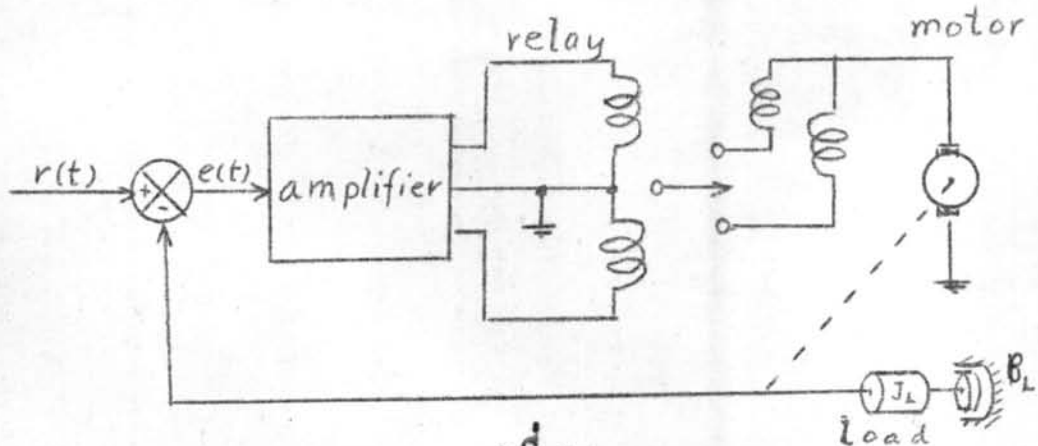
บทที่ 2

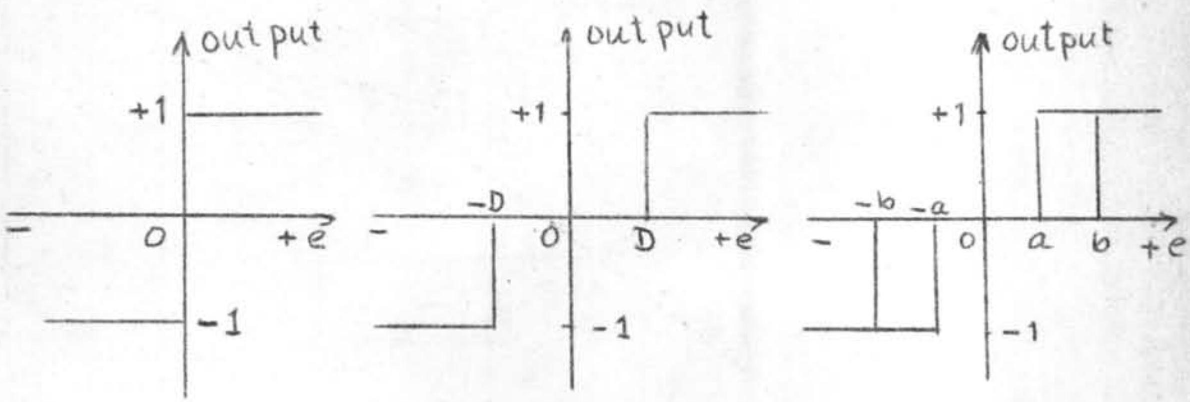
RELAY-TYPE SERVO SYSTEMS.

2.1. Relay Characteristics.[1]

รูปที่ 2.1 แสดงรูปการใช้ double relay เข้า control ไมเตอร์อย่างง่าย ๆ relay ที่ใช้มี characteristic ดังรูปที่ 2.2 รูปที่ 2.2(ก) แสดง characteristic ของ ideal relay



รูปที่ 2.1



รูปที่ 2.2

แต่ relay อย่างนี้ไม่มีจริงในปฏิบัติและไม่ต้องการให้เกิดเป็นจริงขึ้นด้วยเพราะจะมีการสึกหรอที่ relay contact คุณสมบัติดังรูปที่ 2.2(ก) จะเขียนเป็นสมการ signum function ได้ดังนี้

1. B.C. Kuo, "Automatic Control Systems", Prentice-Hall, Inc., 1962, pp. 442-451

$$e = \operatorname{sgn}(e) = \begin{cases} +1, & e > 0 \\ 0, & e = 0 \\ -1, & e < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

ในปฏิบัติ relay ทุกตัวจะมี dead zone และ hysteresis effect อยู่ด้วย รูปที่ 2.2(ข) แสดง characteristic ของ relay ที่มีแต่ dead zone เท่านั้นซึ่งจะเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$e = \begin{cases} +1, & e > D \\ 0, & -D < e < D \\ -1, & e < -D \end{cases} \tag{2.2}$$

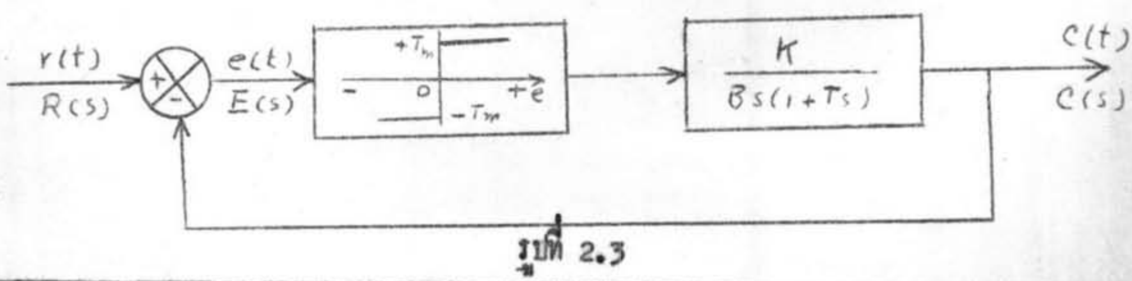
รูปที่ 2.2(ค) แสดง characteristic ของ relay ที่มี dead zone และ hysteresis ซึ่งจะเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$e = \begin{cases} +1, & e > a \text{ and } e > b \\ 0, & -a < e < +a \\ -1, & e < -a \text{ and } e < -b \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2. Bang-Bang Servo with Ideal Relay (Step Input).[2]

รูปที่ 2.3 แสดง block diagram ของ servo system ที่ใช้ ideal relay ซึ่งจะสามารถเขียน differential equation ได้ว่า

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = \begin{cases} +T_m, & e > 0 \\ 0, & e = 0 \\ -T_m, & e < 0 \end{cases} \tag{2.4}$$



รูปที่ 2.3

2. B.C. Kuo, ibid.

ในสมการนี้ J เป็น moment of inertia ของ plant

B เป็น friction

K เป็น gain

T_m เป็น torque ที่เกิดขึ้นที่มอเตอร์

เมื่อ torque เป็นบวกและมี initial condition $c(0) = c_o$ และ $v(0) = v_o$ จะ solve หา output $c(t)$ ได้ดังนี้

$$c(t) = \frac{T_m}{B}(t - T + Te^{-t/T}) + c_o + v_o T(1 - e^{-t/T}) \tag{2.5}$$

