

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์ปัญหา  
การนำความร้อน



นายชัชวาล ศิริปัฐ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2556

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR) are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

ADAPTIVE QUADRILATERAL ELEMENTS WITH LINEAR FLUX FORMULATION FOR  
HEAT CONDUCTION ANALYSIS

Mr. Chatchawan Siriparu



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2013

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น  
สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน

โดย

นายชัชวาล ศิริปัฐ

สาขาวิชา

วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทมหาบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.บัณฑิต เอื้ออาภรณ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.กฤษณี มณีรัตน์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร.อธิพงษ์ มาลาทิพย์)

ชัชวาล ศิริปรุ : เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน. (ADAPTIVE QUADRILATERAL ELEMENTS WITH LINEAR FLUX FORMULATION FOR HEAT CONDUCTION ANALYSIS) อ. ที่ ป ร ี ก ข า  
วิทยานิพนธ์หลัก: ศ. ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 74 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน ในการประยุกต์ฟลักซ์เชิงเส้นเข้ากับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า เพื่อเปลี่ยนจากการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนที่ต้องทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลขมาเป็นเมทริกซ์ที่หาค่าภายในรูปแบบปิดซึ่งสามารถแทนค่าลงไปได้เลยทันที และเพิ่มความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์อีกระดับด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่จะปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เล็กลงในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มาก และในขณะเดียวกันในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์น้อยกว่าก็จะปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีขนาดใหญ่ขึ้น

การตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นทำโดยการนำปัญหาการนำความร้อนที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงมาทำการวิเคราะห์ และเพื่อแสดงให้เห็นถึงความแม่นยำของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบประยุกต์ฟลักซ์เชิงเส้นจึงทำการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนและเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้คู่ไปกับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป ผลปรากฏว่าความแม่นยำของคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีทั้งสองมีความใกล้เคียงกันแต่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบประยุกต์ฟลักซ์เชิงเส้นใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยกว่า จากนั้นจึงเพิ่มปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลันเพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการใช้งานร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงเป็นที่น่าพอใจสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก .....

ปีการศึกษา 2556

# # 5370224421 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: FINITE ELEMENT METHOD / HEAT CONDUCTION / QUADRILATERAL  
ELEMENT / LINEAR-FLUX FORMULATION / ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE

CHATCHAWAN SIRIPARU: ADAPTIVE QUADRILATERAL ELEMENTS WITH  
LINEAR FLUX FORMULATION FOR HEAT CONDUCTION ANALYSIS. ADVISOR:  
PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D., 74 pp.

This thesis propose Quadrilateral Finite Element with linear-flux  
formulation for heat conduction analysis.

In quadrilateral element, linear-flux formulation was applied for change  
inventing method for conduction metric by avoiding numerical integration to  
computed closed-form conduction metric. The solution accuracy is improved by  
adaptive meshing technique to generate smaller elements in high gradient solution  
regions and larger element in low gradient in other regions.

Finite element program is verified by analyzing heat conduction problems  
with exact solution. Linear-Flux formulation can provide same solution accuracy  
with Convention Quadrilateral Finite Element Method, and also reducing  
computation time for generate heat conduction metric. To improve the predicted  
solution accuracy, the linear-flux formulation is combined with an adaptive meshing  
technique.



Department: Mechanical Engineering      Student's Signature .....

Field of Study: Mechanical Engineering      Advisor's Signature .....

Academic Year: 2013

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำปรึกษาตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัยและการทำงานได้สำเร็จลุล่วง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.กฤษณี มณีรัตน์ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภากย์ และ ดร.อิทธิพงษ์ มาลาทิพย์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ดร.ซิงวู หม่า (Dr. Xinwu Ma) ศูนย์วิจัยทางวิศวกรรมและเทคโนโลยีแม่พิมพ์และเบ้าหล่อ (Die & Mould Engineering and Technology Research Center) มหาวิทยาลัยซานตง (Shandong University) ที่ให้ความกรุณาเอื้อเฟื้อซอฟต์แวร์อัตโนมัติ (Automesh-2D) ที่ใช้ในงานวิจัยนี้

ขอขอบคุณ ดร.สุธี ไตรวิวัฒนา คุณพิชฌันทร์ โพธิคุณ คุณณัฐชนนท์ ประสมสุข และ คุณวิทยา สดับสาร ซึ่งเป็น เพื่อน ๆ พี่ ๆ ในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับคำแนะนำ ความช่วยเหลือและกำลังใจตลอดเวลาในการทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่ง ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ขอมอบเป็นกตัญญูตาบูชาแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

## สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ฐ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	2
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	3
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....	3
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย.....	3
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
บทที่ 3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และสูตรพลักซ์.....	7
3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	7
3.2 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สองมิติสำหรับการถ่ายเทความร้อน.....	9
3.3 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	15
3.4 รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป.....	17
3.5 สูตรการอินทิเกรตเชิงตัวเลข.....	18
3.6 รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์หลักการของพลักซ์สำหรับวิเคราะห์การนำความร้อน.....	19
3.7 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบพลักซ์เชิง.....	21
3.8 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์.....	22
บทที่ 4 ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน.....	26
4.1 ขั้นตอนการคำนวณ.....	26
4.2 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลขาเข้า.....	27

4.3 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลขาออก.....	31
บทที่ 5 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม.....	33
5.1 ปัญหาแผ่นโลหะสีเหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดอุณหภูมิที่ขอบ .....	33
5.2 ปัญหาแผ่นโลหะจัตุรัสและสามารถผลิตความร้อนได้เอง.....	37
5.3 ปัญหาแผ่นโลหะกลมและสามารถผลิตความร้อนได้เอง.....	40
5.4 ปัญหาแผ่นโลหะสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	43
5.5 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน.....	47
5.6 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนในรูปแบบกรวย.....	55
บทที่ 6 บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ .....	65
6.1 บทสรุป.....	65
6.2 ปัญหาที่พบขณะทำวิทยานิพนธ์.....	66
6.3 ข้อเสนอแนะ .....	66
รายการอ้างอิง .....	67
ภาคผนวก.....	68
ภาคผนวก ก.....	68
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....	74



## สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบอุณหภูมิที่ตำแหน่ง $x = y = 0.5$ จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม แบบทั่วไปและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบพลักซ์กับผลเฉลยแม่นยำตรง .....	35
ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบอุณหภูมิที่ตำแหน่ง $x = y = 0.5$ ระหว่างการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ แบบทั่วไปและแบบพลักซ์เชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำตรง .....	39
ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบอุณหภูมิตามระยะรัศมีจากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบทั่วไป และ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบพลักซ์เชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำตรง .....	42
ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ .....	46
ตารางที่ 5.5 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของ .....	64

## สารบัญญภาพ

หน้า

รูปที่ 1.1 เปรียบเทียบลักษณะการกระจายที่เกิดขึ้นจากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อมีจุดต่อเท่ากัน.....	1
รูปที่ 3.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ .....	7
รูปที่ 3.2 การนำความร้อนในแผ่นโลหะที่ผลิตความร้อนได้เอง .....	10
รูปที่ 3.3 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อกำหนดปริมาณความร้อนที่ไหลเข้า.....	11
รูปที่ 3.4 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อเกิดการพาความร้อน .....	11
รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน .....	15
รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในระบบพิกัดธรรมชาติ .....	15
รูปที่ 4.1 ลักษณะปัญหาของตัวอย่างไฟล์ซาเข้า .....	27
รูปที่ 4.2 การแบ่งเอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างไฟล์ซาเข้า.....	28
รูปที่ 5.1 แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมที่มีการกำหนดอุณหภูมิที่ขอบทั้งสี่ด้าน .....	34
รูปที่ 5.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ .....	34
รูปที่ 5.3 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไป และแบบฟลักซ์ กับผลเฉลยแม่นยำในแนวทแยงมุม A-A .....	35
รูปที่ 5.4 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์ เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับแบบฟลักซ์.....	36
รูปที่ 5.5 แผ่นโลหะจัตุรัสที่มีการกำเนิดความร้อนได้เอง.....	37
รูปที่ 5.6 (ก) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ .....	38
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อพล็อตสามมิติ .....	38
รูปที่ 5.7 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไป และแบบฟลักซ์กับผลเฉลยแม่นยำในแนว $y = 0.5$ .....	38
รูปที่ 5.8 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์ เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับแบบฟลักซ์เชิงเส้น .....	39

รูปที่ 5.9	แผ่นโลหะวงกลมที่กำเนิดความร้อนได้เอง.....	40
รูปที่ 5.10 (ก)	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์.....	41
	(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ.....	41
	(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อพล็อตสามมิติ.....	41
รูปที่ 5.11	การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไป และพล็อตเชิงเส้นกับผลเฉลย แม่นยำในแนวตามแนวรัศมี.....	42
รูปที่ 5.12	การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์ เอลิ เมนต์แบบทั่วไปกับแบบพล็อตเชิงเส้น.....	43
รูปที่ 5.13	แผ่นโลหะสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	44
รูปที่ 5.14	การแบ่งเอลิเมนต์บนแผ่นโลหะสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	44
รูปที่ 5.15	เส้นชั้นอุณหภูมิบนแผ่นโลหะสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง.....	45
รูปที่ 5.16	เปรียบเทียบผลเฉลยแบบพล็อตเชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำในแนวเส้นตรง $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .....	45
รูปที่ 5.17	เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์ แบบทั่วไปกับแบบพล็อตเชิงเส้น.....	46
รูปที่ 5.18	ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน.....	47
รูปที่ 5.19 (ก)	เอลิเมนต์เริ่มต้นของจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน.....	48
	(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในเอลิเมนต์เริ่มต้น.....	48
รูปที่ 5.20 (ก)	การปรับขนาดครั้งหนึ่งที่หนึ่งเอลิเมนต์ของจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน.....	49
	(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งหนึ่งที่หนึ่ง.....	49
รูปที่ 5.21 (ก)	การปรับขนาดครั้งที่สองเอลิเมนต์ของจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน.....	50
	(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง.....	50
รูปที่ 5.22 (ก)	เอลิเมนต์แบบละเอียดของจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน.....	51
	(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในเอลิเมนต์แบบละเอียด.....	51
รูปที่ 5.23 (ก)	การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของเอลิเมนต์เริ่มต้น 2,116 จุดต่อ.....	53

(ข) การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของการปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง 4,261 จุดต่อ .....	53
(ค) การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของการปรับขนาดครั้งที่สอง 4,227 จุดต่อ .....	53
(ง) การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของเอลิเมนต์แบบละเอียด 6,561จุดต่อ .....	53
รูปที่ 5.24 การเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลง อย่างฉับพลันด้วยรูปแบบต่าง ๆ .....	54
รูปที่ 5.25 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนในรูปแบบกรวย .....	55
รูปที่ 5.26 (ก) เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนในรูปแบบกรวย .....	57
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ .....	57
(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ .....	57
รูปที่ 5.27 (ก) เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง .....	59
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ .....	59
(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ .....	59
รูปที่ 5.28 (ก) เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง .....	61
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ .....	61
(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ .....	61
รูปที่ 5.29 (ก) เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สาม .....	63
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ .....	63
(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ .....	63
รูปที่ 5.30 การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงกับการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ตำแหน่ง $x = y = 0.25$ .....	64

## คำอธิบายสัญลักษณ์

$A$	พื้นที่
$B$	โพลดเวกเตอร์
$c$	ความจุความร้อนจำเพาะ
$D$	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
$D_x$	เมทริกซ์ส่วนประกอบพลาซึในแนวแกน $x$
$D_y$	เมทริกซ์ส่วนประกอบพลาซึในแนวแกน $y$
$E$	ปริมาณการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน $x$
$F$	ปริมาณการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน $y$
$f$	ฟังก์ชันใดๆ
$h$	ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์, สัมประสิทธิ์การพาความร้อน
$J$	เมทริกซ์จาร์โคเบียน
$k$	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
$K$	เมทริกซ์สัมประสิทธิ์, เมทริกซ์การนำความร้อน
$M$	เมทริกซ์สัมประสิทธิ์มวล
$N_i$	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$P_x$	เมทริกซ์ส่วนประกอบพลาซึในแนวแกน $x$
$P_y$	เมทริกซ์ส่วนประกอบพลาซึในแนวแกน $y$
$Q$	ความร้อนต่อหนึ่งหน่วยมวล
$q$	ความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่
$q_x$	ปริมาณความร้อนในแนวแกน $x$
$q_y$	ปริมาณความร้อนในแนวแกน $y$
$R$	เศษตกค้าง, โพลดเวกเตอร์
$T$	อุณหภูมิ
$V$	ปริมาตร
$W_i$	ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก
$x$	ระยะในแนวราบ

$y$	ระยะในแนวตั้ง
$\rho$	ความหนาแน่น
$\lambda$	ตัวแปรในการปรับขนาด
$\Gamma$	บริเวณขอบของขอบเขตการคำนวณ
$\Gamma^{(e)}$	บริเวณขอบของขอบเขตเอลิเมนต์
$\zeta$	ระยะในแนวระดับของระบบพิกัดธรรมชาติ
$\eta$	ระยะในแนวตั้งของระบบพิกัดธรรมชาติ
$\phi$	ตัวแปรใดๆ
$\phi^{(e)}$	ตัวแปรในเอลิเมนต์
$\Omega$	โดเมนขอบเขตของการคำนวณ
$\Omega^{(e)}$	โดเมนของเอลิเมนต์

# บทที่ 1

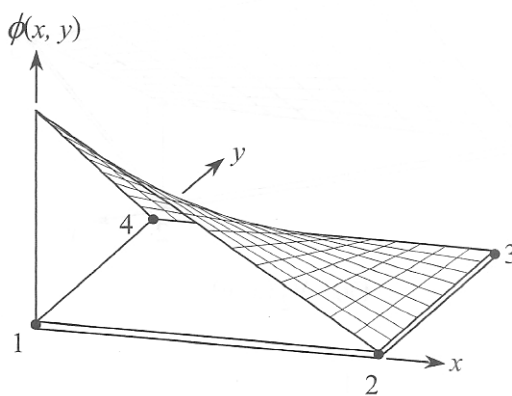
## บทนำ

### 1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์

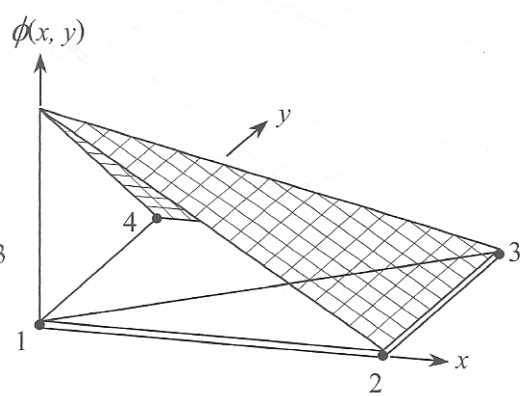
ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยการคำนวณนั้นสามารถแก้ได้แต่เพียงปัญหาง่ายๆ และยังมี ความยุ่งยากซับซ้อนมาก แต่การแก้สมการโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นสามารถทำได้ง่ายกว่ามาก ซึ่ง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เองก็เป็นหนึ่งในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้พัฒนาอย่างต่อเนื่องเป็น เวลานานและใช้กันอย่างแพร่หลายในด้านวิศวกรรม [1] เช่น การวิเคราะห์ความแข็งแรงของ โครงสร้าง การวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน การวิเคราะห์การไหลของของไหล และการวิเคราะห์ ความเค้นเนื่องจากความร้อนในโครงสร้าง

ปัญหาการนำร้อนเป็นปัญหาที่มีความง่ายเพราะมีตัวแปรไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียว และยังมี สมการเชิงอนุพันธ์เพียงสมการเดียว ทำให้สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ง่าย ซึ่งทำให้สามารถ ตรวจสอบความแม่นยำของผลลัพธ์ ได้โดยง่าย เหมาะแก่การนำมาใช้ทดสอบวิธีวิเคราะห์ปัญหาแบบ ใหม่ เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของวิธีวิเคราะห์ปัญหาแบบใหม่

ในงานวิจัยนี้จะทำการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน 2 มิติ ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม เนื่องจากเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมนั้นมีความแม่นยำของผลลัพธ์มากกว่าเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม เพราะเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยม นั้นจะมีฟังก์ชันการกระจายภายในแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear) ส่วนเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมจะเป็นแผ่นเรียบ (flat plane) เมื่อเปรียบเทียบเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 1 เอลิเมนต์ และเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 2 เอลิเมนต์ ที่มีจำนวนจุดต่อเท่ากัน ซึ่งมีจำนวนสมการหรือตัวไม่รู้ค่าเท่ากัน



(ก) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมหนึ่งเอลิเมนต์



(ข) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองเอลิเมนต์

รูปที่ 1.1 เปรียบเทียบลักษณะการกระจายที่เกิดขึ้นจากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเอลิเมนต์ สามเหลี่ยมเมื่อมีจุดต่อเท่ากัน

แต่เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยที่โค้งมนซับซ้อนมากกว่าดังที่แสดงในรูปที่ 1.1

แต่ในการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างเดียวนั้นก็มีข้อเสียคือ ไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์ให้เข้ากับรูปร่างของปัญหาเช่นผิวโค้ง ฉะนั้นจึงเป็นเหตุจำเป็นที่จะต้องใช้อเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (quadrilateral element) เพื่อให้สามารถสอดคล้องกับรูปทรงของปัญหาที่ซับซ้อนในสองมิติ แต่จะมีข้อด้อยในเรื่องที่จะต้องทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) ด้วยวิธีเกาส์-เลอว์จอนด์ (Gauss-Legendre quadrature) ในการคำนวณหาเมทริกซ์การนำความร้อนซึ่งทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณที่มากกว่าเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่สามารถทำการอินทิเกรตออกได้ ออกมาเป็นรูปแบบปิดของเมทริกซ์การนำความร้อน เพื่อแก้ข้อเสียนี้นี้จึงเป็นเหตุให้ทำการประยุกต์หลักการของฟลักซ์ โดยสมมติการกระจายตัวของฟลักซ์ให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับตัวไม่ทราบค่าซึ่งสมมุติให้อยู่ในรูปแบบฟลักซ์เชิงเส้น (linear flux formulation) เพื่อให้ได้เมทริกซ์การนำความร้อนที่สามารถอินทิเกรตออกได้อยู่ในรูปแบบปิด จึงสามารถช่วยลดเวลาในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อน นอกจากนั้นในการวิเคราะห์ปัญหาทางไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นเมื่อลักษณะการกระจายตัวของผลลัพธ์มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันในการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นนั้นไม่สามารถรองรับการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันของผลลัพธ์ภายในเอลิเมนต์ได้ โดยปกติแล้วจะต้องแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ให้มากขึ้นเพื่อลดขนาดเอลิเมนต์ลงเพื่อให้การเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์นั้นค่อย ๆ เปลี่ยนภายในเอลิเมนต์ ซึ่งการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ดียิ่งขึ้นนั้นก็จำเป็นต้องใช้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ที่มากขึ้นและเวลาที่ใช้ในการคำนวณมากขึ้นด้วยตามลำดับ เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงการใช้หน่วยความจำที่มากเกินไปจึงเป็นสาเหตุให้เพิ่มเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive meshing technique) มาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ โดยที่ในบริเวณที่ผลลัพธ์มีการเปลี่ยนแปลงมากก็จะปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เล็กลงในขณะเดียวกันในส่วนที่ผลลัพธ์มีความเปลี่ยนแปลงน้อยกว่าก็จะสามารถปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีขนาดใหญ่กว่าได้จึงไม่จำเป็นต้องคำนวณด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กตลอดทั้งขอบเขตการคำนวณ จึงช่วยลดเวลาในการคำนวณและหน่วยความจำเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณได้อีกด้วย

## 1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

- 1.2.1 ศึกษาพฤติกรรมและทฤษฎีของปัญหาการถ่ายเทความร้อน
- 1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนโดยใช้อเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า
- 1.2.3 ศึกษาและประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติ
- 1.2.4 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์เพื่อนำมาวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน



1.2.5 ศึกษาและประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อนำมาลดการใช้หน่วยความจำและเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ในการวิเคราะห์การนำความร้อนในสองมิติ

1.2.6 ศึกษาการใช้งานโปรแกรม AUTOMESH-2D ในการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและใช้ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาด

### 1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.3.1 วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ ที่สภาวะอยู่ตัว

1.3.2 วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดอุณหภูมิ หรือหุ้มฉนวนเท่านั้น

1.3.3 วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนที่ไม่มีการถ่ายเทความร้อนในรูปแบบอื่น เช่น การพาความร้อน หรือการแผ่รังสี โดยภายในโดเมนของการคำนวณนั้นจะมีเฉพาะการนำความร้อนอย่างเดียวเท่านั้น

### 1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน

1.4.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนสองมิติโดยใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบฟลักซ์

1.4.3 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนสองมิติโดยใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ทั้งแบบทั่วไป และแบบฟลักซ์

1.4.4 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาอย่างง่ายที่ทราบผลเฉลยแน่นอนตรง

1.4.5 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์

1.4.6 สรุปผล และจัดทำรายงาน

### 1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

1.5.1 มีความเข้าใจในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติที่สภาวะอยู่ตัว

1.5.2 มีความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน

1.5.3 สามารถประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้

1.5.4 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไปในอนาคต

## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ [1] ได้ศึกษาและนำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างละเอียด โดยที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้คือ การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า และการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง พร้อมทั้งประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ (HEAT2D) ที่ใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสองมิติ โดยใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม และมีการเปรียบเทียบว่าเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมสี่จุด 1 เอลิเมนต์ นั้นให้ความแม่นยำของการกระจายตัวของผลลัพธ์ภายในเอลิเมนต์ที่ดีกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ 2 เอลิเมนต์

