ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง

นายจารุวัจน์ วิรัชพงศานนท์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-17-5768-9

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR PLANE PIEZOELECTRIC BIMATERIALS WITH DEFECTS

Mr. Jaruwat Wiratchpongsanon

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Civil Engineering
Department of Civil Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2005

ISBN 974-17-5768-9

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง
โดย	นายจารุวัจน์ วิรัชพงศานนท์
ภาควิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร. ทักษิณ เทพชาตรี)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร. ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิทธากร)

จารุวัจน์ วิรัชพงศานนท์ : ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง (BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR PLANE PIEZOELECTRIC BIMATERIALS WITH DEFECTS) อ. ที่ปรึกษา : รศ.ดร. ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย, 115 หน้า, ISBN 974-17-5768-9

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า โดยไม่คำนึงถึงผลของแรงวัตถุและประจุไฟฟ้าอิสระ รูปร่างของความบกพร่องมีลักษณะเป็นรูกลวงชนิดวงกลมหรือวงรี และรอยบากด้านข้าง ด้วยระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์โดยอาศัยสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตทางตรง และใช้ฟังก์ชันของกรีนจากการให้น้ำหนักบรรทุกและประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วย การพัฒนาโปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์ทำโดยใช้การประยุกต์แบบจำลองบริเวณย่อยและการประกอบระบบสมการพีชคณิตหลายบริเวณ นอกจากนี้ยังสามารถคำนวณหาผลเฉลยภายในโดเมนได้ด้วย การศึกษานี้ได้ทำการทดสอบการลู่เข้าและความถูกต้องของผลลัพธ์ โดยทำการเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีต พบว่าให้ค่าที่สอดคล้องกัน ผลการศึกษาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง ภายใต้แรงกระทำทางกล และโหลดทางไฟฟ้า ได้ถูกนำเสนอเพื่อแสดงอิทธิพลของลักษณะของความบกพร่องต่อ หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าตามแนวรอยต่อประสานของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก พบว่าผลลัพธ์ในบริเวณใกล้เคียงของความบกพร่องมีค่าขึ้นกับอัตราส่วนรูปร่างของความบกพร่อง (b/a) มากกว่าอัตราส่วนขนาดของความบกพร่อง (a/W)

ภาควิชา ......วิศวกรรมโยธา..........
สาขาวิชา ......วิศวกรรมโยธา..........
ปีการศึกษา ....2548..................

ลายมือชื่อนิสิต ......จารุวัจน์ วิรัชพงศานนท์..........
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

4570246121 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: BOUNDARY ELEMENT METHOD / PIEZOELECTRIC / DEFECT

JARUWAT WIRATCHPONGSANON : BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR PLANE PIEZOELECTRIC BIMATERIALS WITH DEFECTS. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. TEERAPONG SENJUNTICHAI, Ph.D., 115 pp, ISBN 974-17-5768-9.

This thesis is concerned with the application of boundary element methods for two-dimensional piezoelectric bimaterials with defects under mechanical and electrical loading in the absence of body forces and free charges. The defect is a cavity of circular or elliptical shape or a double edge notch. A direct formulation of the boundary integral equation based on closed form Green's functions for line loads and an electrical charge is employed in the analysis. A computer program has been developed by utilizing a subregion model and multi-region assembly, and the calculation of domain solutions is also included. The convergence and numerical stability of the present solution scheme are established, and the accuracy is verified by comparing with existing solutions. Selected numerical results are presented to portray the influence of geometry of defects on the stresses, electric displacement and electric field along the interface of piezoelectric bimaterials. It is found that the solutions in the vicinity of the defect depend more significantly on the shape of the defect than on its size.

Department CIVIL ENGINEERING

Concentration CIVIL ENGINEERING

Academic year 2005

Student's signature Jaruwat Wiratchpongsanon

Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลือสนับสนุนอย่างดีจากหลายท่าน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ แก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ในการทำวิทยานิพนธ์นี้ จนสำเร็จเรียบร้อย รวมทั้งขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ทักษิณ เทพชาตรี ที่ได้ให้ความกรุณารับเป็นประธานของคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิทธากร ที่ได้ให้ความกรุณารับเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ในการตรวจแก้และให้คำปรึกษาในการทำวิทยานิพนธ์ และ Professor R.K.N.D. Rajapakse แห่ง University of British Columbia ประเทศแคนาดา ที่ได้กรุณาให้ข้อมูลและเอกสารที่เป็นประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์นี้

ท้ายที่สุด ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา พี่ และ เพื่อนๆ ที่ได้ให้การสนับสนุนในทุกๆ ด้าน รวมทั้งได้ให้กำลังใจเสมอมา

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1 บทนำ

บทที่ 2 สมการพื้นฐานของแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

บทที่ 3 ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

หน้า

บทที่ 4 ผลการศึกษา

บทที่ 5 บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ภาคผนวก

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

ในปี ค.ศ. 1880 พี่น้อง Jacques และ Pierre Curie ได้ค้นพบปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริก และทำให้วัสดุเพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric material) เป็นที่รู้จัก เนื่องจากวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเป็นวัสดุที่มีความสามารถในการเปลี่ยนพลังงานกลเป็นพลังงานไฟฟ้า หรือพลังงานไฟฟ้าเป็นพลังงานกล ความสามารถนี้ทำให้วัสดุเพียโซอิเล็กทริกถูกนำไปประยุกต์ใช้งานอย่างแพร่หลาย (Crawley, 1994; Rao และ Sunar, 1994) เช่น อุปกรณ์ตัวแปลงหรือทรานส์ดิวเซอร์ (transducer), อุปกรณ์ตัวรับ (sensor) และอุปกรณ์ตัวขับเร้า (actuator) ใน smart structures หรือในระบบกลไฟฟ้าแบบจุลภาค (micro electro-mechanical systems; MEMS) โดยที่ความสามารถในการเปลี่ยนพลังงานกลเป็นพลังงานไฟฟ้า เช่นเมื่อวัสดุเพียโซอิเล็กทริกได้รับแรงทางกลจะทำให้เกิดแรงดันไฟฟ้า (voltage) ในวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ซึ่งคุณสมบัตินี้ถูกนำไปใช้ในการออกแบบอุปกรณ์ตัวรับที่แสดงถึงการเปลี่ยนรูปของโครงสร้าง และในทางกลับกัน ความสามารถในการเปลี่ยนพลังงานไฟฟ้าเป็นพลังงานกล เช่นเมื่อวัสดุเพียโซอิเล็กทริกได้รับแรงดันไฟฟ้า จะทำให้วัสดุเพียโซอิเล็กทริกเกิดการเสียรูปทางกล ซึ่งคุณสมบัตินี้ถูกนำไปใช้ในการออกแบบอุปกรณ์ตัวขับเร้าเพื่อควบคุมการสั่นของโครงสร้าง

วัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่นำมาใช้งานส่วนใหญ่มีอยู่สองรูปแบบคือ รูปแบบที่หนึ่งเป็นวัสดุเพียโซเซรามิก (piezoceramic) เช่น Lead Zirconate Titanate (PZT) และ Barium Titanate ($BaTiO_3$) เป็นต้น ส่วนรูปแบบที่สองเป็นวัสดุเพียโซโพลีเมอร์ (piezopolymer หรือ piezofilm) เช่น Polyvinylidene Fluoride (PVDF) เป็นต้น โดยที่วัสดุเพียโซเซรามิกผลิตโดยขบวนการผลิตเซรามิกที่มีอุณหภูมิสูง และภายใต้สนามไฟฟ้าแรงสูง ซึ่งทำให้วัสดุเพียโซเซรามิกที่ได้มีคุณสมบัติเปราะ และอาจเกิดรอยแตกหรือการวิบัติอย่างฉับพลัน ทั้งที่เป็นการวิบัติทางกล (mechanical failure) เนื่องจากความเข้มของหน่วยแรง หรือเกิดความล้มเหลวไดอิเล็กตริก (dielectric failure) เนื่องจากความเข้มของสนามไฟฟ้า และในทางปฏิบัติ วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะถูกนำมายึดหรือฝังในชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือนำวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมาขึ้นรูปรวมกับวัสดุอื่นๆ เช่น โลหะ (metal) ตัวนำ (conductor) อีพอกซี (epoxy) หรือขึ้นรูปรวมกับวัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่ต่างชนิดกันมาเป็นวัสดุเชิงประกอบเพื่อเพิ่มคุณสมบัติและความหลากหลายในการประยุกต์ใช้งานในด้านต่างๆ การนำชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (วัสดุเชิงประกอบสองวัสดุ) มาใช้งานมักพบปัญหาความเสียหายที่ตำแหน่งรอยต่อของวัสดุ ดังนั้นการศึกษาหน่วยแรงที่ตำแหน่งรอยต่อระหว่างชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุจึงมีความสำคัญ เพื่อลดความเสียหายที่อาจจะเกิดขึ้นจากการใช้งาน

งานวิจัยนี้จะเกี่ยวข้องกับการศึกษาวิเคราะห์หน่วยแรง ที่เกิดขึ้นภายในแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (Piezoelectric bimaterial system) ที่มีความบกพร่องหรือตำหนิ เช่น รอยบาก รูกลวง หรือ

โพรง ที่ตำแหน่งรอยต่อของวัสดุด้วยระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณข้อปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) โดยใช้สมการปริพันธ์ขอบเขตทางตรง (direct formulation) เนื่องจากระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ มีข้อได้เปรียบในการศึกษาปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความเข้มของหน่วยแรง ปัญหาที่มีความสมมาตร ปัญหาที่มีโดเมนอนันต์ จากการวิเคราะห์ที่แบ่งเฉพาะขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ขอบเขตย่อยๆ (boundary discretization) ในระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ช่วยลดจำนวนของระดับขั้นความเสรีและลดมิติของปัญหาเมื่อเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในงานวิจัยนี้ใช้แบบจำลองบริเวณย่อย (subregion model) กับการประกอบระบบสมการพีชคณิตหลายบริเวณ (multi-region assembly) เพื่อแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นโดเมนย่อยๆ (บริเวณย่อยๆ) ตามชนิดของวัสดุ หรือแบ่งผ่านบริเวณที่ต้องการจะศึกษา เพื่อใช้ศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ บนตำแหน่งขอบเขต นอกจากนี้งานวิจัยนี้ได้ทำการเพิ่มส่วนของการคำนวณหาผลเฉลยภายในโดเมน (domain solution) เพื่อใช้ศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ภายในโดเมนด้วย

1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีความบกพร่องหรือตำหนิ เช่น รอยบาก รู โพรง ซึ่งมีวิธีการศึกษาได้หลายวิธี ทั้งที่เป็นระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ หรือระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เช่น วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนซ์ (finite difference method; FDM) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method; FEM) และวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (boundary element method; BEM) ในที่นี้จะขอกล่าวโดยสังเขปดังต่อไปนี้

1.2.1 การวิเคราะห์หน่วยแรงภายในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีความบกพร่อง ด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์

การวิเคราะห์หน่วยแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีความบกพร่อง ด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์หรือสมการเชิงปริพันธ์ของปัญหาที่ต้องการศึกษา เริ่มจาก Sosa (1991) ได้ศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูวงรี (ทิศทางรูวงรีตั้งฉากหรือขนานกับทิศโพลาไรเซชัน) ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตรอบรูโพรงปราศจากความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว ซึ่งผลเฉลยแม่นตรงเขียนอยู่ในพจน์ของศักย์เชิงซ้อน (complex potential) ที่ได้มาจากฟังก์ชันของเล็กนิทสกีแบบขยาย (extended Lekhnitskii's functions) ต่อมา Sosa และ Khutoryansky (1996) ได้ทำการศึกษาเพิ่มเติมโดยการพิจารณาเงื่อนไขทางไฟฟ้า (คำนึงถึงประจุไฟฟ้าที่ผิว) บนขอบเขตรอบรูวงรี และทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ถ้าอัตราส่วนรูปร่างรูวงรี (b/a) มากกว่า 10^{-2} ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ทั้งในกรณีที่คำนึงถึงประจุไฟฟ้าที่ผิวและกรณีที่ไม่คำนึงถึงประจุไฟฟ้าที่ผิวจะให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน ในขณะที่อัตราส่วนรูปร่างรูวงรีที่เหมือนรอยแตก ($b/a \approx 10^{-4}$) จะส่งผลให้เกิดความแตกต่างของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ และเกิดความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ถ้าไม่คำนึงถึงประจุไฟฟ้าที่ผิว ต่อมา Gao และ Fan (1998) ได้เขียนผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาเดียวกันกับ Sosa (1991) และ Sosa และ Khutoryansky (1996) แต่ได้พิจารณาให้ช่องว่างภายในรูโพรงเติมเต็มด้วยอากาศ ในขณะที่ Xu และ Rajapakse (1999) ได้ศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่น

อนันต์ที่มีการกำหนดทิศทางความบกพร่อง (defect orientation) ที่เอียงทำมุมใดๆ กับทิศโพลาไรเซชัน ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตรอบรูโพรงปราศจากความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว โดยผลเฉลยแม่นตรงที่คำนวณได้มาจากฟังก์ชันของเล็กนิทสกีแบบขยาย แล้วทำการทดสอบเปรียบเทียบ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าหน่วยแรงวงแหวนและการกระจัดทางไฟฟ้าวงเหวน (hoop stress / electric displacement) รอบรูวงรีมีลักษณะสมมาตร เมื่อกำหนดให้ทิศทางของรูวงรีขนานหรือตั้งฉากกับทิศโพลาไรเซชัน ส่วนกรณีที่ทิศทางของรูวงรีเอียงทำมุมกับทิศโพลาไรเซชัน ค่าผลลัพธ์รอบรูวงรีจะมีลักษณะไม่สมมาตร

