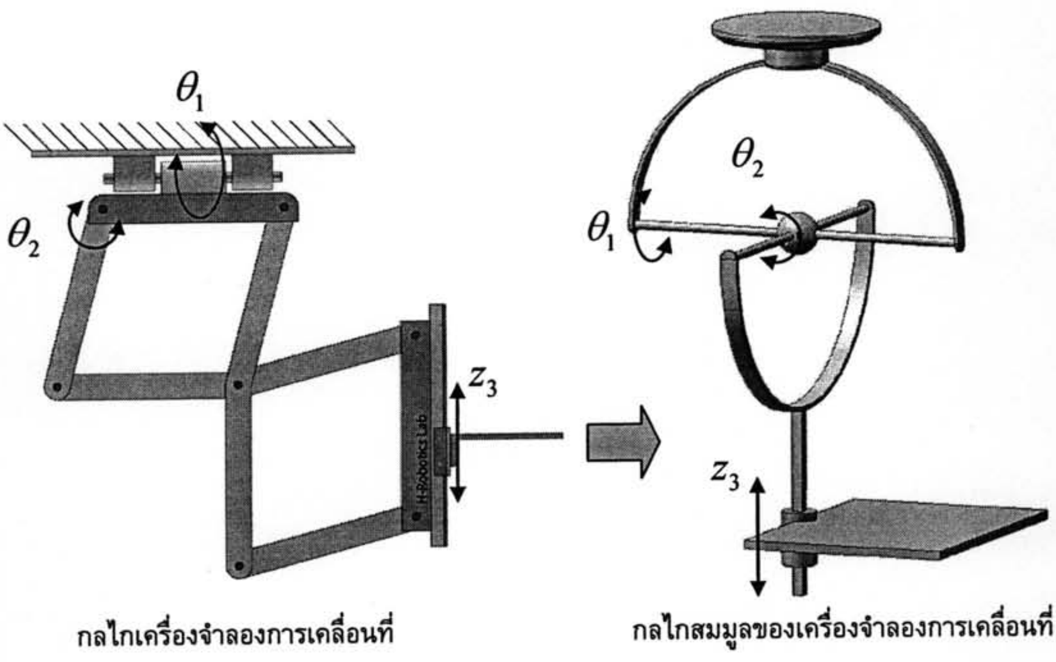
บทที่ 6

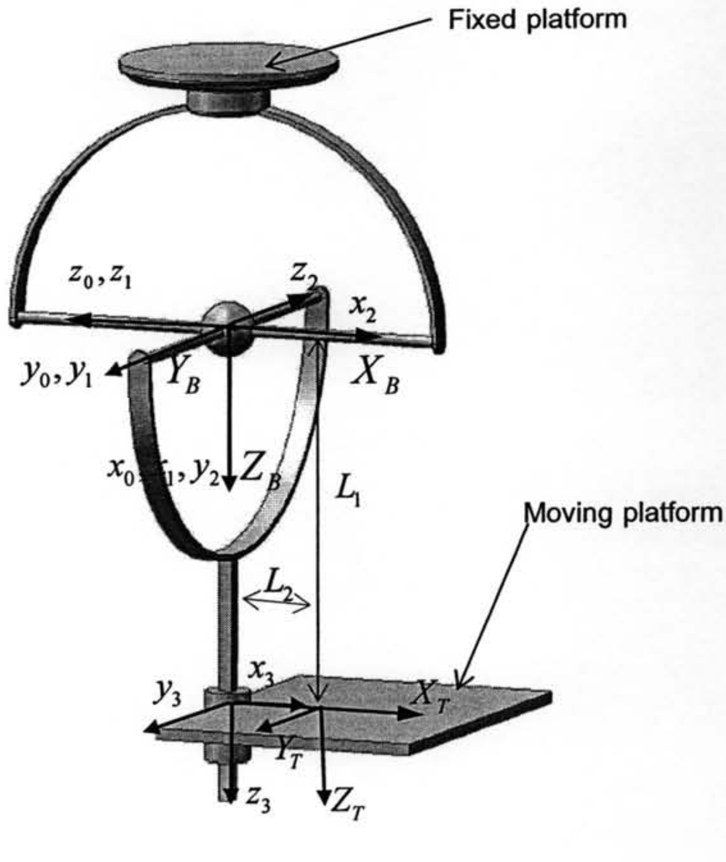
จลศาสตร์แบบไปข้างหน้าของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่

การหาจลน์ศาสตร์เครื่องจำลองการเคลื่อนที่สามารถหาได้โดยตรงจากกลไกข้อต่อของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่ แต่วิธีการเช่นนี้ทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณ เนื่องจากกลไกเครื่องจำลองการเคลื่อนที่มีข้อต่อจำนวนมาก ดังนั้นในการหาจลน์ศาสตร์ของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่สามารถหาได้อย่างง่ายโดยการแปลงกลไกข้อต่อของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่ ให้อยู่ในรูปแบบของกลไกสมมูลอย่างง่าย กลไกสมมูลถูกกำหนดขึ้นเพื่อให้ลักษณะของคุณสมบัติในการเคลื่อนที่เหมือนกลไกข้อต่อของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่ทั้งหมด สมการจลน์ศาสตร์ที่คำนวณหาจากกลไกนี้จึงสามารถนำมาใช้กับกลไกของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่ได้ กลไกสมมูลมีลักษณะดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 กลไกเครื่องจำลองการเคลื่อนที่กับกลไกสมมูล

จลศาสตร์แบบไปข้างหน้าจะสามารถหาโดยอาศัยทฤษฎี Denavit-Hartenberg notation [36] ในที่นี้กำหนดแกน X คือด้านหน้ารถยนต์ แกน Z คือทิศพุ่งสู่ศูนย์กลางโลก ส่วนแกน Y จะเป็นไปตามกฎมือขวา ทำให้สามารถที่กำหนดเฟรมให้กับกลไกสมมูลดังแสดงในรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 การกำหนดเฟรมให้กับกลไกสมมูล

จากรูปที่ 6.2 แกน X_B, Y_B และ Z_B คือ แนวแกนด้านหน้า ,แนวแกนด้านข้าง และแนวดิ่งของรถยนต์ ส่วนแกน X_T, Y_T และ Z_T คือ ระบบแกนของเบาะนั่งคนขับบน Moving platform เมื่อทำการกำหนดเฟรมต่างๆให้กับกลไกสมมูลแล้วจะสามารถกำหนดตัวแปรของข้อต่อ (Link parameters) ตามการกำหนดเฟรมๆได้ดังตารางที่ 6.1

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	0	$\theta_2 - 90^\circ$
3	-90°	0	L_1	0

ตารางที่ 6.1 ตัวแปรของข้อต่อเครื่องจำลองการเคลื่อนที่

และจาก ${}^{i-1}_{i}\mathbf{T}$ หรือ เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ (Transformations matrix) แบบทั่วไป ของเฟรม i เทียบกับเฟรม $i-1$ ซึ่งก็คือ

$$
{}^{i-1}_{i}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.1}
$$

เมื่อ $c\theta_i = \cos\theta_i$, $s\theta_i = \sin\theta_i$, $c\alpha_{i-1} = \cos\alpha_{i-1}$ และ $s\alpha_{i-1} = \sin\alpha_{i-1}$

จากนั้นจะสามารถหาเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ได้โดยนำตัวแปรของข้อต่อที่ได้กำหนดขึ้นในตารางที่ 6.1 แทนในเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่แบบทั่วไป สมการ (6.1) จะได้

$$
{}^{0}_{1}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2}
$$

$$
{}^{1}_{2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c(\theta_2 - 90^\circ) & -s(\theta_2 - 90^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s(\theta_2 - 90^\circ) & c(\theta_2 - 90^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.3}
$$

$$
{}^{2}_{3}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.4}
$$

จากสมการ (6.3) สามารถนำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$
{}^{1}_{2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.5}
$$

สามารถหาเมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของเฟรม 3 เทียบกับเฟรม 0 ได้จากสมการ ${}^{0}_{3}\mathbf{T} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}\,{}^{1}_{2}\mathbf{T}\,{}^{2}_{3}\mathbf{T}$ ดังนี้

$$ {}^{0}_{2}\mathbf{T} = {}^{0}_{1}\mathbf{T}{}^{1}_{2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{2}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 & 0 \\ -c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.6) $$

$$ {}^{0}_{3}\mathbf{T} = {}^{0}_{2}\mathbf{T}{}^{2}_{3}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 & 0 \\ -c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & L_1 c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & L_1 s\theta_1 c\theta_2 \\ -c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & L_1 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.7) $$

เมตริกซ์การแปลงพิกัดการเคลื่อนที่ของทูลเฟรม (Tool frame, $\{T\}$) เทียบกับเฟรมฐาน (Base frame, $\{B\}$) สามารถที่จะหาได้จากสมการ ${}^{B}_{T}\mathbf{T} = {}^{B}_{0}\mathbf{T}{}^{0}_{3}\mathbf{T}{}^{3}_{T}\mathbf{T}$ โดยที่ ${}^{B}_{0}\mathbf{T}$, ${}^{3}_{T}\mathbf{T}$ จะหาได้จากการกำหนดเฟรมดังนี้

$$ {}^{3}_{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.8) $$

$$ {}^{B}_{0}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.9) $$

ดังนั้นจะได้ ${}^{B}_{T}\mathbf{T}$ ดังนี้

$$ {}^{B}_{T}\mathbf{T} = {}^{B}_{0}\mathbf{T}\,{}^{0}_{3}\mathbf{T}\,{}^{3}_{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & L_1 c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & L_1 s\theta_1 c\theta_2 \\ -c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & L_1 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 & -L_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & L_1 s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & L_1 c\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

และจะได้

$$ {}^{B}_{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 & L_2 c\theta_2 - L_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & L_2 s\theta_1 s\theta_2 + L_1 s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & L_2 c\theta_1 s\theta_2 + L_1 c\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.10} $$

พิจารณาสมการ (6.10) จลน์ศาสตร์แบบไปข้างหน้า (Forward Kinematics) สามารถเขียนได้ดังนี้

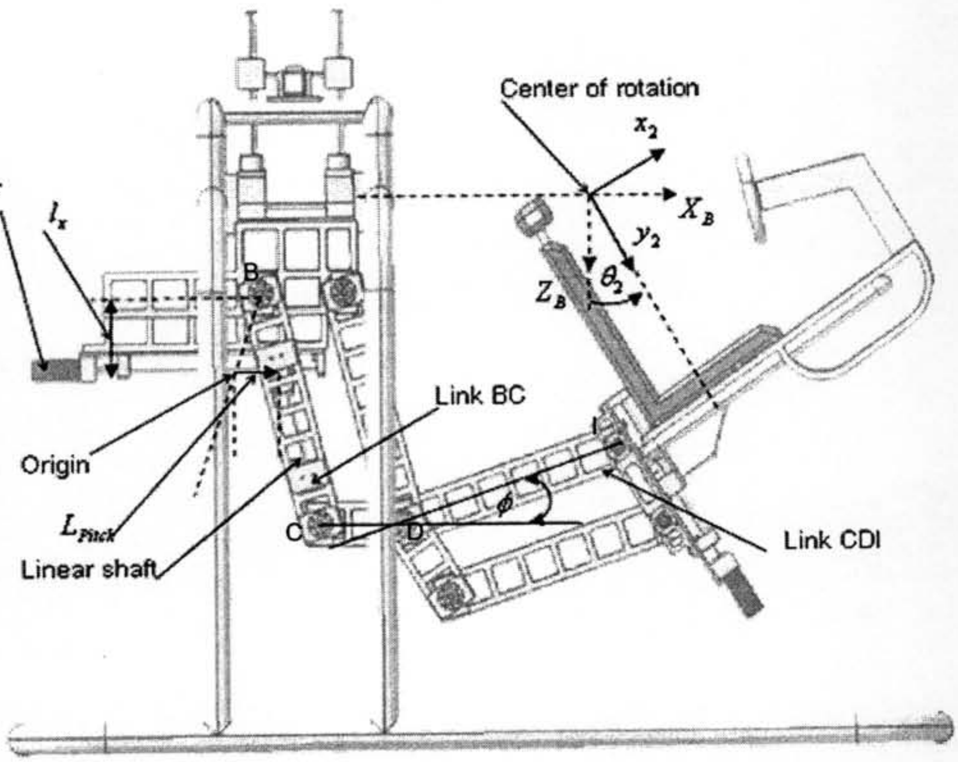
$$ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 \cos\theta_2 - L_1 \sin\theta_2 \\ L_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + L_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ L_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + L_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{6.11} $$