Pandey, A. K., Dechaumphai, P. and Wieting, A. R. [2] ประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับหลักการฟลักซ์สำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนที่เกิดขึ้นในโครงสร้างในสภาวะอยู่ตัวโดยกำหนดฟลักซ์ของเอลิเมนต์ให้อยู่ในลักษณะเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับตัวแปรไม่ทราบค่าทั่วไป และใช้กับเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ทำให้สามารถสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบปิด (closed form) ซึ่งเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์และลดเวลาที่ใช้ในการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์

Polesky, S. P. [3] ประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับทฤษฎีฟลักซ์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในโครงสร้างซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาทั้งในแบบ 1 มิติ และแบบเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าใน 2 มิติ และเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ขึ้นไปอีกขั้นด้วยการใช้เอลิเมนต์แบบรั้วจุดต่อ ซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำที่ใกล้เคียงกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปที่ใช้จุดต่อที่เท่ากัน

Dechaumphai, P. [4] นำเสนอการเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง โดยเทคนิคการปรับขนาดนั้นนำผลลัพธ์จากปริมาณในขอบแรกมาคำนวณหาอนุพันธ์ลำดับที่สองของผลลัพธ์ และใช้หลักการการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) เพื่อเลือกค่ามากที่สุดที่จะนำไปคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ในรอบต่อไปซึ่งในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์มากก็จะปรับขนาดเอลิเมนต์ในบริเวณนั้นให้มีขนาดเล็ก และในบริเวณอื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์ที่น้อยกว่าก็จะปรับให้มีขนาดเอลิเมนต์ให้ใหญ่ และทดสอบกับปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลันในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมที่มีผลเฉลยแม่นยำ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นแสดงให้เห็นว่าการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นี้มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ไม่ใช้เทคนิคการปรับขนาดทั้ง ๆ ที่มีจำนวนจุดต่อน้อยกว่า

Dechaumphai, P. [5] ในครั้งนี้นำเสนอการใช้การประยุกต์หลักการฟลักซ์เข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน 2 มิติในสภาวะไม่อยู่ตัว แต่นำไปใช้กับเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ และยังเพิ่มเทคนิคการปรับขนาดเข้าไปช่วยในการวิเคราะห์อีก

ด้วยโดยนำไปวิเคราะห์ปัญหาแผ่นโลหะที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนจากภายนอกที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ โดยปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรง และเปรียบเทียบผลลัพธ์ระหว่างการเทคนิคการปรับขนาดกับการใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปแบบคงที่ (uniform mesh) ตลอดทั้งโดเมน โดยผลลัพธ์ที่ได้พบว่าเทคนิคการปรับขนาดช่วยเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ และลดจำนวนจุดต่อที่ใช้ในการคำนวณซึ่งเป็นผลให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าแบบไม่มีเทคนิคการปรับขนาดมาก

Phongthanapanich, S., et al., [6] ได้นำเสนอการประยุกต์หลักการพลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยมร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดและนำมาวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนทั้งในสภาวะอยู่ตัวและสภาวะไม่อยู่ตัวที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง โดยเปรียบเทียบความสามารถในการคำนวณเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งผลที่ได้คือ ประยุกต์หลักการพลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยมนั้นมีค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปและเมื่อเพิ่มการใช้เทคนิคการปรับขนาดเข้าไปเพิ่มอีกนั้นก็พบว่าช่วยเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ขึ้นไปอีก ในขณะที่ลดการใช้ตัวแปรไม่ทราบค่าลงไปได้อย่างมากเมื่อเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปที่ไม่มีเทคนิคการปรับขนาด

Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. [7] ได้นำเสนอการประยุกต์หลักการพลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยมร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดและนำมาวิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน และนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับ การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ โดยแสดงให้เห็น การใช้เทคนิคการปรับขนาดนั้นให้ผลลัพธ์เข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำตรงได้เร็วกว่าการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ โดยมีขนาดเท่ากันทั้งโดเมน และที่มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าแบบที่ไม่ใช้เทคนิคการปรับขนาด ในจำนวนจุดต่อที่ใกล้เคียงกัน และในการแบ่งเอลิเมนต์แบบเดียวกันการใช้เอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยมที่ประยุกต์ร่วมกับหลักการพลักซ์นั้นก็มียัตราการเข้าสู่ผลลัพธ์ที่เร็วกว่าเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ

Trivatana, S., Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. [8] นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบสมการปาร์ซง โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์สามเหลี่ยมไร้จุดต่อ ซึ่งนำมาวิเคราะห์ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ในสองมิติ ซึ่งผลลัพธ์เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับกรวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปโดยใช้เอลิเมนต์ที่เป็นระเบียบนั้น พบว่าวิธีที่นำเสนอนี้มีผลลัพธ์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าและมีอัตราการเข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำตรงที่สูงกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปโดยใช้เอลิเมนต์ที่เป็นระเบียบ ในทุกเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

Trivatana, S., Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. [9] ได้นำเสนอการประยุกต์หลักการพลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยมร่วมกับเทคนิคการปรับขนาด โดยที่มีการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนโดยเปรียบเทียบกันระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปที่ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการประยุกต์ใช้หลักการของพลักซ์แบบเอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยม ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แบบทั่วไปที่ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมนั้นค่าฟลักซ์ความร้อนนั้นจะคงที่ภายในเอลิเมนต์ซึ่งถือว่าไม่ต่อเนื่องกันระหว่างเอลิเมนต์ แต่เมื่อพิจารณาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์แบบเอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยม นั้นจะให้ค่าฟลักซ์ความร้อนที่มีการกระจายตัวในแบบเชิงเส้นตรง ซึ่งมีความต่อเนื่องกับเอลิเมนต์รอบด้าน และนำผลต่างนั้นมาเป็นตัววัดความคลาดเคลื่อน และนำมาวิเคราะห์กับปัญหาทั้งทางด้านการถ่ายเทความร้อนและการวิเคราะห์ความแข็งแรงของโครงสร้างซึ่งผลลัพธ์จากการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์แบบเอลิเมนต์ไร้จุดต่อแบบสามเหลี่ยม นั้นพบว่าช่วยลดการสิ้นของผลลัพธ์ในปัญหาการวิเคราะห์โครงสร้างและใช้จำนวนจุดต่อที่ลู่อเข้าสู่ผลแบบทั่วไปซึ่งเป็นผลทำให้ลดการใช้เวลาในการคำนวณลงไปอย่างมาก

Ma, XW., Zhao, GQ. and Sun, L. [10] นำเสนอรายละเอียดในการคำนวณสำหรับการสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าในโปรแกรม AUTOMESH-2D/3D โดยโปรแกรมสามารถสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าสำหรับสองมิติ และสามารถสร้างเอลิเมนต์สามมิติได้อีกด้วยโดยใช้หลักการ Advancing front

Ma, XW. and Zhao, GQ. [11] นำเสนอการสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าบนปัญหาที่มีเงื่อนไขหรือข้อจำกัดต่าง ๆ ด้วยวิธีอัลกอริทึมลูบปิง (Looping)

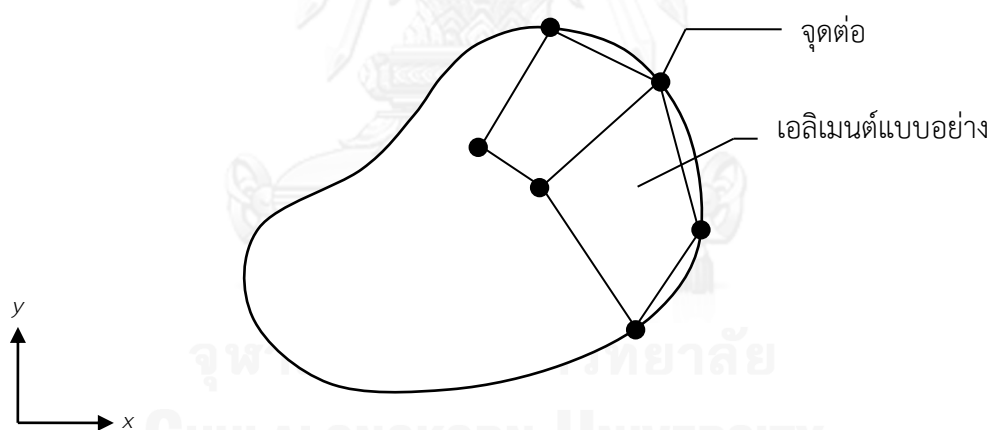
### บทที่ 3

#### ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และสูตรพลาซ

การนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะอยู่ตัว เริ่มจากขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สองมิติสำหรับการถ่ายเทความร้อน ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า แสดงรูปแบบของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปสำหรับการถ่ายเทความร้อน จากนั้นจะอธิบายรายละเอียดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้สูตรพลาซเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์การนำความร้อนและสุดท้ายเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ [1]

#### 3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ เช่น แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมย่อย ๆ สำหรับปัญหาในสองมิติดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์

จากนั้นให้ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$D(\phi) = 0 \tag{3.1}$$

โดยที่  $D$  คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Differential Operator) และ  $\phi$  คือตัวไม่ทราบค่า

### ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์

เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Function) ลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายใน และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อดังแสดงในสมการ (3.2)

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 + N_4(x, y)\phi_4 \quad (3.2)$$

โดยที่  $N_i(x, y)$ ;  $i=1,2,3,4$  แทนฟังก์ชันการประมาณเอลิเมนต์ สมการ (3.2) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi = \phi(x, y) &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\begin{matrix} (1 \times 4) & (4 \times 1) \end{matrix}$

โดยที่  $[N]$  คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$  คือ เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ (Element Equations) ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่าง (Method of Weighted Residual) โดยใช้หลักการที่ว่า หากทำการแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.3) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น ซึ่งในที่นี้คือสมการ (3.1) จะได้ว่า  $D(\phi)$  จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะเท่ากับ  $R$  ดังแสดงในสมการ (3.4)

$$R = D(\phi) = D\left(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i\right) \quad (3.4)$$

โดยที่  $R$  คือ เศษตค่าง (Residual)

$m$  คือ จำนวนจุดต่อทั้งหมดของเอลิเมนต์

วิธีกาลอร์คิน (Galerkin) เป็นวิธีการลดความคลาดเคลื่อนให้น้อยที่สุด ซึ่งขั้นตอนนั้นเริ่มจากการคูณเศษตค่าง  $R$  ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Weighted Function)  $W$  จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งคือ

$$\int_{\Omega} W_i R d\Omega = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.5)$$

โดยปกติจะเลือก  $W_i = N_i$  ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรตทีละส่วน (Integrate by Part) ซึ่งจะแทนสมการ (3.4) ลงในสมการ (3.5) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i R d\Omega &= \int_{\Omega^{(e)}} W_i D \left( \sum_{i=1}^m N_i \phi_i \right) d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, } \Omega^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, } \Gamma^{(e)}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์,  $\Omega^{(e)}$       พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์,  $\Gamma^{(e)}$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์  $\Gamma^{(e)}$  ด้วยสภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

ขั้นตอนที่ 6 เขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด  $m$  สมการ ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ นั่นคือ

$$\underbrace{[K]}_{(m \times m)} \underbrace{\{\phi\}}_{(m \times 1)} = \underbrace{\{Q\}}_{(m \times 1)} \quad (3.7)$$

โดยที่  $[K]$  คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ซึ่งบรรจุค่าสัมประสิทธิ์ที่คุณอยู่กับตัวไม่ทราบค่า

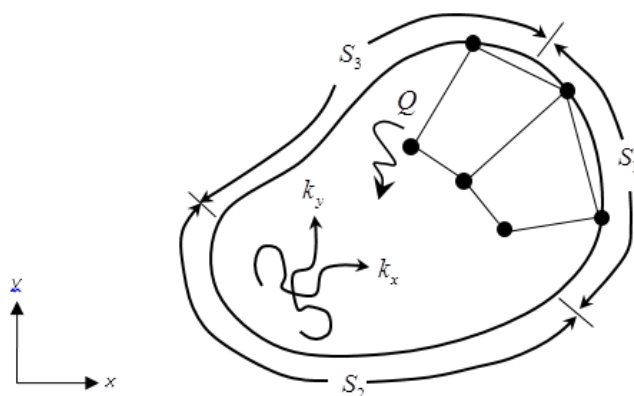
$\{\phi\}$  คือ เวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์

$\{Q\}$  คือ โหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.7) ขั้นตอนต่อไปคือการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกัน ก่อให้เกิดสมการระบบรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขตแล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อต่างๆ

### 3.2 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สองมิติสำหรับการถ่ายเทความร้อน

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบสองมิติ ในการคำนวณหาการกระจายตัวของอุณหภูมิเนื่องจากการนำความร้อนในแผ่นโลหะที่สามารถผลิตความร้อนได้เองภายใต้สภาวะอยู่ตัวดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การนำความร้อนในแผ่นโลหะที่ผลิตความร้อนได้เอง

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาการนำความร้อนในสองมิติ คือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (3.8)$$

โดย  $k_x$  และ  $k_y$  แทนค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแนวแกน  $x$  และแกน  $y$  ตามลำดับ ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นโลหะจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตตลอดขอบภายนอกของแผ่นโลหะ ซึ่งจะเป็นไปได้ดังต่อไปนี้

1) การกำหนดอุณหภูมิตลอดขอบ  $S_1$  เช่น

$$T(x, y) = T_1(x, y) \quad (3.9)$$

2) การกำหนดปริมาณความร้อนไหลเข้าออกตลอดขอบ  $S_2$

จากกฎของฟูรีเยร์ (Fourier's Law)

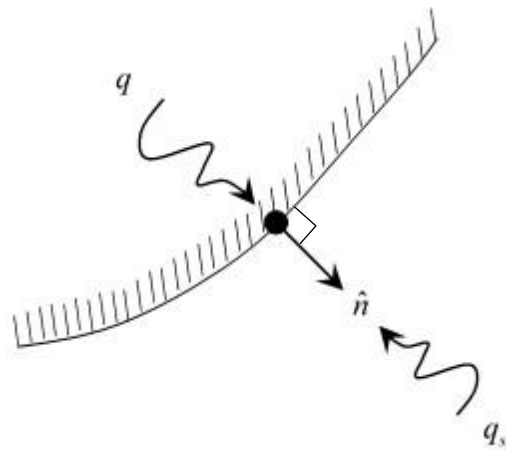
$$q = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \quad (3.10)$$

ซึ่ง  $n_x$  และ  $n_y$  แทนทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์หน่วย  $\hat{n}$  ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} \quad (3.11)$$

โดย  $\hat{i}$  และ  $\hat{j}$  เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางแกน  $x$  และแกน  $y$  หากเรากำหนดปริมาณความร้อน  $q_s$  ที่ไหลเข้าขอบให้มีเครื่องหมายเป็นบวกดังแสดงในรูปที่ 3.3



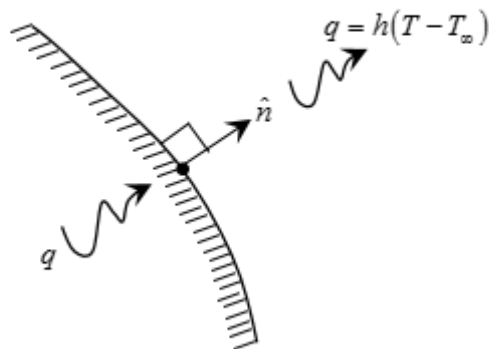


รูปที่ 3.3 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อกำหนดปริมาณความร้อนที่ไหลเข้า

ดังนั้น

$$q_s = -q = k_x \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.12)$$

3) การพาความร้อนออกตลอดขอบ  $S_3$



รูปที่ 3.4 ความสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อเกิดการพาความร้อน

จากรูปที่ 3.4 จะได้

$$q = h(T - T_\infty) \quad (3.13)$$

โดย  $h$  แทนสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $T$  แทนอุณหภูมิที่ขอบ ณ ตำแหน่งที่พิจารณา และ  $T_\infty$  แทนอุณหภูมิของอากาศรอบนอกจากนั้นแทนค่า  $q$  จากสมการ (3.10) จะได้

$$-k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = h(T - T_\infty) \quad (3.14)$$

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย  $m$  จุดต่อ โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยเริ่มจาก

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i R d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \right) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} W_i Q d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

จากนั้นจึงทำการอินทิเกรตทีละส่วนบนพจน์แรกของสมการ (3.15) ซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์ลำดับที่สอง โดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ดังนี้

$$\int_{\Omega^{(e)}} u (\nabla \cdot \vec{V}) d\Omega = \int_{\Gamma^{(e)}} u (\vec{V} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla u \cdot \vec{V}) d\Omega \quad (3.16)$$

หากเปรียบเทียบพจน์แรกของสมการ (3.15) กับสัญลักษณ์ตัวแปรทางด้านซ้ายของสมการ (3.16) จะพบว่า

$$u = W_i$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \\ \vec{V} &= k_x \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} \end{aligned} \right\} (\nabla \cdot \vec{V}) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right)$$

และเนื่องจาก  $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$  ดังนั้น

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y$$

$$u (\vec{V} \cdot \hat{n}) = W_i \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial W_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \hat{j}$$

$$\nabla u \cdot \vec{V} = \frac{\partial W_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

จากนั้น หากให้  $W_i = N_i$  สมการ (3.15) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (3.17)$$

ลำดับต่อไปคือการแทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตเอลิเมนต์,  $\Gamma^{(e)}$ , ด้วยเงื่อนไขขอบเขตอื่น ๆ ที่กำหนดให้ จากสมการ (3.17) พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตเอลิเมนต์คือพจน์แรกที่มีความหมายทางกายภาพว่าเป็นปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทเข้าออกตลอดขอบของเอลิเมนต์ โดยที่ เอลิเมนต์จะวางตัวอยู่ที่กลางแผ่นโลหะหรือติดขอบนอกของแผ่นโลหะ ซึ่งหากติดขอบนอกของแผ่นโลหะจะต้องแทนเงื่อนไขขอบเขตด้วยสมการ (3.9), (3.12) หรือ (3.13) ตามความเหมาะสม ดังนั้นเมื่อเขียนสมการ (3.17) อีกครั้งในรูปแบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทั่ว ๆ ไปที่อาจวางตัวอยู่ตำแหน่งใดบนแผ่นโลหะก็ได้ จะได้

$$\begin{aligned} \int_{s_2^{(e)}} n_i q_s dS - \int_{s_3^{(e)}} N_i hT dS + \int_{s_3^{(e)}} N_i hT_\infty dS + \int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \\ - \int_{\Omega^{(e)}} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (3.18)$$

และเนื่องจากมีทั้งหมด  $m$  สมการ สามารถเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} \left( \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{s_3^{(e)}} \{N\} hT dS \\ = \int_{\Gamma^{(e)}} \{N\} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Omega^{(e)}} \{N\} Q d\Omega \\ + \int_{s_2^{(e)}} \{N\} q_s dS + \int_{s_3^{(e)}} \{N\} hT_\infty dS \end{aligned} \quad (3.19)$$

ในแต่ละเอลิเมนต์ เมื่อสมมุติลักษณะการกระจายตัวของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในรูป

$$T = T(x, y) = \underset{(1 \times m)}{[N]} \underset{(m \times 1)}{\{T\}} \quad (3.20)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \underset{(1 \times m)}{\left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]} \underset{(m \times 1)}{\{T\}} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \underset{(1 \times m)}{\left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]} \underset{(m \times 1)}{\{T\}} \quad (3.21)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงกลายเป็น

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^{(e)}} \left( \underbrace{\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}_{(m \times 1)} k_x \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{(1 \times m)} + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}_{(m \times 1)} k_y \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{(1 \times m)}}_{[K_c]_{(m \times m)}} d\Omega \{T\}_{(m \times 1)} + \underbrace{\int_{S_3} \{N\}_{(m \times 1)} h [N]_{(1 \times m)} dS}_{[K_h]_{(m \times m)}} \{T\}_{(m \times 1)} \right) \\
&= \int_{\Gamma^{(e)}} \{N\}_{(m \times 1)} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Omega^{(e)}} \{N\}_{(m \times 1)} Q d\Omega \\
&\quad \underbrace{\{Q_c\}_{(m \times 1)}}_{(m \times 1)} \quad \underbrace{\{Q_Q\}_{(m \times 1)}}_{(m \times 1)} \\
&\quad + \int_{S_2} \{N\}_{(m \times 1)} q_s dS + \int_{S_3} \{N\}_{(m \times 1)} h T_\infty dS \quad (3.22ก) \\
&\quad \underbrace{\{Q_q\}_{(m \times 1)}}_{(m \times 1)} \quad \underbrace{\{Q_h\}_{(m \times 1)}}_{(m \times 1)}
\end{aligned}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบสั้น ๆ ของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบไปด้วย  $m$  สมการ จะได้ดังนี้

$$[[K_c] + [K_h]]\{T\} = \{Q_c\} + \{Q_Q\} + \{Q_q\} + \{Q_h\} \quad (3.22ข)$$

โดย

$[K_c]$  แทน เมทริกซ์การนำความร้อน

$[K_h]$  แทน เมทริกซ์การพาความร้อน

$\{T\}$  แทน เวกเตอร์ของอุณหภูมิที่จุดต่อ

$\{Q_c\}$  แทน โหลดเวกเตอร์การนำความร้อนที่ขอบ

$\{Q_Q\}$  แทน โหลดเวกเตอร์ความร้อนผลิตเอง

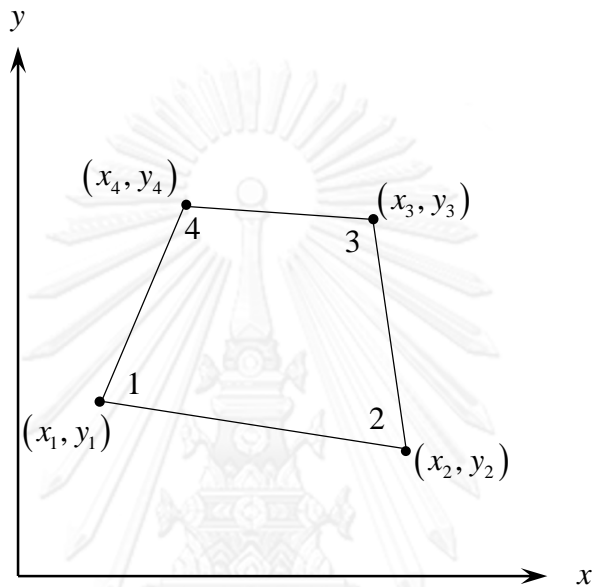
$\{Q_q\}$  แทน โหลดเวกเตอร์ความร้อนที่กำหนดให้