และจะได้ output velocity $v(t)$ ดังนี้

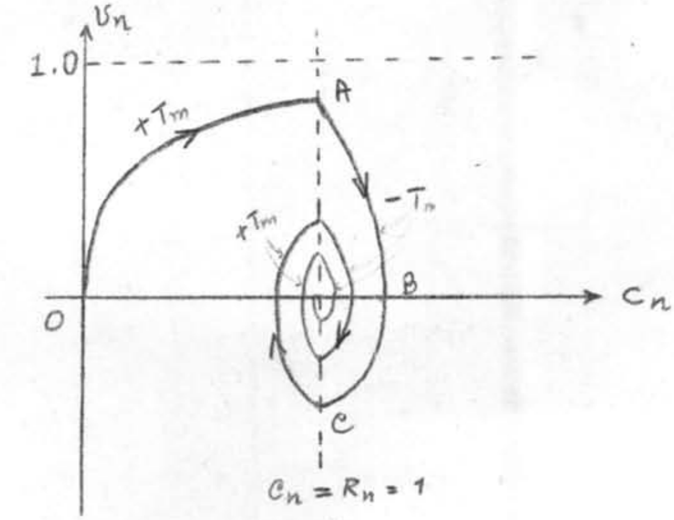
$$v(t) = \frac{T_m}{B}(1 - e^{-t/T}) + v_o e^{-t/T} \tag{2.6}$$

เมื่อ $T = J/B$ = time constant

โดยการขจัด t และทำ normalized โดยให้ $v_{max} = T_m/B$, $v/v_{max} = v_n$, $t/T = t_n$ จะได้

$$c - c_{on} = -(v_n - v_{on}) - \ln\left(\frac{1 - v_n}{1 - v_{on}}\right) \tag{2.7}$$

สมการนี้เป็น normalized phase plane trajectory ซึ่งถ้า $c_o = 0$ และ $v_o = 0$ จะเขียน trajectory ได้ดังรูปที่ 2.4 เส้น XY เป็น switching line ซึ่ง torque จะกลับทิศที่เส้นนี้และจะคำนวณ



รูปที่ 2.4

เวลาสำหรับ torque บวกได้ดังนี้

$$t_n = (c_n - c_{on}) - (v_n - v_{on}) \tag{2.8}$$

สำหรับ torque ลบจะคำนวณเวลาได้จาก

$$t_n = -(c_n - c_{on}) - (v_n - v_{on}) \tag{2.9}$$

จากสมการเหล่านี้จะพิสูจน์ได้ว่า bang-bang servo จะให้ rise time สั้นกว่าของ linear servo เมื่อกำหนดให้ overshoot เท่ากัน

2.3. Relay-Type Servo with Dead Zone (Step Input).[3]

ในกรณี servo system ดังรูปที่ 2.1 ใช้ relay ที่มี dead zone ดังรูปที่ 2.2(ข) จะเขียน differential equation ได้ว่า

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = \begin{cases} +T_m, & e > D \\ 0, & -D < e < D \\ -T_m, & e < -D \end{cases} \tag{2.10}$$

ของสมการนี้จะเป็นไปตาม phase plane trajectory ดังรูปที่ 2.4 เมื่อ torque เป็นบวกและเป็นลบ แต่เมื่อ torque เป็นศูนย์หรือเมื่อ error signal อยู่ใน relay dead zone สมการที่ (2.10) จะใช้ได้เพียง

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = 0 \tag{2.11}$$

ซึ่งจะให้ normalized output เท่ากับ

$$c_n = c_{on} + v_{on}(1 - e^{-t_n}) \tag{2.12}$$

และให้ normalized velocity เท่ากับ

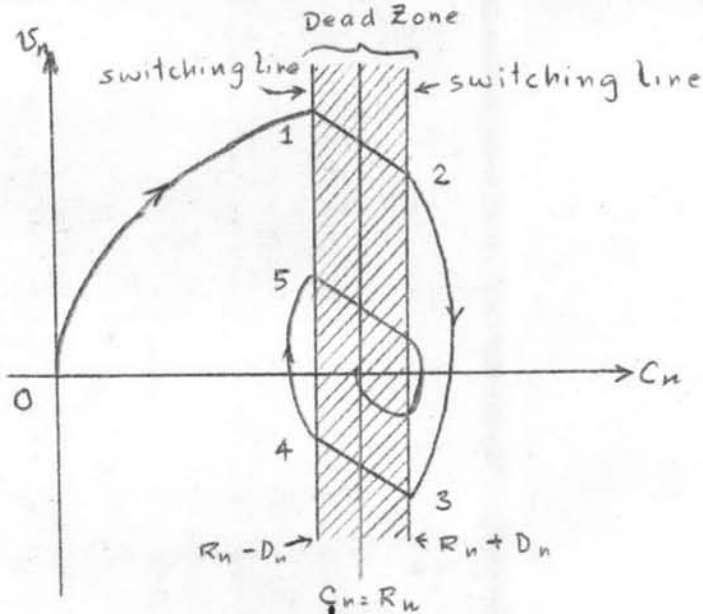
$$v_n = v_{on}e^{-t_n} \tag{2.13}$$

ขจัด t จากสองสมการนี้จะให้สมการของ phase plane trajectory เมื่อ torque เป็นศูนย์ ซึ่งจะได้

$$(c_n - c_{on}) + (v_n - v_{on}) = 0 \tag{2.14}$$

3. B.C. Kuo, ibid.

สมการนี้เป็นสมการของเส้นตรงมี slope เท่ากับ −1



รูปที่ 2.5

รูปที่ 2.5 แสดง normalized phase plane diagram ของ system นี้สำหรับ step displacement input r(t) = R แถบในแนวดิ่งขนาบด้วย switching line $c_n = R_n - D_n$ และ $c_n = R_n + D_n$ จะแทน relay dead zone เส้น trajectory จาก 0 ถึง 1 จะเหมือนกับเส้นโค้ง OA สำหรับ torque บวก(รูปที่ 2.4) เมื่อ output c_n เข้าไปอยู่ในrelay dead zone ที่ $c_n = R_n - D_n$ torque จะเปลี่ยนจาก $+T_m$ ไปหา 0 และจะมี phase plane trajectory เป็นเส้นตรงที่มี slope เท่ากับ −1 ดังสมการที่ (2.14) ที่อีกข้างของ dead zone $c_n = R_n + D_n$ สัญญาณป้อนเข้า relay จะบังคับให้มอเตอร์มี torque เป็นลบและจะมีรูป trajectory เหมือนกับเส้นโค้ง ABC ในรูปที่ 2.4 ในรูปที่ 2.5 นี้จะแสดงว่า output response จะเข้า steady state ภายหลังจากที่ได้ oscillate อยู่สองสามไซเคิล และ system นี้จะมี steady state error อันอาจจะอยู่ที่ใดที่หนึ่งใน relay dead zone ขนาดของ dead zone จะมีผลต่อ output response ซึ่งเมื่อมี dead zone ใหญ่ขึ้น จำนวน oscillate จะน้อยลงแต่อาจมี error ใหญ่ขึ้นได้