แต่เนื่องจากอุปกรณ์ต้นกำลังที่ถูกเลือกใช้เป็นมอเตอร์และส่งกำลังผ่านชุดบอลสกรู ดังนั้นตัวแปรที่เกี่ยวของกับมุม θ_1, มุม θ_2 และ L_1 คือ L_{Roll} (ระยะขจัดบอลสกรูของตัวขับมุม Roll) L_{Pitch} (ระยะขจัดบอลสกรูของตัวขับมุม Pitch) และ L_Z (ระยะขจัดบอลสกรูของตัวขับแกน Z ซึ่งมีทิศการเคลื่อนที่ส่วนทางกับแกน Z ที่กำหนด)

$$ \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(L_{Roll}) \\ f(L_{Pitch}) \\ f(L_Z) \end{bmatrix} \tag{6.12} $$

นำสมการ (6.12) มาแทนในสมการ (6.11) จะได้สมการที่สมบูรณ์ของจลน์ศาสตร์แบบไปข้างหน้า การพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุม และการขจัดของตัวขับทั้ง 3 ของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่นั้นจะแบ่งพิจารณาเป็นส่วนๆดังนี้

รูปที่ 6.3 แสดงการทำงานของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่ขณะจำลองความเร่งด้านหน้าของรถยนต์ การทำงานของกลไกเริ่มจากตัวบอลสกรูเคลื่อนที่ไปดันให้บูชที่สวมอยู่กับตัวเพลาตรงเคลื่อนที่ ซึ่งการเคลื่อนที่ของตัวบูชจะเกิดขึ้นสองแบบพร้อมกันคือ เลื่อนที่ตามตัวบอลสกรูและหมุนตามเพลาตรง ดังนั้นขณะบูชเคลื่อนที่จะดันให้ตัวเพลาตรงเคลื่อนที่ตาม ซึ่งตัวเพลาตรงเองถูกยึดติดกับก้านต่อ BC เป็นผลให้ก้านต่อ BC หมุนรอบจุด B ท้ายสุด Moving platform จะเคลื่อนที่ดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 เครื่องจำลองการเคลื่อนที่ขณะจำลองความเร่งด้านหน้าของรถยนต์