$\{Q_h\}$  แทน โหลดเวกเตอร์การพาความร้อน

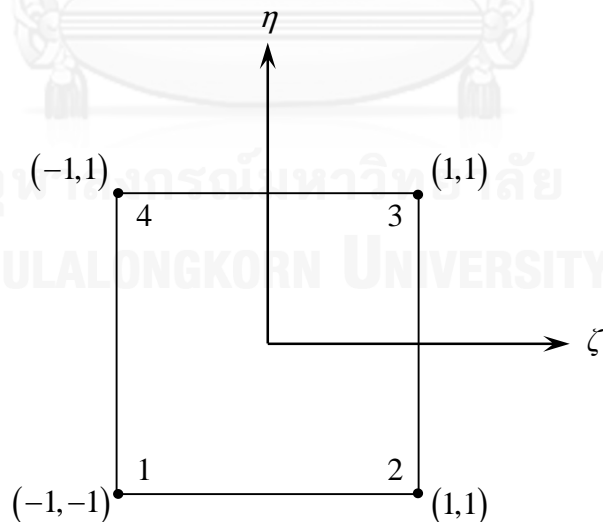
สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.19) สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนได้ต่อไป

### 3.3 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

เมื่อต้องอินทิเกรตบนพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยการทำการอินทิเกรตโดยตรงจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนนั้นไม่สามารถทำได้โดยง่าย จึงต้องทำการแปลงระบบพิกัดจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนดังรูปที่ 3.5 ให้เป็นสี่เหลี่ยมขนาด  $2 \times 2$  หน่วยในระบบพิกัดธรรมชาติ ในรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน



รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมในระบบพิกัดธรรมชาติ

การสมมุติลักษณะการกระจายของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์จะอยู่ในรูปแบบ

$$T = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4 = [N(\xi, \eta)]\{T\} \quad (3.23)$$

โดย 
$$N_i = [N(\xi, \eta)] = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.24)$$

เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณต่อไปในการหาความชันของอุณหภูมิ  $\partial T / \partial x$  และ  $\partial T / \partial y$  จึงต้องใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

$[J]$

โดย  $[J]$  เรียกว่า เมทริกซ์จาร์โคเบียน (Jacobain matrix) ซึ่งมีรายละเอียดคือ

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

เมื่อกำหนดออกมาจะเป็น

$$J_{11} = -\frac{1}{4}(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)x_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_4 \quad (3.27ก)$$

$$J_{12} = -\frac{1}{4}(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)y_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)y_4 \quad (3.27ข)$$

$$J_{21} = -\frac{1}{4}(1-\xi)x_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_4 \quad (3.27ค)$$

$$J_{22} = -\frac{1}{4}(1-\xi)y_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_4 \quad (3.27ง)$$

ความชันของอุณหภูมิในทิศแกน  $x$  และ  $y$  คือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

โดยเมทริกซ์ผกผัน  $[J]^{-1}$  นั้นสามารถคำนวณได้จากเมทริกซ์จาร์โคเบียน  $[J]$  ดังนี้

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

โดยสามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งรูป

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [B(\xi, \eta)] \quad (3.33)$$

### 3.4 รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป

เมื่อแทนฟังก์ชันการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ถูกสมมุติในระบบพิกัด  $\xi - \eta$  ลงในสมการ (3.22) โดยที่  $k_x = k_y = k$  จะได้

$$[K_c] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k [B(\xi, \eta)]^T [B(\xi, \eta)] t |J| d\xi d\eta \quad (3.34)$$

$$[K_h] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h \{N(\xi, \eta)\} [N(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta \quad (3.35)$$

$$\{Q_c\} = - \int_{\Gamma^{(e)}} (q_x n_x + q_y n_y) \{N(\xi, \eta)\} d\Gamma \quad (3.36)$$

$$\{Q_q\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q \{N(\xi, \eta)\} t |J| d\xi d\eta \quad (3.37)$$

$$\{Q_q\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q_s \{N(\xi, \eta)\} |J| d\xi d\eta \quad (3.38)$$

$$\{Q_h\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h T_\infty \{N(\xi, \eta)\} |J| d\xi d\eta \quad (3.39)$$

### 3.5 สูตรการอินทิเกรตเชิงตัวเลข

สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปเมื่อเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจะต้องทำการอินทิเกรตในพิกัดธรรมชาตินั้นจะใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเกาส์-เลอจองด์ดังนี้

$$\int_{-1}^1 y(x) dx \cong \sum_{i=1}^{NG} W_i y(x_i) \quad (3.40)$$

โดย  $NG$  แทน จำนวนจุดเกาส์

$W_i$  แทน น้ำหนัก

$x_i$  แทน ตำแหน่งของจุดเกาส์

ซึ่งผลการอินทิเกรตจะแม่นยำเพียงใดขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชัน  $y(x)$  และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรต และค่าน้ำหนักจะเปลี่ยนไปตามจุดเกาส์ที่ใช้โดยที่จะใช้ ค่าดังนี้

$$NG = 2, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad W_1 = W_2 = 1 \quad (3.41)$$

และเมื่อประยุกต์การอินทิเกรตด้วยวิธีเกาส์-เลอจองด์สมการ (3.40) เข้ากับสมการตั้งแต่ (3.34-3.39) จะได้

$$[K_c] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T [B(\xi_i, \eta_j)] t |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.42)$$

$$\{Q_Q\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j Q \{N(\xi_i, \eta_j)\} |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.43)$$

$$\{Q_q\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j q_s \{N(\xi_i, \eta_j)\} |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.44)$$

$$\{Q_h\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j h T_\infty \{N(\xi_i, \eta_j)\} |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.45)$$

เนื่องจาก  $\{Q_c\}$  เป็นการอินทิเกรตตลอดขอบเอลิเมนต์โดยถ้าขอบเขตดังกล่าวมีอุณหภูมิคงที่หรือถูกกำหนดให้เป็นฉนวน (ไม่มีปริมาณความร้อนไหลผ่านขอบ) เวกเตอร์  $\{Q_c\}$  จะไม่ต้องทำการคำนวณ เพราะถูกหักล้างกันหมดไปหลังจากการรวมเอลิเมนต์



### 3.6 รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์หลักการของฟลักซ์สำหรับวิเคราะห์การนำความร้อน

รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการใช้หลักการของฟลักซ์นี้ถูกประดิษฐ์ขึ้นเพื่อหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตเชิงตัวเลข จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการนำความร้อน (3.8) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอนุกรมดังนี้

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = f(x, y) \quad (3.46)$$

โดยที่  $E$  คือ ปริมาณการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน  $x$

$F$  คือ ปริมาณการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน  $y$

$f(x, y)$  คือ ฟังก์ชันของแหล่งกำเนิด

เมื่อทำการเปรียบเทียบกับสมการ (3.8) จะได้

$$E = q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.47)$$

$$F = q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.48)$$

$$f(x, y) = Q \quad (3.49)$$

หลักการแบบของฟลักซ์คือ การประมาณค่าฟลักซ์  $E$  และ  $F$  ในรูปแบบเดียวกันกับตัวไม่ทราบค่า  $T$  ดังนี้

$$T(x, y) = [N(x, y)]\{T\} \quad (3.50)$$

$$E(x, y) = [N(x, y)]\{E\} \quad (3.51)$$

$$F(x, y) = [N(x, y)]\{F\} \quad (3.52)$$

โดยที่  $[N(x, y)]$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักค้าง

$$\int_{\Omega} N \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} NQ d\Omega = 0 \quad (3.53)$$

อินทิเกรตทีละส่วนโดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ตั้งสมการ (3.16) จะได้

$$\int_{\Omega^{(e)}} u (\nabla \cdot \vec{V}) d\Omega = \int_{\Gamma^{(e)}} u (\vec{V} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} (\nabla u \cdot \vec{V}) d\Omega \quad (3.16)$$

และเมื่อเปรียบเทียบ แต่ละพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3.53) กับสมการ (3.16) ได้พบว่า

$$u = N_i$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \\ \vec{V} &= E\hat{i} + F\hat{j} \end{aligned} \right\} (\nabla \cdot \vec{V}) = \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

เนื่องจาก  $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$  ดังนั้น

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = En_x + Fn_y$$

$$u(\vec{V} \cdot \hat{n}) = N_i (En_x + Fn_y)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{j}$$

$$\nabla u \cdot \vec{V} = \frac{\partial N_i}{\partial x} E + \frac{\partial N_i}{\partial y} F$$

จากสมการที่ (3.53) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\int_{\Gamma^{(e)}} N_i (En_x + Fn_y) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} E + \frac{\partial N_i}{\partial y} F \right) d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q d\Omega = 0$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.54)$$

เนื่องจากการประมาณค่าของฟังก์ชันมีความสัมพันธ์กับความชันของอุณหภูมิ และเมื่อเป็นวัตถุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง  $k_x = k_y = k$  จึงสามารถทำให้อยู่ในรูปของ ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อได้ จากสมการ (3.51) และ (3.52) ซึ่งจะได้

$$\int_{\Gamma^{(e)}} \{N_i\} ([N_i] \{E\} n_x + [N_i] \{F\} n_y) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} [N_i] \{E\} + \frac{\partial N_i}{\partial y} [N_i] \{F\} \right) d\Omega$$

$$- \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.55)$$

หรือในอีกรูปแบบ

$$\int_{\Omega^{(e)}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} [N_i] d\Omega \{E\} + \int_{\Omega^{(e)}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} [N_i] d\Omega \{F\}$$

$$= \int_{\Gamma^{(e)}} \{N_i\} [N_i] d\Gamma \{E\} + \int_{\Gamma^{(e)}} \{N_i\} [N_i] n_y d\Gamma \{F\}$$

$$- \int_{\Omega^{(e)}} N_i Q d\Omega \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.56)$$

จากนั้นแทนค่า  $\{E\}$  ด้วยสมการ (3.47) จะได้

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} -k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\}_1 \\ -k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\}_2 \\ -k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\}_3 \\ -k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

แทน ค่า  $\{F\}$  ด้วยสมการ (3.48) จะได้

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{T\}_1 \\ -k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{T\}_2 \\ -k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{T\}_3 \\ -k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{T\}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

### 3.7 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบพลักซ์เชิง

จากสมการ (3.56) เมื่อประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักค้าง และแทนลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ (3.57-3.58) ลงไปจะได้

$$[D_x]\{E\} + [D_y]\{F\} = \{B\} - \{R\} \quad (3.59)$$

โดยที่  $[D_x], [D_y]$  แทน เมทริกซ์ส่วนประกอบพลักซ์

$\{B\}$  แทน โหลดเวกเตอร์ขอบเขต

$\{R\}$  แทน โหลดเวกเตอร์ของความร้อนผลิตได้เอง

$$[D_x] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [N] dA \quad (3.60)$$

$$[D_y] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} [N] dA \quad (3.61)$$

$$\{R\} = \int_A \{N\} Q dA \quad (3.62)$$

$$\{B\} = \int_{\Gamma} \{N\} [N] d\Gamma (\{E\} n_x + \{F\} n_y) \quad (3.63)$$

เมื่อนำ (3.60) และ (3.61) แทนลงไปใน (3.59) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่อยู่ในรูปแบบ

$$[K]\{T\} = \{B\} - \{R\} \quad (3.64)$$

โดยที่  $[K]$  มีรายละเอียดดังนี้

$$[K] = [D_x]k[P_x] + [D_y]k[P_y] \quad (3.65)$$

จะได้ค่าเอลิเมนต์เมทริกซ์แมนตรงของสี่เหลี่ยมใดๆ แบบพลักซ์เชิงเส้นจะได้

$$[D_x] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [N] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|J|} \left( J_{22} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\} - J_{12} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right\} \right) [N_i] |J| d\xi d\eta \quad (3.66)$$

โดยที่ผลการคำนวณรายละเอียดของค่าเอลิเมนต์เมทริกซ์แมนตรง  $[D_x]$ ,  $[D_y]$ ,  $[P_x]$ ,  $[P_y]$ ,  $\{B\}$  และ  $\{R\}$  จะแสดงไว้ที่ ภาคผนวก ก

### 3.8 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ [7] คือ จะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบสูง และปรับให้มีเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ดังกล่าว อาศัยหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) คือ เริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมซึ่งประกอบไปด้วย  $\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x \partial y}$  โดยค่าต่างๆ เหล่านี้จะนำมาคำนวณหาค่าในแนวแกนหลัก โดยที่  $\phi$  แทนคำตอบของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

เริ่มต้นโดยการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเอลิเมนต์ใด ๆ ก่อน ซึ่งหากเราสมมุติลักษณะการกระจายของคำตอบบนเอลิเมนต์เป็นดังสมการ (3.67)

$$\phi^{(e)}(x, y) = [N_i(x, y)] \{\phi_i\} \quad (3.67)$$

โดยที่  $N_i$  คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\phi_i$  คือ ค่าคำตอบที่จุดต่อของเอลิเมนต์และตัวห้อย  $i$  แทนจุดต่อที่  $i$

เราจะทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเอลิเมนต์ใด ๆ เทียบกับ  $x$  ได้จากสมการ

$$\frac{\partial \phi^{(e)}(x, y)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \right] \{ \phi_i \} \quad (3.68)$$

จากนั้นทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเทียบกับ  $x$  ที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ โดยให้ลักษณะการกระจายตัวของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเทียบกับ  $x$  ที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์เป็นดังสมการ

$$\frac{\partial \hat{\phi}^{(e)}(x, y)}{\partial x} = [N_i(x, y)] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} \quad (3.69)$$

จากนั้นนำสมการ (3.68) ลบออกจากสมการ (3.69) แล้วประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะได้

$$\int_A \{N_i\} \left( \frac{\partial \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \right) dA = 0 \quad (3.70)$$

แทนค่าสมการ (3.69) ลงในสมการ (3.70) แล้วทำการจัดรูปสมการจะได้

$$\int_A \{N_i\} \left( [N_i(x, y)] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} - \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \right) dA = 0 \quad (3.71)$$

$$\int_A \int_A \{N_i\} [N_i(x, y)] dA \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} - \int_A \{N_i\} dA \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} = 0 \quad (3.72)$$

$$\int_A \int_A \{N_i\} [N_i(x, y)] dA \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} = \int_A \{N_i\} dA \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \quad (3.73)$$

โดยที่  $\int_A \{N_i\} [N_i] dA$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์มวลแบบโดยนัยดังนี้

$$[M] = \int_A \{N_i\} [N_i] dA \quad (3.74)$$

แทนสมการ (3.74) ลงในสมการ (3.73) จะได้

$$[M] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} = \int_A \{N_i\} dA \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \quad (3.75)$$

สมการ (3.75) นั้นเป็นสมการของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องทำการคำนวณสำหรับทุกเอลิเมนต์แล้วรวมขึ้นเป็นระบบสมการใหญ่ ซึ่งหลังจากทำการแก้สมการแล้วจะได้ค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเทียบกับ  $x$  ที่จุดต่อใด ๆ

การคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองสามารถดำเนินไปในแนวทางเดียวกัน กล่าวคือ หลังจากทราบค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่จุดต่อแล้วสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับที่สองได้จาก

$$\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} \quad (3.76)$$

สมมุติค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบบนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายซึ่งขึ้นอยู่กับค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x^2} = [N_i] \left\{ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right\} \quad (3.77)$$

จากนั้นนำสมการ (3.76) ลบออกจากสมการ (3.77) แล้วประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่าง จะได้

$$\int_A [N_i] \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} \right) dA = 0 \quad (3.78)$$

และแทนสมการ (3.77) ลงในสมการ (3.78) จะได้

$$\int_A \{N_i\} \left( [N_i] \left\{ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right\} - \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} \right) dA = 0 \quad (3.79)$$

$$\int_A \{N_i\} [N_i] dA \left\{ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right\} - \int_A [N_i] dA \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.80)$$

$$\int_A \{N_i\} [N_i] dA \left\{ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right\} = \int_A [N_i] dA \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} \quad (3.81)$$

แทนสมการ (3.75) ลงในสมการ (3.81) จะได้

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N_i\} dA \frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} \quad (3.82)$$

ส่วนขั้นตอนในการหา  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}$  สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน

เมื่อเราทราบค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบเหล่านี้แล้ว จึงนำค่าต่าง ๆ ดังกล่าวไปหาค่าในแนวแกนหลัก (principal values) โดยใช้ความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการ (3.83) และ (3.84) ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (3.84)$$

ซึ่งทำให้ได้ค่าในแนวแกนหลัก  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2}$  ออกมา ค่าที่มากที่สุดของทั้งสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมาโดย

$$\lambda_i = \max \left( \left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (3.85)$$

ค่าที่ถูกเลือก ( $\lambda$ ) คือ การนำค่าที่มากที่สุดระหว่าง  $\left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} \right|$  หรือ  $\left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \right|$  ค่าใดค่าหนึ่งที่ยิ่งกว่าอีกค่า จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์  $h$  ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ต่อไป

$$h_i^2 \lambda_i = \text{ค่าคงที่} = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (3.86)$$

โดย ค่า  $h_{\min}$  คือ ค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดโดยที่ต้องกำหนดลงไปเอง และค่า  $\lambda_{\max}$  คือ ค่าในแนวแกนหลัก(principal values) ที่มีค่ามากที่สุดของทั้งปัญหา



## บทที่ 4

### ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน

ในบทนี้นำเสนอการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น มาสร้างเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนสองมิติในสถานะอยู่ตัว และจะอธิบายถึงลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่น่าไปใช้กับโปรแกรมและรายละเอียดต่างๆ ของโปรแกรม

#### 4.1 ขั้นตอนการคำนวณ

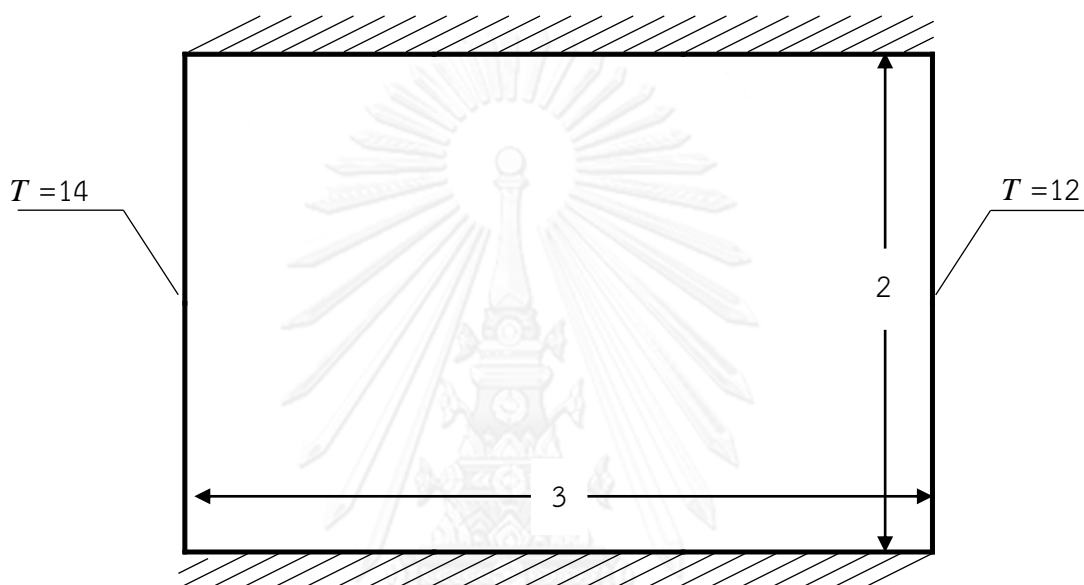
โปรแกรมที่ประดิษฐ์นี้มีชื่อว่า FINITEQUAD ประกอบด้วย 1 โปรแกรมหลัก (main program) และ โปรแกรมย่อย (subroutine) มีขั้นตอนดำเนินงานดังต่อไปนี้

- 4.1.1 เริ่มต้นการทำงานในโปรแกรมหลัก [MAIN] โดยจะเรียกโปรแกรมย่อยอันแรกคือ [READINPUT] โดยโปรแกรมย่อยดังกล่าวจะอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์
- 4.1.2 เรียกโปรแกรมย่อย [QUAD\_LF] เพื่อทำการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์จากข้อมูลเข้าโดยใช้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น
- 4.1.3 เรียกโปรแกรมย่อย [APPLY\_BC] เพื่อทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ได้รับจากข้อมูลเข้าของปัญหา
- 4.1.4 เรียกโปรแกรมย่อย [unsympcg] เพื่อทำการหาผลเฉลยของระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแล้ว
- 4.1.5 เรียกโปรแกรมย่อย [PRINTOUT] เพื่อส่งข้อมูลการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ



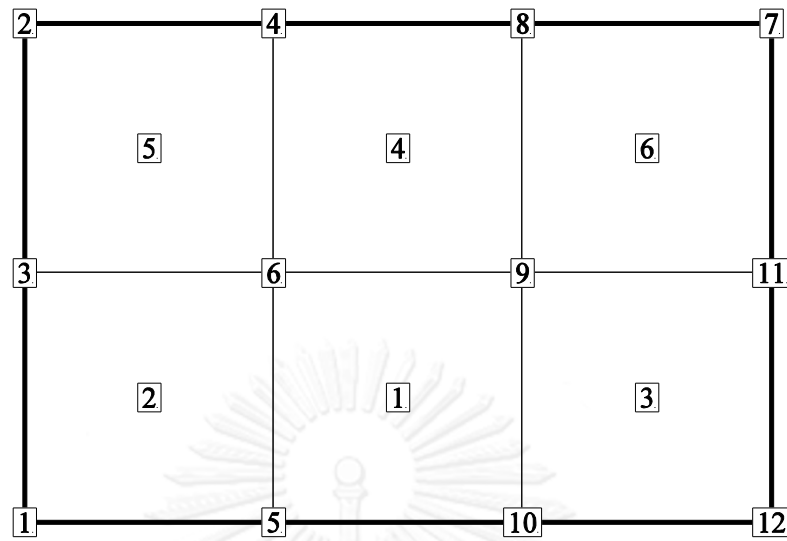
#### 4.2 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลขาเข้า

ในส่วนนี้จะใช้ปัญหาอย่างง่ายที่มีจำนวนจุดต่อไม่มากนักเพื่อให้เข้าใจถึงลักษณะของไฟล์ขาเข้าโดยปัญหาที่ใช้มีลักษณะคือ แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาดกว้าง 2 หน่วย ยาว 3 หน่วยหนา 0.1 หน่วย กำหนดอุณหภูมิตลอดขอบด้านซ้ายเท่ากับ 14 อุณหภูมิตลอดขอบด้านขวาเท่ากับ 2 ขอบด้านบนและด้านล่างหุ้มฉนวน และมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 หน่วย และไม่มีการผลิตความร้อนภายในเอลิเมนต์ ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ลักษณะปัญหาของตัวอย่างไฟล์ขาเข้า

และทำการแบ่งเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 หน่วยพื้นที่จำนวน 6 เอลิเมนต์โดยแสดงหมายเลขจุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์ และหมายเลขเอลิเมนต์ที่กึ่งกลางของแต่ละเอลิเมนต์ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 การแบ่งเอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างไฟล์ขาเข้า

จากข้อมูลที่กล่าวมาจะสามารถสร้างไฟล์ขาเข้าได้มีรายละเอียดดังนี้

1

Example of input file

NPOIN NELEM

12 6

TK THICK

1 0.1

NODE	IBC	X	Y	T
1	1	0	0	14.00
2	1	0	2	14.00
3	1	0	1	14.00
4	0	1	2	0.00
5	0	1	0	0.00
6	0	1	1	0.00
7	1	3	2	2.00
8	0	2	2	0.00
9	0	2	1	0.00
10	0	2	0	0.00
11	1	3	1	2.00
12	1	3	0	2.00

ELEMENT	NODE1	NODE2	NODE3	NODE4	QGEN
1	9	6	5	10	0.00
2	6	3	1	5	0.00
3	10	12	11	9	0.00
4	8	4	6	9	0.00
5	4	2	3	6	0.00
6	9	11	7	8	0.00

### ส่วนที่ 1 คำอธิบายลักษณะของไฟล์

บรรทัดที่หนึ่ง ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดที่สอง คำอธิบายต่างๆ ตามที่ระบุไว้ในบรรทัดที่หนึ่ง

1

Example of input file

### ส่วนที่ 2 ค่าที่ใช้ในการคำนวณของปัญหา

บรรทัดที่หนึ่ง คำอธิบายถึงข้อมูลตัวเลขด้านล่าง “จำนวนจุดต่อ” และ “จำนวนเอลิเมนต์”

บรรทัดที่สอง จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์

NPOIN	NELEM
12	6

### ส่วนที่ 3 ค่าคุณสมบัติของวัสดุ

บรรทัดที่หนึ่ง คำอธิบายถึงข้อมูลตัวเลขด้านล่าง “สัมประสิทธิ์การนำความร้อน” และ “ความหนาของเอลิเมนต์”

บรรทัดที่สอง “ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน” และ “ค่าความหนาของเอลิเมนต์”

TK	THICK
1	0.1

### ส่วนที่ 4 ลักษณะจุดต่อ

บรรทัดที่หนึ่ง คำอธิบายถึงข้อมูลตัวเลขด้านล่าง “ลำดับที่ของจุดต่อ”, “กำหนดเป็นเงื่อนไขขอบเขตหรือไม่” (0 : ไม่เป็น, 1 : เป็น), “พิกัดจุดต่อในตำแหน่งแกน  $x$ ”, “พิกัดจุดต่อในตำแหน่งแกน  $y$ ” และ “อุณหภูมิ”

บรรทัดที่ต่อไป “ค่าลำดับที่ของจุดต่อ”, “กำหนดเป็นเงื่อนไขขอบเขตหรือไม่”, “ค่าพิกัดจุดต่อในตำแหน่งแกน  $x$ ”, “ค่าพิกัดจุดต่อในตำแหน่งแกน  $y$ ” และ “ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อ”

NODE	IBC	X	Y	T
1	1	0	0	14.00
2	1	0	2	14.00
3	1	0	1	14.00
4	0	1	2	0.00
5	0	1	0	0.00
6	0	1	1	0.00
7	1	3	2	2.00
8	0	2	2	0.00
9	0	2	1	0.00
10	0	2	0	0.00
11	1	3	1	2.00
12	1	3	0	2.00

#### ส่วนที่ 5 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดที่หนึ่ง คำอธิบายถึงข้อมูลตัวเลขด้านล่าง “ลำดับที่ของเอลิเมนต์”, “ลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่หนึ่ง” “ลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สอง”, “ลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สาม” “ลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สี่” และ “ปริมาณความร้อนที่ให้กำเนิดเองได้ภายในเอลิเมนต์”

บรรทัดที่ต่อไป “ค่าลำดับที่ของเอลิเมนต์”, “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่หนึ่ง” “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สอง”, “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สาม” “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สี่” และ “ค่าปริมาณความร้อนที่ให้กำเนิดเองได้ภายในเอลิเมนต์”

ELEMENT	NODE1	NODE2	NODE3	NODE4	QGEN
1	9	6	5	10	0.00
2	6	3	1	5	0.00
3	10	12	11	9	0.00
4	8	4	6	9	0.00
5	4	2	3	6	0.00
6	9	11	7	8	0.00

#### 4.3 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลขาออก

รูปแบบของข้อมูลขาออกเขียนมีรายละเอียดดังนี้

```
TITLE = "input.txt      "
VARIABLES = "X", "Y", "T"
ZONE N= 12, E= 6, F=FEPOINT, ET=QUADRILATERAL
```

0.00E+00	0.00E+00	1.40E+01	
0.00E+00	2.00E+00	1.40E+01	
0.00E+00	1.00E+00	1.40E+01	
1.00E+00	2.00E+00	1.00E+01	
1.00E+00	0.00E+00	1.00E+01	
1.00E+00	1.00E+00	1.00E+01	
3.00E+00	2.00E+00	2.00E+00	
2.00E+00	2.00E+00	6.00E+00	
2.00E+00	1.00E+00	6.00E+00	
2.00E+00	0.00E+00	6.00E+00	
3.00E+00	1.00E+00	2.00E+00	
3.00E+00	0.00E+00	2.00E+00	
9	6	5	10
6	3	1	5
10	12	11	9
8	4	6	9
4	2	3	6
9	11	7	8

#### ส่วนที่ 1 คำอธิบายลักษณะของไฟล์

บรรทัดที่หนึ่ง ชื่อของไฟล์ข้อมูลขาเข้าที่ใส่เข้าไป

บรรทัดที่สอง คำอธิบายพารามิเตอร์ต่าง

บรรทัดที่สาม ZONE N = จำนวนจุดต่อ , E=จำนวนเอลิเมนต์ F=FEPOINT (พล็อตในรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์), ET=QUADRILATERAL (ชนิดเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า)

```
TITLE = "input.txt"
VARIABLES = "X", "Y", "T"
ZONE N= 12, E= 6, F=FEPOINT, ET=QUADRILATERAL
```

### ส่วนที่ 2

บรรทัดที่หนึ่งและต่อไป ค่าพิกัดจุดต่อในตำแหน่งแกน  $x$  , “ค่าพิกัดจุดต่อในตำแหน่งแกน  $y$ ”  
และ “ค่าอนุกรมที่จุดต่อ”

0.00E+00	0.00E+00	1.40E+01
0.00E+00	2.00E+00	1.40E+01
0.00E+00	1.00E+00	1.40E+01
1.00E+00	2.00E+00	1.00E+01
1.00E+00	0.00E+00	1.00E+01
1.00E+00	1.00E+00	1.00E+01
3.00E+00	2.00E+00	2.00E+00
2.00E+00	2.00E+00	6.00E+00
2.00E+00	1.00E+00	6.00E+00
2.00E+00	0.00E+00	6.00E+00
3.00E+00	1.00E+00	2.00E+00
3.00E+00	0.00E+00	2.00E+00

### ส่วนที่ 3

บรรทัดต่อมา “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่หนึ่ง” “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สอง” , “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สาม” “ค่าลำดับที่ของจุดต่อในตำแหน่งที่สี่”

9	6	5	10
6	3	1	5
10	12	11	9
8	4	6	9
4	2	3	6
9	11	7	8

## บทที่ 5

### การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

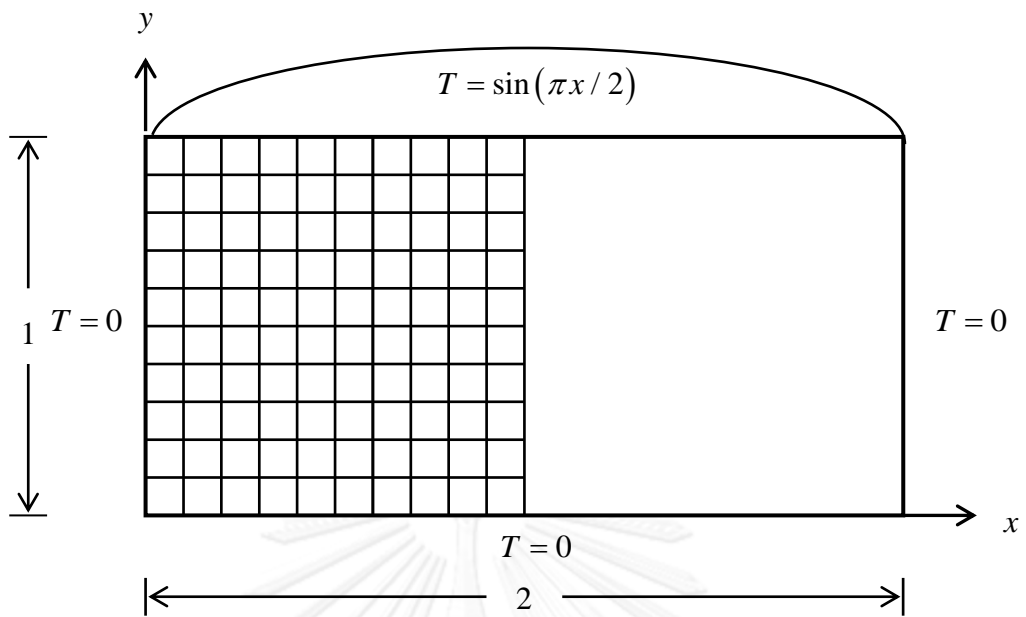
ในบทนี้จะแสดงผลการคำนวณจากโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาและเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบทั่วไปและผลเฉลยแม่นยำตรงเพื่อใช้ยืนยันความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมา

#### 5.1 ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดอุณหภูมิที่ขอบ

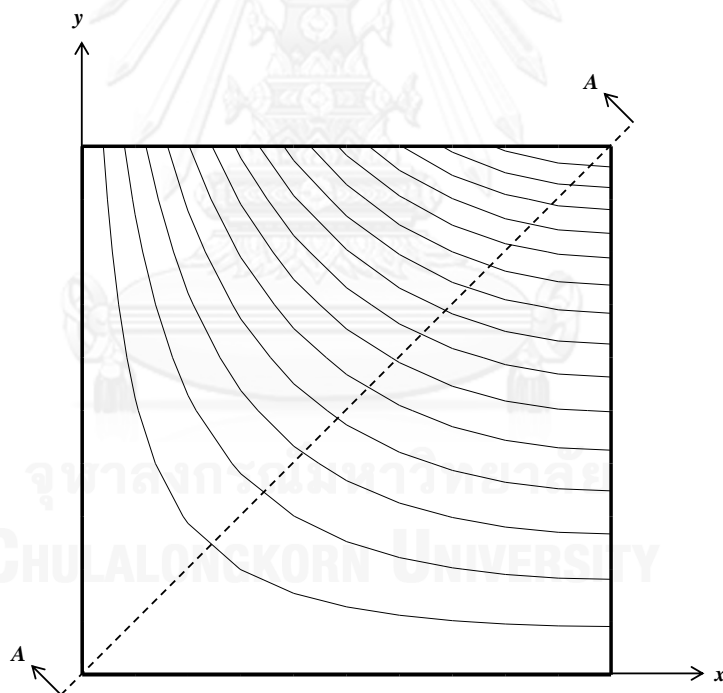
ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งถูกกำหนดค่าอุณหภูมิที่ขอบ โดยแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมมีขนาด  $2 \times 1$  หน่วย หนา  $0.1$  หน่วย และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  มีค่าเท่ากับ  $1$  หน่วย และอุณหภูมิที่ขอบซ้าย, ขอบขวาและขอบล่าง มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนอุณหภูมิที่ขอบด้านบนมีค่าแปรผันไปตามระยะทาง คือ  $\sin(\pi x/2)$  ซึ่งปัญหาดังกล่าวมีผลเฉลยแม่นยำตรงของการกระจายอุณหภูมิ [12] คือ

$$T(x, y) = \frac{\sin(\pi x/2) \sinh(\pi y/2)}{\sinh(\pi/2)} \quad (5.1)$$

เนื่องจากปัญหามีความสมมาตรจึงสามารถลดใช้โดเมนในการคำนวณเพียงครึ่งซ้ายดังรูปที่ 5.1 การวิเคราะห์ปัญหาจะเริ่มจากการแบ่งโดเมนปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งประกอบด้วย 121 จุดต่อ 100 เอลิเมนต์ จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตโดยให้อุณหภูมิที่  $x=0$ ,  $x=1$  และที่  $y=0$  มีค่าอุณหภูมิเท่ากับ 0 และที่ตำแหน่งที่  $y=1$  จะแทนค่าตามสมการ (5.1) ซึ่งอุณหภูมิจะเริ่มจาก 0 ที่ขอบด้านซ้ายบน และเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนมีค่าเท่ากับ 1 ที่ขอบด้านขวาบน เมื่อกำหนดไฟล์ข้อมูลขาเข้าด้วยข้อมูลดังกล่าวแล้วส่งเข้าไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจะได้ผลลัพธ์เป็นเส้นชั้นอุณหภูมิดังรูปที่ 5.2 เป็นการแสดงถึงเส้นชั้นของอุณหภูมิที่ได้มาจากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น (Linear Flux Formulation) เนื่องจากต้องการที่จะตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นจึงเลือกการเปรียบเทียบอุณหภูมิในแนวแกนเส้นทแยงมุม A-A ที่  $x=y$  เพราะมีระยะทางที่มากที่สุดและผ่านเส้นชั้นอุณหภูมิครบทุกเส้น โดยที่ใช้ผลจากการคำนวณจากผลเฉลยแม่นยำตรง ผลการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปที่ใช้จุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละแนวแกน (Conventional) และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์ (Flux-based) ซึ่งเมื่อพล็อตลงไปในกราฟแล้วความแม่นยำของผลลัพธ์นั้นเท่ากันดังรูปที่ 5.3

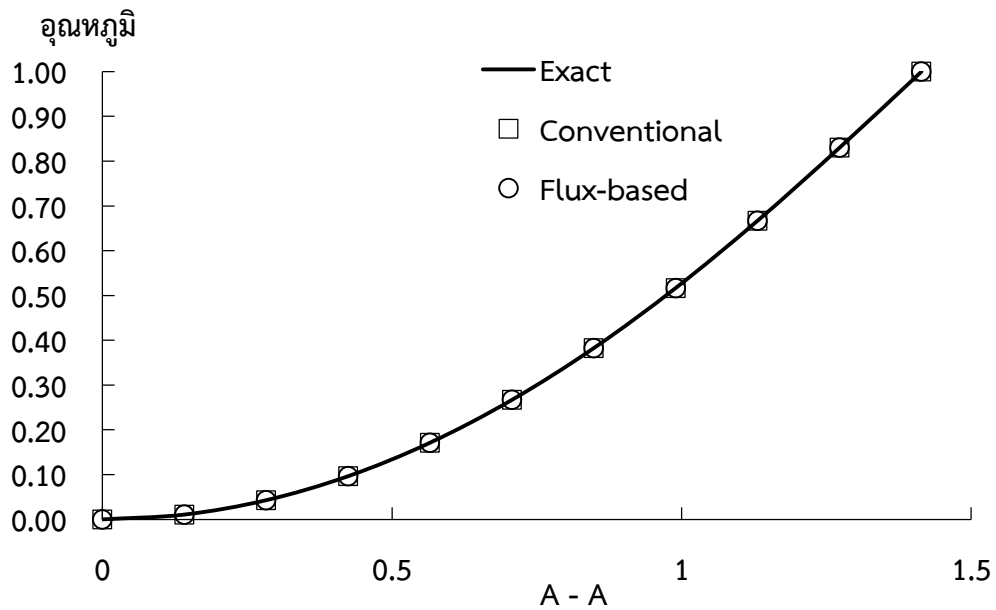


รูปที่ 5.1 แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมที่มีการกำหนดอุณหภูมิที่ขอบทั้งสี่ด้าน



รูปที่ 5.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ





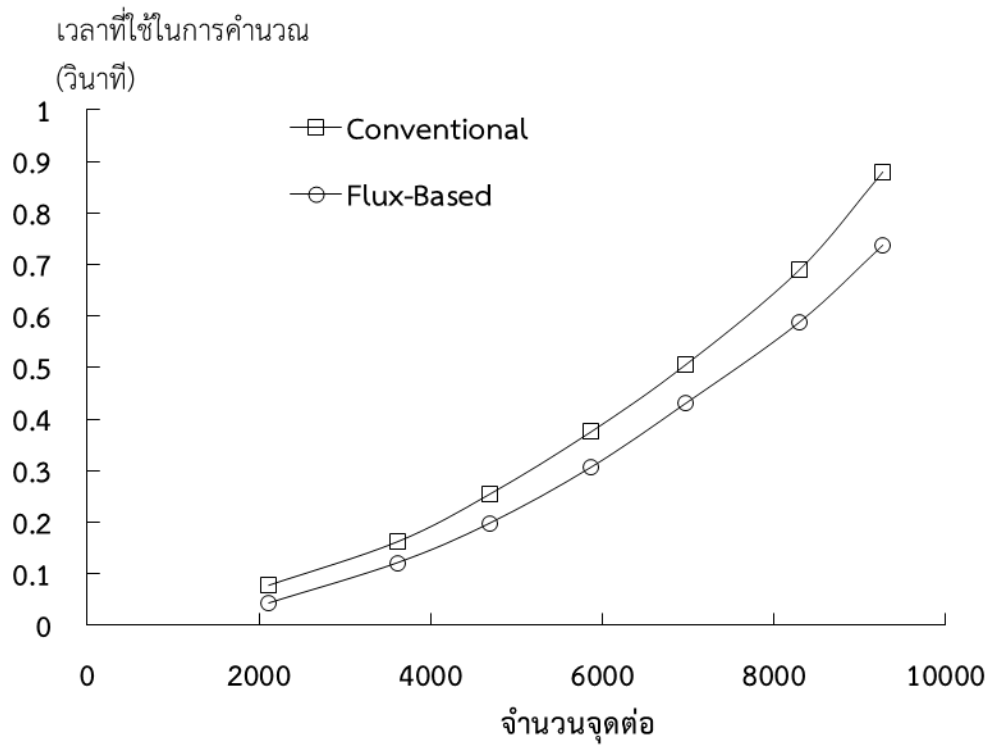
รูปที่ 5.3 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไป และแบบฟลักซ์ กับผลเฉลยแม่นยำตรงในแนวทแยงมุม A-A

และทำการเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์เชิงเส้น และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับผลเฉลยแม่นยำตรง ในตำแหน่งที่  $x = y = 0.5$  พบว่ามีเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนเท่ากันดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบอุณหภูมิที่ตำแหน่ง  $x = y = 0.5$  จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบทั่วไปและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบฟลักซ์กับผลเฉลยแม่นยำตรง

	ค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่ง $x = y = 0.5$	ค่าความคลาดเคลื่อน (%) $= \left  \frac{T_{(x,y)} - T_{exact}}{T_{exact}} \right  \%$
ผลเฉลยแม่นยำตรง	0.266911	-
แบบฟลักซ์เชิงเส้น	0.266628	0.10621
แบบทั่วไป	0.266628	0.10621

นั่นทำการเพิ่มจำนวนจุดต่อให้มากขึ้นและทำการจับเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อน เพื่อเปรียบเทียบจำนวนจุดต่อระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ก็พบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์ใช้เวลาในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนที่น้อยกว่าในทุก ๆ ค่าของจุดต่อดังรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับแบบฟลักซ์