2.4. Relay-Type Servo with Hysteresis and Dead Zone (Step Input).[4]

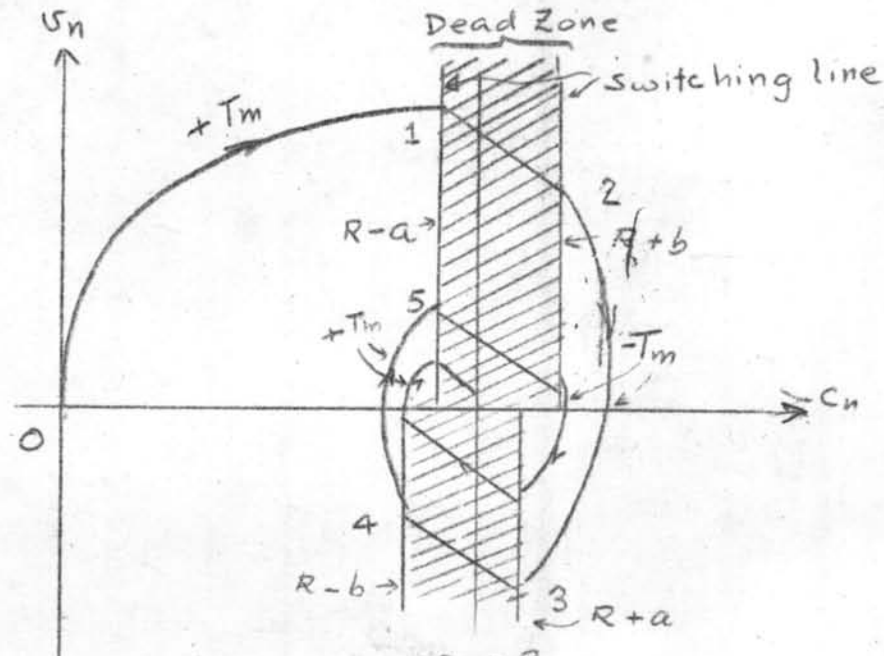
ถ้า servo system ในรูปที่ 2.1 ใช้ relay ที่มี dead zone และ hysteresis ดังรูปที่ 2.2(

4. B.C. Kuo, ibid.

จะเขียนdifferential equationได้ว่า

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = \begin{cases} +T_m, \begin{cases} e > b \text{ and } \dot{e} > 0 \\ e > a \text{ and } \dot{e} < 0 \end{cases} \\ 0 \quad -a < e < +a \\ -T_m, \begin{cases} e < -b \text{ and } \dot{e} < 0 \\ e < -a \text{ and } \dot{e} > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{2.15}$$

จากการสังเกตุจะเห็นได้ว่า phase plane ของสมการนี้อาจแบ่งออกได้เป็นสามบริเวณ บริเวณหนึ่งเมื่อtorque เป็นบวก อีกบริเวณหนึ่งเมื่อ torque เป็นลบ และอีกในบริเวณหนึ่งเมื่อ torque เป็นศูนย์ สำหรับsystem นี้จะมี switching line สี่เส้น(ดูรูปที่ 2.6) ซึ่งแทนด้วย $c_n = R - b, R - a, R + a, R + b$ ซึ่งจะแบ่ง phase plane ออกเป็นสามบริเวณและการสร้าง phase plane trajectory จะกระทำได้ตามวิธีการในหัวข้อ 2.2 และ 2.3 ซึ่งในรูปที่ 2.6 ได้แสดง phase plane trajectory ของ system นี้ไว้ด้วยแล้ว



รูปที่ 2.6

2.5. State Variable Characteristics of the Relay-Type Servo.

system ตามรูปที่ 2.1 จะมี characteristic equation ดังนี้ [5]

$$J\ddot{c} + B\dot{c} + Kc = 0 \tag{2.16}$$

ให้

$$x_1 = c$$

$$x_2 = \dot{c}$$

จะเขียน state equation ได้ว่า [6]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

อาจเขียนสมการที่ (2.16) ได้อีกรูปหนึ่งคือ

$$\left| sI - A \right| = 0 \tag{2.18}$$

เมื่อ s เป็น Laplace transform operator

I เป็น unit matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}$$

สมการที่ (2.18) จะให้

$$s_1, s_2 = -\frac{B}{2J} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \tag{2.19}$$

ดังนั้น general transient response ของoutput จะมีค่าเท่ากับ

$$c(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \tag{2.20}$$

---

5. B.C. Kuo, ibid p.440

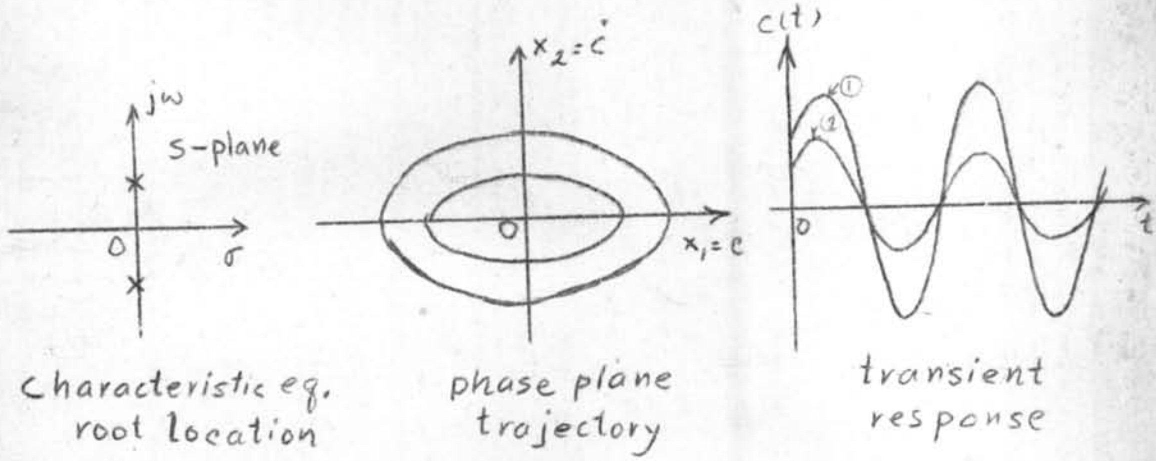
6. วิชัย ศังขจันทรานนท์ "General Considerations of State Variable Approach to Electrical Circuit Problems", วิทยานิพนธ์ พ.ศ. 2509 หน้า 10–15

สมการที่ (2.20) จะมีรูปได้หลายอย่างขึ้นกับ s_1 และ s_2 จะมีค่าเป็นบวกลบหรือ complex number ดังนั้น system นี้จะ stable หรือ unstable จะขึ้นกับ singular point[7,8,9] ของ system คือจุด $c = R = 1$, $v = 0$ ใน phase plane trajectory ซึ่งsingular pointนี้จะมีได้หลายชนิดขึ้นกับ root ของcharacteristic equation ดังนี้:

Center หรือ Vortex. ในเมื่อสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (2.16) มีค่า

$$K > 0, \quad B = 0$$

เราจะได้root ของcharacteristic equation(สมการที่ (2.19)) เป็นจำนวน conjugate imaginery ในกรณีนี้เราจะได้ trajectory เป็น ellipse รอบ origin และเรียก origin นี้ว่า center หรือvortex สำหรับ output transient response จะ oscillate อยู่ตลอดเวลา (ดูรูปที่ 2.7)



รูปที่ 2.7

Stable Focus. เมื่อสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (2.16) มีค่า

$$K > 0, \quad B > 0, \quad B < 2\sqrt{KJ} \qquad \text{หรือ } 1 > \frac{B}{2\sqrt{KJ}} > 0$$

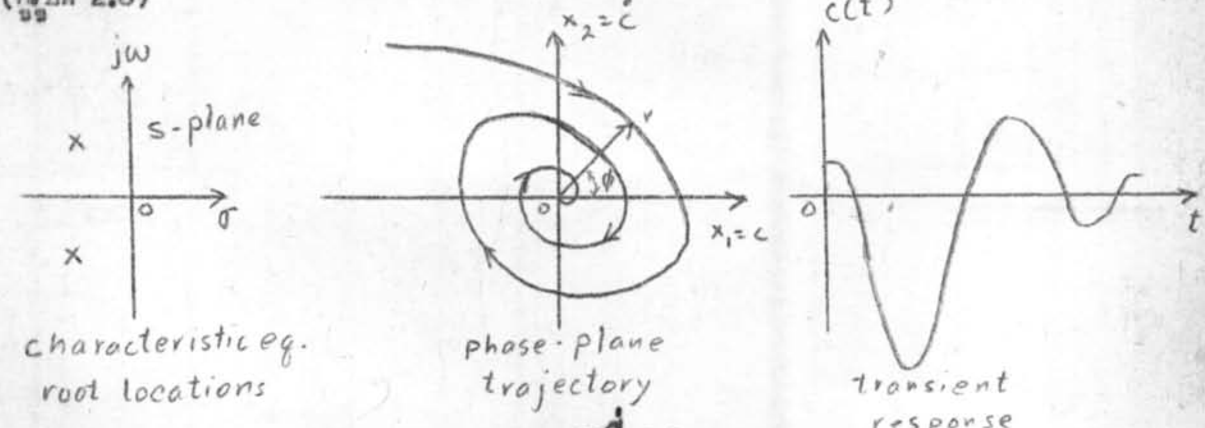
เราจะได้ complex conjugate root ที่มี real part เป็นลบ trajectory ใน x_1x_2-phase plane เป็น logarithmic spiral

$$r = A \exp\left[\frac{B\phi}{\sqrt{4KJ - B^2}}\right]$$

---

7. B.C. Kuo, loc cit pp. 440-441
8. P.M. Derusso, R.J. Roy and C.M. Close, "State Variables for Engineers" John Wiley & Sons, Inc., 1965, pp. 469-481
9. T.L. Saaty and J. Bram, "Nonlinear Mathematics", McGraw-Hill Book Co., 1964, pp.206-217.

เมื่อ r, ϕ เป็น polar coordinate ของ radius vector ใน x_1x_2-phase plane ขณะเมื่อ t เพิ่มขึ้น มุม ϕ จะเป็นลบมากขึ้นและรัศมีจะลดขนาดลงเข้าหาศูนย์ กรณีเช่นนี้เราจะได้ stable focal point สำหรับ output transient response ก็จะลดค่าลงเข้าหาศูนย์ตามฟังก์ชันของเวลาด้วย (ดูรูปที่ 2.8)

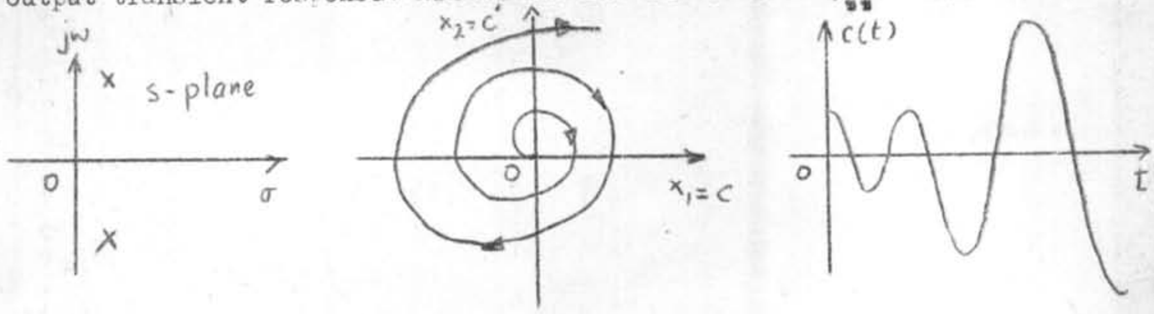


รูปที่ 2.8

Unstable Focus. เมื่อสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (2.16) มีค่า

$$K > 0, \quad B < 0, \quad B < 2\sqrt{KJ} \quad \text{หรือ} \quad 0 > \frac{B}{2\sqrt{KJ}} > -1$$

กรณีนี้จะตรงข้ามกับกรณี stable focus โดยที่ root ของ characteristic equation จะมีค่าเป็น complex conjugate root ที่มี real part เป็นบวก trajectory ใน x_1x_2-phase plane จะเป็น logarithmic spiral ที่ตรงข้ามคือเมื่อ t เพิ่มขึ้น มุม ϕ จะเป็นบวกมากขึ้นและรัศมีจะมีขนาดโตขึ้น output transient response จะมีขนาดโตขึ้นตามฟังก์ชันของเวลาด้วย (ดูรูปที่ 2.9)



รูปที่ 2.9

Stable Node. เมื่อสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (2.16) มีค่า

$$K > 0, \quad B > 0, \quad B > 2\sqrt{KJ}$$

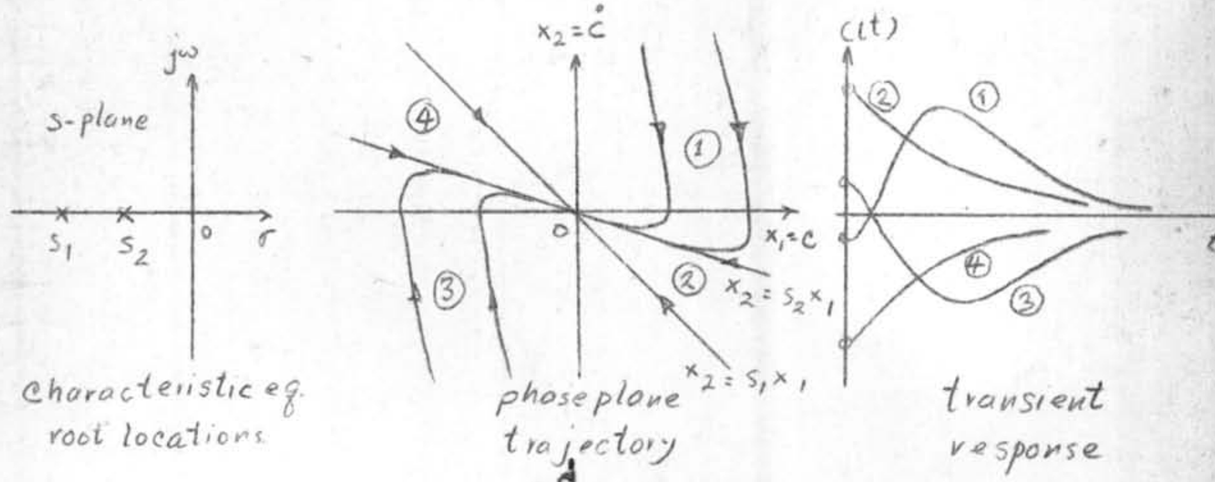
ในกรณีนี้เราจะได้ negative real root มีค่าไม่เท่ากันสองค่า หรือจะได้ $\frac{B}{2\sqrt{KJ}} > 1$, $s_1 < s_2 < 0$ $s_1/s_2 > 1$, เราจะได้ trajectory สองเส้นที่เป็นเส้นตรงซึ่งค่าของ slope จะหาได้จาก

$$m = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-\frac{K}{J}\left[\frac{K}{J}x_1 + \frac{B}{J}x_2\right]}{x_2}$$

หรือ

$$m^2 + \frac{B}{J}m + \frac{K}{J} = 0 \tag{2.21}$$

ซึ่งเป็นสมการที่มีรูปเดียวกับcharacteristic equation(2.16) เพราะฉนั้นในกรณีนี้เราจะได้ root เท่ากับ s_1 และ s_2 ซึ่งจะให้stable node point, สำหรับtrajectory จะมีได้ทั้งเส้นตรงและเส้นโค้ง(ดูรูปที่ 2.10) ในรูปที่ 2.10 ได้แสดง output transient response ไว้ด้วย

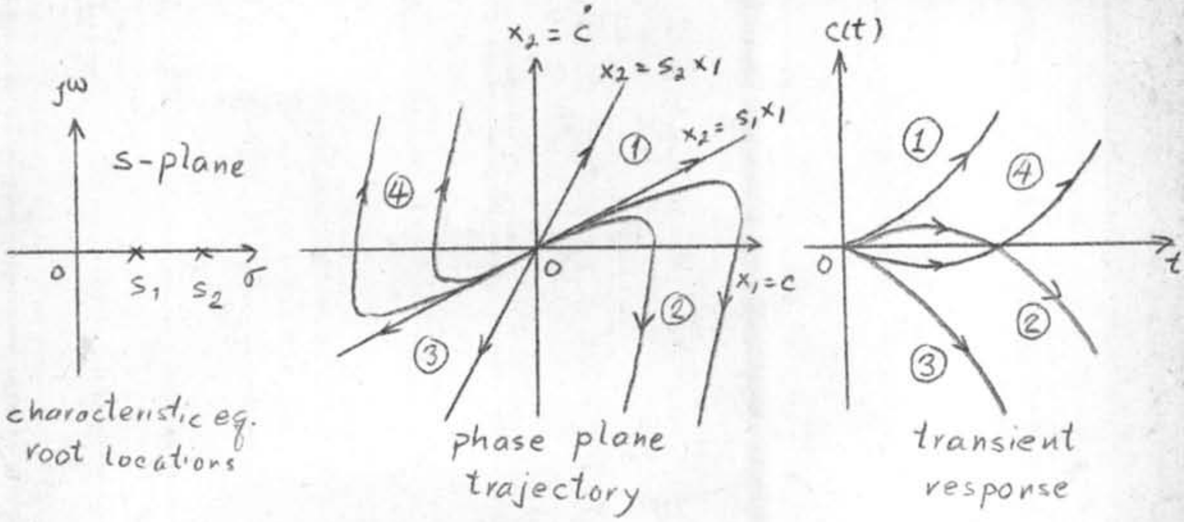


รูปที่ 2.10

Unstable Node. เมื่อสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (2.16) มีค่า

$$K > 0, \quad B < 0, \quad B > 2\sqrt{KJ}$$

จะให้ positive real root มีค่าไม่เท่ากันสองค่า กรณีนี้จะตรงข้ามกับกรณีข้างบนคือ $\frac{B}{2\sqrt{KJ}} < -1$ $s_2 > s_1 > 0$, $1 > s_1/s_2 > 0$ จะมี trajectory และ output transient response ดังแสดงในรูปที่ 2.11

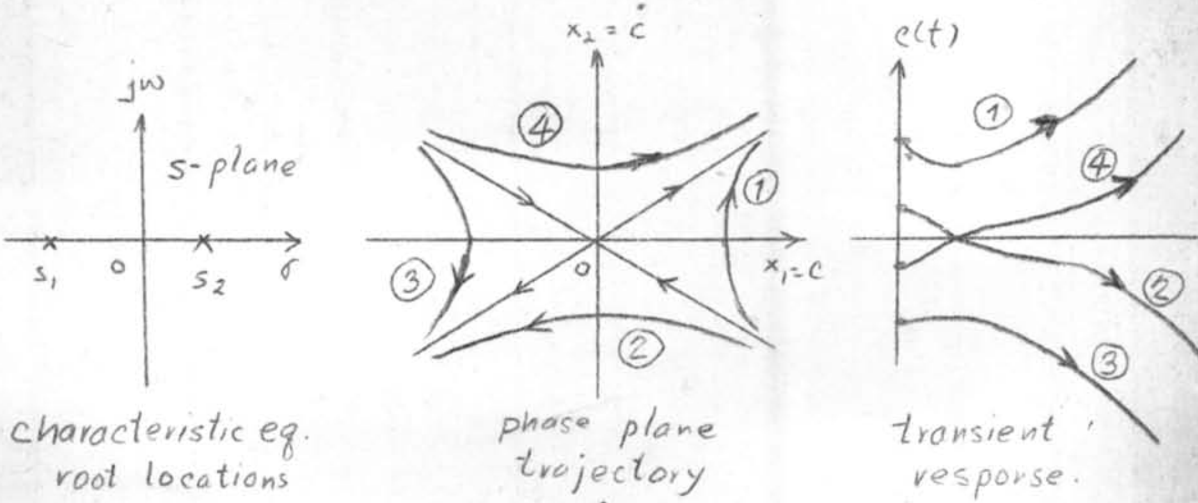


รูปที่ 2.11

Saddle Point. ในกรณีที่ค่า K ของสมการที่ (2.16) เป็นลบ

$$K < 0$$

root ของ characteristic equation จะมีค่า real ทั้งสองค่าแต่มีเครื่องหมายตรงข้าม(อาจมีขนาดเท่ากันได้ถ้า B = 0) ในกรณีนี้จะมี trajectory เป็นเส้นตรงสองเส้นที่มี slope เท่ากับ s_1 และ s_2 ตามลำดับ trajectory อื่นถ้ามีจะเป็นไปดังรูปที่ 2.12 และในรูปนี้ได้แสดง output transient response ไว้ด้วย และจะเห็นว่ากรณีนี้เป็นกรณีที่ไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 2.12

2.6. Limit Cycle.[10, 11]

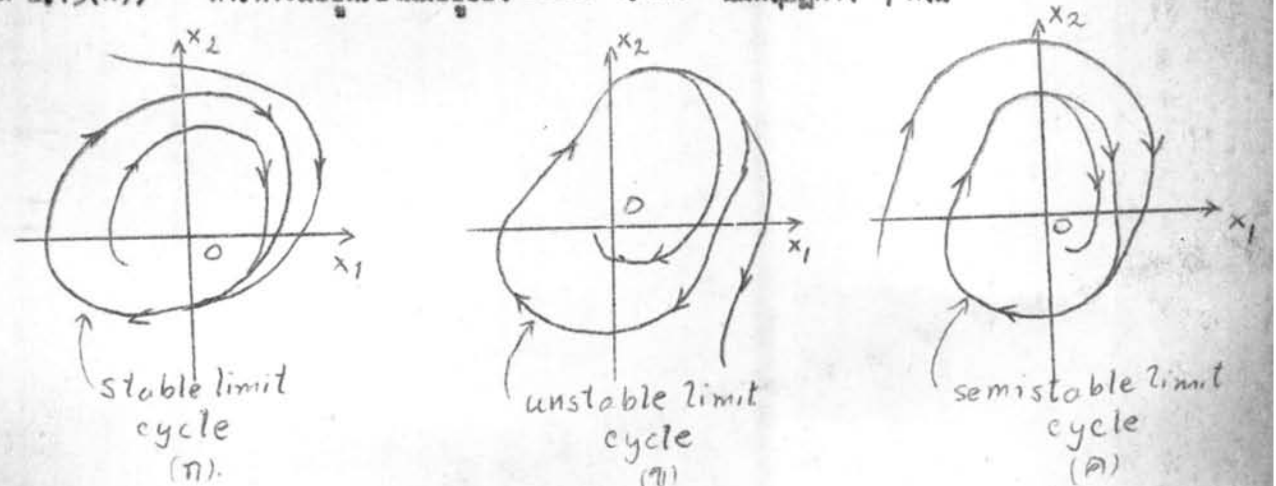
ในการศึกษาเกี่ยวกับ nonlinear system นั้นไม่อาจหา stability เหมือนกับใน linear system ได้จำต้องหาวิธีใหม่ โดยที่ stability ของ nonlinear system ไม่เพียงแต่จะขึ้นกับแบบของ bounded input function แต่ยังขึ้นกับขนาดของ input function ด้วย[12] ซึ่งจะต้องมีบริเวณอันหนึ่งให้ชื่อเรียกว่า limit cycle อันเป็นอาณาเขตที่แบ่งแยก stable กับ unstable.

ในการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้ ให้ state variable เป็น

$$x_1 = c(t), \qquad x_2 = \dot{c}(t) \tag{2.22}$$

ซึ่งถ้าใน linear system จัดให้เข้า oscillation จะได้ solution เป็น sine หรือ cosine function เมื่อใช้สมการที่ (2.22) จะได้ limit cycle เป็นวงกลมใน x_1x_2-phase plane ซึ่งเรียกว่า limit cycle

ในกรณี nonlinear system ก็อาจให้ limit cycle ซึ่งจะแบ่ง phase plane ออกเป็นสองบริเวณแต่ละบริเวณแสดงคุณสมบัติของ system ต่างกันอันอาจจะให้ stable, unstable หรือ semi-stable. รูปที่ 2.13(ก) แสดง stable limit cycle รูปที่ 2.13(ข) แสดง unstable limit cycle ในกรณีของ semistable limit cycle นั้นจะมี trajectory วิ่งเข้าหา limit cycle ทางด้านหนึ่งแต่ในขณะเดียวกันอีกทางด้านหนึ่งของ limit cycle นี้จะมี trajectory เคลื่อนหนีออกไป(ดูรูปที่ 2.13(ค)) การที่จะมีอยู่หรือไม่มีอยู่ของ limit cycle นี้มีทฤษฎีต่าง ๆ ดังนี้



รูปที่ 2.13

10. P.M. Derusso, R.J. Roy and C.M. Close, loc cit pp.488-489
11. T.L. Saaty and J.Bram, loc cit pp.214-218
12. A.W. Langill, Jr., loc cit p.480

Poincare's Index.

Index ของ closed curve ใน phase planeกำหนดให้มีภาวะเป็น

$$n = N - S$$

เมื่อ n เป็น index ของ closed curve ใน phase plane.

N เป็นจำนวนทั้งหมดของ center, focus และ node ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้น closed curve

S เป็นจำนวนทั้งหมดของ saddle point ที่ถูกล้อมรอบ

ภาวะนี้เป็นสิ่งจำเป็นที่ closed curve จะเป็น limit cycleอย่างไรก็ตามข้อพิจารณานี้ยังไม่เพียงพอ

Bendixon's Negative Criterion.

ข้อพิจารณานี้อาจเป็นประโยชน์ในการพิสูจน์ว่าไม่มี limit cycle อยู่ในบริเวณของ phase plane จากสมการ $\dot{x}_1 = P(x_1,x_2)$, $\dot{x}_2 = Q(x_1,x_2)$ จะให้ trajectory ที่มี slope

$$m = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{P(x_1,x_2)}{Q(x_1,x_2)}$$

จากนี้จะสามารถเขียนได้ว่า $P(x_1,x_2)dx_2 - Q(x_1,x_2)dx_1 = 0$ ดังนั้นจะเขียน integral รอบ ๆ limit cycle ได้ดังนี้

$$\oint \left[P(x_1,x_2)dx_2 - Q(x_1,x_2)dx_1\right] = 0 \qquad (2.23)$$

โดย Divergence Theorem สมการที่ (2.23) จะเขียนได้เป็น

$$\iint \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 = 0 \qquad (2.24)$$

จากสมการที่ (2.24) กำหนดให้

$$I = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \qquad (2.25)$$

ถ้า I ในสมการนี้ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายหรือเป็นศูนย์ภายในบริเวณของ phase plane ถ้า integral ของสมการที่ (2.24) ก็ไม่อาจเป็นศูนย์ได้ และไม่อาจมี limit cycle อยู่ได้ด้วย

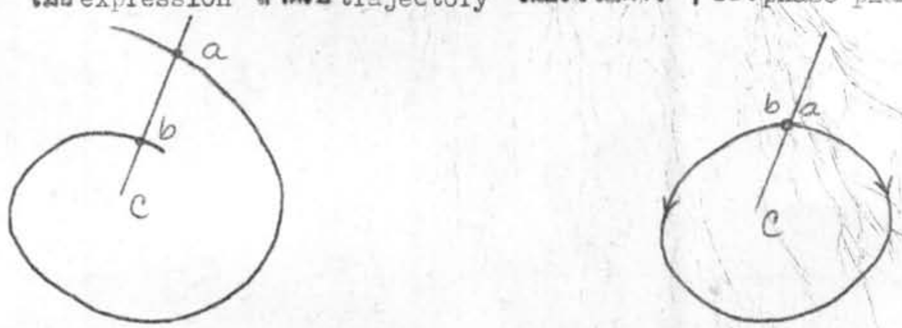
Poincare-Bendixson Theorem.

ถ้า trajectory อยู่แต่เพียงภายในบริเวณอันหนึ่งที่ finite โดย trajectory นั้นไม่วิ่งเข้าใกล้ singular point ใด ๆ ดังนั้น trajectory นี้จะเป็น closed trajectory หรือมีสภาพเข้าใกล้ closed trajectory และ closed trajectory เช่นนี้ไม่จำเป็นต้องเป็น limit cycle คือเป็น closed trajectory รอบ center

ถ้าหากสามารถจะกำหนดได้ว่าบริเวณใดจะใช้ทฤษฎีนี้ได้จะเป็นประโยชน์มาก เพราะว่าการกำหนดหาเช่นนี้จะทำได้ยากมาก วิธีหนึ่งที่ใช้กันซึ่งอาจเป็นประโยชน์ในบางโอกาสนั้นคือ เลือกวงกลมที่ร่วมจุดศูนย์กลางเดียวกันสองวง C_1 และ C_2 ซึ่งจำกัดความบริเวณ R ที่ต้องการพิจารณา ถ้าไม่มี singular point ใน R หรือบน C_1 และ C_2 ถ้า trajectory วิ่งเข้าไปใน R ผ่านทุก ๆ จุดของ C_1 และ C_2 ดังนั้นจะมีอย่างน้อยที่สุดหนึ่ง closed trajectory ในบริเวณ R (ถ้า trajectory วิ่งออกจากบริเวณ R ก็จะเป็นอย่างเดียวกัน)

Poincare's Successor Function.

Poincare ได้คิด successor function ขึ้นซึ่งเป็นประโยชน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบางทฤษฎีที่เกี่ยวกับ limit cycle อย่างไรก็ตามความเข้าใจในการนำไปใช้พิสูจน์หาภาวะของ system parameter ที่ซึ่ง limit cycle จะสามารถมีอยู่ได้นั้นเป็นสิ่งสำคัญมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับ piecewise linear system เมื่อ expression สำหรับ trajectory ในบริเวณต่าง ๆ ของ phase plane สามารถจะรู้ค่าได้



(ก)

รูปที่ 2.14

successor function สามารถแสดงได้โดยอาศัยรูปที่ 2.14 ในรูปที่ 2.14(ก) แสดงเส้นโค้ง C ซึ่งตัด trajectory ครั้งแรกที่จุด a และครั้งต่อไปที่จุด b ดังนั้นจุด b จะเป็น successor ของ

จุด a, ถ้า u เป็น parameter เช่นความยาวของเส้นโค้ง c จะสามารถเขียนจุด a และ b เป็นฟังก์ชันของ u ในรูป $a = \alpha(u_a)$, $b = \alpha(u_b)$. นอกจากนั้น a และ b เป็นจุดบน solution curve ซึ่งฟังก์ชันที่กล่าวถึงจะสัมพันธ์กันด้วย solution นี้ ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะเขียน u_b เป็นฟังก์ชันของ u_a ในรูป $u_b = g(u_a)$, ฟังก์ชัน g(u) เป็น successor function, ในรูปที่ 2.14(ข) แสดงจุด a และ b ทับกันอันเป็นกรณีของ limit cycle จุดเหล่านี้จะกำหนดได้ด้วย solution ของ u = g(u) การใช้แนวความคิดเกี่ยวกับ successor function จะกำหนดหาภาวะของ system parameter ที่ซึ่ง limit cycle สามารถหรือไม่สามารถมีอยู่ได้

พิจารณา relay control system ดังรูปที่ 2.15(ก) สมมุติว่า relay นี้มี dead zone และ hysteresis ดังรูปที่ 2.15(ข) เพราะฉะนั้น relay characteristic จะมี odd symmetry คือ $m(e) = -m(-e)$ เมื่อ $e = -x_1$, สำหรับ relay output จะมีค่า 0, +1 หรือ -1 ขึ้นกับสัญญาณ e, ดังนั้น system นี้จะเป็น piecewise linear. เพราะฉะนั้นจะสามารถแบ่ง phase plane ออกได้เป็นสามบริเวณ คือ

บริเวณที่ 1 $m(e) = 0$

บริเวณที่ 2 $m(e) = -1$

บริเวณที่ 3 $m(e) = +1$

trajectory ในแต่ละบริเวณทั้งสามนี้จะสามารถหาได้จาก state equation $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = -x_2 + m(e)$ slope ของ trajectory จะหาได้จาก

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + m(e)}{x_2} \tag{2.26}$$

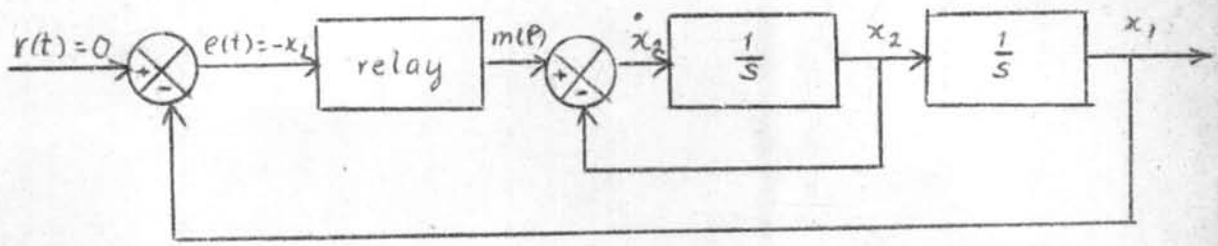
ในบริเวณที่ 1, m(e) มีค่าเท่ากับศูนย์ สมการที่ (2.26) จะกลายเป็น

