

### บทที่ 3

## การออกแบบตัวควบคุม

### 3.1 สมการเคอร์เนล

สมการของคานติโมเซนโคที่มีตัวควบคุมมุมหมุนหรือโมเมนต์ที่ขอบจะถูกแปลงด้วยการแปลงปริพันธ์ ไปเป็นสมการคลื่นที่มีเสถียรภาพในรูปแบบ [26]

$$\epsilon w_{tt}(x, t) = (1 + d\partial_t)(w_{xx}(x, t) - cw(x, t)) \quad (3.1)$$

$$w_x(0, t) = 0 \quad (3.2)$$

$$w(1, t) = 0 \quad (3.3)$$

โดยที่  $c > 0$  สมการ (3.1)-(3.3) มีค่าลักษณะเฉพาะ  $\sigma_n$  อยู่ในกึ่งระนาบซ้ายเปิด มีอัตราส่วนการหน่วงอย่างน้อย

$$\zeta = \frac{\pi d}{4\sqrt{\epsilon}} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}c} \quad (3.4)$$

ส่วนจริงของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดมีค่าไม่มากกว่า

$$-\min \left\{ \frac{1}{d}, \frac{\pi^2 d}{8\epsilon} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}c\right) \right\} \quad (3.5)$$

และค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นค่าเชิงซ้อนมีจำนวนไม่เกิน

$$\frac{4\sqrt{\epsilon}}{\pi d} \sqrt{1 - \frac{d^2}{4\epsilon}c} - 1 \quad (3.6)$$

ส่วนค่าอื่น ๆ ที่เหลือจะเป็นจำนวนจริง

ค่าลักษณะเฉพาะสอดคล้องกับสมการกำลังสอง

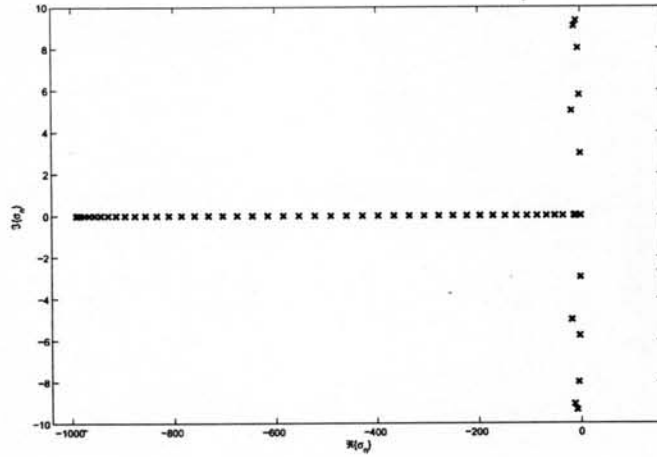
$$\epsilon \sigma_n^2 + d \left[ c + \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2 \right] \sigma_n + \left[ c + \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right)^2 \right] = 0 \quad (3.7)$$

และเป็นดังรูปที่ 3.1

โดยรากที่เป็นจำนวนจินตภาพทั้งหมดอยู่ในวงกลม

$$\left( \operatorname{Re}\{\sigma_n\} + \frac{1}{d} \right)^2 + \operatorname{Im}\{\sigma_n\}^2 = \frac{1}{d^2} \quad (3.8)$$

เมื่อค่า  $d$  มีค่าน้อยมาก ๆ ระบบจะเกิดการแกว่ง แต่เราสามารถปรับปรุงพฤติกรรมของระบบได้ โดยการปรับค่า  $c$  เพิ่มขึ้นทำให้อัตราการหน่วงสูงขึ้นและทำให้ระบบเข้าสู่สถานะอยู่ตัวได้เร็วขึ้น แต่ผลของการเพิ่มค่า  $c$  มาก ๆ จะทำให้ระบบมีความแข็ง (stiffness) มากขึ้นด้วย



รูปที่ 3.1: ค่าลักษณะเฉพาะของสมการคลื่นที่มีเสถียรภาพเมื่อ  $\epsilon = 1$ ,  $a = 1$ ,  $d = 0.1$  และ  $c = 0$ .