## 5.2 ปัญหาแผ่นโลหะจัตุรัสและสามารถผลิตความร้อนได้เอง

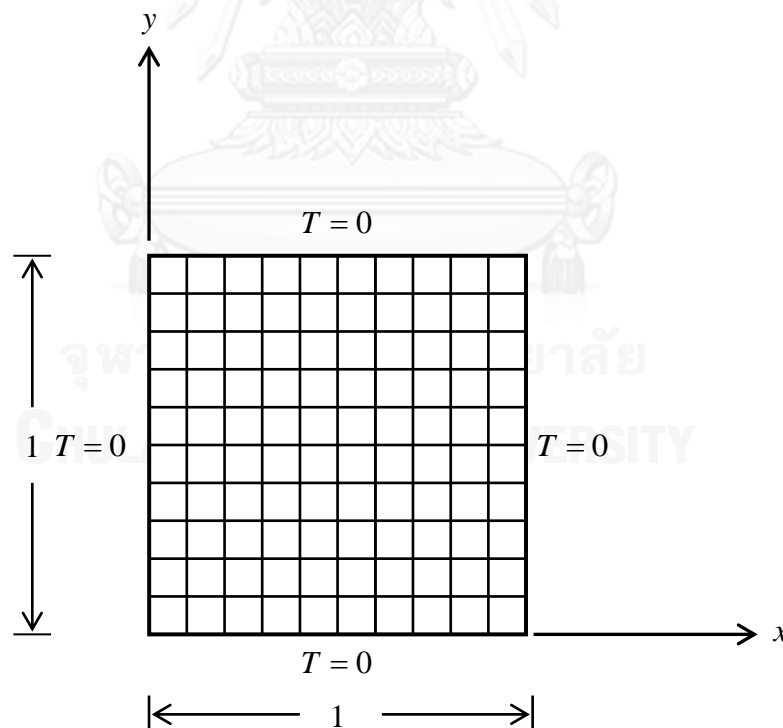
ปัญหาแผ่นโลหะจัตุรัส ซึ่งถูกกำหนดค่าอุณหภูมิที่ขอบ โดยแผ่นโลหะจัตุรัสมีขนาด  $1 \times 1$  หน่วย หนา 0.1 หน่วย และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  มีค่าเท่ากับ 1 และอุณหภูมิที่ขอบทั้งสี่มีค่าเท่ากับ  $T = 0$  ส่วนอุณหภูมิที่ และสามารถผลิตความร้อนได้เองภายในมีค่า

$$Q(x, y) = -14x(1-x)(1-2y) - 4y(1-y)(1-2x) + 2(1+2x+7y)[x(1-x) + y(1-y)] \quad (5.2)$$

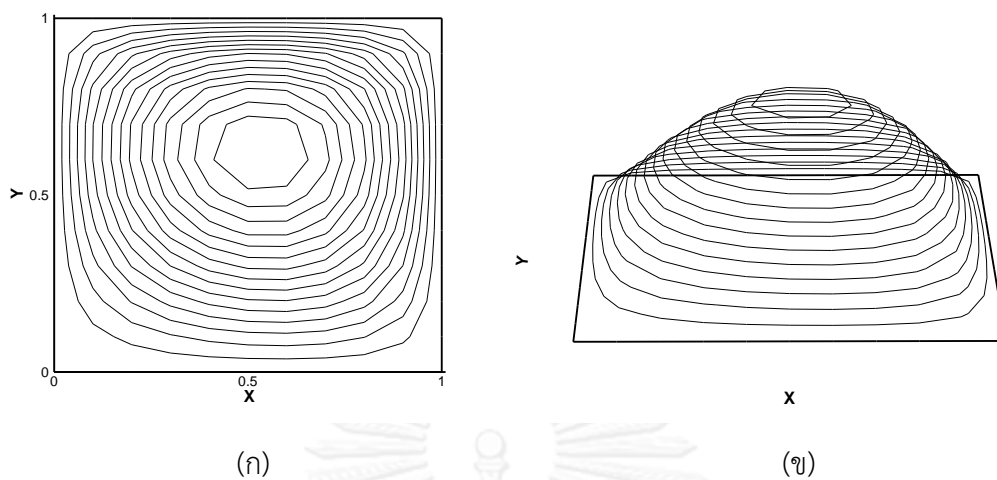
รายละเอียดของปัญหาแสดงดังรูปที่ 5.5 ซึ่งปัญหาดังกล่าวมีผลเฉลยแม่นยำตรงของการกระจายอุณหภูมิคือ

$$T(x, y) = x(1-x)y(1-y)(1+2x+7y) \quad (5.3)$$

ในปัญหานี้เริ่มต้นด้วยการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 121 จุดต่อ 100 เอลิเมนต์เหมือนตัวอย่างที่แล้วดังรูปที่ 5.5 ละสร้างไฟข้อมูลขาเข้าและนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นก็จะได้การกระจายของอุณหภูมิดังรูปที่ 5.6 แล้วจึงนำมาเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป กับผลเฉลยแม่นยำซึ่งผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำเท่ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปดังรูปที่ 5.7 ได้ดังรูป จากนั้นตรวจสอบอีกครั้งโดยเลือกค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นโลหะมาตรวจสอบได้ผลดังตารางที่ 5.2 ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนที่เท่ากัน

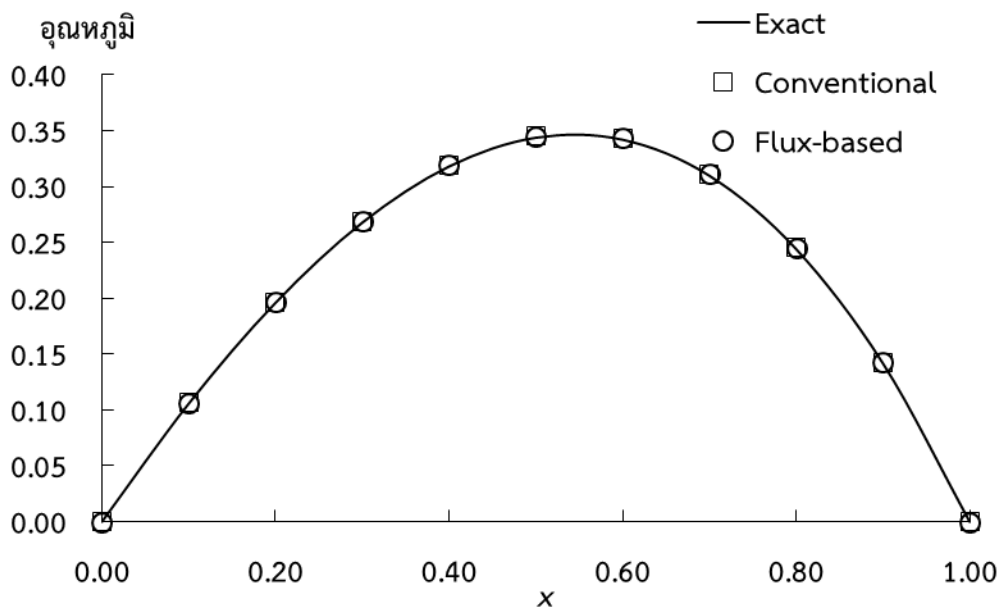


รูปที่ 5.5 แผ่นโลหะจัตุรัสที่มีการกำเนิดความร้อนได้เอง



รูปที่ 5.6 (ก) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ

(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อพล็อตสามมิติ

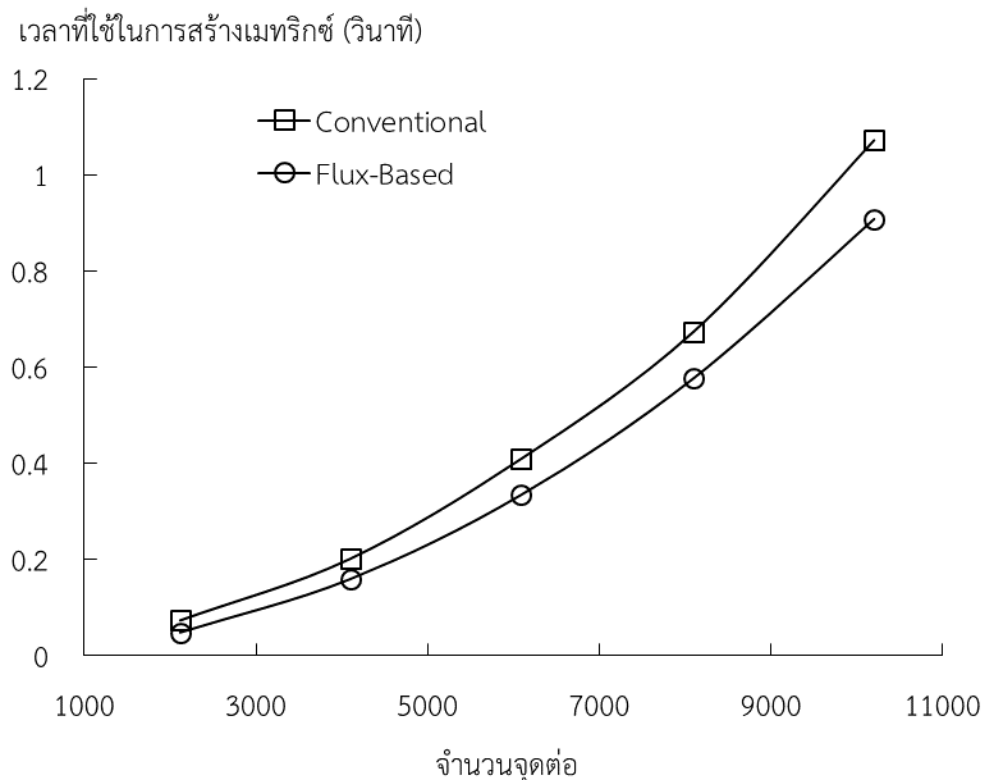


รูปที่ 5.7 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไป และแบบฟลักซ์กับผลเฉลยแม่นยำตรงในแนว  $y = 0.5$

ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบอนุหภูมิที่ตำแหน่ง  $x = y = 0.5$  ระหว่างการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปและแบบฟลักซ์เชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำตรง

	ค่าอนุหภูมิที่ตำแหน่ง $x = y = 0.5$	ค่าความคลาดเคลื่อน (%) $= \left  \frac{T_{(x,y)} - T_{exact}}{T_{exact}} \right  \%$
ผลเฉลยแม่นยำตรง	0.343750	-
แบบฟลักซ์เชิงเส้น	0.345111	0.39593
แบบทั่วไป	0.345111	0.39593

ในรูปที่ 5.8 นั้นทำการเพิ่มจำนวนจุดต่อให้มากขึ้นและทำการจับเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อน เมื่อเพื่อจำนวนจุดต่อไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปใช้เวลาในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนในมากกว่าไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์เชิงเส้น

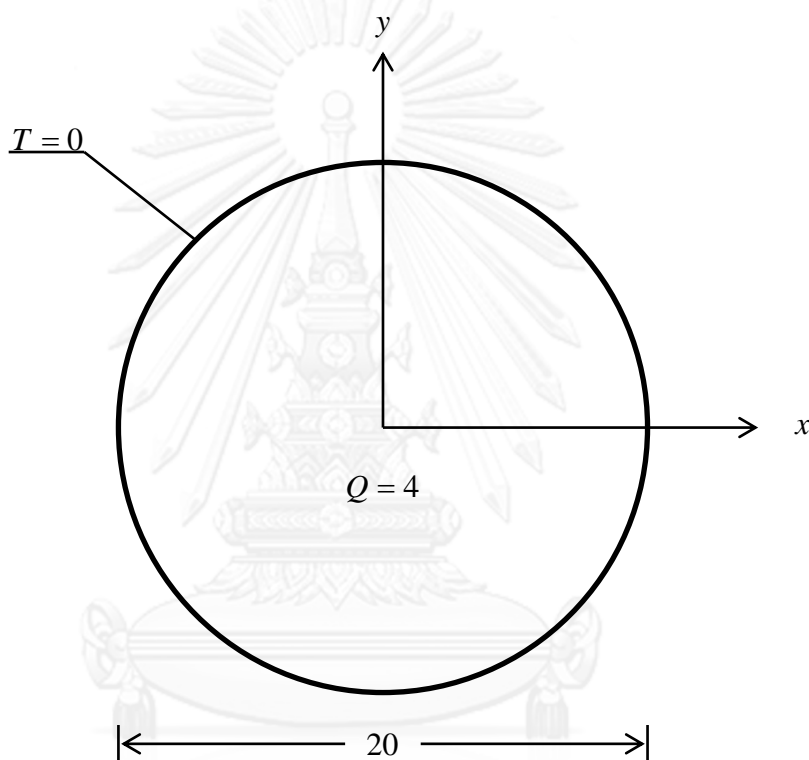


รูปที่ 5.8 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับแบบฟลักซ์เชิงเส้น

### 5.3 ปัญหาแผ่นโลหะกลมและสามารถผลิตความร้อนได้เอง

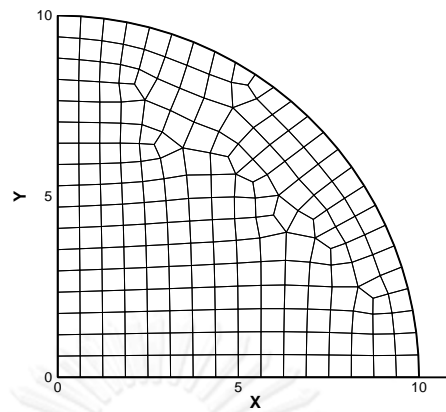
ปัญหาแผ่นโลหะกลม ซึ่งถูกกำหนดค่าอุณหภูมิที่ขอบ โดยแผ่นโลหะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 หน่วย หนา 0.1 หน่วย และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  มีค่าเท่ากับ 1 และอุณหภูมิที่ขอบเท่ากับศูนย์ และสามารถผลิตความร้อนได้เองภายใน  $Q$  และมีค่าเท่ากับ 4 หน่วย และมีผลเฉลยแม่นยำตรงของการกระจายอุณหภูมิดังสมการ (5.4)

$$T(x, y) = \frac{Q}{4k} \left( 100 - \sqrt{(x^2 + y^2)} \right) \quad (5.4)$$

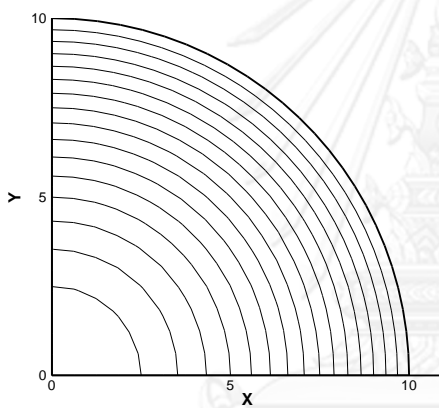


รูปที่ 5.9 แผ่นโลหะวงกลมที่กำเนิดความร้อนได้เอง

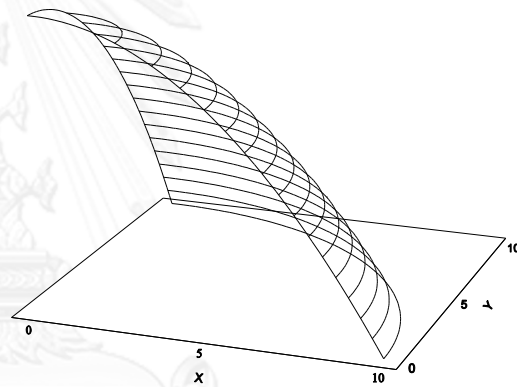
เนื่องจากปัญหามีความสมมาตรจึงสามารถลดใช้ขอบเขตในการคำนวณเพียงครึ่งขวาบน จากนั้นทำการแบ่งเอลิเมนต์ย่อย ๆ ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D เนื่องจากโดเมนของปัญหาเป็นรูปวงกลมจึงไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าลงไปได้ ดังรูปที่ 5.10(ก) และทำการสร้างไฟล์ข้อมูลขาเข้า และทำการวิเคราะห์ โดยได้ผลลัพธ์จากการคำนวณที่แสดงว่าอุณหภูมิจะสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของวงกลมหรือตำแหน่ง  $(0,0)$  ในพิกัดฉากซึ่งแสดงในรูปแบบสองมิติดังรูปที่ 5.10(ข) และในแบบสามมิติในรูปที่ 5.10(ค) จากนั้นทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไป และพล็อตเชิงเส้น กับผลเฉลยแม่นยำตรงในแนวรัศมี ซึ่งผลที่ได้ออกมาั้นไม่มีความแตกต่างกันระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบพล็อตเชิงเส้นกับแบบทั่วไป เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 5.11



รูปที่ 5.10(ก)



รูปที่ 5.10 (ข)

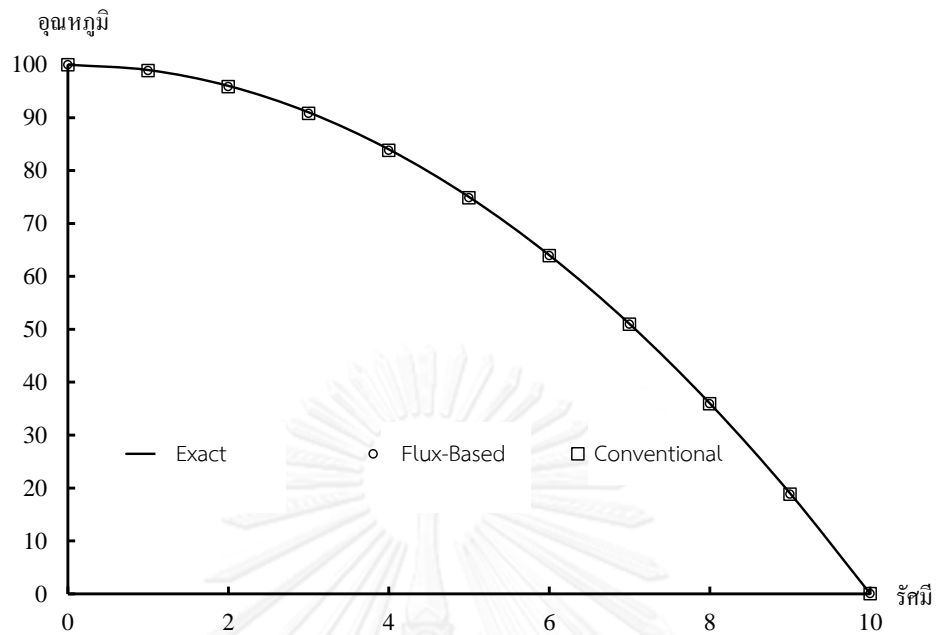


รูปที่ 5.10 (ค)

รูปที่ 5.10 (ก) รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ

(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อพล็อตสามมิติ



รูปที่ 5.11 การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไป และฟลักซ์เชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำตรงในแนวตามแนวรัศมี

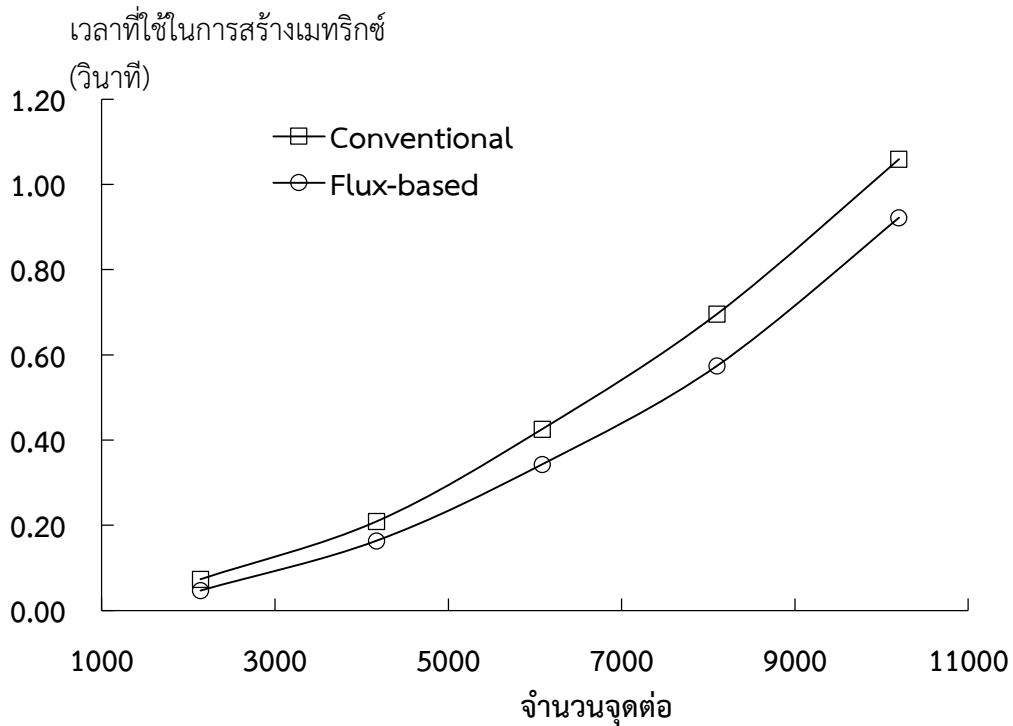
แต่เมื่อนำมาคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในแนวรัศมีพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากแบบฟลักซ์มีค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่าแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในตารางที่ 5.3

ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบอณุมมิตามระยะรัศมีจากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบทั่วไปและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบฟลักซ์เชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำตรง

r	ผลเฉลยแม่นยำตรง	Flux-based		Conventional	
		อณุมมิ	Error (%)	อณุมมิ	Error (%)
0	100.0000	99.9876	0.0124	99.9848	0.0152
2	96.0000	95.8273	0.1799	95.8245	0.1828
4	84.0000	83.8079	0.2287	83.8050	0.2321
6	64.0000	63.9070	0.1453	63.9039	0.1502
8	36.0000	35.8887	0.3092	35.8868	0.3144
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000



จากนั้นจึงทำการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เพื่อเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนอีกครั้งโดยเทียบกันระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์กับแบบทั่วไปซึ่งผลที่ได้ก็เหมือนสองปัญหาก่อนหน้านี้ ดังแสดงในรูปที่ 5.12

