บทที่ 3

"วิธีการหา An optimum solution"

สมมติว่า มีแหล่งผลิตสินค้าอยู่ m แห่ง แหล่งรับซื้อสินค้า n แห่ง
แหล่งผลิตสินค้าที่ i มีสินค้าอยู่ a_i หน่วย
แหล่งรับซื้อสินค้าที่ j ต้องการสินค้า b_j หน่วย

$$i = 1,\ldots m, \quad j = 1,\ldots n$$

โดยที่ $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$

ค่าใช้จ่ายต่อ 1 หน่วยสินค้า ซึ่งส่งจากแหล่งผลิตที่ i ไปยังแหล่งรับสินค้าที่ j (Unit cost) ใช้สัญลักษณ์ c_{ij} ซึ่ง unit cost นี้จะเป็นค่าอะไรก็ได้ที่เป็นค่าแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแหล่งผลิตที่ i กับแหล่งรับซื้อที่ j เช่น ระยะทางและเราต้องการให้ค่านั้นน้อยที่สุด

ปัญหา คือ จะสร้างแผนการขนส่งสินค้าให้มีค่าใช้จ่ายรวมต่ำที่สุด นั่นคือ ให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด

ให้ x_{ij} = ปริมาณสินค้าที่ถูกส่งจากแหล่งผลิตที่ i ไปยังแหล่งรับซื้อที่ j

เพราะฉะนั้น $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

และ $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

การหา optimum solution นี้จะต้องกำหนดหา a feasible solution เสียก่อน ซึ่งสามารถหาได้หลายวิธี ดังต่อไปนี้

1. North West Corner Method
2. Unit Penalty Method

และในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะใช้ Unit Penalty method เพราะ feasible solution ที่กำหนดได้ให้ total cost ต่ำกว่า

ในขั้นแรกจะแสดงวิธีการหา An optimum solution ในกรณีที่ $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ก่อน

(ปริมาณสินค้าที่ผลิตได้เท่ากับปริมาณสินค้าที่จะรับซื้อ) ซึ่งเราจะต้องคำนวณหา a feasible solution เสียก่อน โดยดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้าง The cost matrix ให้มี m rows, n columns

row ที่ i แทนแหล่งผลิตสินค้า ที่ i ใช้ตัวย่อ S_i

col. ที่ j แทนแหล่งรับซื้อสินค้าที่ j ใช้ตัวย่อ D_j,

แต่ละ cell คือ ค่าใช้จ่ายต่อ 1 หน่วยสินค้า ซึ่งส่งจากแหล่งผลิตหนึ่งไปยังแหล่งรับซื้ออีกแห่งหนึ่ง ตัวย่อ c_{ij} ซึ่งจะมี $m \times n$ ค่า

ตัวอย่าง สมมติมีแหล่งผลิตสินค้าอยู่ 4 แหล่ง จะนำสินค้าส่งไปยังแหล่งรับซื้อ 6 แหล่ง แหล่งผลิตสินค้าทั้ง 4 แหล่งมีปริมาณสินค้าส่งออกได้ 5, 6, 2, 9 หน่วย ตามลำดับ แหล่งรับซื้อสินค้าทั้ง 6 แห่ง ต้องการปริมาณสินค้า 4, 4, 6, 2, 4, 2 หน่วยตามลำดับ ปริมาณสินค้าส่งออก = ปริมาณสินค้าที่ต้องการ = 22 หน่วย

กำหนดตารางค่าใช้จ่ายเกี่ยวกับสินค้าต่อ 1 หน่วย จากแหล่งผลิตหนึ่งไปยังแหล่งรับซื้ออีกแห่งหนึ่งไว้ดังนี้

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	จำนวนสินค้าส่งออก
S_1	9	12	9	6	9	10	5
S_2	7	3	7	7	5	5	6
S_3	6	5	9	11	3	11	2
S_4	6	8	11	2	2	10	9
จำนวนสินค้าที่รับซื้อ	4	4	6	2	4	2	

ขั้นที่ 2 ในแต่ละ col. และแต่ละ row หาผลต่างของ unit cost ที่ต่ำสุดกับ unit cost ที่ต่ำรองลงมา เขียนค่าผลต่างไว้ใต้ col. หรือ row นั้น ๆ ทำลูกศรชี้ไว้ที่ row หรือ col. ซึ่งให้ค่าผลต่างนี้สูงสุด

จากตัวอย่าง

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
S_1	9	12	9	6	9	10	5 (3)
S_2	7	3	7	7	5	5	6 (2)
S_3	6	5	9	11	3	11	2 (2)
S_4	6	8	11	2	2	10	9 (0)
	4	4	6	2	4	2	
	(0)	(2)	(2)	(4)	(1)	(5) ↑	

ผลต่างที่สูงสุด คือ 5 ซึ่งอยู่ใน col. D_6 ทำลูกศรชี้ไว้ใน col. D_6

ขั้นที่ 3 พิจารณาใน column หรือ row ที่ทำลูกศรชี้ไว้ว่า cell ใดที่มี unit cost ต่ำสุด ตรวจดูว่า cell นั้นมาจาก col. ใด และ row ใด ซึ่งต้องการสินค้ากี่หน่วย และมีสินค้าส่งได้กี่หน่วย ก็จัดการส่งให้ครบตามที่ต้องการ เมื่อปริมาณผลิตมีมากกว่าความต้องการ หรือส่งสินค้าที่ผลิตได้ทั้งหมดให้กับแหล่งรับซื้อเมื่อปริมาณผลิตมีน้อยกว่าความต้องการ หลังจากนั้น ตัด row ที่ส่งสินค้าจนหมด หรือตัด col. ที่รับสินค้าได้พอความต้องการออกเสีย

จากตัวอย่าง จะเห็นว่า cell ที่ (2, 6) มี unit cost ต่ำสุด = 5 และ D_6 ต้องการสินค้า 2 หน่วย ส่วน S_2 มีสินค้า 6 หน่วย เพราะฉะนั้น S_2 ก็ส่งสินค้ามาให้ D_6 จำนวน 2 หน่วย โดยเขียนเลข 2 กำกับไว้ที่ cell (2, 6) ดังนั้น S_2 คงเหลือสินค้า 4หน่วย ส่วน D_6 ได้รับสินค้าครบแล้ว ก็ตัด col. D_6 ออกเสีย

ขั้นที่ 4 เขียน The cost matrix ที่เหลือเสียใหม่ จากนั้น หาผลต่างของ unit cost ต่ำสุด กับต่ำรองลงมา ของทุก ๆ col. และทุก ๆ row

ใน row หรือ col. ใด ที่ให้ผลต่างสูงสุด ทำลูกศรชี้ไว้ พิจารณา unit cost ที่ต่ำสุดใน row. นั้น หรือ col. นั้น ว่าเชื่อมระหว่างแหล่งผลิตใดกับแหล่งรับซื้อใด จัดการส่งสินค้าให้ครบตามต้องการตามวิธีในขั้นที่ 3 ตัด row หรือ col. นั้นออก แล้วสร้าง The cost matrix สำหรับ col. และ row ที่เหลือต่อไป

ปฏิบัติเช่นนี้ไปจนกระทั่งสินค้าที่ผลิตได้ทั้งหมด ถูกส่งไปยังแหล่งรับซื้อจนครบแผนการที่คำนวณได้นี้ เราเรียกว่า a feasible solution ซึ่ง the feasible solution นี้จะแสดงว่า สินค้าจากแหล่งผลิตใด ควรส่งไปยังแหล่งรับซื้อใด จำนวนกี่หน่วย the feasible solution นี้ อาจจะไม่ให้ total cost ต่ำสุดก็ได้ เราจึงต้องทำการทดสอบ

จากตัวอย่าง

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	Available
S_1	9	12	9	6	9	10	5 (3)
S_2	7	3	7	7	5	$5^{(2)}$	6 (2)
S_3	6	5	9	11	3	11	2 (2)
S_4	6	8	11	2	2	10	9 (0)
Req.	4	4	6	2	4	2	
	(0)	(2)	(2)	(4)	(1)	(5) ↑	

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Avai.
S_1	9	12	9	6	9	5 (3)
S_2	7	3	7	7	5	4 (2)
S_3	6	5	9	11	3	2 (2)
S_4	6	8	11	$2^{(2)}$	2	9 (0)
Req.	4	4	6	2	4	
	(0)	(0)	(2)	(4) ↑	(1)	

	D_1	D_2	D_3	D_5	Avai.
S_1	9	12	9	9	5 (0)
S_2	7	3	7	5	4 (2)
S_3	6	5	9	3	2 (2)
S_4	6	8	11	$2^{(4)}$	7 (4) ←
Req.	4	4	6	4	
	(0)	(2)	(2)	(1)	

	D_1	D_2	D_3	Avai.
S_1	9	2'	9	5 (0)
~~S_2~~	~~7~~	~~$3^{(4)}$~~	~~7~~	~~4 (4)~~ ←
S_3	6	5	9	2 (1)
S_4	6	8	11	3 (2)
Req.	4	4	6	
	(0)	(2)	(2)	

	D_1	D_3	Avai.
S_1	9	9	5 (0)
S_3	6	9	2 (3)
~~S_4~~	~~$6^{(3)}$~~	~~11~~	~~3 (5)~~ ←
Req.	4	6	
	(0)	(0)	

	D_1	D_3	Avai.
S_1	9	$9^{(5)}$	5 (0)
S_3	$6^{(1)}$	$9^{(1)}$	2 (3)
Req.	1	6	
	(3)	(0)	

ได้ a feasible solution ดังนี้

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	Avai.
S_1			5				5
S_2		4				2	6
S_3	1		1				2
S_4	3			2	4		9
Req.	4	4	6	2	4	2	

คำนวณค่า total cost

$$\text{Total cost} = \sum_{i,j} x_{ij} c_{ij}$$

$$= (1 \times 6) + (3 \times 6) + (4 \times 3) + (5 \times 9)$$

$$+ (1 \times 9) + (2 \times 2) + (4 \times 2) + (2 \times 5)$$

$$= 112$$

วิธีการทดสอบ (optimality test)

a feasible solution ที่จะนำมาทดสอบนั้น จะต้องมี $m + n - 1$ ค่า ซึ่งอยู่ในตำแหน่งที่ต่างๆ กัน ถ้ามีไม่ครบจะต้องเพิ่มเติม ซึ่งจะกล่าวในตอนหลัง วิธีการทดสอบมีดังนี้

1. คำนวณค่า u_i, v_j, $i = 1,\dots m$, $j = 1,\dots n$ ซึ่งทั้งหมดมี $m + n$ ค่า โดยที่

$$u_r + v_s = c_{rs}$$

c_{rs} คือ unit cost ของแหล่งผลิตที่ r ส่งไปยังแหล่งรับซื้อที่ s ซึ่งเป็น cell ที่ถูกกำหนดใน the feasible solution (occupied cell) เพื่อความสะดวกในการสร้าง u_i & v_j นั้นควรดูว่า row ใด หรือ col. ใด ที่ถูกกำหนดให้ เป็น feasible solution มากกว่าที่สุด ควรให้ค่า u หรือ v ของ col. หรือ row นั้น เป็น 0 (ศูนย์) แล้วหาค่าตัวอื่น ๆ ต่อไปจนครบ

2. สร้าง the cell evaluation Δ_{kl} สำหรับแต่ละ cell (k, l) ซึ่งไม่ถูกกำหนดใน feasible solution โดยใช้สูตร

$$\Delta_{kl} = c_{kl} - (u_k + v_l)$$

c_{kl} = unit cost ของแหล่งผลิตที่ k ที่ส่งไปยังแหล่งรับซื้อที่ l ซึ่ง cell นี้ไม่มีอยู่ใน feasible solution

3. ตรวจดูเครื่องหมายของ Δ_{kl} ทุกค่าใน the matrix of cell evaluations

ถ้ามีเครื่องหมายบวกหมดแสดงว่า the feasible solution ที่นำมาทดสอบนั้น เป็น An optimum solution

ถ้ามีบวกบ้าง ศูนย์บ้าง แสดงว่า the feasible solution นี้ เป็น An optimum solution แต่ยังมี optimum solution แบบอื่นอีก

ถ้ามีค่าลบจะมีกี่ค่าก็ตาม แสดงว่า the feasible sol.$^{\underline{n}}$ นี้ยังไม่เป็น optimum solution เมื่อเป็นเช่นนี้จะต้องแก้ไข the feasible solution นี้เสียใหม่ แล้วทำการทดสอบอีกครั้งหนึ่ง ถ้ายังไม่ได้ optimum solution อีกก็ต้องแก้ไข the feasible sol.$^{\underline{n}}$ นั้นอีก แล้วทดสอบจนกระทั่งได้ An optimum solution

ถ้ามีที่ได้กล่าวแล้วข้างต้น the feasible solution ที่จะนำ

มาทดสอบจะต้องมี m + n - 1 ค่า ถ้ามีไม่ครบตามจำนวนนี้ จะต้องแก้ไข โดยการเติมค่า ε (infinitesimal number) ลงไปใน the feasible solution ให้ครบ การเติมค่า ε นี้ควรเติมลงใน cell ที่สามารถทำให้ค่า u_i & v_j ได้ครบ m + n ค่า และถ้าเราสามารถจะเติม ε ได้หลายแห่ง ก็เลือกเติมลงไปแห่งใดแห่งหนึ่ง ดังจะได้แสดงตัวอย่างดังนี้

จาก the feasible solution

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	Avai.
S_1			5				5
S_2		4				2	6
S_3	1		1				2
S_4	3			2	4		9
Req.	4	4	6	2	4	2	

จะเห็นว่า มีเพียง 8ค่า เพราะฉะนั้นต้องเติมค่า ε ลงอีก 1 ค่า เพื่อให้ครบจำนวน m + n - 1 ค่า

ก่อนที่จะเติมค่า ε ควรเขียน unit cost ใน occupied cell ลงไว้เสียก่อน

							u_i
			9				0
		3				5	
	6		9				0
	6			2	2		0
v_j	6		9	2	2		

จากนั้นลอง ๆ หา u_i & v_j จาก c_{rs} ที่มีอยู่นี้เสียก่อน เราอาจให้ $u_4 = 0$ เพราะว่า ใน row ที่ 4 นี้ ถูก allocate มากที่สุด ดังนั้น

ก็สร้าง $u_1, u_3, v_1, v_3, v_4, v_5$ ได้แต่สำหรับ u_2, v_2, v_6 ยังสร้างไม่ได้ จะต้องเติม ε ลงใน cell ใด cell หนึ่ง เพื่อจะได้มี unit cost มาใช้หา u_i & v_j ที่ยังขาดอยู่ จะเห็นว่า ถ้ามีค่า c_{23} หรือ c_{21} หรือ c_{24} หรือ c_{25} ก็สามารถหา u & v ที่ยังขาดอยู่ได้ ดังนั้น เติมค่า ε ลงใน cell เหล่านี้ cell ใด cell หนึ่ง แล้วทำการสร้าง u_i, v_j ให้ครบแล้ว ทดสอบตามที่กล่าวแล้ว ขึ้นในขั้นสุดท้าย เมื่อเราได้ An optimum solution ค่า ε จะหมดไปเอง

จากตัวอย่าง จะเติม ε ลงใน cell (2, 1) ดังนั้น ก็ใส่ค่า c_{21} ลงใน matrix เพื่อใช้หา u_i & v_j

						u_i
		9				0
7	3				5	1
6		9				0
6			2	2		0
6	2	9	2	2	4	v_j

คำนวณหา the matrix of cell evaluations

โดยที่ $\Delta_{kl} = c_{kl} - (u_k + v_l)$

the cost matrix (empty cell only)

9	12	•	6	9	10
•	•	7	7	5	•
•	5	•	11	3	11
•	8	11	•	•	10

the matrix of $u_i + v_j$

						u_i
6	2	•	2	2	4	0
•	•	10	3	3	•	1
•	2	•	2	2	4	0
•	2	9	•	•	4	0
v_j: 6	2	9	2	2	4	

the matrix of cell evaluations

3	10	•	4	7	6
•	•	−3	4	2	•
•	3	•	9	1	7
•	6	2	•	•	6

จะเห็นว่ามีเครื่องหมายลบอยู่ใน cell (2, 3) แสดงว่า the feasible solution ที่นำมาทดสอบนี้ไม่เป็น an optimum solution จะต้องมีการแก้ไข the feasible solution นี้เสียใหม่

วิธีแก้ไข the feasible solution ปฏิบัติดังนี้

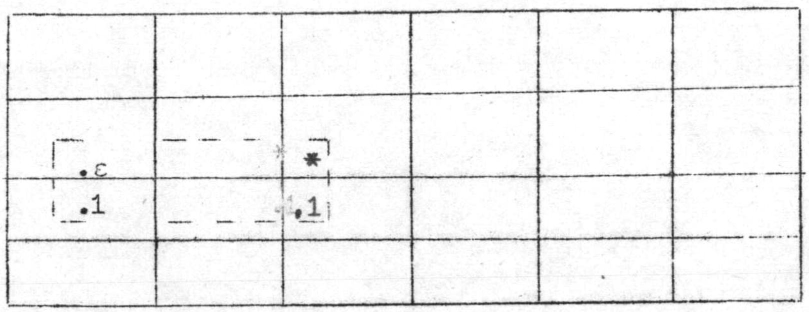
พิจารณาค่าลบที่สูงสุดของ Δ_{kl} แล้วจัดส่งปริมาณสินค้าใน occupied cells ลงใน cell ที่ Δ_{kl} มีค่าลบสูงสุดนี้ โดยการสร้าง loop เชื่อม occupied cells กับ cell ที่ Δ_{kl} มีค่าลบสูงสุด จากนั้น ย้ายปริมาณสินค้าไปที่ cell ที่มีค่า Δ_{kl} เป็นลบสูงสุดนี้ โดยยึดหลักว่า

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad \text{และ} \quad \sum_j x_{ij} = a_i$$

ดังนั้น จะได้ a feasible solution ชุดใหม่ แล้วนำไปทดสอบว่าเป็น optimum solution หรือไม่ โดยวิธีทดสอบที่กล่าวแล้ว ถ้าไม่เป็นก็แก้ไข feasible solution นั้นอีก แล้วทดสอบ ทำซ้ำ ๆ กันเช่นนี้ จนได้ an optimum solution

จากตัวอย่าง

จะเห็นว่า Δ_{23} มีค่า = $\underline{-3}$ ดังนั้น จะสร้าง loop เชื่อม occupied cell กับ cell (2, 3) เพื่อย้ายปริมาณสินค้ามาที่ cell (2, 3) นี้



เพราะฉะนั้น a feasible solution ชุดใหม่ คือ

							Avai.
			5				5
		4	ε			2	6
	1		1				2
	3			2	4		9
Req.	4	4	6	2	4	2	

นำไปทดสอบ ดังนี้

Determine u_i & v_j

						u_i
		9				0
	3	7			5	−2
6		9				0
6			2	2		0
6	5	9	2	2	7	v_j

the cost matrix (empty cells)

9	12	•	6	9	10
7	•	•	7	5	•
•	5	•	11	3	11
•	8	11	•	•	10

the matrix of $u_i + v_j$

						u_i
6	5	•	2	2	7	0
4	•	•	0	0	•	−2
•	5	•	2	2	7	0
•	5	9	•	•	7	0
6	5	9	2	2	7	v_j

the matrix of cell evaluations $\Delta_{kl} = c_{kl} - (u_k + v_l)$

3	7	•	4	7	3
3	•	•	7	5	•
•	0	•	9	1	4
•	3	2	•	•	3

จะเห็นว่า Δ_{kl} เป็นบวกหมด

เพราะฉะนั้น the feasible solution ที่นำมาทดสอบนี้ เป็น an optimum solution

เพราะฉะนั้น an optimum solution คือ

						Avai.
		5				5
	4				2	6
1		1				2
3			2	4		9
4	4	6	2	4	2	Req.

หา Total cost ได้ $= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$

$= 112$

การหา An optimum solution ในกรณีที่ปริมาณสินค้าที่ผลิตได้มีมากกว่า ปริมาณสินค้าที่รับซื้อ $\left(\sum_{j=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \right)$

จะต้องคำนวณหา feasible solution ก่อน โดยจะต้องเพิ่มแหล่งรับซื้อสินค้าอีกแหล่งหนึ่ง D_{n+1} เรียกว่า Dummy variable และแหล่งรับซื้อสินค้า D_{n+1} นี้ จะต้องการสินค้า $= \sum_i a_i - \sum_j b_j$ หน่วย

Unit cost จากแหล่งผลิตต่าง ๆ m แหล่งมายังแหล่งรับซื้อสินค้า D_{n+1} นี้ จะมีค่าเป็น 0 หมด นั่นคือ $c_{in+1} = 0$ ทุกค่า $i = 1, \ldots, m$ จากนั้น คำนวณหา frasible solution และ optimum solution โดยวิธีเกี่ยวกับกรณี $\sum_i a_i = \sum_j b_j$