กำหนดให้

L_{Pitch} คือ ระยะการเคลื่อนที่ของบอลสกรู

θ_2 คือ *Pitch Angle*

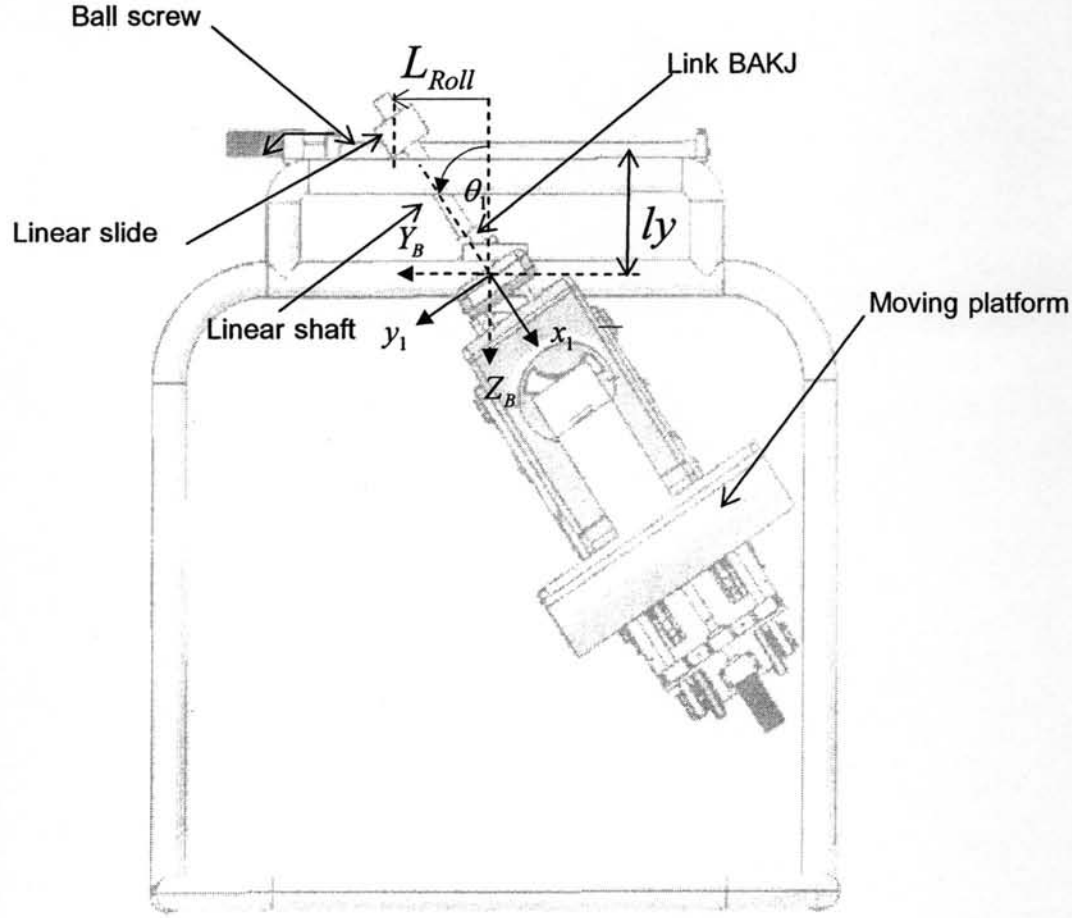
ϕ คือ มุมของก้านต่อ CDI

lx คือ ระยะระหว่างแกนของ Ball screw และจุด B

$$L_{Pitch} = lx \cdot (\tan(\theta_2 - \phi) + \tan(\phi)) \quad (6.13)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{L_{Pitch}}{lx} - \tan(\phi)\right) + \phi \tag{6.14}$$

พิจารณารูปที่ 6.4 แสดงการทำงานของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่ขณะจำลองความเร่งด้านข้างของรถยนต์ โดย Moving platform จะหมุนรอบแกน X_B การทำงานเริ่มต้นจากตัวบอลสกรูเคลื่อนที่ไปดันให้บูชที่สวมอยู่กับเพลาตรง เลื่อนที่ตามแนวแกนของตัวสกรู ในลักษณะเดียวกันกับกลไกการจำลองความเร่งด้านหน้าของรถยนต์ ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่เป็นดังสมการต่อไปนี้



รูปที่ 6.4 เครื่องจำลองการเคลื่อนที่ขณะจำลองความเร่งด้านข้างของรถยนต์

กำหนดให้

ly คือ ความยาวจากจุดหมุนรอบแกน AK ไปยัง ball screw

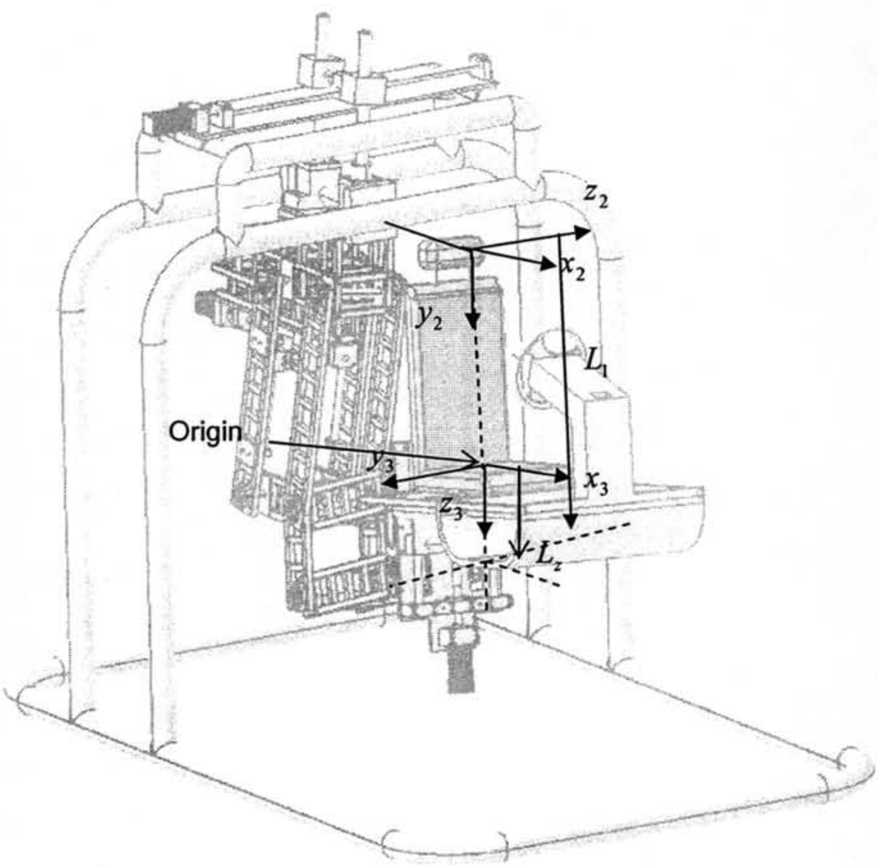
L_{Roll} คือ ระยะการเคลื่อนที่ของบอลสกรูเทียบกับตำแหน่งที่มุม θ_1 เป็นศูนย์

θ_1 คือ มุม Roll ที่เกิดจากการจำลองความเร่งด้านข้าง

$$L_{Roll} = ly \cdot \tan(\theta_1) \tag{6.15}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{L_{Roll}}{l_y}\right) \tag{6.16}$$

ในการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง เกิดจากชุดบอสกรูดันให้ Moving platform เลื่อนขึ้นลง กำหนดให้จุด Origin คือจุด เริ่มต้นของการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งนี้ Moving platform อยู่ห่างจากจุดหมุน 1.2 เมตร เมื่อ L_Z เป็นระยะขจัดระยะ L_Z สามารถหาได้จาก



รูปที่ 6.5 เครื่องจำลองการเคลื่อนที่ขณะจำลองความเร่งในแนวดิ่ง

$$L_1 = 1.2 + L_Z \tag{6.17}$$

นำสมการ 6.14, 6.16 และ 6.17 ไปแทนค่าในสมการ 6.12 และจากนั้นนำสมการที่ได้แทนในสมการที่ 6.11 ทำให้ได้สมการสมบูรณ์ของจลศาสตร์แบบไปข้างหน้าของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่แบบ 3 องศาอิสระ

ในส่วนท้ายของบทนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของความเร่งที่ต้องการจำลองกับการเคลื่อนที่ของเครื่องจำลอง โดยที่ความเร่งด้านหน้า (Ax) ความเร่งด้านข้าง (Ay) และความเร่งในแนวดิ่ง (Az) ของรถยนต์ สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{Ax}{g}\right) \tag{6.18}$$

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{Ay}{g \cdot \cos(\theta_2)}\right) \tag{6.19}$$

$$\ddot{L}_1 = Az \tag{6.20}$$

นำสมการที่ 6.18, 6.19 และ6.20 แทนในสมการ 6.13 6.15 และ6.17 เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง L_{Pitch} กับ Ax ความสัมพันธ์ระหว่าง L_{Roll} กับ Ay และความสัมพันธ์ระหว่าง Az กับ $\ddot{L}z$

$$L_{Pitch} = lx \cdot (\tan(\sin^{-1}\left(\frac{Ax}{g}\right) - \phi) + \tan(\phi)) \tag{6.21}$$

$$L_{Roll} = ly \cdot \tan(\sin^{-1}\left(\frac{Ay}{g \cdot \cos(\theta_2)}\right)) \tag{6.22}$$

$$\ddot{L}_Z = Az \tag{6.23}$$

สมการที่ 6.21 ถึง 6.23 คือความสัมพันธ์การควบคุมการเคลื่อนที่ของเครื่องจำลองการเคลื่อนที่ ให้เคลื่อนที่ตามความเร่งที่กำหนด