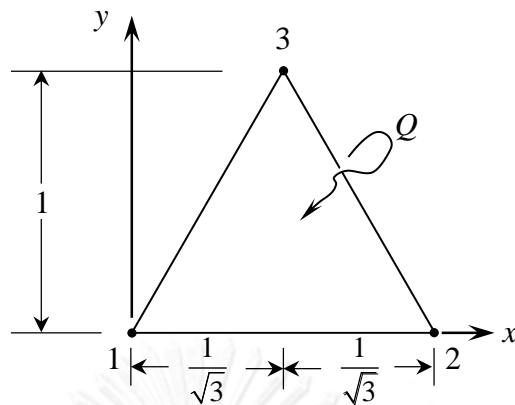


รูปที่ 5.12 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับแบบฟลักซ์เชิงเส้น

#### 5.4 ปัญหาแผ่นโลหะสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ผลิตความร้อนได้เอง

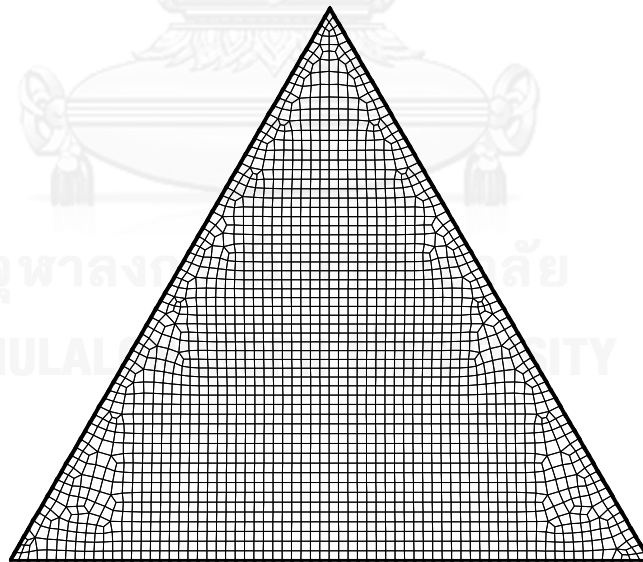
ปัญหาแผ่นโลหะสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีขนาดดังแสดงในรูปที่ 5.13 สามารถผลิตความร้อนได้เอง และมีอุณหภูมิตลอดขอบนอกเท่ากับศูนย์ ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรงของการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่นโลหะ [1] ดังสมการที่ (5.5)

$$T(x, y) = \frac{Q}{4k} (y - 2 + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)y \quad (5.5)$$

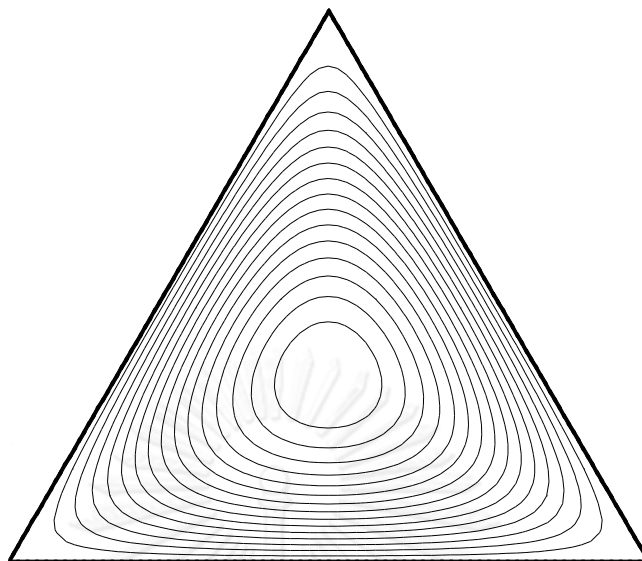


รูปที่ 5.13 แผ่นโลหะสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง

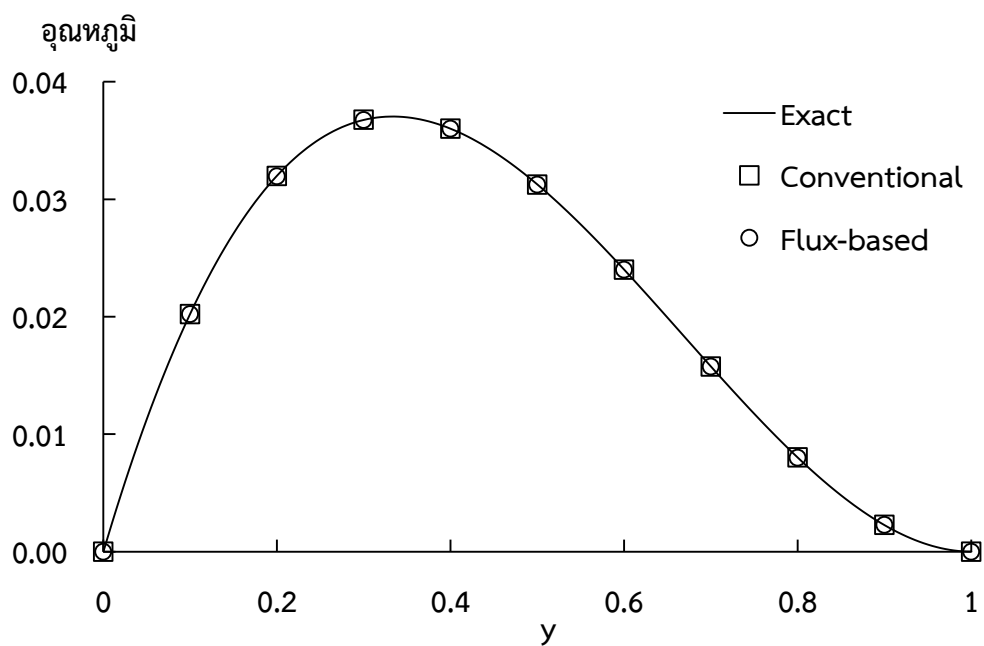
การวิเคราะห์เริ่มจากการแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ 2,012จุดต่อ และ 2,115เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D เนื่องจากโดเมนของปัญหาไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้ดังรูปที่ 5.14 และประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต จากนั้นทำการคำนวณออกมาได้ผลลัพธ์โดยแสดงเป็นเส้นชั้นอุณหภูมิดังรูปที่ 5.15 แล้วทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณแบบทั่วไปและแบบพลักซ์กับผลเฉลยแม่นยำตรงในแนว  $x=1/\sqrt{3}$  ซึ่งมีความแม่นยำของผลลัพธ์ใกล้เคียงกันดังรูปที่ 5.16 เมื่อทำการเพิ่มจำนวนจุดต่อโดยการแบ่งเอลิเมนต์ให้ละเอียดมากขึ้นและตรวจสอบการใช้เวลาในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนนั้นได้ผลลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 5.17



รูปที่ 5.14 การแบ่งเอลิเมนต์บนแผ่นโลหะสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง



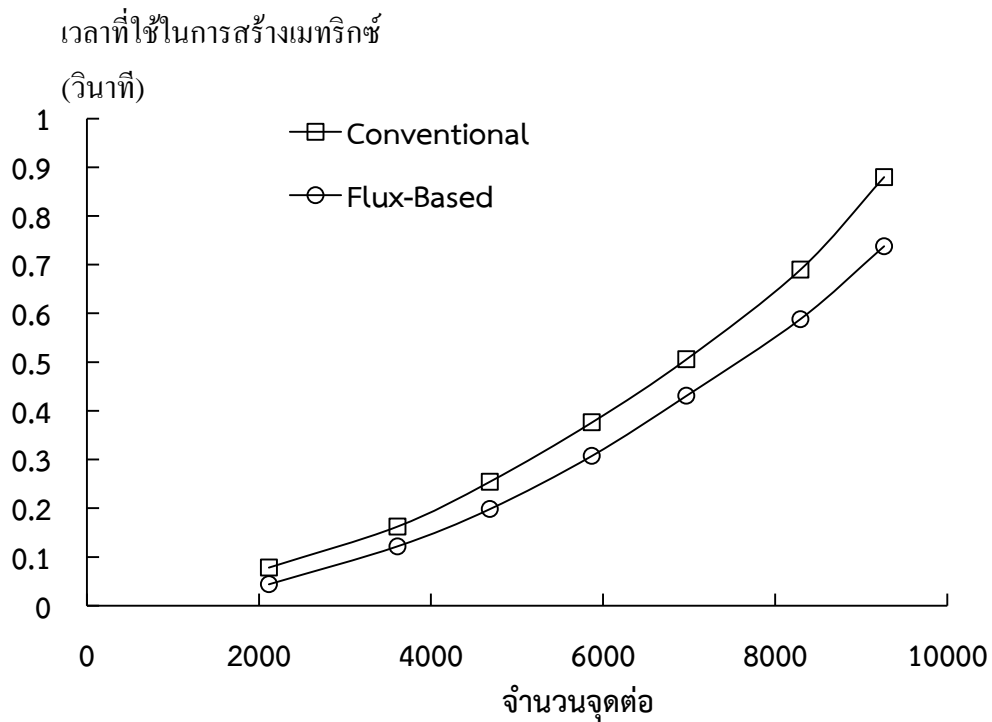
รูปที่ 5.15 เส้นชั้นอุณหภูมิบนแผ่นโลหะสามเหลี่ยมที่ผลิตความร้อนได้เอง



รูปที่ 5.16 เปรียบเทียบผลเฉลยแบบฟลักซ์เชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำตรงในแนวเส้นตรง  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์

	ค่าอนุกรมที่ตำแหน่ง $x = 1/\sqrt{3}$ และ $y = 0.35$	ค่าความคลาดเคลื่อน (%) $= \left  \frac{T_{(x,y)} - T_{exact}}{T_{exact}} \right  \%$
ผลเฉลยแม่นยำตรง	0.035175	-
แบบฟลักซ์เชิงเส้น	0.0367504	4.478%
แบบทั่วไป	0.0367538	4.488%



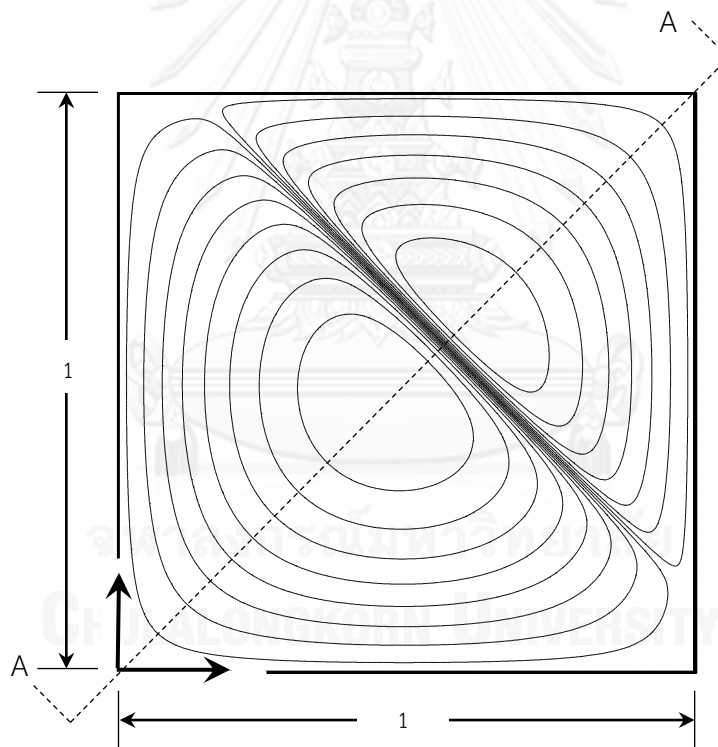
รูปที่ 5.17 เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปกับแบบฟลักซ์เชิงเส้น

### 5.5 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

ตัวอย่างนี้เป็นปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงของการผลิตความร้อนได้เองอย่างฉับพลันภายในพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 หน่วย ดังแสดงในรูป 5.18 โดยมีอุณหภูมิที่ขอบทั้งสี่ด้านเท่ากับศูนย์ และมีการผลิตความร้อนที่เป็นฟังก์ชันกับพิกัด  $x$  และ  $y$  ดังสมการ (5.6)

$$\frac{q(x, y)}{kt} = 2y(1-y) \left[ \tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2x)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2 \beta x(1-x)}{2(1+\beta^2)^2} \right] + 2x(1-x) \left[ \tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2y)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2 \beta x(1-y)}{2(1+\beta^2)^2} \right] \quad (5.6)$$

โดยที่  $\alpha = 100$ ,  $\beta = \sqrt{2}(x+y) - 0.8$

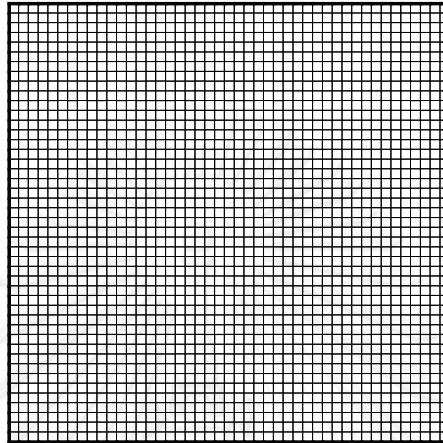


รูปที่ 5.18 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

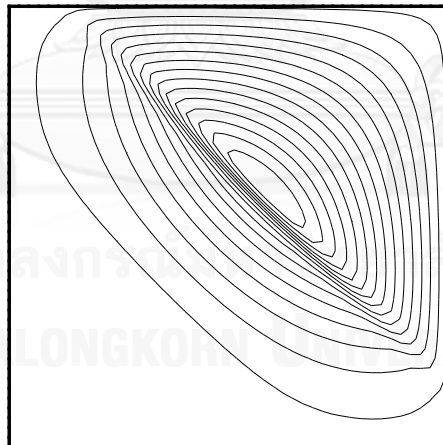
ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรงโดยแสดงออกมาเป็นเส้นชั้นของอุณหภูมิในสองมิติดังในรูป 5.18 ซึ่งมีสมการของอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ [6] ดังสมการ (5.7)

$$T(x, y)_{Exact} = x(1-x)y(1-y)\tan^{-1}\beta \quad (5.7)$$

การวิเคราะห์ปัญหานี้เริ่มด้วยการแบ่งพื้นที่สี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่ 2,116 จุดต่อและ 2,025 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 5.19(ก) หลักจากการวิเคราะห์ ได้ผลลัพธ์ที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่มากโดยไม่ปรากฏส่วนของเส้นชั้นอนุภูมิที่เป็นรูปแบบเวทที่ด้านซ้ายล่างของโดเมน ดังรูปที่ 5.19(ข)



รูปที่ 5.19 (ก)

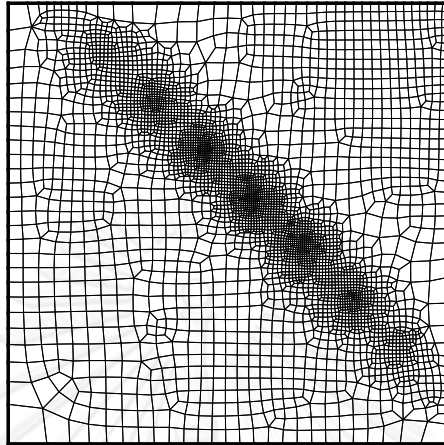


รูปที่ 5.19 (ข)

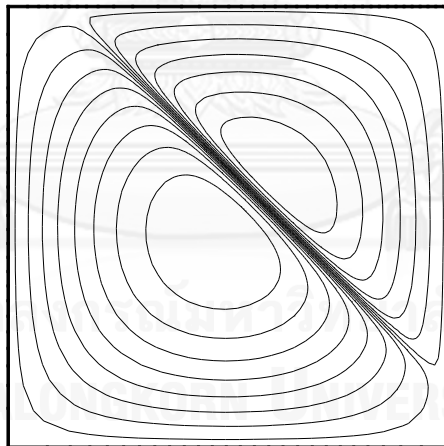
รูปที่ 5.19 (ก) เอลิเมนต์เริ่มต้นของจตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

(ข) การกระจายตัวของอนุภูมิในเอลิเมนต์เริ่มต้น

จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่งโดยมี 4,261 จุดต่อ และ 4,194 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 5.20(ก) และทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตได้ผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 5.20(ข)



รูปที่ 5.20 (ก)

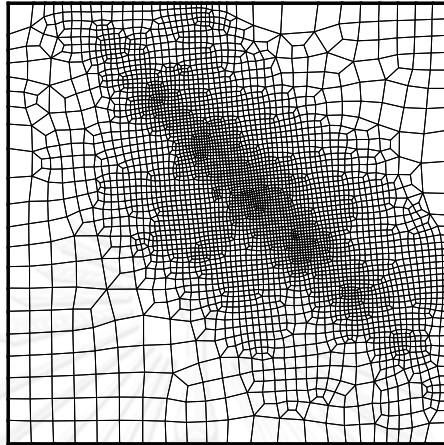


รูปที่ 5.20 (ข)

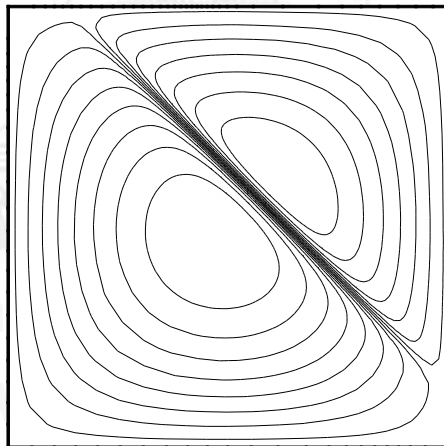
รูปที่ 5.20 (ก) การปรับขนาดครั้งที่หนึ่งเอลิเมนต์ของจตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง

จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองโดยมี 4,227 จุดต่อ และ 4,168 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 5.21(ก) และทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตได้ผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 5.21(ข)



รูปที่ 5.21 (ก)



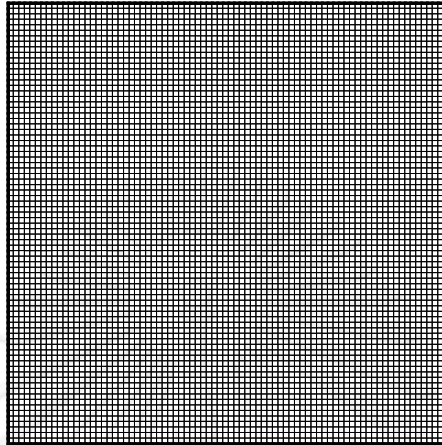
รูปที่ 5.21 (ข)

รูปที่ 5.21 (ก) การปรับขนาดครั้งที่สองเอลิเมนต์ของจตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

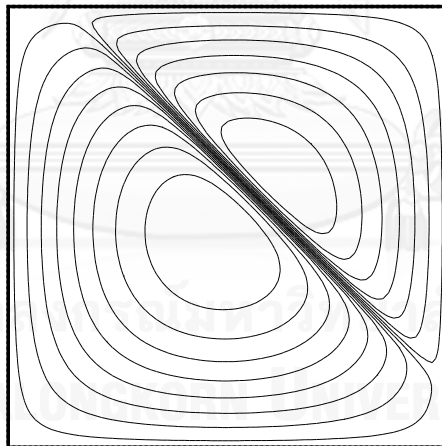
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง



จากนั้นเริ่มทำการแบ่งเอลิเมนต์อีกครั้งโดยมี 6,561 จุดต่อ และ 6,400 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 5.22(ก) และทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตได้ผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 5.22(ข)



รูปที่ 5.22 (ก)

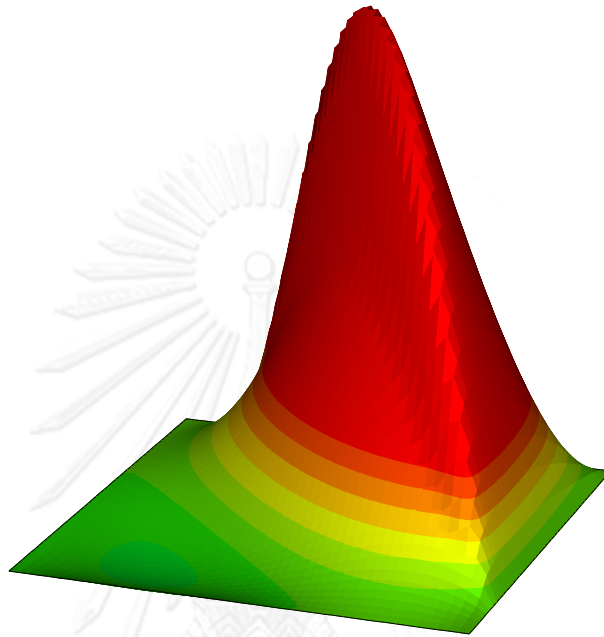


รูปที่ 5.22 (ข)

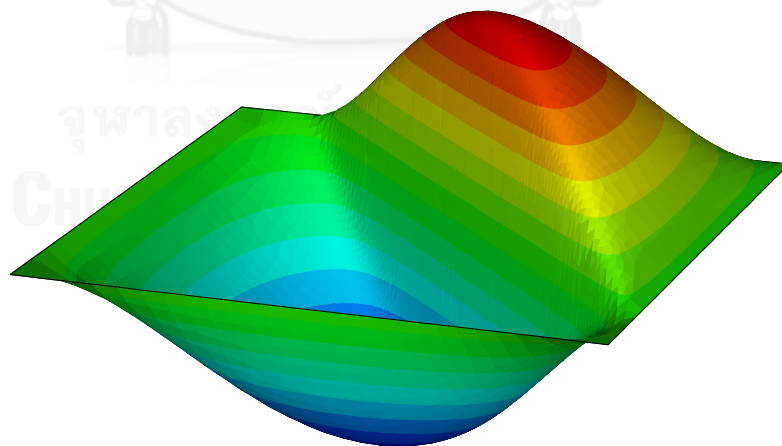
รูปที่ 5.22 (ก) เอลิเมนต์แบบละเอียดของจตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในเอลิเมนต์แบบละเอียด

