สมการฟังก์ชันนัล

$$f(x_o y)+f(x_o y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$$

นางสาวอาริสา รัตนเพ็ชร์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๒๐

THE FUNCTIONAL EQUATION

$$f(x_o y)+f(x_o y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$$

MISS ARISA RATTANAPET

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1977

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....

(ศาสตราจารย์ ดร.วิศิษฐ์ ประจวบเหมาะ)

คณบดี

คณะกรรมการตรวจวิทยานิพนธ์ .... ประธานกรรมการ

(รศ.ดร. ไสว นวลตรณี)

.... กรรมการ

(ผศ. ทวี ศรีแสงทอง)

.... กรรมการ

(รศ. ดร. วิรุฬห์ บุญสมบัติ)

อาจารย์ผู้ควบคุมการวิจัย รศ. ดร. วิรุฬห์ บุญสมบัติ

วิทยานิพนธ์เรื่อง สมการฟังก์ชันนัล : $f(x_o y)+f(x_o y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$

โดย นางสาว อาริสา รัตนเพ็ชร์

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ สมการฟังก์ชันนัล : $f(x_\circ y)+f(x_\circ y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$

ชื่อ นางสาว อาริสา รัตนเพ็ชร์ แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๑๙

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาเกี่ยวกับการหาฟังก์ชัน f ทั้งหลายจากอาบีเลียนกรุ๊ป $(G,\circ)$ ไปยังอาบีเลียนกรุ๊ป $(G',+)$ ซึ่งสอดคล้อง (*) $f(x_\circ y)+f(x_\circ y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$ สำหรับทุก ๆ x,y ใน G ผลลัพธ์ที่สำคัญของวิทยานิพนธ์นี้ก็คือ

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ $(G,\circ)$ และ $(G',+)$ เป็นอาบีเลียนกรุ๊ปโดยที่ G' ไม่มีสมาชิกซึ่งมีลำดับ 2 ให้ $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha \in I\}$ เป็นเซทของเจนเนอเรเตอร์ของ G ซึ่งสอดคล้องความสัมพันธ์ต่าง ๆ ในระบบ $\mathcal{R}$ ระบบหนึ่ง ให้ $\mathcal{A}^{(1)} = \{\{a\} : a \in \mathcal{A}\}$ และ $\mathcal{A}^{(2)} = \{\{a,b\} : a,b \in \mathcal{A}, a \neq b\}$ ฟังก์ชัน $f : G \longrightarrow G'$ สอดคล้องสมการ

$$(*) \qquad f(x_\circ y)+f(x_\circ y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$$

สำหรับทุก ๆ x,y ใน G เมื่อ และก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $c : \mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)} \longrightarrow G'$ ซึ่งสำหรับแต่ละความสัมพันธ์ $\prod_{i=1}^{m} a_{\alpha_i}^{s_i} = e$ ใน $\mathcal{R}$ เราได้ว่า

$$\text{(i)} \quad \sum_{1\leq i<j\leq m} s_i s_j c(\{a_{\alpha_i},a_{\alpha_j}\})+2\sum_{i=1}^{m} s_i^2 c(\{a_{\alpha_i}\})-\Big(\sum_{i=1}^{m} s_i\Big)\sum_{i=1}^{m} s_i c(\{a_{\alpha_i}\}) = 0,$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{m} s_i\, c(\{a_{\alpha_i},a_\beta\})-\sum_{i=1}^{m} s_i c(\{a_{\alpha_i}\})-\Big(\sum_{i=1}^{m} s_i\Big)c(\{a_\beta\}) = 0$$

สำหรับ a_β ใด ๆ ซึ่ง $a_\beta \neq a_{\alpha_i}$, $i = 1,\ldots, m$,

$$\text{(iii)} \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} s_j c(\{a_{\alpha_j},a_\beta\})-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} s_j c(\{a_{\alpha_j}\})-\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} s_j\Big)c(\{a_\beta\})+2s_i c(\{a_\beta\}) = 0$$

เมื่อ a_β เป็นตัวใดตัวหนึ่งในบรรดา a_{α_i}, $i = 1,\ldots, m$.

และสำหรับแต่ละ $x = \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha_i}^{n_i}$ ใน G เราได้ว่า

$$f(x) = \sum_{1\leq i<j\leq m} n_i n_j c(\{a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}\}) + 2\sum_{i=1}^{m} n_i^2 c(\{a_{\alpha_i}\}) - (\sum_{i=1}^{m} n_i) \sum_{i=1}^{m} n_i c(\{a_{\alpha_i}\}).$$

นอกจากนั้น เรายังแสดงการนำทฤษฎีบทนี้ไปประยุกต์ในกรณีต่าง ๆ

Thesis Title THE FUNCTIONAL EQUATION : $f(x \circ y)+f(x \circ y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$

Name Miss Arisa Rattanapet. Department Mathematics

Academic Year 1976

ABSTRACT

This thesis deals with the determination of all functions f from an abelian group $(G,\circ)$ into an abelian group $(G',+)$ such that

(*) $f(x \circ y)+f(x \circ y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$ for all x, y in G. Our main result is the following theorem :

<u>Theorem</u> Let $(G,\circ)$ and $(G',+)$ be abelian groups such that G' has no element of order 2. Let $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha \in I\}$ be a set of generators of G. with a system $\mathcal{R}$ of defining relations. Let $\mathcal{A}^{(1)} = \{\{a\} : a \in \mathcal{A}\}$ and $\mathcal{A}^{(2)} = \{\{a,b\} : a,b \in \mathcal{A},\ a \neq b\}$. A function $f : G \longrightarrow G'$ satisfies

(*) $f(x \circ y)+f(x \circ y^{-1}) = 2f(x)+2f(y)$

for all x, y in G if and only if there exists a function $c : \mathcal{A}^{(1)} \cup \mathcal{A}^{(2)} \longrightarrow G'$ such that for any defining relation $\prod_{i=1}^{m} a_{\alpha_i}^{s_i} = e$ of $\mathcal{R}$, we have

(i) $\sum_{1 \leq i < j \leq m} s_i s_j c(\{a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}\}) + 2\sum_{i=1}^{m} s_i^2 c(\{a_{\alpha_i}\}) - (\sum_{i=1}^{m} s_i) \sum_{i=1}^{m} s_i c(\{a_{\alpha_i}\}) = 0$,

(ii) $\sum_{i=1}^{m} s_i c(\{a_{\alpha_i}, a_\beta\}) - \sum_{i=1}^{m} s_i c(\{a_{\alpha_i}\}) - (\sum_{i=1}^{m} s_i) c(\{a_\beta\}) = 0$

for all $a_\beta \neq a_{\alpha_i}$, $i = 1,\ldots, m$,

$$\text{(iii)}\quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} s_j c(\{a_{\alpha_j}, a_\beta\}) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} s_j c(\{a_{\alpha_j}\}) - \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} s_j\Big) c(\{a_\beta\}) + 2 s_i c(\{a_\beta\}) = 0$$

for all a_β such that $a_\beta = a_{\alpha_i}$ for some $i = 1,\ldots,m$,
and for any $x = \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha_i}^{n_i}$ in G, we have

$$f(x) = \sum_{1\leq i<j\leq m} n_i n_j c(\{a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}\}) + 2\sum_{i=1}^{m} n_i^2 c(\{a_{\alpha_i}\}) - \Big(\sum_{i=1}^{m} n_i\Big) \sum_{i=1}^{m} n_i c(\{a_{\alpha_i}\}).$$

We also show how this theorem can be applied in the various cases.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my deep appreciation to Dr.Virool Boonyasombat, my thesis supervisor, for his helpful guidance and supervision during the preparation and completion of this thesis. Also, I thank all lecturers for their previous lectures in the graduate courses.

TABLE OF CONTENTS