1.2.2 การพัฒนาระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

การพัฒนาระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาสองมิติของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก ทั้งกรณีที่มีความบกพร่อง และกรณีที่ไม่มีความบกพร่อง เริ่มมาจากการสร้างสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขต (boundary integral equation; BIE) ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก โดย Lee และ Jiang (1994) ที่เขียนด้วยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) โดยใช้ผลเฉลยหลักมูลเป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighting function) ซึ่งผลเฉลยหลักมูลที่ใช้ได้มาจากการแปลงฟูเรียร์สองชั้น (double Fourier transform) ต่อมา Lee (1995) ได้นำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ไปดำเนินการกับตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูวงกลมกลวง ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้าแบบต่างๆ ในขณะที่ Lu และ Mehrenholtz (1994) ได้เขียนสมการบาวดารีเอลิเมนต์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกด้วยวิธีการแปรผัน (variational method) ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการเมทริกซ์ที่สมมาตร อย่างไรก็ตามไม่มีการนำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ไปดำเนินการเชิงตัวเลขกับตัวอย่างปัญหา ต่อมาการสร้างสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกส่วนใหญ่ มักจะเขียนมาจากทฤษฎีส่วนกลับของเบติ (Betti’s reciprocal theorem)

การประยุกต์ใช้ผลเฉลยหลักมูลในระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ โดย Ding และคณะ (1998) ได้นำผลเฉลยหลักมูลที่เขียนอยู่ในพจน์ของฟังก์ชันฮาร์มอนิก (harmonic function) ซึ่งหามาจากทฤษฎีบทอัลมานซี (Almansi’s theorem) มาประยุกต์ใช้ในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก และได้นำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ไปดำเนินการกับตัวอย่างปัญหาแท่งชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกภายใต้แรงดึงสม่ำเสมอ และตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูวงกลมหรือรอยแตกตรงกลาง ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า ในขณะที่ Xu และ Rajapakse (1998) ได้นำผลเฉลยหลักมูลของ Rajapakse (1997) จากการแปลงปริพันธ์ฟูเรียร์ (Fourier integral transform) มาประยุกต์ใช้ในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขต และได้นำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้มาศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีความบกพร่องหรือตำหนิแบบต่างๆ ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า เพื่อหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า ที่ตำแหน่งขอบรอบรูวงรีที่มีขนาดและรูปร่างต่างๆ ส่วน Khutoryansky และคณะ (1998) ได้ประยุกต์ใช้ผลเฉลยหลักมูลโดยประมาณ (approximate Green’s function) ที่ได้มาจากอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) แล้วนำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ มาทดสอบกับตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูวงกลม พบว่าให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องสอดคล้อง และช่วยเพิ่มประสิทธิภาพความรวดเร็วในการคำนวณ ต่อมา Denda และ Lua (1999) ได้นำผลเฉลยหลักมูลที่ได้มาจากฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนของสโตร์ห (Stroh’s complex variable formulation) สำหรับชิ้นส่วน

เพียโซอิเล็กทริกมาประยุกต์ใช้ในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขต อย่างไรก็ตาม ไม่มีการนำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ไปดำเนินการเชิงตัวเลขกับตัวอย่างปัญหา

ต่อมา Lu และ Fan (2001) ได้เสนอสมการปริพันธ์ขอบเขตในรูปแบบเอกฐานอย่างอ่อน (weakly-singular BIE) มาประยุกต์ใช้กับปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีความบกพร่อง ตำหนิ หรือชิ้นส่วนเปลือกบาง (thin shape) และได้นำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ไปศึกษาวิเคราะห์หน่วยแรงของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก PZT-4 ที่มีรูวงรีแคบๆ ภายใต้แรงดึงสม่ำเสมอ (โดยการพิจารณาปัญหาทั้งในแบบหนึ่งโดเมนและสองโดเมน) ในขณะที่ Davi และ Milazzo (2001) ได้เสนอวิธีบาวดารีเอลิเมนต์หลายโดเมน สำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก เพื่อศึกษากลศาสตร์ของรอยแตก โดยใช้ผลเฉลยหลักมูลที่ได้จากฟังก์ชันของเล็กนิทสกีดัดแปร (modified Lekhnitskii's functions approach) และได้นำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ไปศึกษาปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก PZT-4 ที่มีรอยแตกกลางเอียง 45 องศากับแนวนอน (พิจารณาปัญหาในแบบสองโดเมน) ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า ต่อมา Groh และ Kuna (2005) ได้ประยุกต์ใช้เทคนิคโดเมนย่อย (subdomain technique) กับระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่ใช้ผลเฉลยหลักมูลของ Khutoryansky และคณะ (1998) มาศึกษากลศาสตร์ของรอยแตก และได้นำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้ไปดำเนินการกับตัวอย่างปัญหารอยแตกตั้งฉาก ใกล้รอยต่อของชิ้นส่วนเชิงประกอบของเพียโซอิเล็กทริกกับอีพอกซีเรซิน (PZT-5H / Epoxy resin bimaterial) เมื่อเร็วๆ นี้ Weian และ Wang (2005) ได้นำเสนอวิธีเสมือนบาวดารีเอลิเมนต์อินทิกรัล (virtual boundary element integral method) สำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก โดยใช้ผลเฉลยหลักมูลของ Ding และคณะ (1998) ซึ่งวิธีการนี้จะใช้ขอบเขตเสมือน (virtual boundary) เพื่อช่วยหลีกเลี่ยงการคำนวณปริพันธ์เอกฐาน (ภาวะเอกฐาน) ที่จะเกิดขึ้นบนขอบเขตจริง (real boundary) และได้นำไปดำเนินการกับตัวอย่างปัญหาเดียวกันกับ Ding และคณะ (1998) พบว่าให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องและสอดคล้อง

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้น ส่วนใหญ่เป็นการพัฒนาและประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับการศึกษาวิเคราะห์ชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก (วัสดุชนิดเดียว) ทั้งที่ไม่มีและมีความบกพร่อง ส่วนในกรณีการศึกษาวิเคราะห์หน่วยแรงที่เกิดขึ้นของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (วัสดุสองชนิดที่มีคุณสมบัติแตกต่างกัน) ที่มีความบกพร่องหรือตำหนิ เช่น รอยบาก รูกลวง หรือโพรง ที่ตำแหน่งรอยต่อของวัสดุ และการคำนวณหาผลเฉลยภายในโดเมนยังไม่ได้ถูกนำมาเสนอ