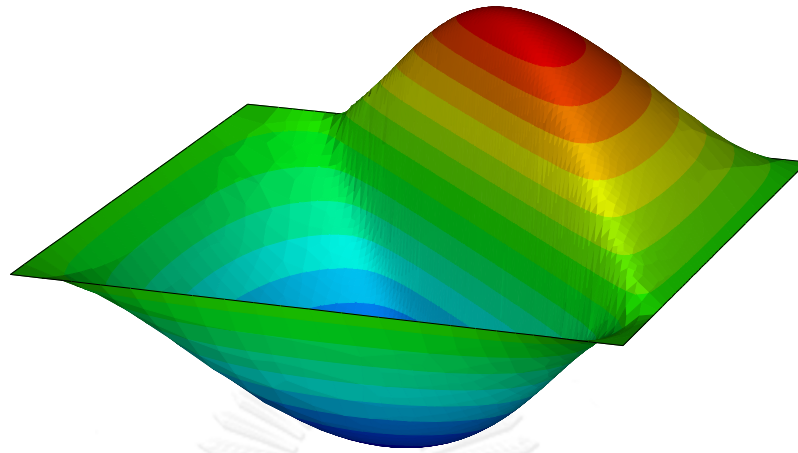
นำผลเฉลยทั้งสี่แบบมาพล็อตอีกครั้งในรูปแบบของสามมิติ โดยเรียงลำดับจากรูปแบบเอลิเมนต์เริ่มต้น รูปที่ 5.23(ก) รูปแบบการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่งรูปที่ 5.23(ข) รูปแบบการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองรูปที่ 5.23(ค) และ รูปแบบเอลิเมนต์แบบละเอียด รูปที่ 5.23(ง)



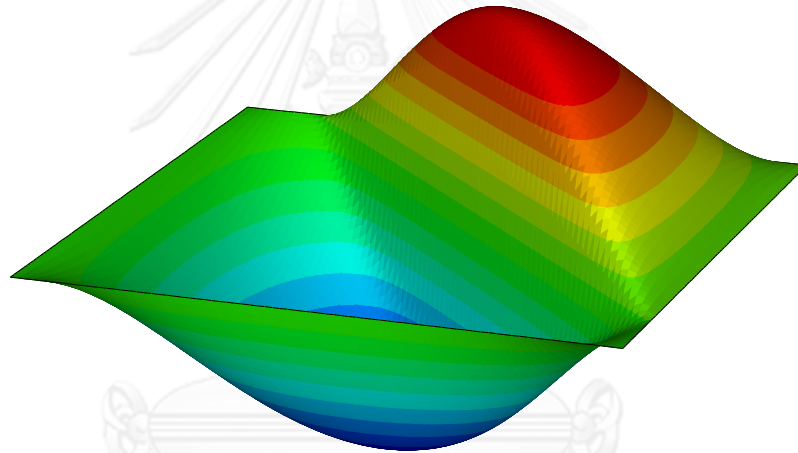
รูปที่ 5.23 (ก)



รูปที่ 5.23 (ข)



รูปที่ 5.23 (ค)



รูปที่ 5.23 (ง)

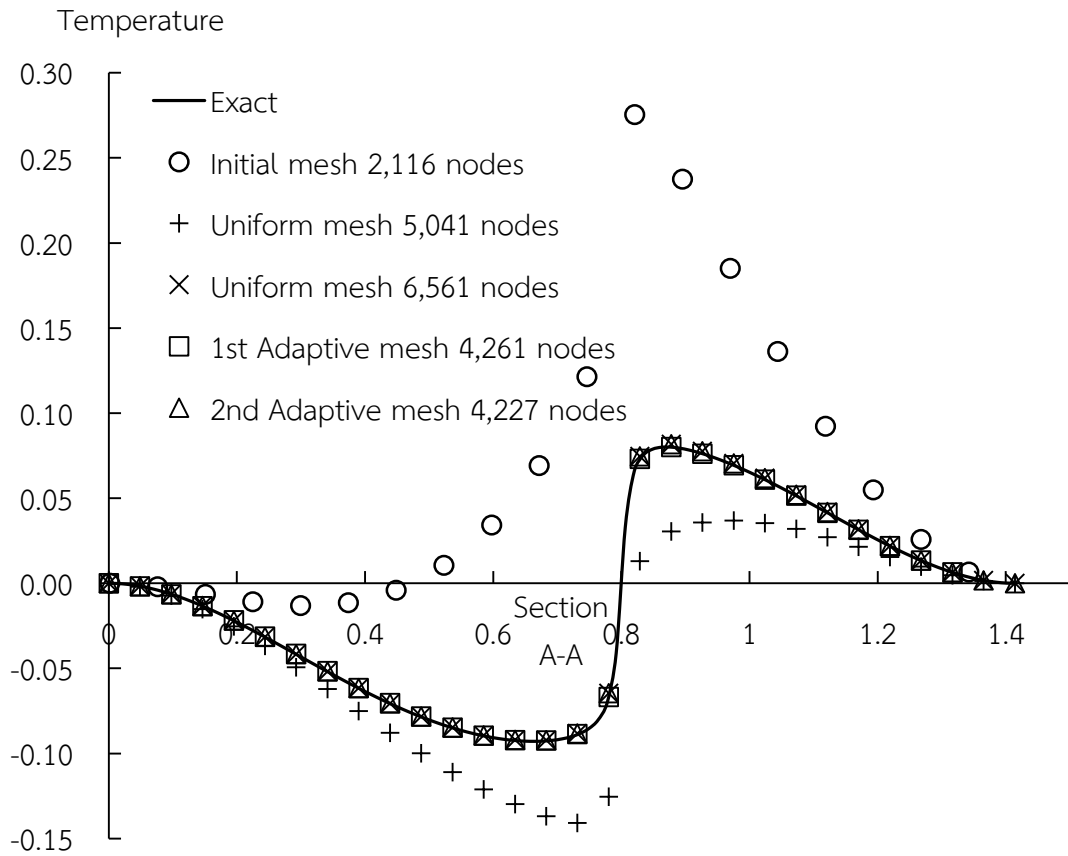
รูปที่ 5.23 (ก) การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของเอลิเมนต์เริ่มต้น 2,116 จุดต่อ

(ข) การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของการปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง 4,261 จุดต่อ

(ค) การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของการปรับขนาดครั้งที่สอง 4,227 จุดต่อ

(ง) การกระจายตัวในรูปแบบสามมิติของเอลิเมนต์แบบละเอียด 6,561จุดต่อ

เพื่อแสดงถึงความแตกต่างจึงทำการพล็อตค่าบนเส้นทแยงมุมตามสมการ  $x = y$  ดังรูปที่ 5.24 โดยที่เพิ่มเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยม ขนาด 5,041จุดต่อ 4,900 เอลิเมนต์ ลงไปด้วย ซึ่งจากกราฟแสดงให้เห็นว่าการใช้เทคนิคการปรับขนาดช่วยเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ตั้งแต่การปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง



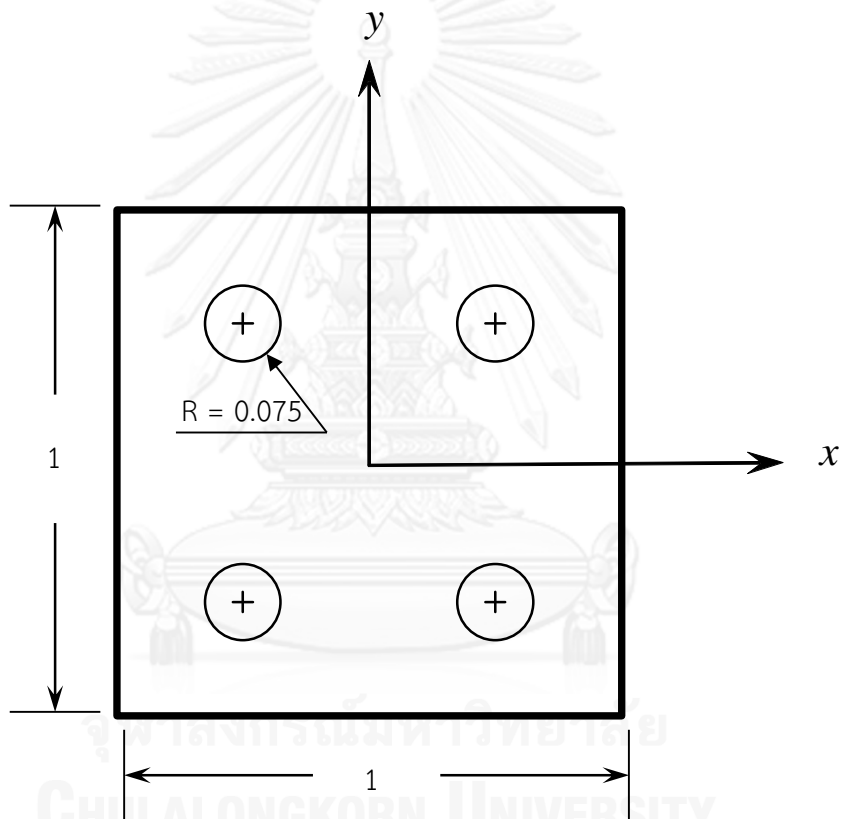
รูปที่ 5.24 การเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันด้วยรูปแบบต่าง ๆ

### 5.6 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนในรูปแบบกรวย

ปัญหาที่มีการผลิตความร้อนในรูปแบบกรวยสี่กรวยอยู่ภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $1 \times 1$  ดังรูปที่ 5.25 โดยมีอุณหภูมิที่ขอบทั้งสี่ด้านมีค่าเท่ากับศูนย์ และการผลิตความร้อนภายในเป็นฟังก์ชันของพิกัด  $x$  และ  $y$  ดังสมการ (5.8)

$$Q(x, y) = \begin{cases} 0 & B > 0.075 \\ 10A^2 \cos(AB) + 10AB^{-1} \sin(AB) & B \leq 0.075 \end{cases} ; \quad (5.8)$$

โดยที่  $A = \pi/0.075$  และ  $B = \sqrt{(x-0.25)^2 + (y-0.25)^2}$

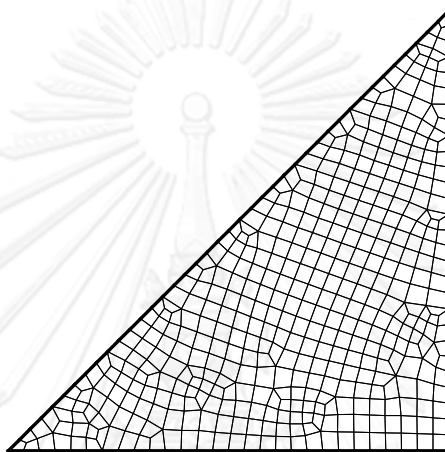


รูปที่ 5.25 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนในรูปแบบกรวย

และผลเฉลยแม่นยำตรงมีการกระจายของอุณหภูมิ [8] ตามสมการ (5.9)

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & B > 0.075 \\ 10[1 + \cos(\pi B/0.075)] & B \leq 0.075 \end{cases} \quad (5.9)$$

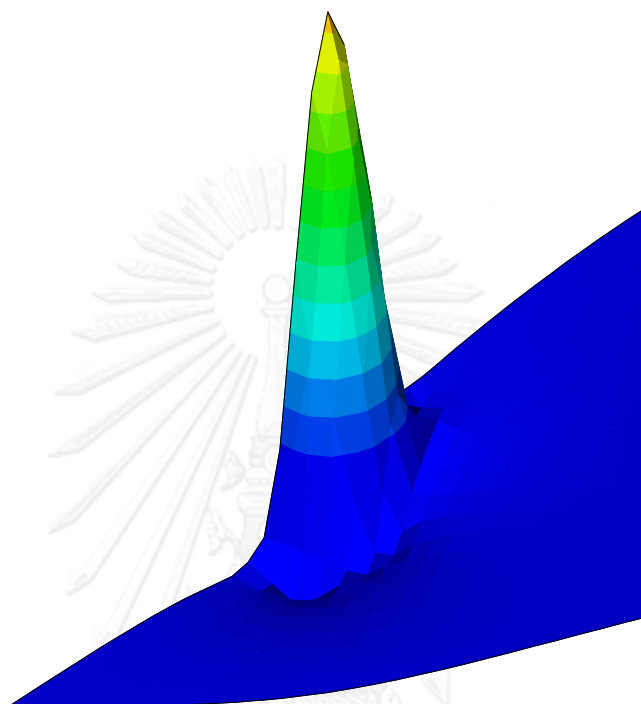
เนื่องจากปัญหาที่มีความสมมาตรนั้นจึงสามารถลดขอบเขตการคำนวณเหลือเพียง 1 ใน 8 ของพื้นที่ทั้งหมดและทำการแบ่งเอลิเมนต์จำนวน 479 จุดต่อ ดังรูป 5.26(ก) ได้ผลของการกระจายตัวของอุณหภูมิในสองดังรูปที่ 5.26(ข) ที่มีเส้นชั้นอุณหภูมิที่ไม่เรียบในบริเวณของกรวยและมีความไม่เรียบที่ของบริเวณที่ห่างจากฐานกรวยออกมา และในรูปที่ 5.26(ค) คือการกระจายตัวในสามมิติ ที่ได้แสดงให้เห็นถึงอุณหภูมิที่ปลายยอดกรวยที่ไม่สมบูรณ์และฐานกรวยที่ไม่เรียบและมีการบิดเบี้ยวอย่างเห็นได้ชัด



รูปที่ 5.26 (ก)



รูปที่ 5.26 (ข)



รูปที่ 5.26 (ค)

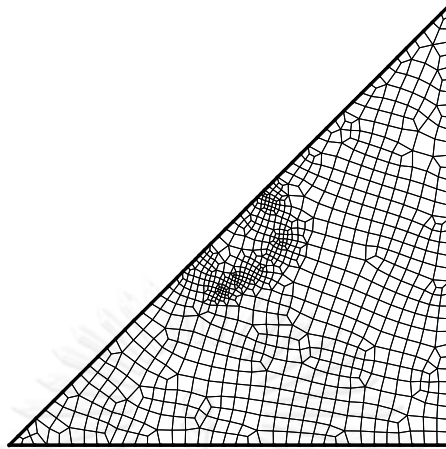
รูปที่ 5.26 (ก) เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนในรูปแบบกรวย

(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ

(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ

CHULALONGKORN UNIVERSITY

จากนั้นทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่งด้วยการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มขึ้นเป็น 921 จุดต่อ 856 เอลิเมนต์ ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 5.27(ก) ได้ผลของการกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติดังรูปที่ 5.27(ข) เส้นชั้นของอุณหภูมิในบริเวณโคนกรวยที่เป็นเหลี่ยมมุมและบริเวณที่ห่างจากฐานกรวยยังมีเส้นชั้นที่แสดงถึงความโค้ง และรูปที่ 5.27(ค) แสดงการกระจายตัวในสามมิติ โดยผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากขึ้นเมื่อเทียบกับเอลิเมนต์เริ่มต้น แต่ก็ยังไม่เห็นถึงอุณหภูมิที่ปลายยอดกรวยที่ยังไม่สมบูรณ์และบริเวณฐานก็ยังคงมีการบิดโค้งและไม่เรียบในบริเวณโคนกรวยอยู่

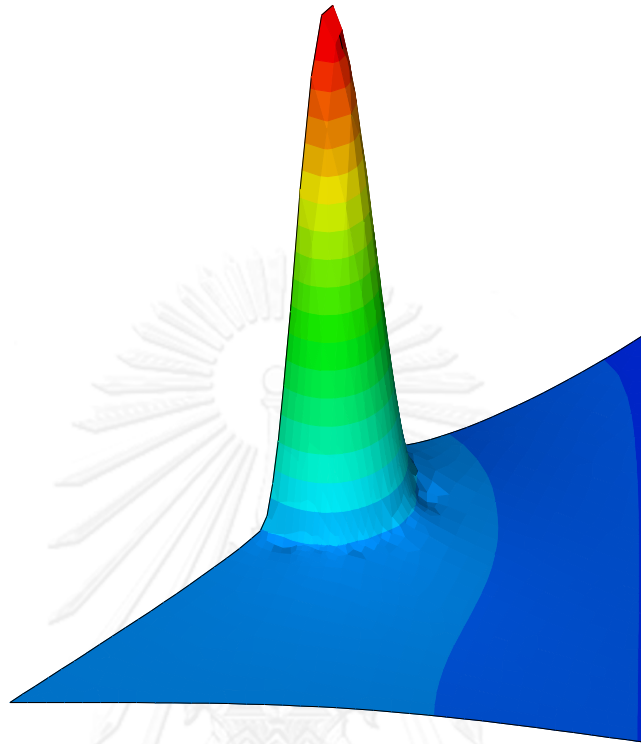


รูปที่ 5.27 (ก)



รูปที่ 5.27 (ข)





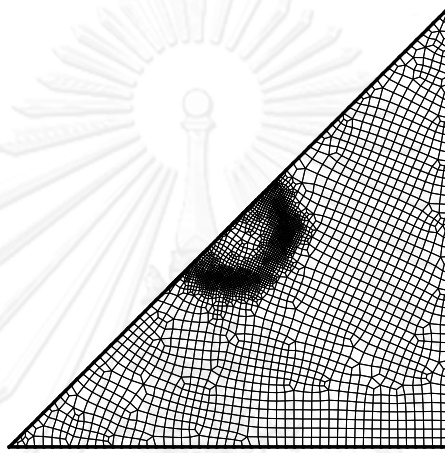
รูปที่ 5.27 (ค)

รูปที่ 5.27 (ก) เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งหนึ่ง

(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ

(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ

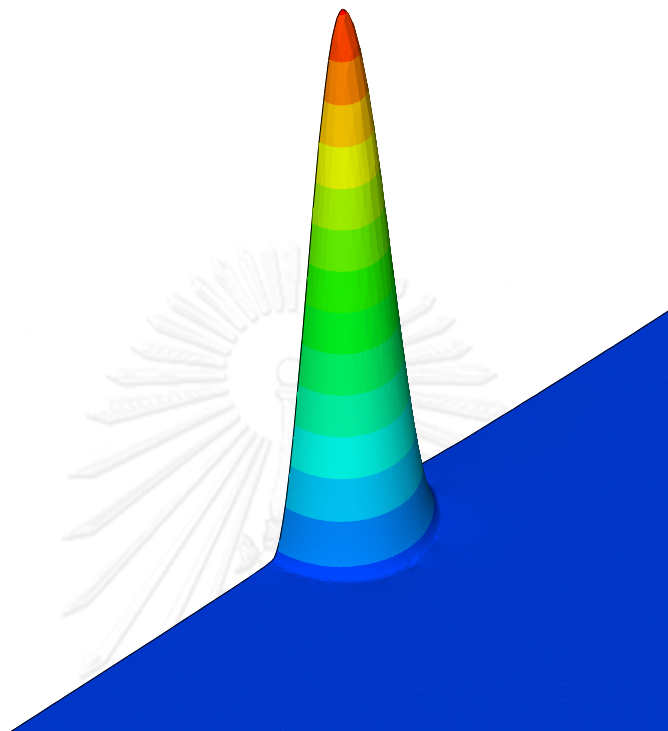
จากนั้นจึงทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองด้วยการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มขึ้นเป็น 3,372 จุดต่อ 3,263 เอลิเมนต์ ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 5.28(ก) ได้ผลของการกระจายตัวของอนุหภูมิในสองมิติ ดังรูปที่ 5.28(ข) ที่เส้นชั้นบริเวณกรวยที่มีความเป็นวงกลมอย่างสมบูรณ์ และไม่มีเส้นชั้นในบริเวณที่ห่างจากฐานกรวยออกมาเหลืออยู่อีกต่อไป และในแบบสามมิติดังรูปที่ 5.28(ค) ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากขึ้น โดยอนุหภูมิที่ฐานกรวยนั้นเรียบเสมอกัน แต่ยังมีสิ่งของยอดกรวยที่สมบูรณ์มากขึ้น แต่ยังคงมีเหลี่ยมอยู่เล็กน้อย



รูปที่ 5.28 (ก)



รูปที่ 5.28 (ข)



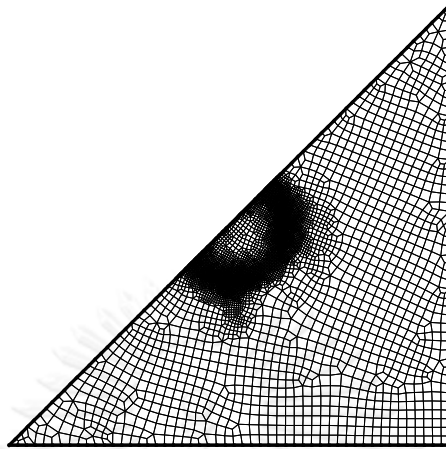
รูปที่ 5.28 (ค)

รูปที่ 5.28 (ก) เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง

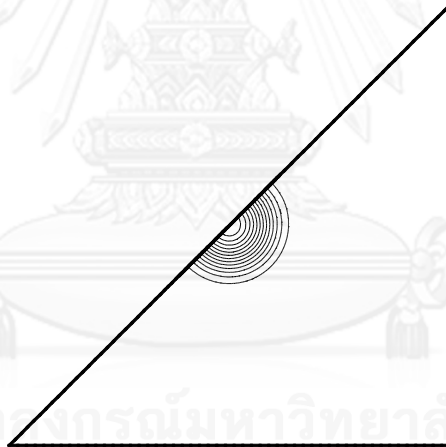
(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ

(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ

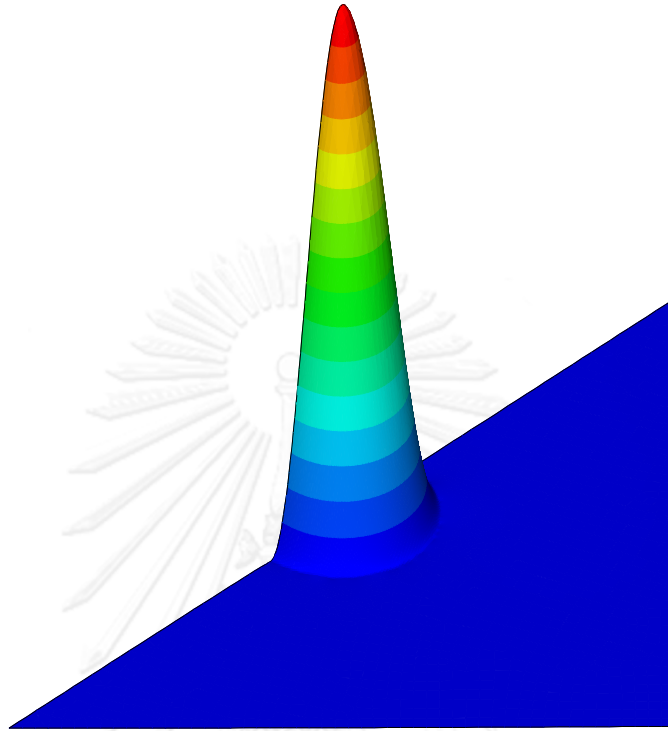
และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สามด้วยการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 6,374 จุดต่อ 6,224 เอลิเมนต์ ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 5.29(ก) ได้ผลของการกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ ดังรูปที่ 5.29(ข) ที่ได้ผลลัพธ์ที่ไม่แตกต่างกับการปรับขนาดเอลิเมนต์ในครั้งที่สอง และการกระจายตัวในสามมิติดังรูปที่ 5.29(ค) ที่มีความสมบูรณ์ของบริเวณยอดกรวยมากขึ้นเมื่อเทียบกับครั้งก่อนหน้า



รูปที่ 5.29 (ก)



รูปที่ 5.29 (ข)



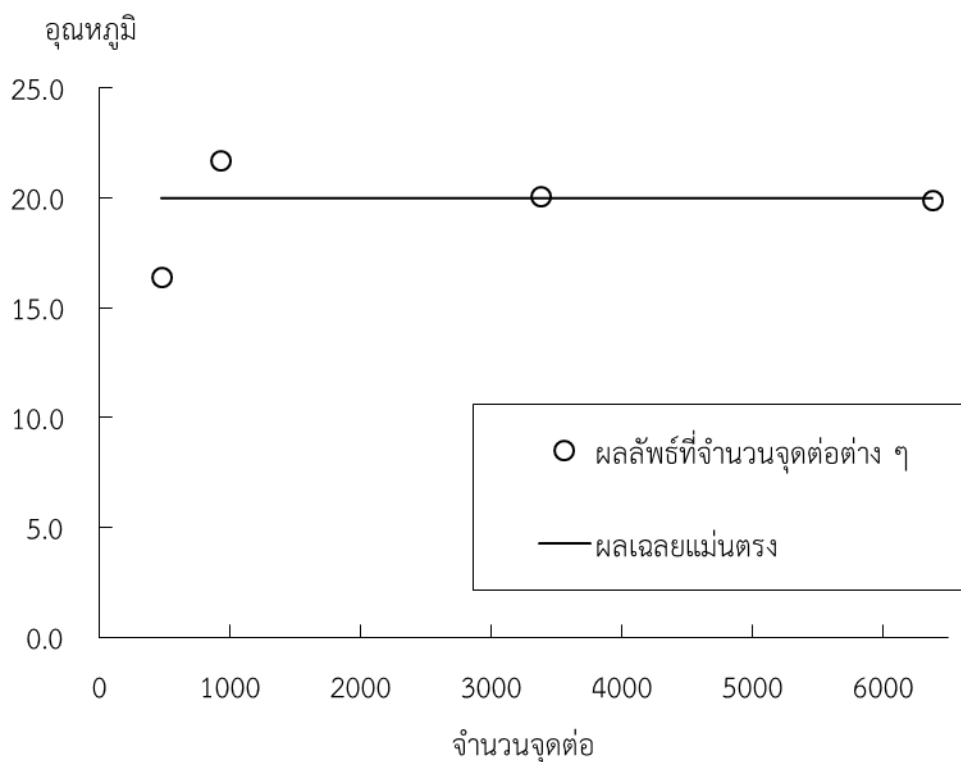
รูปที่ 5.29 (ค)

รูปที่ 5.29 (ก) เอลิเมนต์จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สาม

(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสองมิติ

(ค) การกระจายตัวของอุณหภูมิในสามมิติ

เมื่อนำค่าที่จุดที่  $x = y = 0.25$  ซึ่งเป็นจุดที่อุณหภูมิสูงสุดซึ่งเป็นยอดแหลมของกรวยมาพล็อตเปรียบเทียบกับกันจะได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 5.30 ที่แสดงให้เห็นถึงการลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำตรงเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยตั้งแต่การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองที่ได้ผลลัพธ์อยู่บนผลเฉลยแม่นยำตรงแล้ว



รูปที่ 5.30 การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงกับการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ตำแหน่ง  $x = y = 0.25$

ตารางที่ 5.5 การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์

ขนาดเอลิเมนต์	อุณหภูมิ	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
เอลิเมนต์เริ่มต้น ( 473 จุดต่อ)	16.4359	-17.82%
การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง ( 921 จุดต่อ)	21.7023	8.51%
การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง ( 3,372 จุดต่อ)	20.0919	0.46%
การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สาม ( 6,374 จุดต่อ)	19.9341	-0.33%

## บทที่ 6

### บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

#### 6.1 บทสรุป

งานวิจัยนี้เน้นการประดิษฐ์โปรแกรมจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ด้านไม่เท่า โดยใช้หลักการของฟลักซ์แบบเชิงเส้น โดยเจาะจงไปที่สมการที่อยู่ในรูปแบบสมการ ปัวส์ซงซึ่งนำไปวิเคราะห์การนำความร้อนในสองมิติในสภาวะอยู่ตัว และเสริมด้วยเทคนิคการปรับ ขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์ และลดจำนวนจุดต่อที่จะต้องใช้ในการ วิเคราะห์ในปัญหาการนำความร้อนในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน

ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นจะต้องมี ความรู้พื้นฐานทฤษฎีการถ่ายเทความร้อนทั้งสมการเชิงอนุพันธ์ของการถ่ายเทความร้อน พื้นฐานการ สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกราคัง ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอ ลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ และการประยุกต์หลักการแบบฟลักซ์ที่ใช้ เพื่อหลีกเลี่ยงการทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลข ซึ่งได้ศึกษาจากเอกสารต่าง ๆ ที่ระบุอยู่ในบทที่ 2 และ รายละเอียดของทฤษฎีต่าง ๆ ที่กล่าวมานั้น ถูกเขียนไว้ในบทที่ 3

สำหรับบทที่ 4 แสดงถึงรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาจากสมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์ที่ได้นำเสนอมาในบทที่ 3 รวมถึงอธิบายรูปแบบไฟล์ข้อมูลขาเข้าที่ โปรแกรมต้องการ และไฟล์ข้อมูลขาออกที่ได้จากโปรแกรม

ในบทที่ 5 จะเป็นการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์โดย นำไปวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนแบบต่าง ๆ ที่มีผลเฉลยแม่นยำ และเปรียบเทียบกับระเบียบ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปโดยมีการใช้การอินทิเกรตด้วยวิธีเกาส์-เลอร์จอนด์ ที่ใช้ 2 จุดเกาส์ในแต่ ละแนวแกน ทั้งด้านความแม่นยำของผลลัพธ์ซึ่งในปัญหาที่ 1-2 ก็ยืนยันได้ว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิ เมนต์แบบฟลักซ์นั้นมีความแม่นยำเท่ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไปในเอลิเมนต์ที่เป็น สี่เหลี่ยมผืนผ้า และยังมีความแม่นยำมากกว่าอีกเล็กน้อยในเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าใน ปัญหาที่ไม่สามารถใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้ในปัญหาที่ 3-4 และทั้งสี่ปัญหาที่กล่าวมาได้มีการจับเวลาในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนจากแบบฟลักซ์เชิงเส้นและแบบทั่วไป โดยเวลาที่ใช้ จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์นั้นใช้เวลาในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนน้อยกว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป และในปัญหาที่ 5 และ 6 นั้นเป็นปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลง ของอุณหภูมิอย่างฉับพลันซึ่งต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กกว่าเพื่อที่จะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำ จึง ได้เพิ่มเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อช่วยเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ในขณะเดียวกันก็ช่วยลด จำนวนจุดต่อที่ต้องใช้เพื่อให้ได้ความแม่นยำของผลลัพธ์ในระดับเดียวกันโดยที่มีจำนวนจุดต่อน้อยกว่า

โดยสรุปกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นและเทคนิคการปรับขนาดช่วยลดเวลาในการคำนวณและลดจำนวนหน่วยความจำที่จะต้องใช้ในการคำนวณได้เป็นอย่างดีเมื่อเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป

## 6.2 ปัญหาที่พบขณะทำวิทยานิพนธ์

มีสองข้อที่เป็นปัญหาหลักในการทำงานวิจัยนี้ เรื่องแรกคือในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบฟลักซ์เชิงเส้นนั้นเมื่อเมทริกซ์เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่มีรูปร่างบิดเบี้ยวมากเกินไปจะทำให้เมทริกซ์การนำความร้อนที่ประติษฐ์ขึ้นมาแบบฟลักซ์เชิงเส้นนั้นจะเกิดความไม่สมมาตรขึ้นซึ่งต้องใช้วิธีในการแก้ระบบสมการที่เป็นต้องรองรับในส่วนนี้ คือ คอนจูเกตเกรเดียนท์ที่ปรับปรุงให้ใช้กับเมทริกซ์ที่ไม่สมมาตร และอีกปัญหาหนึ่งก็คือ การใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D เพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ซึ่งในหลาย ๆ ครั้งเมื่อกำหนดค่าที่ต้องการในการปรับขนาดแล้ว AUTOMESH-2D ไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์ในแบบที่ต้องการขึ้นมาได้ ทำให้ต้องใช้เวลามากขึ้นในการพิจารณาการปรับขนาดที่เหมาะสมกับ AUTOMESH-2D

## 6.3 ข้อเสนอแนะ

ผู้วิจัยมีในใช้เทคนิคการปรับขนาดโดยผ่านโปรแกรม AUTOMESH-2D นั้นมีความสะดวกรวดเร็วแต่ก็ยังไม่สามารถตอบสนองความคาดหวังของผู้วิจัยได้มากนัก ดังนั้นจึงให้ข้อเสนอแนะว่าควรจะมีการประดิษฐ์โปรแกรมที่สามารถแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพร้อมกับการใช้เทคนิคการปรับขนาดขึ้นมาใหม่ แต่ก็ต้องลงทุนเวลาในการศึกษาและทดลองในการประดิษฐ์โปรแกรมแบ่งเอลิเมนต์ ถ้าทำสำเร็จก็สามารถเพิ่มประสิทธิภาพของเทคนิคการปรับขนาดได้มากขึ้นไปอีกระดับ



## รายการอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 4. 2550, กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
2. Pandey, A.K., P. Dechaumphai, and A. Wieting. *Thermal-structural finite element analysis using linear flux formulation*. in *AIAA 30th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. 1989. AIAA.
3. Polesky, S.P., *Hierarchical Flux-Based Thermal-Structural Finite Element Analysis Method*, in *Mechanical Engineering*. 1992, Old Dominion University.
4. Dechaumphai, P., *Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems*. *Journal of Energy, Heat and Mass Transfer*, 1995. 17: p. 87-94.
5. Dechaumphai, P., *Transient Finite Element Thermal Analysis Using Adaptive Mesh Movement*. *Journal of Energy, Heat and Mass Transfer*, 1997. 19: p. 153-158.
6. Phongthanapanich, S., et al., *Nodeless variable finite element method for heat transfer analysis by means of flux-based formulation and mesh adaptation*. *Acta Mechanica Sinica*, 2006. 22(2): p. 138-147.
7. Phongthanapanich, S. and P. Dechaumphai, *Adaptive nodeless variable finite elements with flux-based formulation for thermal-structural analysis*. *Acta Mechanica Sinica*, 2008. 24(2): p. 181-188.
8. Traivivatana, S., S. Phongthanapanich, and P. Dechaumphai, *Improved Numerical Solution Accuracy of Poisson's Equation by Adaptive Nodeless Variable Finite Elements with Flux-Based Formulation*. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 2008. 32(1): p. 23-42.
9. Trivivatana, S., S. Phongthanapanich, and P. Dechaumphai, *A Posteriori Error Estimation for Combined Adaptive Nodeless Variable Finite Element Method with Flux-Based Formulation*. *AIJSTPME*, 2009. 2(4): p. 21-31.
10. Ma, XW., Zhao, GQ., and Sun, L. *AUTOMESH-2D/3D: robust automatic mesh generator for metal forming simulation*. *Materials Research Innovations*, 2011. 15(s1): p. s482-s486.
11. Ma, XW. and Zhao, GQ *An automated approach to quadrilateral mesh generation with complex geometric feature constraints*. *Engineering with Computers*: p. 1-21.
12. Dechaumphai, P. and S. Phongthanapanich, *Easy Finite Element Method with Software*. 2009: Oxford. Alpha Science.

## ภาคผนวก

### ภาคผนวก ก

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า

$$N_i = [N(\xi, \eta)] = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad ; \quad i=1,2,3,4$$

และเรามีความสัมพันธ์ของระหว่างพิกัด  $x - y$  กับ  $\xi - \eta$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$J_{11} = -\frac{1}{4}(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)x_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_4$$

$$J_{12} = -\frac{1}{4}(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)y_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)y_4$$

$$J_{21} = -\frac{1}{4}(1-\xi)x_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_4$$

$$J_{22} = -\frac{1}{4}(1-\xi)y_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_4$$

$$|J| = N_1V_1 + N_2V_2 + N_3V_3 + N_4V_4$$

โดยที่  $V_i, i=1,2,3,4$  เป็นค่าที่คำนวณได้จาก

$$V_1 = [(x_2 - x_1)y_4 + (x_1 - x_4)y_2 + (x_4 - x_2)y_1] / 4$$

$$V_2 = [(x_2 - x_1)y_3 + (x_1 - x_3)y_2 + (x_3 - x_2)y_1] / 4$$

$$V_3 = [(x_3 - x_2)y_4 + (x_2 - x_4)y_3 + (x_4 - x_3)y_2] / 4$$

$$V_4 = [(x_3 - x_1)y_4 + (x_1 - x_4)y_3 + (x_4 - x_3)y_1] / 4$$

ค่าเอลิเมนต์เมทริกซ์แมนตรงของสี่เหลี่ยมใดๆ แบบพลักซ์เชิงเส้น

$$[D_x] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [N] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|J|} \left( J_{22} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\} - J_{12} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right\} \right) [N_i] |J| d\xi d\eta$$

$$D_x(1,1) = (y_2 - y_4) / 6$$

$$D_x(1,2) = (2y_2 - y_3 - y_4)/12$$

$$D_x(1,3) = (y_2 - y_4)/12$$

$$D_x(1,4) = (y_2 + y_3 - 2y_4)/12$$

$$D_x(2,1) = -(2y_1 - y_3 - y_4)/12$$

$$D_x(2,2) = -(y_1 - y_3)/6$$

$$D_x(2,3) = -(y_1 - 2y_3 + y_4)/12$$

$$D_x(2,4) = -(y_1 - y_3)/12$$

$$D_x(3,1) = -(y_2 - y_4)/12$$

$$D_x(3,2) = (y_1 - 2y_2 + y_4)/12$$

$$D_x(3,3) = -(y_2 - y_4)/6$$

$$D_x(3,4) = -(y_1 + y_2 - 2y_4)/12$$

$$D_x(4,1) = (2y_1 - y_2 - y_3)/12$$

$$D_x(4,2) = (y_1 - y_3)/12$$

$$D_x(4,3) = (y_1 + y_2 - 2y_3)/12$$

$$D_x(4,4) = (y_1 + y_3)/6$$

$$[D_y] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} [N] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|J|} \left( -J_{21} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\} + J_{11} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right\} \right) [N_i] |J| d\xi d\eta$$

$$D_y(1,1) = -(x_2 - x_4)/6$$

$$D_y(1,2) = -(2x_2 - x_3 - x_4)/12$$

$$D_y(1,3) = -(x_2 - x_4)/12$$

$$D_y(1,4) = -(x_2 + x_3 - 2x_4)/12$$

$$D_y(2,1) = (2x_1 - x_3 - x_4)/12$$

$$D_y(2,2) = (x_1 - x_3)/6$$

$$D_y(2,3) = (x_1 - 2x_3 + x_4)/12$$

$$D_y(2,4) = (x_1 - x_3)/12$$

$$D_y(3,1) = (x_2 - x_4)/12$$

$$D_y(3,2) = -(x_1 - 2x_2 + x_4)/12$$

$$D_y(3,3) = (x_2 - x_4)/6$$

$$D_y(3,4) = (x_1 + x_2 - 2x_4)/12$$

$$D_y(4,1) = -(2x_1 - x_2 - x_3)/12$$

$$D_y(4,2) = -(x_1 - x_3)/12$$

$$D_y(4,3) = -(x_1 + x_2 - 2x_3)/12$$

$$D_y(4,4) = -(x_1 - x_3)/6$$

$$[P_x] = \begin{bmatrix} \frac{1}{|J|} \left( J_{22} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] - J_{12} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node1} \\ \frac{1}{|J|} \left( J_{22} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] - J_{12} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node2} \\ \frac{1}{|J|} \left( J_{22} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] - J_{12} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node3} \\ \frac{1}{|J|} \left( J_{22} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] - J_{12} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node4} \end{bmatrix}$$

$$P_x(1,1) = (y_2 - y_4)/4V_1$$

$$P_x(1,2) = (y_4 - y_1)/4V_1$$

$$P_x(1,3) = 0$$

$$P_x(1,4) = (y_1 - y_2)/4V_1$$

$$P_x(2,1) = (y_2 - y_3) / 4V_2$$

$$P_x(2,2) = (y_3 - y_1) / 4V_2$$

$$P_x(2,3) = (y_1 - y_2) / 4V_2$$

$$P_x(2,4) = 0$$

$$P_x(3,1) = 0$$

$$P_x(3,2) = (y_3 - y_4) / 4V_3$$

$$P_x(3,3) = (y_4 - y_2) / 4V_3$$

$$P_x(3,4) = (y_2 - y_3) / 4V_3$$

$$P_x(4,1) = (y_3 - y_4) / 4V_4$$

$$P_x(4,2) = 0$$

$$P_x(4,3) = (y_4 - y_1) / 4V_4$$

$$P_x(4,4) = (y_1 - y_3) / 4V_4$$

$$[P_y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{|J|} \left( -J_{21} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + J_{11} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node1} \\ \frac{1}{|J|} \left( -J_{21} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + J_{11} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node2} \\ \frac{1}{|J|} \left( -J_{21} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + J_{11} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node3} \\ \frac{1}{|J|} \left( -J_{21} \left[ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right] + J_{11} \left[ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right] \right) \Big|_{node4} \end{bmatrix}$$

$$P_y(1,1) = (x_4 - x_2) / 4V_1$$

$$P_y(1,2) = (x_1 - x_4) / 4V_1$$

$$P_y(1,3) = 0$$

$$P_y(1,4) = (x_1 - x_2) / 4V_1$$

$$P_y(2,1) = (x_3 - x_2)/4V_2$$

$$P_y(2,2) = (x_1 - x_3)/4V_2$$

$$P_y(2,3) = (x_1 - x_3)/4V_2$$

$$P_y(2,4) = 0$$

$$P_y(3,1) = 0$$

$$P_y(3,2) = (x_4 - x_3)/4V_3$$

$$P_y(3,3) = (x_2 - x_4)/4V_3$$

$$P_y(3,4) = (x_3 - x_2)/4V_3$$

$$P_y(4,1) = (x_4 - x_3)/4V_4$$

$$P_y(4,2) = 0$$

$$P_y(4,3) = (x_1 - x_4)/4V_4$$

$$P_y(4,4) = (x_3 - x_1)/4V_4$$

$$\{B\} = \int_{\Gamma} \{N\} [N] d\Gamma (\{E\} n_x + \{F\} n_y)$$

ในส่วนของเวกเตอร์  $\{B\}$  นั้นหมายถึงเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านขอบของเอลิเมนต์ ซึ่งพจน์ดังกล่าวจะตัดกันหมดไปภายในขอบเขตของปัญหาจะคงเหลือเฉพาะที่ขอบด้านนอกของขอบเขตที่พิจารณาเท่านั้น โดยถ้าขอบเขตดังกล่าวมีอุณหภูมิคงที่หรือถูกกำหนดให้เป็นฉนวน (ไม่มีปริมาณความร้อนไหลผ่านขอบ) เวกเตอร์  $\{B\}$  จะไม่ต้องทำการคำนวณ แต่ถ้ามีฟลักซ์ความร้อนไหลผ่านขอบเอลิเมนต์ที่มีความยาว  $L$  อยู่ระหว่างจุดต่อหมายเลข 2 และ 3 เวกเตอร์  $\{B\}$  สำหรับฟลักซ์ความร้อนจะคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \{B\} &= \int_{\Gamma} \{N\} [N] d\Gamma (\{E\} n_x + \{F\} n_y) \\ &= \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \\ 0 \end{Bmatrix} [0 \quad L_2 \quad L_3 \quad 0] d\Gamma \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 L_2 & L_2 L_3 & 0 \\ 0 & L_2 L_3 & L_3 L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{R\} &= \int_{\Omega} \{N\} Q d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q \{N(\xi, \eta)\} t |J| d\xi d\eta \\
&= \frac{Qt}{9} \begin{Bmatrix} 4V_1 + 2V_2 + V_3 + 2V_4 \\ 2V_1 + 4V_2 + 2V_3 + V_4 \\ V_1 + 2V_2 + 4V_3 + 2V_4 \\ 2V_1 + V_2 + 2V_3 + 4V_4 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

### ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายชัชวาล ศิริปรุ เกิดเมื่อวันที่ 5 มิถุนายน พุทธศักราช 2527 จังหวัดนครราชสีมา สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา เมื่อปีการศึกษา 2550 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2553



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY