

สมการพิงก์ชันนัล

$$f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$$



นางสาวอาริสา รัตนเพ็ชร์

006579

วิทยานิพนธฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๖๐

18304680

THE FUNCTIONAL EQUATION

$$f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$$

MISS ARISA RATTANAPET

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science

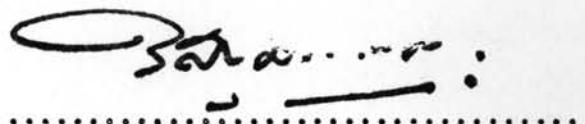
Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1977

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง  
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

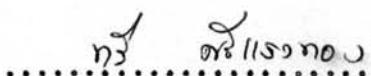


(ศาสตราจารย์ ดร.วิศิษฐ์ ประจabaะ)

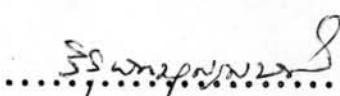
คณบดี

คณะกรรมการตรวจวิทยานิพนธ์ ..... ๗๘๐.๔๐๙๗ ..... ประธานกรรมการ

(รศ.ดร. ไสว นวลตรีสี)

..... ..... กรรมการ

(ผศ. ทวี ศรีแสงทอง)

..... ..... กรรมการ

(รศ. ดร. วิรุฬห์ บุญล้มปัตติ)

อาจารย์ผู้ควบคุมการวิจัย

รศ. ดร. วิรุฬห์ บุญล้มปัตติ

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

---

วิทยานิพนธ์เรื่อง สมการฟังก์ชันบัล :  $f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$

โดย นางสาว อาริสา รัตนเพ็ชร์

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

วิทยานิพนธ์

$$\text{สมการฟังก์ชันบล} : f(x_0y) + f(x_0y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$$

ชื่อ

นางสาว อารีสา รัตนเพ็ชร์ แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา

๒๕๙๔



บหศคยอ

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาเกี่ยวกับการหาฟังก์ชัน  $f$  ทั้งหลายจากอเปรเตียนกรุ๊ป  $(G, \circ)$  ไปยังอเปรเตียนกรุ๊ป  $(G', +)$  ซึ่งสอดคล้อง  $(*) f(x_0y) + f(x_0y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$

สำหรับทุก ๆ  $x, y$  ใน  $G$  ผลลัพธ์ที่สำคัญของวิทยานิพนธ์นี้ก็คือ

ทฤษฎีบท ให้  $(G, \circ)$  และ  $(G', +)$  เป็นอเปรเตียนกรุ๊ปโดยที่  $G'$  ไม่มีสมาชิกซึ่งมีลำดับ 2

ให้  $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha \in I\}$  เป็นเซตของเจนเนอเรเตอร์ของ  $G$  ซึ่งสอดคล้องความสมพันธ์ต่าง ๆ

ในระบบ  $\mathcal{R}$  ระบบหนึ่ง ให้  $\mathcal{A}^{(1)} = \{\{a\} : a \in \mathcal{A}\}$  และ  $\mathcal{A}^{(2)} = \{\{a, b\} : a, b \in \mathcal{A}, a \neq b\}$

ฟังก์ชัน  $f : G \rightarrow G'$  สอดคล้องสมการ

$$(*) f(x_0y) + f(x_0y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$$

สำหรับทุก ๆ  $x, y$  ใน  $G$  เมื่อ และก็ต่อเมื่อ  $f$  ฟังก์ชัน  $c : \mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)} \rightarrow G'$  ซึ่งสำหรับ

แต่ละความสมพันธ์  $\prod_{i=1}^m a_{\alpha_i}^{s_i} = e$  ใน  $\mathcal{R}$  เราได้ว่า

$$(i) \sum_{1 \leq i < j \leq m} s_i s_j c(\{a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}\}) + 2 \sum_{i=1}^m s_i^2 c(\{a_{\alpha_i}\}) - (\sum_{i=1}^m s_i) \sum_{i=1}^m s_i c(\{a_{\alpha_i}\}) = 0,$$

$$(ii) \sum_{i=1}^m s_i c(\{a_{\alpha_i}, a_\beta\}) - \sum_{i=1}^m s_i c(\{a_{\alpha_i}\}) - (\sum_{i=1}^m s_i) c(\{a_\beta\}) = 0$$

สำหรับ  $a_\beta$  ให้  $\beta$  ซึ่ง  $a_\beta \neq a_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$(iii) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m s_j c(\{a_{\alpha_j}, a_\beta\}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m s_j c(\{a_{\alpha_j}\}) - (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m s_j) c(\{a_\beta\}) + 2s_i c(\{a_\beta\}) = 0$$

เมื่อ  $a_\beta$  เป็นตัวใดตัวหนึ่งในบรรดา  $a_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

และสำหรับแต่ละ  $x = \prod_{i=1}^m n_i^{a_i}$  ใน  $G$  เราได้ว่า

$$f(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} n_i n_j c(\{a_i, a_j\}) + 2 \sum_{i=1}^m n_i^2 c(\{a_i\}) - \left( \sum_{i=1}^m n_i \right) \sum_{i=1}^m n_i c(\{a_i\}).$$

นอกจากนี้เรายังแสดงการนำทฤษฎีบทนี้ไปประยุกต์ในกรณีต่าง ๆ

Thesis Title

THE FUNCTIONAL EQUATION :

$$f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$$

Name

Miss Arisa Rattanapet. Department Mathematics

Academic Year

1976



## ABSTRACT

This thesis deals with the determination of all functions  $f$  from an abelian group  $(G, \circ)$  into an abelian group  $(G', +)$  such that

(\*)  $f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$  for all  $x, y$  in  $G$ . Our main result is the following theorem :

Theorem Let  $(G, \circ)$  and  $(G', +)$  be abelian groups such that  $G'$  has no element of order 2. Let  $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha \in I\}$  be a set of generators of  $G$ . with a system  $\mathcal{R}$  of defining relations. Let  $\mathcal{A}^{(1)} = \{\{a\} : a \in \mathcal{A}\}$  and  $\mathcal{A}^{(2)} = \{\{a, b\} : a, b \in \mathcal{A}, a \neq b\}$ . A function  $f : G \rightarrow G'$  satisfies

$$(*) \quad f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$$

for all  $x, y$  in  $G$  if and only if there exists a function  $c : \mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)} \rightarrow G'$

such that for any defining relation  $\prod_{i=1}^m s_i a_{\alpha_i} = e$  of  $\mathcal{R}$ , we have

$$(i) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq m} s_i s_j c(\{a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}\}) + 2 \sum_{i=1}^m s_i^2 c(\{a_{\alpha_i}\}) - \left( \sum_{i=1}^m s_i \right) \sum_{i=1}^m s_i c(\{a_{\alpha_i}\}) = 0,$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^m s_i c(\{a_{\alpha_i}, a_{\beta}\}) - \sum_{i=1}^m s_i c(\{a_{\alpha_i}\}) - \left( \sum_{i=1}^m s_i \right) c(\{a_{\beta}\}) = 0$$

for all  $a_{\beta} \neq a_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$(iii) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m s_j c(\{a_{\alpha_j}, a_\beta\}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m s_j c(\{a_{\alpha_j}\}) - (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m s_j) c(\{a_\beta\}) + 2s_i c(\{a_\beta\}) = 0$$

for all  $a_\beta$  such that  $a_\beta = a_{\alpha_i}$  for some  $i = 1, \dots, m$ ,

and for any  $x = \prod_{i=1}^m a_{\alpha_i}^n$  in  $G$ , we have

$$f(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} n_i n_j c(\{a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}\}) + 2 \sum_{i=1}^m n_i^2 c(\{a_{\alpha_i}\}) - (\sum_{i=1}^m n_i) \sum_{i=1}^m n_i c(\{a_{\alpha_i}\}).$$

We also show how this theorem can be applied in the various cases.

## ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my deep appreciation to Dr.Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for his helpful guidance and supervision during the preparation and completion of this thesis. Also, I thank all lecturers for their previous lectures in the graduate courses.



TABLE OF CONTENTS

	Page
ABSTRACT IN THAI .....	iv
ABSTRACT IN ENGLISH .....	vi
ACKNOWLEDGEMENT .....	viii
 CHAPTER	
I      INTRODUCTION .....	1
II     PRELIMINARIES .....	2
III    GENERAL SOLUTION OF $f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$ ON ABELIAN GROUP .....	16
IV    SOLUTION OF $f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$ ON VECTOR SPACES OVER Q WITH APPLICATIONS TO CERTAIN GROUPS. ....	47
V    CONTINUOUS SOLUTION OF $f(x \circ y) + f(x \circ y^{-1}) = 2f(x) + 2f(y)$ ON SOME TOPOLOGICAL GROUPS. ....	57
REFERENCES .....	71
VITA .....	72