### 3.1.1 กรณีคานปลายอิสระ

ทำการแปลงแบบจำลองลดรูปของคานตีโมเซนโค (2.21)-(2.22) แบบปลายอิสระ ด้วยการแปลงปริพันธ์ก้าวยหลัง

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y)u(y, t)dy \quad (3.9)$$

บนโดเมนสามเหลี่ยม  $0 \leq y \leq x \leq 1$  โดยที่

$$w_x(x, t) = u_x(x, t) - k(x, x)u(x, t) - \int_0^x k_x(x, y)u(y, t)dy \quad (3.10)$$

$$w_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t) - \frac{dk(x, x)}{dx}u(x, t) - k(x, x)u_x(x, t) - k_x(x, x)u(x, t) - \int_0^x k_{xx}(x, y)u(y, t)dy \quad (3.11)$$

$$w_{txx}(x, t) = u_{txx}(x, t) - \frac{dk(x, x)}{dx}u_t(x, t) - k(x, x)u_{tx}(x, t) - k_x(x, x)u_t(x, t) - \int_0^x k_{txx}(x, y)u_t(y, t)dy \quad (3.12)$$

$$w_t(x, t) = u_t(x, t) - \int_0^x k(x, y)u_t(y, t)dy \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \epsilon w_{tt}(x, t) &= \epsilon u_{tt}(x, t) - \epsilon \int_0^x k(x, y)u_{tt}(y, t)dy \\ &= \epsilon u_{tt}(x, t) - \int_0^x (1 + d\partial_t)k(x, y) \{u_{xx}(x, t) + b^2u(x, t) - b^2 \cosh(bx)u(0, t) \\ &\quad + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y, t)dy\} dy \\ &= \epsilon u_{tt}(x, t) - k(x, x)u_x(x, t) + k(x, 0)u_x(0, t) + k_y(x, x)u(x, t) - k_y(x, 0)u(0, t) - \int_0^x k_{yy}(x, y)u(y, t)dy \\ &\quad - dk(x, x)u_{tx}(x, t) + dk(x, 0)u_{tx}(0, t) + dk_y(x, x)u_t(x, t) - dk_y(x, 0)u_t(0, t) - d \int_0^x k_{yy}(x, y)u_t(y, t)dy \\ &\quad - \int_0^x b^2k(x, y) (u(y, t) + du_t(y, t)) dy + b^2(u(0, t) + du_t(0, t)) \int_0^x k(x, y) \cosh(by)dy \\ &\quad - \int_0^x (u(y, t) + du_t(y, t)) \left( b^3 \int_y^x k(x, \xi) \sinh(b(\xi - y))d\xi \right) dy \end{aligned} \quad (3.14)$$

นำไปแทนในสมการคลื่นที่มีเสถียรภาพ (3.1)-(3.2) จะได้

$$\begin{aligned} & \epsilon u_{tt}(x, t) - (1 + d\partial_t) \left\{ u_{xx}(x, t) + b^2 u(x, t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y, t)dy - b^2 \cosh(bx)u(0, t) \right\} \\ & + (1 + d\partial_t) \int_0^x \left\{ k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - (c + b^2)k(x, y) + b^3 \sinh(b(x-y)) \right. \\ & \left. - b^3 \int_y^x k(x, \xi) \sinh(b(\xi-y))d\xi \right\} u(y, t)dy + (1 + d\partial_t) \left\{ 2 \frac{dk(x, x)dx}{x} + (c + b^2) \right\} u(x, t) \\ & - (1 + d\partial_t) \left\{ k_y(x, 0) + b^2 \cosh(bx) - b^2 \int_0^x k(x, y) \cosh(by)dy \right\} u(0, t) = 0 \end{aligned}$$

เมื่อ  $\frac{dk(x, x)dx}{x} = k_x(x, y) + k_y(x, y)$  แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ดังนี้

- ให้พจน์ในวงเล็บ  $[\cdot]$  ในปริพันธ์  $\int_0^x [\cdot]u_t(y, t)dy$  และ  $\int_0^x [\cdot]u(y, t)dy$  เท่ากับศูนย์จะได้

$$k_{xx}(x, y) = k_{yy}(x, y) + (c + b^2)k(x, y) - b^3 \sinh(b(x-y)) + b^3 \int_y^x k(x, \xi) \sinh(b(\xi-y))d\xi \quad (3.15)$$

- ให้พจน์ที่คูณกับ  $u_t(x, t)$  และ  $u(x, t)$  เป็นศูนย์ จะได้

$$k(x, x) = -\frac{c + b^2}{2}x \quad (3.16)$$

- ให้พจน์ที่คูณกับ  $u_t(0, t)$  และ  $u(0, t)$  เป็นศูนย์ จะได้

$$k_y(x, 0) = -b^2 \cosh(bx) + b^2 \int_0^x k(x, y) \cosh(by)dy \quad (3.17)$$

เมื่อ  $u_{tx}(0, t) = 0$  และทำเช่นเดียวกับกรณี  $q = 0$  ใน [23]

จากเงื่อนไขขอบ (3.3) จะได้ว่ากฎการควบคุมที่ต้องการคือ

$$u(1, t) = \int_0^1 k(1, y)u(y, t)dy \quad (3.18)$$

### 3.1.2 กรณีคานปลายยึดหรือปลายหลุด

ในทำนองเดียวกัน เราจะใช้การแปลงปริพันธ์ก้าวยกยหลัง (3.9) แปลงแบบจำลองลดรูปของคานตีโมเซนโค (2.34)-(2.35) ไปสู่ระบบที่มีเสถียรภาพ (3.1)-(3.2) โดยแทนด้วย (3.10)-(3.13) และ

$$\begin{aligned} \epsilon w_{tt}(x, t) &= \epsilon u_{tt}(x, t) - \int_0^x (1 + d\partial_t)k(x, y) \left\{ u_{xx}(x, t) + b^2 u(x, t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y, t)dy \right\} dy \\ &= \epsilon u_{tt}(x, t) - k(x, x)u_x(x, t) + k(x, 0)u_x(0, t) + k_y(x, x)u(x, t) - k_y(x, 0)u(0, t) - \int_0^x k_{yy}(x, y)u(y, t)dy \\ &\quad - dk(x, x)u_{tx}(x, t) + dk(x, 0)u_{tx}(0, t) + dk_y(x, x)u_t(x, t) - dk_y(x, 0)u_t(0, t) - d \int_0^x k_{yy}(x, y)u_t(y, t)dy \\ &\quad - \int_0^x b^2 k(x, y) (u(y, t) + du_t(y, t)) dy - \int_0^x (u(y, t) + du_t(y, t)) \left( b^3 \int_y^x k(x, \xi) \sinh(b(\xi-y))d\xi \right) dy \end{aligned} \quad (3.19)$$

จะได้

$$\begin{aligned} & \epsilon u_{tt}(x, t) - (1 + d\partial_t) \left\{ u_{xx}(x, t) + b^2 u(x, t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y, t)dy \right\} + (1 + d\partial_t)k(x, 0)u_x(0, t) \\ & + (1 + d\partial_t) \int_0^x \{ k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - (c + b^2)k(x, y) + b^3 \sinh(b(x-y)) \\ & - b^3 \int_y^x k(x, \xi) \sinh(b(\xi - y))d\xi \} u(y, t)dy + (1 + d\partial_t) \left\{ 2 \frac{dk(x, x)}{dx} + (c + b^2) \right\} u(x, t) = 0 \end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ดังนี้

- ให้พจน์ในวงเล็บ [...] ในปริพันธ์  $\int_0^x [\cdot]u_t(y, t)dy$  และ  $\int_0^x [\cdot]u(y, t)dy$  เท่ากับศูนย์จะได้

$$k_{xx}(x, y) = k_{yy}(x, y) + (c + b^2)k(x, y) - b^3 \sinh(b(x-y)) + b^3 \int_y^x k(x, \xi) \sinh(b(\xi - y))d\xi \quad (3.20)$$

- ให้พจน์ที่คูณกับ  $u_t(x, t)$  และ  $u(x, t)$  เป็นศูนย์ จะได้

$$k(x, x) = -\frac{c + b^2}{2}x \quad (3.21)$$

- ให้พจน์ที่คูณกับ  $u_{tx}(0, t)$  และ  $u_x(0, t)$  เป็นศูนย์ จะได้

$$k(x, 0) = 0 \quad (3.22)$$

เมื่อ  $u_t(0, t) = 0$  และทำเช่นเดียวกับกรณี  $q = \infty$  ใน [23]

จากเงื่อนไขขอบ (3.3) จะได้ว่ากฎการควบคุมที่ต้องการคือ

$$u(1, t) = \int_0^1 k(1, y)u(y, t)dy \quad (3.23)$$

## 3.2 ผลเฉลยของสมการเคอร์เนล

### 3.2.1 การประมาณสี่บเนื่อง

เราจะแปลงสมการเคอร์เนลเป็นสมการปริพันธ์ย่อยแล้ว สามารถใช้เทคนิคการประมาณสี่บเนื่อง (successive approximation) ในการประมาณผลเฉลยของสมการปริพันธ์ย่อยนั้น ด้วยอนุกรมกำลัง [23]

#### 3.2.1.1 กรณีคานปลายอิสระ [25]

เราสามารถประมาณผลเฉลยของสมการเคอร์เนล (3.15)-(3.17) ด้วยการประมาณสี่บเนื่อง และ

การคำนวณเชิงสัญลักษณ์ดังนี้

$$k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(x, y) \quad (3.24)$$

$$k_0(x, y) = -\frac{b}{2}[-\sinh(b(x-y)) + by \cosh(b(x-y))] - \frac{c}{2}x \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x, y) &= (c + b^2) \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} \int_0^{\frac{x-y}{2}} k_n(\sigma + s, \sigma - s) ds d\sigma \\ &+ 2(c + b^2) \int_0^{\frac{x-y}{2}} \int_0^{\sigma} k_n(\sigma + s, \sigma - s) ds d\sigma - b^2 \int_0^{x-y} \int_0^{\sigma} k_n(\sigma, s) \cosh(bs) ds d\sigma \\ &+ b^3 \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} \int_0^{\frac{x-y}{2}} \int_{\sigma-s}^{\sigma+s} k_n(\sigma + s, \xi) \sinh(b(\xi - \sigma + s)) d\xi ds d\sigma \\ &+ 2b^3 \int_0^{\frac{x-y}{2}} \int_0^{\sigma} \int_{\sigma-s}^{\sigma+s} k_n(\sigma + s, \xi) \sinh(b(\xi - \sigma + s)) d\xi ds d\sigma \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.2.1.2 กรณีคานปลายยึดหรือหมุด

เราสามารถประมาณผลเฉลยของสมการเคอร์เนล (3.20)-(3.22) ด้วยการประมาณสี่เหลี่ยม และการคำนวณเชิงสัญลักษณ์ดังนี้

$$k(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(x, y) \quad (3.27)$$

$$k_0(x, y) = -\frac{y}{2}[b^2 \cosh(b(x-y)) + c] \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x, y) &= (c + b^2) \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} \int_0^{\frac{x-y}{2}} k_n(\sigma + s, \sigma - s) ds d\sigma \\ &+ b^3 \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} \int_0^{\frac{x-y}{2}} \int_{\sigma-s}^{\sigma+s} k_n(\sigma + s, \xi) \sinh(b(\xi - \sigma + s)) d\xi ds d\sigma \end{aligned} \quad (3.29)$$

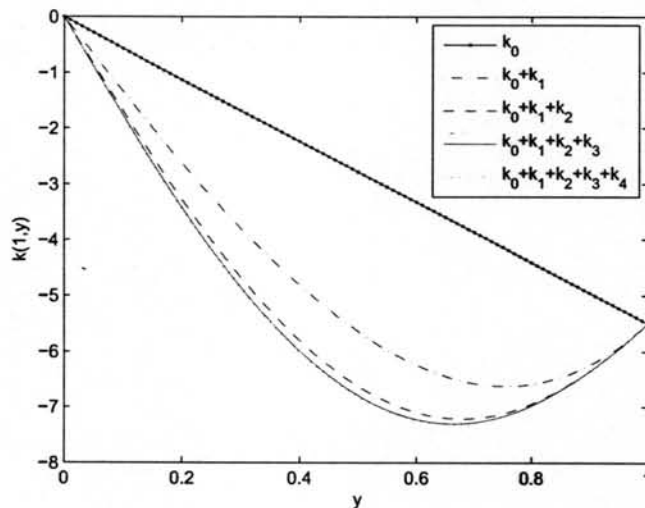
จาก (3.28)-(3.29) จะได้

$$\begin{aligned} k_1(x, y) &= -\frac{1}{16}y\{4c + c^2x^2 - c^2y^2 \\ &+ (b^3y + 4bcx) \sinh(b(x-y)) + (-4c - b^4xy + b^4x^2) \cosh(b(x-y))\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} k_2(x, y) &= -\frac{1}{384b^2}y\{-72c^2 + 72b^2c - 36b^2c^2y^2 + 12b^2c^2x^2 - 2b^2c^3x^2y^2 + b^2c^3x^4 + b^2c^3y^4 \\ &+ (-72bc^2x + 72b^3cx - 36b^3cy + 3b^5y - 12b^5cx^2y + 12b^5cx^3 - 3b^7xy^2 + 3b^7x^2y) \sinh(b(x-y)) \\ &+ (72c^2 - 72b^2c + 24b^2c^2x^2 + 36b^4cxy - 36b^4cx^2 \\ &+ 3b^6y^2 - 3b^6xy + b^8x^2y^2 - 2b^8x^3y + b^8x^4) \cosh(b(x-y))\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
k_3(x, y) = & -\frac{1}{110680464442257309696b^4}y\{17293822569102702960c^3 - 51881467707308108400b^2c^2 \\
& -1729382256910270512b^2c^3x^2 + 8646911284551351984b^2c^3y^2 + 17293822569102701808b^4c \\
& +2594073385365405552b^4c^2x^2 - 12970366926827027376b^4c^2y^2 + 720575940379279310b^4c^3y^4 \\
& +48b^4c^3xy^3 - 864691128455135332b^4c^3x^2y^2 + 192b^4c^3x^3y + 144115188075855782b^4c^3x^4 \\
& -18014398509481983b^4c^4x^4y^2 + 18014398509481983b^4c^4x^2y^4 \\
& +6004799503160661b^4c^4x^6 - 6004799503160661b^4c^4y^6 - 1392b^6 + 720b^6cx^2 - 720b^6cy^2 \\
& +6b^6c^2y^4 + 48b^6c^2xy^3 - 180b^6c^2x^2y^2 + 192b^6c^2x^3y - 66b^6c^2x^4 \\
& +(720bc^3y + 17293822569102703200bc^3x + 12970366926827026272b^3c^2y \\
& -51881467707308108904b^3c^2x + 24b^3c^3y^3 - 96b^3c^3xy^2 + 120b^3c^3x^2y + 1152921504606846864b^3c^3x^3 \\
& +17293822569102701958b^5cx - 10808639105689190040b^5cy - 96b^5c^2y^3 + 300b^5c^2xy^2 \\
& +5188146770730810792b^5c^2x^2y - 6052837899185946180b^5c^2x^3 \\
& -498b^7x + 270215977642230705b^7y - 34b^7cy^3 + 2161727821137838107b^7cxy^2 \\
& -5188146770730811104b^7cx^2y + 2882303761517117167b^7cx^3 \\
& +90071992547410001b^9y^3 - 270215977642229946b^9xy^2 + 162129586585338039b^9x^2y \\
& -77b^9x^3 + b^9cy^5 - 6b^9cxy^4 + 14b^9cx^2y^3 + 144115188075855848b^9cx^3y^2 \\
& -288230376151711719b^9cx^4y + 144115188075855862b^9cx^5 \\
& +b^{11}y^5 - 6b^{11}xy^4 + 36028797018963980b^{11}x^2y^3 \\
& -72057594037927948b^{11}x^3y^2 + 36028797018963975b^{11}x^4y - 2b^{11}x^5) \sinh(b(x-y)) \\
& +(-17293822569102702960c^3 + 51881467707308108400b^2c^2 - 6917529027641081208b^2c^3x^2 \\
& -480b^2c^3xy + 216b^2c^3y^2 - 17293822569102701808b^4c - 12970366926827026776b^4c^2xy \\
& +23346660468288649152b^4c^2x^2 - 552b^4c^2y^2 + 1392b^6 - 8646911284551351774b^6cx^2 \\
& +10808639105689190190b^6cxy - 2161727821137838416b^6cy^2 - 12b^6c^2y^4 + 60b^6c^2xy^3 \\
& -108b^6c^2x^2y^2 - 864691128455135100b^6c^2x^3y + 864691128455135160b^6c^2x^4 \\
& -198b^8x^2 - 270215977642229811b^8xy + 270215977642230009b^8y^2 - 4b^8cy^4 + 27b^8cxy^3 \\
& -864691128455135241b^8cx^2y^2 + 1585267068834414553b^8cx^3y - 720575940379279335b^8cx^4 \\
& +8b^{10}y^4 - 7b^{10}x^4 - 90071992547409948b^{10}xy^3 + 162129586585337882b^{10}x^2y^2 \\
& -72057594037927935b^{10}x^3y + 6004799503160661b^{12}x^6 - 18014398509481983b^{12}x^5y \\
& +18014398509481983b^{12}x^4y^2 - 6004799503160661b^{12}x^3y^3) \cosh(b(x-y))\} \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ใน [23] พบว่าอนุกรมที่ได้จะลู่เข้าอย่างรวดเร็ว ทำให้สามารถใช้จำนวนพจน์ไม่มากนักในการประมาณผลเฉลย เพื่อนำไปใช้ออกแบบตัวควบคุมที่ขอบ และผลเฉลยของสมการเคอร์เนลที่ปลาย  $x = 1$  เป็นดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2: เปรียบเทียบการประมาณเคอร์เนลตั้งแต่ผลรวมของพจน์ที่ 0 ถึง 4 ที่ปลาย  $x = 1$

ในรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าการเลือกใช้เพียง 4 พจน์เท่านั้นก็เพียงพอ เนื่องจากจำนวนพจน์ที่มากขึ้นทำให้ความซับซ้อนสูงขึ้นด้วย และการรวมเพียง 4 พจน์ก็ใกล้เคียงกับการรวม 5 พจน์มาก

### 3.2.2 การคำนวณเชิงตัวเลข

ถ้า  $k(x, y)$  เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem) จะได้

$$k(x+h, y) = k(x, y) + hk_x(x, y) + \frac{h^2}{2!}k_{xx}(x, y) + O(h^3) \quad (3.33)$$

และ

$$k(x-h, y) = k(x, y) - hk_x(x, y) + \frac{h^2}{2!}k_{xx}(x, y) + O(h^3) \quad (3.34)$$

จาก (3.33)-(3.34) เราสามารถประมาณอนุพันธ์ของเคอร์เนลเทียบกับ  $x$  ด้วยวิธีผลต่างอันตะ [27] ซึ่งจะได้

$$k_x(x, y) = \frac{k(x+h, y) - k(x-h, y)}{2h} + O(h^2) \quad (3.35)$$

$$k_{xx}(x, y) = \frac{k(x+h, y) - 2k(x, y) + k(x-h, y)}{h^2} + O(h^2) \quad (3.36)$$

และสามารถประมาณการหาปริพันธ์สำหรับฟังก์ชัน  $f(x)$  ใด ๆ โดยใช้หลักเกณฑ์เชิงสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[ f(a) + \sum_{i=1}^n f(x+ih) + f(b) \right] + O(h^2) \quad (3.37)$$



