}{(1+K)} = \sigma_2 r^{(2-2K)} + \frac{\rho_f g r^{(3-2K)}}{(3-2K)} + A \qquad (1.5.9)$$

เราพิจารณาเฉพาะกรณีของเม็ดของแข็ง ซึ่งมีค่า $K > 1.5$

สมมุติว่า เม็ดของแข็งตกอย่างอิสระที่ $r = r_0$ ดังนั้น $\sigma_2 = 0$

เนื่องจากไม่มีน้ำหนักอื่นกระทำต่อเม็ดของแข็งที่ $r = r_1$ ดังนั้น $\sigma_2 = 0$

จากสมการ (1.5.9) จะได้ว่า

$$V^2 = \left(\frac{1+K}{2K-3}\right) gr_o^5 \left(\frac{1-y^{(3-2K)}}{1-y^{(-2-2K)}}\right) \qquad (1.5.10)$$

$$V^2 = f^2(y,K)\, gr_o^5$$

เม็ดของแข็งส่วนใหญ่ มีค่า $K \simeq 3$ และที่ y มีค่ามาก จากสมการ (1.5.10) จะพบว่า

$$V^2 = \left(\frac{1+K}{2K-3}\right) gr_o^5$$

$$V = \sqrt{gr_o^5 \left(\frac{1+K}{2K-3}\right)} \qquad (1.5.11)$$

จากสมการ (1.5.4) จะได้ว่า

$$V = \frac{W}{2\pi\rho_f(1-\cos\alpha)} = r_o^{5/2}\sqrt{g\left(\frac{1+K}{2K-3}\right)}$$

$$W = 2\pi\rho_f(1-\cos\alpha)\, r_o^{5/2}\sqrt{g\left(\frac{1+K}{2K-3}\right)} \qquad (1.5.12)$$

เนื่องจาก

$$(1-\cos\alpha) \simeq \frac{1}{2}\sin^2\alpha \qquad \text{เมื่อ } \alpha \ll \pi/2$$

และ

$$D_o = 2r_o\sin\alpha$$

ดังนั้น $$W = \frac{\pi \rho_f D_o^{5/2}}{4\sin^{1/2}\alpha}\sqrt{\frac{(1+K)g}{2(2K-3)}} \qquad (1.5.13)$$

สมการ (1.5.13) จะเป็นสมการเดียวกับสมการ (1.5.1) เมื่อ $k = 0$

อย่างไรก็ตามเมื่อเดวิดสันและเนดเดอร์แมน นำสูตรนี้ไปใช้ในการคำนวณหาอัตรามวลการไหล แล้วนำไปเปรียบเทียบกับอัตรามวลการไหลที่ได้จากการทดลองโดยตรง ปรากฏว่าอัตรามวลการไหลที่คำนวณได้มีค่าผิดไปจากผลที่ได้จากการทดลองประมาณ 50 %

กล่าวคือ สูตรนี้ไม่สามารถนำไปใช้คำนวณหาอัตรามวลการไหลที่แท้จริงได้. สาเหตุอาจเป็นเพราะสมมุติฐานที่ผิดจากความเป็นจริงบางประการ อย่างไรก็ตาม ความสัมพันธ์ที่น่าสนใจสำหรับทฤษฎีนาฬิกาทรายคือ

$$W \propto D_o^{5/2} \,/\, (\sin\alpha)^{1/2} \qquad (1.5.14)$$

จากผลของการทดลองที่จะกล่าวถึงในบทที่ 5 เราพบว่าเราสามารถนำ (1.5.14) ไปใช้ได้ผลดีกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง แม้ว่าสมการ (1.5.13) จะให้ผลการคำนวณที่ผิดไปจากการทดลองมากมายก็ตาม