1.3 วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ได้แก่

1. พัฒนาโปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ
2. ศึกษาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง เช่น รอยบาก รู หรือโพรง

1.4 ขอบเขตการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาปัญหาของแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกเชิงเส้น ที่มีคุณสมบัติเหมือนกันในทิศทางตามขวาง (transversely isotropic) ตลอดในแต่ละชิ้นส่วน ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า และไม่มีแรงวัตถุ (body force) หรือประจุอิสระ (free charge) ด้วยการวิเคราะห์เชิงสถิต (static analysis) โดยใช้ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่พิจารณาขอบเขตของปัญหาในแบบสองโดเมน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัยมีดังต่อไปนี้

1. เข้าใจวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับปัญหาในทางวิศวกรรมและสามารถประยุกต์ใช้ได้
2. เข้าใจพฤติกรรมของแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า

บทที่ 2

สมการพื้นฐานของแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

สมการพื้นฐานของแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกเชิงเส้น ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ถูกนำเสนอโดย Parton และ Kudryavtsev (1988) ประกอบไปด้วยสมการสมดุล สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดและสนามไฟฟ้า (electric field) สมการความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement) กับความเครียดและสนามไฟฟ้า สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง สมการความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับศักย์ไฟฟ้า (electric potential) นอกจากนี้ยังมีสมการสำหรับเงื่อนไขขอบเขต ทั้งที่เป็นเงื่อนไขขอบเขตทางกล คือสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเค้นที่ผิว และที่เป็นเงื่อนไขขอบเขตทางไฟฟ้า คือสมการความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้ากับประจุไฟฟ้าที่ผิว (surface electric charge)

2.1 สมการสมดุล

สมการสมดุลของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกในสองมิติ และกฎของเกาส์ (Gauss's law) สำหรับไฟฟ้าสถิต (electrostatics) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน บนระนาบ $x-z$ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}+F_x=0 \qquad (2.1ก)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=0 \qquad (2.1ข)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho_e \qquad (2.2)$$

โดยที่ σ_{ij} คือความเค้น F_i คือแรงวัตถุ (body force) ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร D_i คือการกระจัดทางไฟฟ้าหรือความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (electric flux density) เมื่อ $i, j = x, z$ และ ρ_e คือประจุไฟฟ้าวัตถุ (body charge) ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร หรือความหนาแน่นประจุบนวัตถุ (charge density) ของประจุอิสระ

2.2 สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น - ความเครียดและสนามไฟฟ้า และสมการความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้า - ความเครียดและสนามไฟฟ้า

ความสัมพันธ์ของความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า ในรูปของความเครียดและสนามไฟฟ้า สำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกบนระนาบ $x-z$ ที่มีคุณสมบัติเหมือนกันในทิศทางตามขวาง (transversely isotropic) ที่เกิดการจำแนกขั้วหรือโพลาไรเซชัน (polarization) ในทิศทางขนานแกน z สามารถพิจารณาโดยแบ่งตามลักษณะของปัญหา คือสมการความสัมพันธ์สำหรับปัญหาความเครียดในระนาบ (plane-strain) และสมการความสัมพันธ์สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ (plane-stress)

การพิจารณาปัญหาความเครียดในระนาบ $x-z$ ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก ค่าความเครียดและสนามไฟฟ้าในทิศทางขนานแกน y จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{zy}$ และ $E_y = 0$) ดังนั้นสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า ในรูปความเครียดและสนามไฟฟ้าได้ดังนี้

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z \tag{2.3ก}$$

$$\sigma_{zz} = c_{13}\varepsilon_{xx} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z \tag{2.3ข}$$

$$\sigma_{zx} = 2c_{44}\varepsilon_{zx} - e_{15}E_x \tag{2.3ค}$$

$$D_x = 2e_{15}\varepsilon_{zx} + \kappa_{11}E_x \tag{2.4ก}$$

$$D_z = e_{31}\,\varepsilon_{xx} + e_{33}\,\varepsilon_{zz} + \kappa_{33}E_z \tag{2.4ข}$$

โดยที่ c_{11}, c_{13}, c_{33} และ c_{44} คือค่าคงตัวโมดูลัสยืดหยุ่น (elastic constants) ภายใต้สนามไฟฟ้าคงที่ e_{31}, e_{33} และ e_{15} คือค่าคงตัวเพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric constants) κ_{11} และ κ_{33} คือค่าคงตัวไดอิเล็กตริก (dielectric constants หรือ permittivity) ภายใต้ความเครียดคงที่

ส่วนการพิจารณาปัญหาความเค้นในระนาบ $x-z$ ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก ค่าความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้าในทิศทางขนานแกน y จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{zy}$ และ $D_y = 0$) ดังนั้นสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า ในรูปความเครียดและสนามไฟฟ้า ได้ดังสมการ (2.3) และ (2.4) โดยการแทนที่ค่าคงตัวของวัสดุ c_{11}, c_{13}, c_{33}, e_{31}, e_{33} และ κ_{33} ด้วย $\left(c_{11} - c_{12}^2/c_{11}\right)$, $\left(c_{13} - c_{12}c_{13}/c_{11}\right)$, $\left(c_{33} - c_{13}^2/c_{11}\right)$, $\left(e_{31} - c_{12}e_{31}/c_{11}\right)$, $\left(e_{33} - c_{13}e_{31}/c_{11}\right)$ และ $\left(\kappa_{33} + e_{31}^2/c_{11}\right)$ ตามลำดับ

สมการ (2.3) เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ของความเค้น ในรูปความเครียดและสนามไฟฟ้า ที่เกิดจาก “ผลทางอ้อม” (indirect / converse piezoelectric effect) ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก คือเมื่อวัสดุเพียโซ-

อิเล็กทริกภายใต้สนามไฟฟ้าในทิศทางเดียวกับทิศการโพลาไรซ์จะเกิดความเครียดอัด (compressive strain) ซึ่งทำให้วัสดุเพียโซอิเล็กทริกเกิดการหดตัวหรือเปลี่ยนรูป (deformation) ไปจากเดิม และหากกลับทิศของสนามไฟฟ้าจะเกิดความเครียดดึง (tensile strain) ซึ่งทำให้วัสดุเพียโซอิเล็กทริกเกิดการขยายตัว ดังรูปที่ 2.1ข

สมการ (2.4) เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้า ในรูปความเครียดและสนามไฟฟ้า ซึ่งเกิดจาก “ผลทางตรง” (direct piezoelectric effect) ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก คือเมื่อวัสดุเพียโซอิเล็กทริกได้รับแรงหรือความเค้นทางกล (mechanical force / stress) จะเหนี่ยวนำให้เกิดประจุไฟฟ้าหรือแรงดันไฟฟ้า (voltage) ตัวอย่างเช่น เมื่อนำวงจรต่อเข้ากับวัสดุเพียโซอิเล็กทริกภายใต้แรงอัดจะมีกระแสไฟฟ้าไหลเข้าวงจร และหากเปลี่ยนเป็นแรงดึงจะเกิดกระแสไฟฟ้าไหลออกจากวงจรในทิศทางตรงกันข้าม ดังรูปที่ 2.1ก

2.3 สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง และสมการความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับศักย์ไฟฟ้า

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง และความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับศักย์ไฟฟ้าในสองมิติ สำหรับของแข็งที่มีความยืดหยุ่นและเกี่ยวกับไฟฟ้า (electroelastic solid) ที่วางตัวอยู่ในระนาบ $x - z$ สามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad (2.5\text{ก})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (2.5\text{ข})$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \qquad (2.5\text{ค})$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad (2.6\text{ก})$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (2.6\text{ข})$$

โดยที่ u_x และ u_z คือการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทาง x และ z ตามลำดับ และ ϕ คือศักย์ไฟฟ้า

2.4 สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเค้นที่ผิว และสมการความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้ากับประจุไฟฟ้าที่ผิว

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเค้นที่ผิว และความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้า กับประจุไฟฟ้าที่ผิว ในสองมิติ ที่อยู่ในระนาบ $x-z$ สามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\tau_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z \tag{2.7ก}$$

$$\tau_z = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zz} n_z \tag{2.7ข}$$

$$q = -D_x n_x - D_z n_z \tag{2.8}$$

โดยที่ τ_x และ τ_z คือความเค้นที่ผิวในทิศทาง x และ z ตามลำดับ และ q คือประจุไฟฟ้าที่ผิว ส่วน n_x และ n_z เป็นโคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของมุมระหว่างเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ที่ตั้งฉากกับผิวเทียบกับแกน x และ z ตามลำดับ ณ จุดที่กำลังพิจารณา โดยที่

$$\hat{n} = \frac{\bar{n}}{\|\bar{n}\|} = n_x \hat{i} + n_z \hat{k} = \frac{\partial z}{\partial \eta}\hat{i} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\hat{k} \tag{2.9}$$

2.5 ผลเฉลยหลักมูล

การสร้างสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก จำเป็นต้องทราบถึงผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา (governing differential equation) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกหรือประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยภายในโดเมนอนันต์ และผลเฉลยที่ได้นี้เรียกว่า “ผลเฉลยหลักมูล” (fundamental solution) หรือ “ฟังก์ชันของกรีน” (Green’s function)

การหาผลเฉลยหลักมูล สำหรับปัญหาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก สามารถทำได้หลายวิธี เช่น วิธีฟังก์ชันหน่วยแรง (stress function method) วิธีฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน (complex variable function method) และวิธีการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform method) สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้การหาผลเฉลยหลักมูลด้วยวิธีการแปลงฟูเรียร์ โดยเริ่มจากการเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาในรูปอนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า แล้วแทนผลเฉลยทั่วไปสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่ง u_x , u_z และศักย์ไฟฟ้า ϕ ที่เขียนอยู่ในรูปแบบอินทิกรัลฟูเรียร์ที่สอดคล้องกับปัญหา แล้วพิจารณาหารากลักษณะเฉพาะ (characteristic root) ที่เหมาะสม

กำหนดให้การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f\left(x,z\right)$ เทียบกับตัวแปร x เขียนแทนด้วย $\bar{f}\left(\xi,z\right)$ เมื่อ ξ คือพารามิเตอร์ของการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transforms parameter) และเครื่องหมาย “ $-$ ” ที่ปรากฏบนฟังก์ชันหมายถึงการแปลงฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในโดเมนของฟูเรียร์ดังนี้

$$\bar{f}\left(\xi,z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,z\right)e^{i\xi x}dx \tag{2.10}$$

และการแปลงฟูเรียร์ผกผันของฟังก์ชัน $\bar{f}\left(\xi,z\right)$ เขียนได้ดังนี้

$$f\left(x,z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}\left(\xi,z\right)e^{-i\xi x}d\xi \tag{2.11}$$

ผลเฉลยทั่วไปสำหรับการแปลงฟูเรียร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง และศักย์ไฟฟ้า ในโดเมน $z\geq 0$ สามารถเขียนได้ดังนี้ (Rajapakse, 1997)

$$\bar{u}_x\left(\xi,\ z\right)=i\xi\sum_{j=1}^{3}\beta_j M_j\left(\xi\right)e^{-\alpha_j|\xi|z} \tag{2.12ก}$$

$$\bar{u}_z\left(\xi,\ z\right)=|\xi|\sum_{j=1}^{3}\eta_j M_j\left(\xi\right)e^{-\alpha_j|\xi|z} \tag{2.12ข}$$

$$\bar{\phi}\left(\xi,\ z\right)=|\xi|\sum_{j=1}^{3}\delta_j M_j\left(\xi\right)e^{-\alpha_j|\xi|z} \tag{2.12ค}$$

โดยที่ α_j คือรากลักษณะเฉพาะ $M_j\left(\xi\right)$ คือเซตของฟังก์ชันเลือก (arbitrary function) ที่พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขต และ β_j, η_j , δ_j เมื่อ $j=1,\ 2,\ 3$ แทนด้วยสมการ (ก.19ก) ถึง (ก.19ค) ตามลำดับ ดังแสดงในภาคผนวก ก

ผลเฉลยทั่วไปสำหรับการแปลงฟูเรียร์ของความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า ได้จากการนำสมการ (2.12) แทนลงในสมการความสัมพันธ์ของความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้าในรูปของความเครียด (อนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง) และสนามไฟฟ้า (อนุพันธ์ของศักย์ไฟฟ้า) ตามที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 2.2 และ 2.3 ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\bar{\sigma}_{xx}\left(\xi,\ z\right)=\sum_{j=1}^{3}\xi^2 d_{1j}M_j\left(\xi\right)e^{-\alpha_j|\xi|z} \tag{2.13ก}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}\left(\xi,\ z\right)=\sum_{j=1}^{3}\xi^2 d_{2j}M_j\left(\xi\right)e^{-\alpha_j|\xi|z} \tag{2.13ข}$$

$$\bar{\sigma}_{zx}\left(\xi,\ z\right)=\sum_{j=1}^{3} i\xi\left|\xi\right| d_{3j} M_{j}\left(\xi\right)\, e^{-\alpha_j \left|\xi\right| z} \tag{2.13ค}$$

$$\bar{D}_{x}\left(\xi,\ z\right)=\sum_{j=1}^{3} i\xi\left|\xi\right| d_{4j} M_{j}\left(\xi\right)\, e^{-\alpha_j \left|\xi\right| z} \tag{2.13ง}$$

$$\bar{D}_{z}\left(\xi,\ z\right)=\sum_{j=1}^{3} i\xi\left|\xi\right| d_{5j} M_{j}\left(\xi\right)\, e^{-\alpha_j \left|\xi\right| z} \tag{2.13จ}$$

โดยที่ d_{1j} , d_{2j} , d_{3j} , d_{4j} , d_{5j} เมื่อ $j=1, 2, 3$ แทนด้วยสมการ (ก.20ก) ถึง (ก.20จ) ตามลำดับ ดังแสดงในภาคผนวก ก

เมื่อได้ผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาดังสมการ (2.12) และ (2.13) แล้ว ผลเฉลยหลักมูลสำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก คำนวณได้จากการแทนค่าเซตของฟังก์ชันเลือก $M_j\left(\xi\right)$ ที่สอดคล้องกับสภาพเงื่อนไขขอบเขต จากการให้น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วย หรือประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยบนจุดโหลดภายในโดเมนอนันต์ ลงในสมการ (2.12) และ (2.13)

2.5.1 เซตของฟังก์ชันเลือกจากการให้น้ำหนักบรรทุกกระทำในทิศทาง x

สภาพเงื่อนไขสำหรับการให้น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วย ($H_0=1$) กระทำในทิศทางขนานแกน x ภายในโดเมนอนันต์ พิจารณาบนระนาบ z เท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 2.2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_{zx}\left(x,\ 0\right)=-\frac{H_0\delta\left(x\right)}{2} \tag{2.14ก}$$

$$\phi\left(x,\ 0\right)=0 \tag{2.14ข}$$

$$u_z\left(x,\ 0\right)=0 \tag{2.14ค}$$

โดยที่ $\delta\left(x\right)$ คือฟังก์ชันไดแรกเดลตา (Dirac delta function) ดังนั้นจากผลการแปลงฟูเรียร์และการแทนค่าของสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.12) และ (2.13) สามารถเขียนในรูปแบบสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} i\xi\left|\xi\right|d_{31} & i\xi\left|\xi\right|d_{32} & i\xi\left|\xi\right|d_{33} \\ \left|\xi\right|\delta_1 & \left|\xi\right|\delta_2 & \left|\xi\right|\delta_3 \\ \left|\xi\right|\eta_1 & \left|\xi\right|\eta_2 & \left|\xi\right|\eta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^x\left(\xi\right) \\ M_2^x\left(\xi\right) \\ M_3^x\left(\xi\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{zx}=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{H_0\delta\left(x\right)}{2}\right)e^{i\xi x}dx \\ \bar{\phi}=0 \\ \bar{u}_z=0 \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

เมื่อทำการแก้สมการเมทริกซ์ (2.15) จะได้เซตของฟังก์ชันเลือก $M_j^x(\xi)$ เมื่อ $j = 1, 2, 3$ ดังนี้

$$M_j^x(\xi) = \frac{i f_j}{\xi|\xi|} \tag{2.16}$$

โดยที่ $$f_1 = -\frac{(\delta_2\eta_3 - \delta_3\eta_2)}{\Delta_h}\bar{\sigma}_{zx} = -\frac{(\delta_2\eta_3 - \delta_3\eta_2)}{\Delta_h}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f_2 = -\frac{(\delta_3\eta_1 - \delta_1\eta_3)}{\Delta_h}\bar{\sigma}_{zx} = -\frac{(\delta_3\eta_1 - \delta_1\eta_3)}{\Delta_h}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f_3 = -\frac{(\delta_1\eta_2 - \delta_2\eta_1)}{\Delta_h}\bar{\sigma}_{zx} = -\frac{(\delta_1\eta_2 - \delta_2\eta_1)}{\Delta_h}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

และ $$\Delta_h = \eta_1(\delta_3 d_{32} - \delta_2 d_{33}) + \eta_2(\delta_1 d_{33} - \delta_3 d_{31}) + \eta_3(\delta_2 d_{31} - \delta_1 d_{32})$$

2.5.2 เซตของฟังก์ชันเลือกจากการให้น้ำหนักบรรทุกกระทำในทิศทาง z

สภาพเงื่อนไขสำหรับการให้น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วย ($V_0 = 1$) กระทำในทิศทางขนานแกน z ภายในโดเมนอนันต์ พิจารณาบนระนาบ z เท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 2.2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_{zz}(x,\ 0) = -\frac{V_0\delta(x)}{2} \tag{2.17ก}$$

$$u_x(x,\ 0) = 0 \tag{2.17ข}$$

$$D_z(x,\ 0) = 0 \tag{2.17ค}$$

จากผลการแปลงฟูเรียร์และการแทนค่าของสมการ (2.17) ลงในสมการ (2.12) และ (2.13) สามารถเขียนในรูปแบบสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \xi^2 d_{21} & \xi^2 d_{22} & \xi^2 d_{23} \\ i\xi\beta_1 & i\xi\beta_2 & i\xi\beta_3 \\ \xi^2 d_{51} & \xi^2 d_{52} & \xi^2 d_{53} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^z(\xi) \\ M_2^z(\xi) \\ M_3^z(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{zz} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{V_0\delta(x)}{2}\right)e^{i\xi x}dx \\ \bar{u}_x = 0 \\ \bar{D}_z = 0 \end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

เมื่อทำการแก้สมการเมทริกซ์ (2.18) จะได้เซตของฟังก์ชันเลือก $M_j^z(\xi)$ เมื่อ $j = 1, 2, 3$ ดังนี้

$$M_j^z(\xi) = \frac{a_j}{\xi^2} \tag{2.19}$$

โดยที่ $a_1 = \dfrac{(\beta_2 d_{53} - \beta_3 d_{52})}{\Delta_v}\bar{\sigma}_{zz} = \dfrac{(\beta_2 d_{53} - \beta_3 d_{52})}{\Delta_v}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$$a_2 = \frac{(\beta_3 d_{51} - \beta_1 d_{53})}{\Delta_v}\bar{\sigma}_{zz} = \frac{(\beta_3 d_{51} - \beta_1 d_{53})}{\Delta_v}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a_3 = \frac{(\beta_1 d_{52} - \beta_2 d_{51})}{\Delta_v}\bar{\sigma}_{zz} = \frac{(\beta_1 d_{52} - \beta_2 d_{51})}{\Delta_v}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

และ $\Delta_v = \beta_1(d_{52}d_{23} - d_{53}d_{22}) + \beta_2(d_{53}d_{21} - d_{51}d_{23}) + \beta_3(d_{51}d_{22} - d_{52}d_{21})$

