บทที่ 5 "บทสรุป"

จากผลการคำนวณในบทที่ 4 สามารถสรุปแผนการขนส่งข้าวจากจังหวัดที่มีปริมาณข้าวเหลือใช้ไปยังจังหวัดที่ขาดแคลนข้าวที่มีประสิทธิภาพที่สุด ของภาคตะวันออกเฉียงเหนือ ดังนี้

(1) กาฬสินธุ์มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 41 พันตัน ควรส่งไปขายยัง นครพนม 14 พันตัน ร้อยเอ็ด 18 พันตัน ที่เหลือ 9 พันตัน ส่งไปขายยังภาคอื่น

(2) ขอนแก่นมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 149 พันตัน ควรส่งไปขายยังภาคอื่น

(3) ชัยภูมิมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 99 พันตัน ควรส่งไปขายยังนครราชสีมา 46 พันตัน ที่เหลือ 53 พันตัน ส่งไปขายยังภาคอื่น

(4) บุรีรัมย์มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 80 พันตัน ควรส่งไปขายภาคอื่น

(5) มหาสารคามมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 35 พันตัน ควรส่งไปขายยังร้อยเอ็ดทั้งหมด

(6) สกลนครมีข้าวเหลือใช้ 27 พันตัน ควรส่งไปขายยังนครพนมทั้งหมด

(7) สุรินทร์มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 22 พันตัน ควรส่งไปขายยังศรีษะเกษ 7 พันตัน และที่เหลือ 15 พันตัน ส่งไปยังภาคอื่น

(8) หนองคายมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 20 พันตัน ควรส่งไปขายยังภาคอื่น

(9) อุดรธานีมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 228 พันตัน ควรส่งไปขายยังเลย 32 พันตัน ที่เหลือ 196 พันตัน ส่งไปขายยังภาคอื่น

(10) อุบลราชธานีมีข้าวเหลือใช้ 46 พันตัน ควรส่งไปขายยังภาคอื่น

แผนการขนส่งข้าวที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด (an optimum solution) นี้ เมื่อเปรียบเทียบกับแผนการขนส่งข้าวที่คำนวณได้ครั้งแรก (the first feasible solution) ให้ผลแตกต่างกันมากดังนี้

	feasible solution ครั้งที่ 1	มี	total cost	39,202 หน่วย
และ	optimum solution	มี	total cost	29,763 หน่วย

ซึ่ง total cost ต่างกันถึง 9,439 หน่วย

เพราะฉะนั้น optimum solution สามารถลด total cost ลงได้ถึง 24 %

นอกจากนี้จะแสดงให้เห็นว่าค่าขนส่งได้ลดลงมาก

จากค่าขนส่งข้าวขององค์การ ร.ส.พ.

จังหวัด	ระยะทาง (ก.ม.) ถึงนครหลวงฯ	ค่าขนส่งต่อ ข้าว 10 ตัน (บาท)
นครราชสีมา	255	940
อุครธานี	561	2,000
หนองคาย	615	2,300
เลย	653	2,500
เชียงใหม่	768	2,500
ลำพูน	740	2,500
ลำปาง	670	2,500
เชียงราย	903	3,300

จากค่าขนส่งนี้ประมาณได้ว่า

ค่าขนส่งข้าวโดยเฉลี่ยระยะทาง 1 กิโลเมตร ต่อข้าว 10 ตัน = 3.61 บาท

เพราะฉะนั้น ค่าขนส่งข้าวโดยเฉลี่ยระยะทาง 1 กิโลเมตร ต่อข้าว 1 พันตัน = 361.00 บาท

จาก $\text{Total cost} = \sum_{i,j} x_{ij} c_{ij}$

นั่นคือ ค่าขนส่งต่อ total cost 1 หน่วย = 361.00 บาท

เมื่อเปรียบเทียบค่าขนส่งระหว่าง the first feasible solution กับ An optimum solution ค่าขนส่งในภาคตะวันออกเฉียงเหนือลดลงได้

$= 9,439 \times 361.00 = 3,407,479.00$ บาท

แผนการขนส่งข้าวจากจังหวัดที่มีปริมาณข้าวเหลือใช้ไปยังจังหวัดที่มีปริมาณข้าวขาดแคลนที่มีประสิทธิภาพที่สุดของภาคเหนือ คือ

(1) กำแพงเพชรมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 170 พันตัน ควรส่งไปขายภาคอื่นหมด

(2) เชียงรายมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 411 พันตัน ควรส่งไปขายภาคอื่น

(3) เชียงใหม่มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 80 พันตัน ควรส่งไปขายยังลำปาง 14 พันตัน ลำพูน 23 พันตัน ที่เหลือ 43 พันตัน ควรส่งไปขายภาคอื่น

(4) นครสวรรค์มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 275 พันตัน ควรส่งไปขายยังอุทัยธานี 128 พันตัน ที่เหลือควรส่งไปขายยังอุทัยธานี 128 พันตัน ที่เหลือ 147 พันตัน ส่งไปขายภาคอื่น

(5) พิจิตรมีปริมาณข้าวเหลือใช้ 88 พันตัน ควรส่งไปขายภาคอื่น

(6) พิษณุโลก มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 38 พันตัน ควรส่งไปขายยังแพร่ 22 พันตัน ที่เหลือส่งไปขายภาคอื่น

(7) เพชรบูรณ์มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 155 พันตัน ควรส่งไปขายยังภาคอื่น

(8) อุตรดิตถ์มีปริมาณข้าวเหลือใช้ 56 พันตัน ควรส่งไปขายยังน่านทั้งหมด

แผนการขนส่งข้าวที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด (an optimum solution) นี้ เมื่อเปรียบเทียบกับแผนการขนส่งข้าวที่คำนวณได้ครั้งแรก (the first feasible solution) ให้ผลแตกต่างกันมากดังนี้

feasible solution ครั้งที่ 1 มี total cost 43,427 หน่วย

และ optimum solution มี total cost 30,196 หน่วย

ซึ่ง total cost ต่างกันถึง 13,231 หน่วย

เพราะฉะนั้น optimum solution สามารถลด total cost ลงได้ถึง 30 %

และค่าขนส่งข้าวในภาคเหนือที่จะลดลงได้ = 13,231 × 361.00 บาท

= 4,776,391.00 บาท

นอกจากจะหาแผนการขนส่งที่มีประสิทธิภาพที่สุดภายในภาคเดียวกันแล้ว สิ่งที่น่าศึกษาอีกประการ คือ การหาแผนการขนส่งข้าวจากจังหวัดที่มีข้าวเหลือใช้ไปยังจังหวัดที่ขาดแคลนข้าวทั่วทั้งประเทศไทยให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด

ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีการตามวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณก็หาได้ตามวิธีการในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้สนใจน่าที่จะได้นำปัญหานี้ไปศึกษาต่อเป็นอันมาก และคาดว่าเป็นปัญหาที่มีประโยชน์มากอันหนึ่งด้วย

จะเห็นว่าถ้ารัฐบาลเข้าควบคุมการขนส่งข้าวทั่วประเทศ โดยเป็นผู้กำหนดแผนการตามวิธีการที่ได้กล่าวในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งระยะทางในการขนส่งข้าวไปยังจังหวัดที่ขาดแคลนจะสั้นที่สุด ซึ่งค่าขนส่งก็ย่อมต่ำลงด้วย ดังนั้น ราคาข้าวก็จะถูกลง ก็จะทำให้ประชาชนได้บริโภคข้าวในราคาต่ำ ประชาชนก็จะมีการกินดีอยู่ดีขึ้นกว่าในปัจจุบันนี้ ซึ่งเป็นผลให้ภาวะเศรษฐกิจของประเทศดีขึ้นด้วย.

ภาคผนวกทางคณิตศาสตร์

ก. ลักษณะของ transportation problem ในแง่ของคณิตศาสตร์

สมมติให้มีแหล่งผลิตสินค้า m แหล่ง

แหล่งรับซื้อสินค้า n แหล่ง

แหล่งผลิตสินค้าที่ i ใช้สัญญลักษณ์ S_i

แหล่งรับซื้อสินค้าที่ j ใช้สัญญลักษณ์ D_j

$i = 1, 2, \ldots m, \; j = 1, 2, \ldots, n$

a_i = ปริมาณสินค้าที่ผลิตได้จากแหล่งผลิตที่ i

b_j = ปริมาณสินค้าที่ต้องการซื้อของแหล่งรับซื้อที่ j

ในเมื่อ $\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$,

c_{ij} = unit cost จากแหล่งผลิตที่ i ไปยังแหล่งรับซื้อที่ j

c_{ij} มี $m \times n$ ค่า

x_{ij} = ปริมาณสินค้าที่ถูกส่งจากแหล่งผลิตที่ i ไปยังแหล่งรับซื้อที่ j

x_{ij} มี $m \times n$ ค่า

ปัญหา ต้องการคำนวณหาค่า x_{ij} ชุดหนึ่ง ซึ่งมีเงื่อนไขว่า

(1) $\sum_{i} x_{ij} = b_j$

(2) $\sum_{j} x_{ij} = a_i$

และจะให้ $\sum_{i,j} x_{ij} c_{ij}$ = Total cost ต่ำสุด

เขียนเป็นตารางดังนี้

ตารางที่ 1 Unit Costs

Des. / Ori.	D_1	D_2	.....	.....	D_j	.....	D_n
S_1	c_{11}	c_{12}	.....	.....	c_{1j}	.....	c_{1n}
S	c_{21}	c_{22}	.....	.....	c_{2j}	.....	c_{2n}
.	.						
.	.						
S_i	c_{i1}	c_{i2}	.....	.....	c_{ij}	.....	c_{in}
⋮	⋮						
S_m	c_{m1}	c_{m2}	.....	.....	c_{mj}	.....	c_{mn}

ตารางที่ 2

Des. / Ori.	D_1	D_2	....	....	D_j	....	D_n	Sur.
S_1	x_{11}	x_{12}	...	....	x_{1j}	....	x_{1n}	a_1
S_2	x_{21}	x_{22}	.....	.....	x_{2j}	....	x_{2n}	a_2
⋮	⋮							
.	.							
S_i	x_{i1}	x_{i2}	...	....	x_{ij}	....	x_{in}	a_i
⋮								
S_m	x_{m1}	x_{m2}	...	....	x_{mj}	....	x_{mn}	a_m
Def.	b_1	b_2	....	....	b_j	....	b_n	

ข. ลักษณะของ solution

จะพิจารณาค่า x_{ij} ในกรณี $\sum_i a_i = \sum_j b_j = k$

จากตารางที่ 2 เขียนในรูป The system of linear equations ซึ่งเป็น the non - homogeneous system มี $m \times n$ unknowns และ $m + n$ equations ดังนี้

$$x_{11} + x_{12} + \cdot\cdot + x_{1j} + \cdot\cdot\cdot + x_{1n} = a_1 \cdot\cdot \quad (1)$$

$$x_{21} + x_{22} + \cdot\cdot + x_{2j} + \cdot\cdot\cdot + x_{2n} = a_2 \cdot\cdot \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdot\cdot + x_{ij} + \cdot\cdot\cdot + x_{in} = a_i \cdot\cdot \quad (i)$$

$$\vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \cdot\cdot + x_{mj} + \cdot\cdot\cdot + x_{mn} = a_m \cdot\cdot \quad (m)$$

$$x_{11} + x_{21} + \cdot\cdot + x_{i1} + \cdot\cdot\cdot + x_{m1} = b_1 \cdot\cdot \quad (m + 1)$$

$$x_{12} + x_{22} + \cdot\cdot + x_{i2} + \cdot\cdot\cdot + x_{m2} = b_2 \cdot\cdot \quad (m + 2)$$

$$\vdots$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdot\cdot + x_{ij} + \cdot\cdot\cdot + x_{mj} = b_j \cdot\cdot\cdot \quad (m + j)$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \cdot\cdot + x_{in} + \cdot\cdot\cdot + x_{mn} = b_n \cdot\cdot\cdot \quad (m + n)$$

จาก $m + n$ สมการนี้

เอา $(1) + (2) + \ldots + (m) - \left[(m+1) + (m+2) + \ldots + (m+n)\right]$

เพราะฉะนั้น $0 = 0$

เพราะฉะนั้น คงเหลือเพียง $m + n - 1$ independent equations และมี $m \times n$ unknowns

โดยอาศัยทฤษฎีของสมการ

เพราะฉะนั้นจะมี solution อย่างมาก $m + n - 1$ ค่าที่ไม่เป็นศูนย์ โดยที่ $mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$ ค่าเป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ ที่กำหนดให้

ดังนั้น เมื่อเรากำหนดให้ x_{ij} จำนวน $(m - 1)(n - 1)$ ค่าเป็นศูนย์เสีย ก็จะได้ค่า x_{ij} ที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวน $m + n - 1$ ค่า

การคำนวณค่า x_{ij} แต่ละชุดที่สอดคล้องตามเงื่อนไข

(1) $\sum_i x_{ij} = b_j$ (2) $\sum_j x_{ij} = a_i$ และ $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ นี้

จะคำนวณหาด้วยวิธีใดก็ตาม เราเรียกค่า x_{ij} ชุดนี้ว่า a feasible solution

<u>นิยาม</u> A feasible solution คือ ค่า x_{ij} ชุดหนึ่ง ซึ่งมีอย่างมาก $m + n - 1$ ค่าที่ไม่เป็นศูนย์ ส่วนที่เหลืออีก $(m - 1)(n - 1)$ ค่าเป็นศูนย์หมด โดยที่ $\sum_i x_{ij} = b_j$ และ $\sum_j x_{ij} = a_i$ และ $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$

<u>นิยาม</u> An optimum solution คือ the feasible solution ที่ให้ Total cost $= \sum_{i,j} x_{ij} c_{ij}$ ต่ำสุด

feasible solution สามารถหาได้มากมาย ซึ่งแต่ละชุดให้ total cost แตกต่างกันไป

ค. วิธีการหา feasible solution ซึ่งมีแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

The Northwest Corner มีวิธีการหา feasible solution ดังต่อไปนี้ จากตารางที่ 2

เริ่มจาก cell (1, 1) ตรงมุมตะวันออกเฉียงเหนือ เปรียบเทียบปริมาณสินค้าที่ผลิตได้จากแหล่ง S_1 กับปริมาณความต้องการสินค้าของแหล่ง D_1

ก. ถ้า $b_1 < a_1$ นั่นคือ ปริมาณสินค้าที่ต้องการของแหล่ง D_1 มีน้อยกว่าปริมาณสินค้าที่ผลิตได้จากแหล่ง S_1 ก็กำหนดให้ $x_{11} = b_1$ ส่วนสินค้าที่เหลือ $a_1 - b_1$ ก็ดำเนินการส่งต่อไปยัง cell (1, 2) (ส่งตามแนวนอน)

ข. ถ้า $b_1 = a_1$ ก็กำหนดให้ $x_{11} = b_1$ แล้วดำเนินการต่อไปยัง cell (2, 2) (ส่งตามแนวเส้นทะแยง)

ค. ถ้า $b_1 > a_1$ ก็ให้ $x_{11} = a_1$ ส่วนสินค้าที่ขาดอีก $b_1 - a_1$ ก็ดำเนินการส่งที่ cell (2, 1) ให้ครบ (ส่งตามแนวดิ่ง)

ปฏิบัติเช่นนี้จากมุมตะวันออกเฉียงเหนือ จนถึงมุมตะวันตกเฉียงใต้

feasible solution ที่ได้จากวิธีการนี้ให้ total cost สูง เพราะการขนส่งสินค้าไปยังแหล่งรับซื้อต่าง ๆ มิได้คำนึงถึง unit cost ในตำแหน่งนั้น ๆ เลยว่าสูงต่ำเพียงใด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

จากโจทย์ ตัวอย่างหน้า 10 บทที่ 3 จะแสดงวิธีการหา feasible solution ด้วยวิธี Northwest corner

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
S_1	4	1					5
S_2		3	3				6
S_3			2				2
S_4			1	2	4	2	9
b_j	4	4	6	2	4	2	

เพราะฉะนั้น Total cost $= \sum_{i,j} x_{ij} c_{ij}$

$= (4 \times 9) + (1 \times 12) + (3 \times 3)$

$+ (3 \times 7) + (2 \times 9) + (1 \times 11)$

$+ (2 \times 2) + (2 \times 10)$

$= 139$

วิธีการแบบต่อไป จะเป็นการหา feasible solution โดยจะพยายามส่งสินค้าไปยังแหล่งรับซื้อที่ให้ unit cost ต่ำให้มากแหล่งที่สุด เพราะในการขนส่งสินค้าแต่ละครั้ง เราจะเอา unit cost ของแหล่งรับซื้อต่าง ๆ ทั้งหมด มาเปรียบเทียบกัน แล้วมุ่งส่งไปยังแหล่งที่ให้ unit cost ต่ำสุด วิธีการนี้ เรียกว่า Unit Penalty สำหรับวิธีการปฏิบัติได้กล่าวแล้วในบทที่ 3 ซึ่งวิธี Unit Penalty นี้จะให้ total cost ต่ำกว่า Northwest Corner เสมอ ดังตัวอย่างที่ได้แสดงไว้แล้ว

ง. การทดสอบ solution

feasible solution ที่คำนวณได้จะด้วยวิธีใดก็ตาม อาจเป็นหรือไม่เป็น optimum solution ก็ได้ ดังนั้น เราจึงมีวิธีการทดสอบว่าเป็น optimum solution

หลักในการทดสอบ คือ ต้องการดูว่า ค่า x_{ij} ใน feasible solution ชุดนั้น ทุกค่ามี unit cost ต่ำที่สุดหรือยัง โดยจะเปรียบเทียบ unit cost กับ cost ที่ถูกสร้างขึ้นจาก cost ของ cell ที่ถูกกำหนดใน feasible solution (occupied cell) ทั้ง $m \times n$ ค่า ซึ่งจะเรียกว่า opportunity cost เราจะสร้าง opportunity cost ใน empty cell (cell ที่ไม่ถูกกำหนดเป็น feasible solution) ได้จากค่า $u_r + v_s = c_{rs}$ เมื่อ c_{rs} = unit cost ใน occupied cell

คำนวณหา u_i, v_j ทุกค่า $i = 1, \ldots m, \; j = \;, \ldots n$

เพราะฉะนั้น opportunity cost $(c'_{kl}) = u_k + v_l$

และให้ $\Delta_{kl} = c_{kl} - c'_{kl}$

$= c_{kl} - (u_k + v_l)$

เพราะฉะนั้น ใน occupied cell $\Delta_{kl} = 0$ หมด

ใน empty cell Δ_{kl} อาจเป็น + หรือ - ได้

ถ้า Δ_{kl} เป็นบวกหมด แสดงว่า ค่า x_{ij} ทุกค่าใน feasible solution ถูกจัดอยู่ในตำแหน่งเหมาะสมมี cost ต่ำแล้ว เพราะฉะนั้น feasible solution ที่นำมาทดสอบก็เป็น optimum solution

ถ้า Δ_{kl} เป็นลบ ใน cell ใด แสดงว่า ควรเคลื่อนย้าย x มายัง cell นั้น เพราะจะทำให้ cost ลดลงได้เท่ากับ Δ_{kl} ต่อ x 1 หน่วย

ในการเคลื่อนย้ายค่า x นี้ ต้องเคลื่อนย้ายตามแนวนอน หรือแนวดิ่ง เพราะจะได้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $\sum_i x_{ij} = b_j$ และ $\sum_j x_{ij} = a_i$ ส่วนวิธีการทดสอบและเคลื่อนย้ายได้แสดงไว้แล้วในบทที่ 3

feasible solution ที่จะนำมาทดสอบด้วยวิธีที่กล่าวแล้วนี้จะต้องมี m + n - 1 ค่า เพราะว่าในการสร้าง opportunity cost ใน empty cell จะต้องรู้ค่า u_i, v_j ถึง m + n ค่า ซึ่งค่า u, v ได้มาจาก $u_i + v_j = c_{ij}$ ใน occupied cell ถ้ามี feasible solution m + n - 1 ค่า ก็จะได้เป็น the non - homogeneous system m + n unknowns และ m + n - 1 linear equations เพราะฉะนั้นจะได้ a non-trivial solution แต่เนื่องจากในที่นี้จำนวนสมการน้อยกว่าจำนวน unknown เพียง 1 ค่า ดังนั้น solution ที่ได้ เราจะต้องกำหนดให้ unknown ตัวหนึ่งเป็น real number ใด ๆ ก็จะได้ unknowns ที่เหลือทั้งหมด

ถ้าจำนวนสมการน้อยกว่าจำนวน unknowns มาก เราจะต้องกำหนด real number ขึ้นอีกหลายค่า (ต้องกำหนดเท่ากับจำนวน unknown ลบจำนวนสมการ)

ซึ่งค่อนข้างยุ่งยากมาก ในการหาค่า u & v ทั้ง m + n ค่า

ด้วยเหตุผลนี้ เราจึงตั้งข้อกำหนดว่า feasible solution ที่จะนำมาทดสอบต้องมี m + n - 1 ค่า

ถ้าจะใช้วิธีทดสอบนี้กับกรณีที่ feasible solution มีน้อยกว่า m + n - 1 ค่าเราจะแก้ไขด้วยการเพิ่มค่า x ขึ้นให้ครบ m + n - 1 ค่า โดยใช้สัญญลักษณ์ ε (infinitesimal number) ซึ่งหมายถึงว่า เราเพิ่มจำนวนสมการ $u_i + v_j = c_{ij}$ ให้ครบ m + n - 1 สมการนั่นเอง

ค่า ε ที่เพิ่มขึ้นนี้เพื่อใช้ช่วยในการทดสอบเท่านั้น มิได้นำไปคำนวณ total cost แต่อย่างใด

สำหรับกรณี $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ นั้น วิธีการหา feasible solution และ optimum solution ได้กล่าวไว้แล้วในหน้า 21 บทที่ 3