เพื่อความสะดวกในการลดจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ ด้วยการใช้กริดหยาบ (coarse grid) ซึ่งความผิดพลาดจะลดลงตามขนาดของกริด ซึ่งกำหนดโดย

$$k(x, y) = \frac{k^{i,j-1} + k^{i,j+1}}{2} \quad (3.38)$$

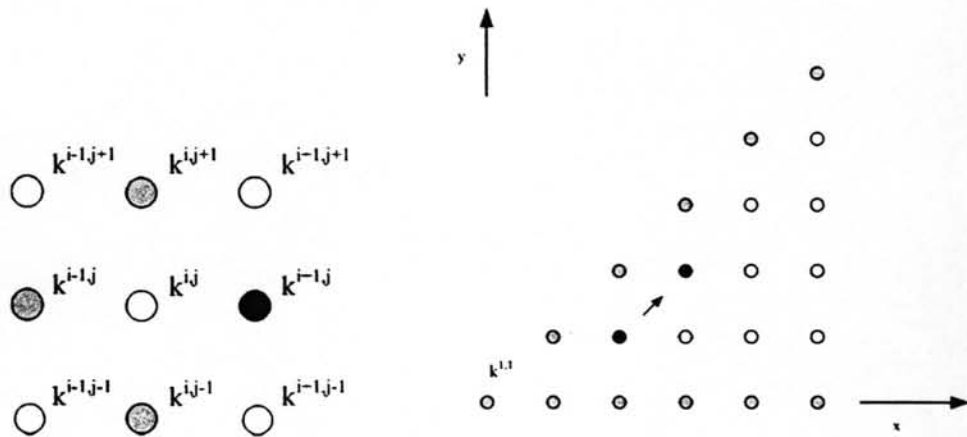
จาก (3.20)-(3.22) สามารถเขียนในรูปสมการผลต่างอันดับเป็น

$$k^{i+1,j} = -k^{i-1,j} + k^{i,j+1} + k^{i,j-1} + (c + b^2)h^2 \frac{(k^{i,j+1} + k^{i,j-1})}{2} - b^3 h^2 \sinh(bh(i-j)) + \frac{b^3 h^3}{2} [k^{i,j+l+1} \sinh(bh(l+1)) + k^{i,j+l} \sinh(bhl)] \quad (3.39)$$

$$k^{i,i} = -\frac{c + b^2}{2} h(i-1) \quad (3.40)$$

$$k^{i,1} = 0 \quad (3.41)$$

โดยที่  $k^{i,j} = k((i-1)h, (j-1)h)$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ ,  $j = 2, \dots, N-i+1$  และ  $l = 0, \dots, i-j-1$  ซึ่งสามารถคำนวณตามรูปที่ 3.3

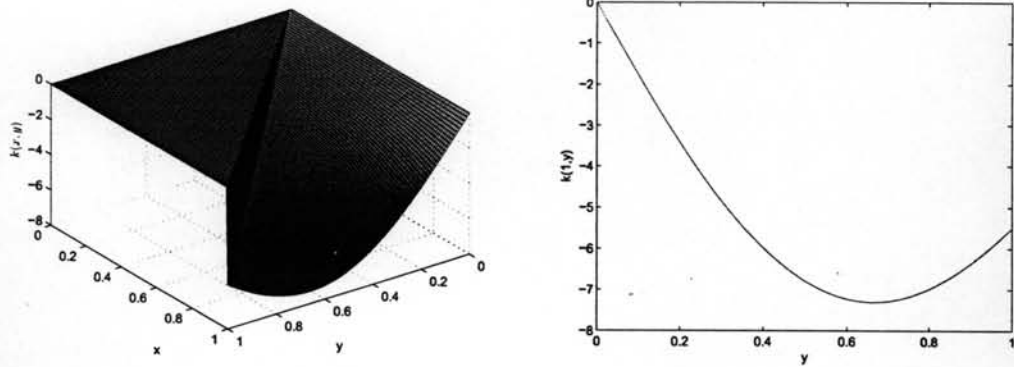


รูปที่ 3.3: พจน์ที่ใช้ในการคำนวณแต่ละครั้งและลำดับการคำนวณ

จากรูปที่ 3.3 (ซ้าย) จุดสีเทาแสดงจุดที่ใช้ในการหาจุดถัดไป (สีดำ) และลำดับในการคำนวณจุดต่อไปเป็นดังรูปที่ 3.3 (ขวา) จุดสีเทาแสดงเงื่อนไขขอบ ส่วนจุดสีดำแสดงลำดับการคำนวณเป็นเส้นทแยงมุมเลื่อนขึ้นตามลำดับ

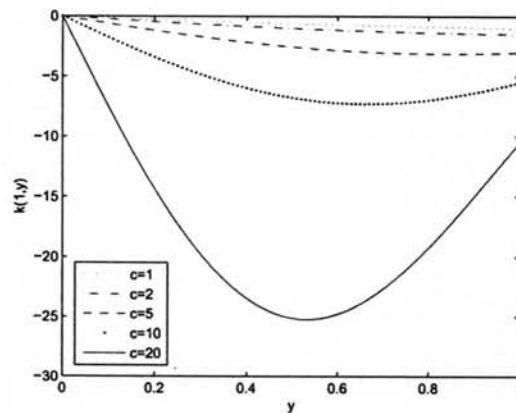
ผลเฉลยของสมการเคอร์เนล เมื่อ  $b = 1$ ,  $c = 10$ ,  $\epsilon = 1$  และ  $h = 0.01$  เป็นดังรูปที่ 3.4





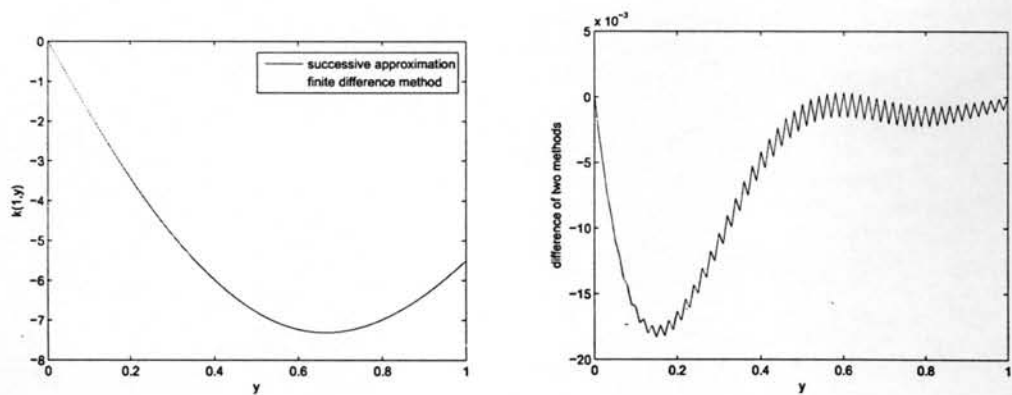
รูปที่ 3.4: ผลเฉลย  $k(x, y)$  ของสมการเคอร์เนล (3.39)-(3.41) และค่าที่ปลาย  $x = 1$

และเมื่อเปลี่ยนค่า  $c$  จะได้เคอร์เนลเป็นดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5: ผลเฉลย  $k(x, y)$  ของสมการเคอร์เนล (3.39)-(3.41) ที่ปลาย  $x = 1$  ที่ค่า  $c$  ต่าง ๆ กัน

สุดท้ายเมื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณสี่บเนื่องและวิธีเชิงตัวเลขที่มีค่าพารามิเตอร์เดียวกันจะได้ผลดังรูปที่ 3.6 เห็นได้ว่าทั้งสองวิธีได้ผลเฉลยของสมการเคอร์เนลตรงกัน และในการจำลองผลตอบสนองของระบบวงวนปิด เราจะเลือกใช้วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเคอร์เนล



รูปที่ 3.6: เปรียบเทียบการประมาณค่าผลเฉลยของสมการเคอร์เนลและค่าผลต่างของทั้งสองวิธี

### 3.3 สรุป

การออกแบบตัวควบคุมที่ขอบสำหรับคานตีโมเซนโคลตรูปสามารถทำได้โดยการแปลงไปเป็นระบบที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังด้วยการแปลงก้าวถอยหลัง จะได้สมการเคอร์เนลที่สมนัยกับการแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไฮเพอร์โบลิกเชิงเส้น ซึ่งตัวควบคุมที่ออกแบบต้องการเพียงผลเฉลยของสมการเคอร์เนลเท่านั้น ในที่นี้ใช้วิธีการประมาณสี่เหลี่ยมหรือวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลย ซึ่งทั้งสองวิธีให้ผลตรงกัน