2.5.3 เซตของฟังก์ชันเลือกจากการให้ประจุไฟฟ้า

สภาพเงื่อนไขสำหรับการให้ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วย ($Q_0 = +1$) ภายในโดเมนอนันต์ พิจารณาบนระนาบ z เท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 2.2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_{zz}(x,\ 0) = 0 \tag{2.20ก}$$

$$u_x(x,\ 0) = 0 \tag{2.20ข}$$

$$D_z(x,\ 0) = \frac{Q_0\delta(x)}{2} \tag{2.20ค}$$

จากผลการแปลงฟูเรียร์และการแทนค่าของสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.12) และ (2.13) สามารถเขียนในรูปแบบสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \xi^2 d_{21} & \xi^2 d_{22} & \xi^2 d_{23} \\ i\xi\beta_1 & i\xi\beta_2 & i\xi\beta_3 \\ \xi^2 d_{51} & \xi^2 d_{52} & \xi^2 d_{53} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^q(\xi) \\ M_2^q(\xi) \\ M_3^q(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{zz} = 0 \\ \bar{u}_x = 0 \\ \bar{D}_z = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{Q_0\delta(x)}{2}\right) e^{i\xi x} dx \end{Bmatrix} \tag{2.21}$$

เมื่อทำการแก้สมการเมทริกซ์ (2.21) จะได้เซตของฟังก์ชันเลือก $M_j^q(\xi)$ เมื่อ $j = 1, 2, 3$ ดังนี้

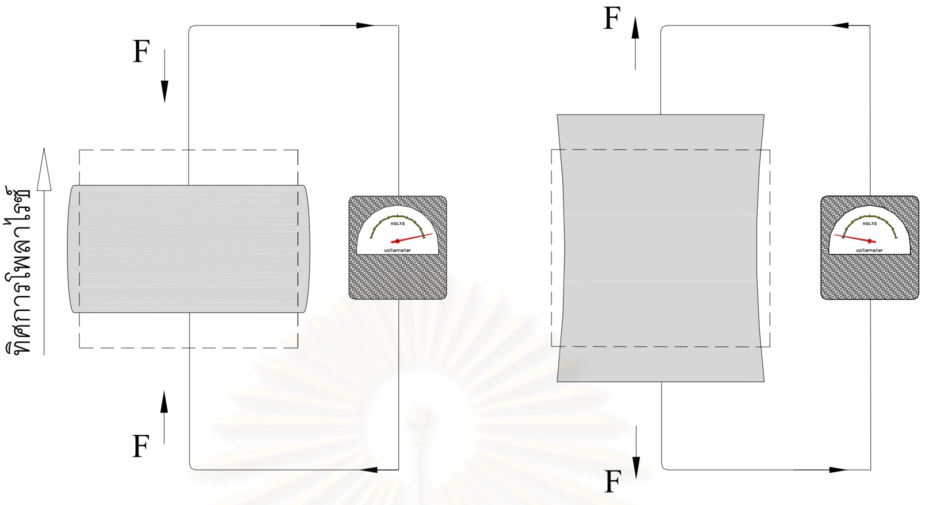
$$M_j^q(\xi) = \frac{b_j}{\xi^2} \tag{2.22}$$

โดยที่ $$b_1 = \frac{(\beta_3 d_{22} - \beta_2 d_{23})}{\Delta_q}\bar{D}_z = \frac{(\beta_3 d_{22} - \beta_2 d_{23})}{\Delta_q}\left(\frac{1}{2}\right)$$

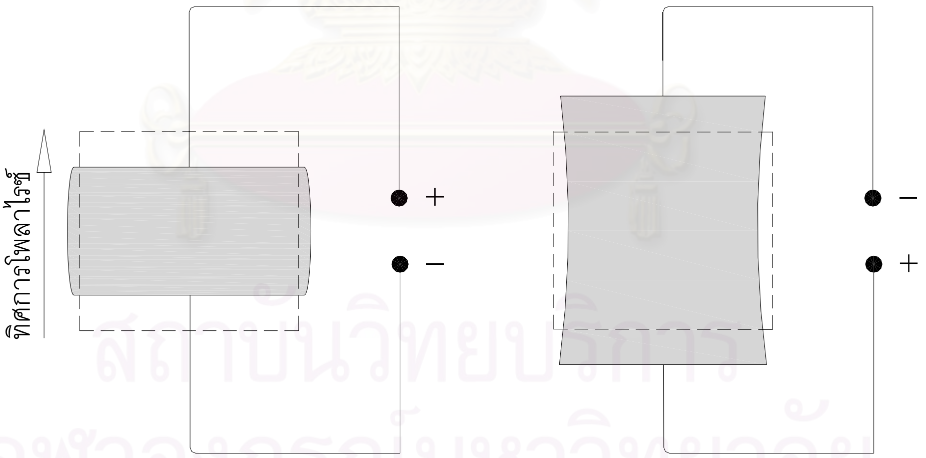
$$b_2 = \frac{(\beta_1 d_{23} - \beta_3 d_{21})}{\Delta_q}\bar{D}_z = \frac{(\beta_1 d_{23} - \beta_3 d_{21})}{\Delta_q}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$b_3 = \frac{(\beta_2 d_{21} - \beta_1 d_{22})}{\Delta_q}\bar{D}_z = \frac{(\beta_2 d_{21} - \beta_1 d_{22})}{\Delta_q}\left(\frac{1}{2}\right)$$

และ $$\Delta_q = \beta_1(d_{52}d_{23} - d_{53}d_{22}) + \beta_2(d_{53}d_{21} - d_{51}d_{23}) + \beta_3(d_{51}d_{22} - d_{52}d_{21})$$

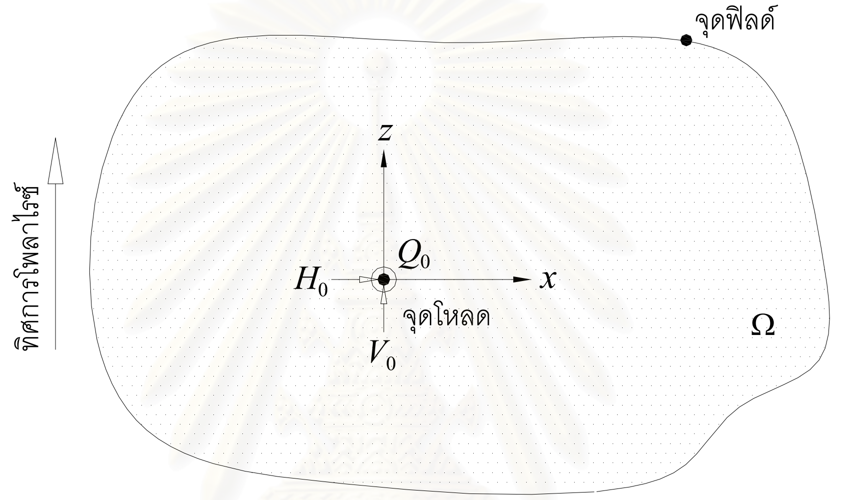


(ก) “ผลทางตรง “ ผลของแรงอัดทำให้เกิดกระแสไหลเข้าวงจร (ซ้ายมือ) และ
ผลของแรงดึงทำให้เกิดกระแสไหลออกจากวงจร (ขวามือ)