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -1 \tag{2.27}$$

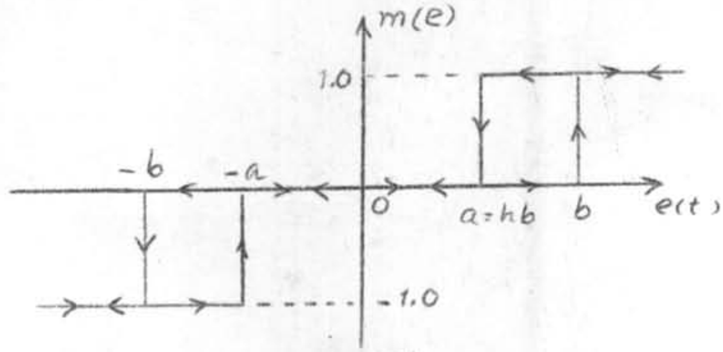
integrate จะได้

$$x_2 = -x_1 + c_1, \qquad c_1 \text{ เป็นค่าคงที่} \tag{2.28}$$

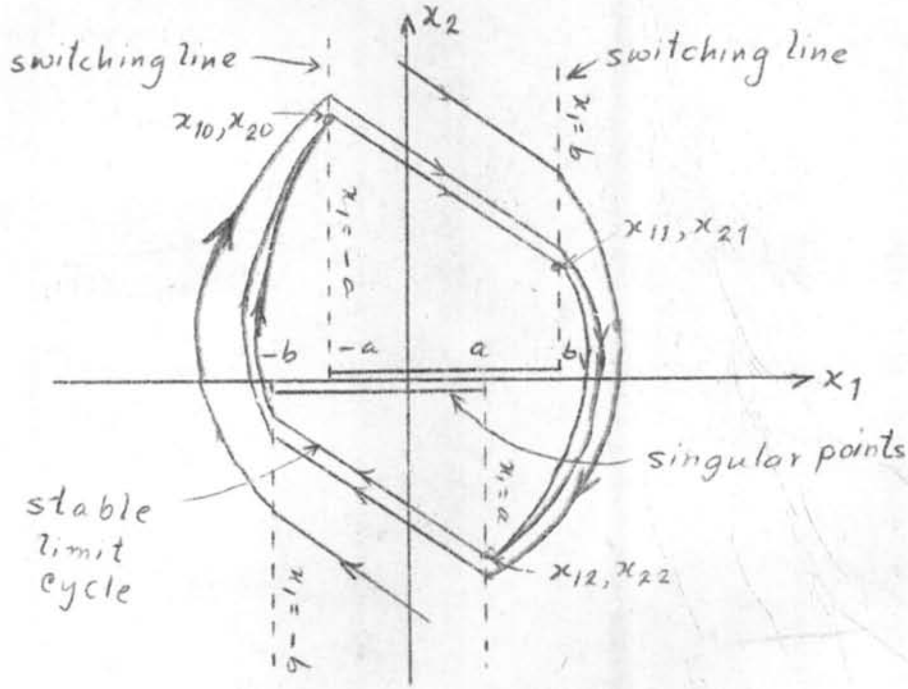
ซึ่งเป็น trajectory ในบริเวณที่ 1 มีรูปเป็นเส้นตรงดังแสดงในรูปที่ 2.15(ค) และจะสังเกตุเห็นได้ว่า


r(t) = 0
e(t) = -x1
relay
m(e)
x2
1/s
x2
1/s
x1

(ก)


m(e)
1.0
-b
-a
0
a=hb
b
e(t)
-1.0

(ข)


x2
switching line
switching line
x10, x20
x1 = b
x1 = -a
x11, x21
-b
-a
a
b
x1
singular points
stable
limit
cycle
x1 = a
x12, x22
x1 = -b

รูปที่ 2.15

จะมี singular point อยู่เป็นจำนวนมากในบริเวณที่ 1 โดยกำหนดให้ $|x_1| < b, \; x_2 = 0$ ในบริเวณที่ 2 สมการที่ (2.26) จะเท่ากับ

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{1 + x_2}{x_2} \tag{2.29}$$

integrate จะได้

$$x_1 + x_2 = \ln(1 + x_2) + c_2, \qquad c_2 \text{ เป็นค่าคงที่} \tag{2.30}$$

สมการนี้เป็น trajectory ในบริเวณที่ 2 และจะใช้ได้ต่อเมื่อ $x_2 > -1$, ได้เขียนรูปแสดง trajectory นี้ไว้ในรูปที่ 2.15(ค) จากสมการที่ (2.29) slope ของ trajectory จะเท่ากับศูนย์ที่ $x_2 = -1$ ดังนั้นจะไม่มี trajectory สามารถข้ามเส้น $x_2 = -1$ และจะไม่มี limit cycle สามารถอยู่ได้นอกบริเวณ $|x_2| < 1$, สำหรับ trajectory ในบริเวณที่ 3 จะมีรูปร่างอย่างเดียวกับ trajectory ในบริเวณที่ 2 เพียงแต่หมุนไป 180 องศา และบริเวณทั้งสามนี้จะมี switching line สี่เส้นเป็นเส้นแบ่งเขต

stable limit cycle ที่อาจมีอยู่ได้นั้น อาจคำนวณหาได้โดยใช้ successor function เพราะว่าความ symmetry ซึ่งมีอยู่ในตัวอย่างนี้ successor function จะต้องการ span เพียงครึ่งหนึ่งของ possible limit cycle นั่นคือจะกำหนดหา successor function ด้วยความสัมพันธ์ระหว่างจุด $(x_{10} = -a, \; x_{20})$ ไปถึงจุด $(x_{12} = a, \; x_{22})$, ถ้าหาก $x_{12} = -x_{10}$ และ $x_{22} = -x_{20}$ จะมี limit cycle อยู่ได้

จากสมการที่ (2.28) จะเห็นได้ว่าจุด $(x_{10}, \; x_{20})$ และ (x_{11}, x_{21}) สัมพันธ์กันโดย

$$x_{21} - x_{20} = - (x_{11} - x_{10}) \tag{2.31}$$

เนื่องด้วยสองจุดนี้อยู่บน switching line, ดังนั้นด้วยสมการของ switching line $x_{10} = -a$ และ $x_{11} = b$ สามารถจะขจัด x_{10} และ x_{11} จากสมการที่ (2.31) ได้ซึ่งจะเขียนได้เป็น

$$x_{21} = x_{20} - b(1 + h) \tag{2.32}$$

ในทำนองเดียวกัน สมการที่ (2.30) และสมการของ switching line จะสามารถเขียนความสัมพันธ์

ระหว่าง x_{21} และ x_{22} ได้ว่า

$$(x_{22} - x_{21}) - b(1 - h) = \ln\left(\frac{1 + x_{22}}{1 + x_{21}}\right) \tag{2.33}$$

จากสมการที่ (2.32) และ (2.33) สามารถจะขจัด x_{21} และหาความสัมพันธ์ระหว่าง x_{20} และ x_{22} ได้ว่า

$$(1 + x_{22})e^{-x_{22}} = \left[1 + x_{20} - b(1 + h)\right] e^{(-x_{20} + 2bh)} \tag{2.34}$$

ถ้า $x_{22} = - x_{20}$ satisfy สมการที่ (2.34), จะมี limit cycle เกิดขึ้น กรณีเช่นนี้เป็นความจริงเพราะว่า equality นี้จะทำให้ได้ $x_{12} = - x_{10}$ โดยที่สองจุดนี้จะอยู่บนเส้นที่มี slope เท่ากันและอยู่ห่างจาก origin เท่ากัน ซึ่ง system จะเสถียรภาพถ้า trajectory วิ่งเข้าไปใน singular region.