(ข) “ผลทางอ้อม” สนามไฟฟ้าในทิศทางเดียวกับทิศการโพลาไรซ์ทำให้วัสดุหดตัว (ซ้ายมือ) และ
สนามไฟฟ้าในทิศทางตรงข้ามกับทิศการโพลาไรซ์ทำให้วัสดุขยายตัว (ขวามือ)

รูปที่ 2.1 ปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริก



รูปที่ 2.2 การให้น้ำหนักบรรทุกหรือประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วย (H_0, V_0 หรือ Q_0) กระทำภายในโดเมนอนันต์

บทที่ 3

ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

การศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกด้วยระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณข้อปัญหาค่าขอบ โดยเริ่มจากการสร้างสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตที่เหมาะสมกับปัญหา จากการประยุกต์ใช้ผลเฉลยหลักมูลหรือฟังก์ชันของกรีน แล้วทำการแบ่งขอบเขตของโดเมนเป็นเอลิเมนต์ขอบเขตย่อยๆ ด้วยฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง (interpolating function) จะได้สมการบาวดารีเอลิเมนต์ จากนั้นทำการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขแล้วนำมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นระบบสมการพีชคณิตของปัญหา และทำการแก้ระบบสมการด้วยการแทนเงื่อนไขขอบเขตที่ทราบ เพื่อคำนวณหาผลเฉลยบนขอบเขต โดยงานวิจัยนี้ได้ทำการประยุกต์ใช้แบบจำลองบริเวณย่อย กับการประกอบระบบสมการพีชคณิตหลายบริเวณ สำหรับพิจารณาปัญหาสองโดเมน (วัสดุสองชนิดที่มีคุณสมบัติแตกต่างกัน) และทำการเพิ่มส่วนของการคำนวณหาผลเฉลยภายในโดเมน ซึ่งขั้นตอนของระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกทั้งหมด สามารถเขียนเป็นผังงานได้ดังรูปที่ 3.1

3.1 สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก ที่เขียนขึ้นจาก “ทฤษฎีส่วนกลับของเบตติ” โดยอาศัยความสัมพันธ์ของความหนาแน่นพลังงานความเครียดภายใน (internal strain energy density) ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก ในระบบที่สมมูลกันสองระบบ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้ (Liu และ Fan, 2001)

$$\left(\sigma_{ij}^{(1)} + e_{kij}E_k^{(1)}\right)\varepsilon_{ij}^{(2)} = \left(\sigma_{ij}^{(2)} + e_{kij}E_k^{(2)}\right)\varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{3.1}$$

โดยที่ $\sigma_{ij} + e_{kij}E_k$ คือความเค้นทางกล (mechanical stress) สมการข้างต้นจะประกอบด้วยระบบที่ยอมรับได้ (admissible system) สองระบบ โดยให้ $\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, E_k^{(1)},...,$ คือค่าในระบบที่ยอมรับได้ของระบบที่หนึ่ง และกำหนดให้ $\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, E_k^{(2)},...,$ คือค่าในระบบที่ยอมรับได้ของระบบที่สอง

เมื่อทำการหาปริพันธ์ตลอดโดเมนทางด้านซ้ายของสมการ (3.1) โดยอาศัยสมการ (2.1) ถึง (2.6) และการแปลงปริพันธ์ตลอดโดเมน $\int_\Omega \left(\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(2)}\right)_{,j} d\Omega$ และ $\int_\Omega \left(D_i^{(2)}\phi^{(1)}\right)_{,i} d\Omega$ มาเป็นปริพันธ์ขอบเขตโดยใช้ “ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนท์” (divergence theorem) ดังนี้

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(2)}\right)_{,j}d\Omega = \int_{\Gamma}\left(\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(2)}\right)n_j d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma}\left(\sigma_{ij}^{(1)}n_j\right)u_i^{(2)}d\Gamma = \int_{\Gamma}\tau_i^{(1)}u_i^{(2)}d\Gamma \tag{3.2ก}$$

และ

$$\int_{\Omega}\left(D_i^{(2)}\phi^{(1)}\right)_{,i}d\Omega = \int_{\Gamma}\left(D_i^{(2)}\phi^{(1)}\right)n_i d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma}\left(D_i^{(2)}n_i\right)\phi^{(1)}d\Gamma = -\int_{\Gamma}q^{(2)}\phi^{(1)}d\Gamma \tag{3.2ข}$$

ดังนั้นปริพันธ์ตลอดโดเมนทางด้านซ้ายของสมการ (3.1) จะได้

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}^{(1)}+e_{kij}E_k^{(1)}\right)\varepsilon_{ij}^{(2)}d\Omega = \int_{\Omega}\sigma_{ij}^{(1)}u_{i,j}^{(2)}d\Omega + \int_{\Omega}\left(e_{ikl}\varepsilon_{kl}^{(2)}\right)E_i^{(1)}d\Omega$$

$$= \int_{\Omega}\left(\left(\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(2)}\right)_{,j} - \sigma_{ij,j}^{(1)}u_i^{(2)}\right)d\Omega + \int_{\Omega}\left(D_i^{(2)} - \kappa_{ik}E_k^{(2)}\right)E_i^{(1)}d\Omega$$

$$= \int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}^{(1)}u_i^{(2)}\right)_{,j}d\Omega - \int_{\Omega}\sigma_{ij,j}^{(1)}u_i^{(2)}d\Omega + \int_{\Omega}D_i^{(2)}E_i^{(1)}d\Omega - \int_{\Omega}\kappa_{ik}E_k^{(2)}E_i^{(1)}d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma}\tau_i^{(2)}u_i^{(1)}d\Gamma + \int_{\Omega}F_i^{(1)}u_i^{(2)}d\Omega - \int_{\Omega}D_i^{(2)}\phi_{,i}^{(1)}d\Omega - \int_{\Omega}\kappa_{ik}E_i^{(1)}E_k^{(2)}d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma}\tau_i^{(1)}u_i^{(1)}d\Gamma + \int_{\Omega}F_i^{(1)}u_i^{(2)}d\Omega - \int_{\Omega}\left(\left(D_i^{(2)}\phi^{(1)}\right)_{,i} - D_{i,i}^{(2)}\phi^{(1)}\right)d\Omega$$
$$- \int_{\Omega}\kappa_{ik}E_i^{(1)}E_k^{(2)}d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma}\tau_i^{(1)}u_i^{(1)}d\Gamma + \int_{\Omega}F_i^{(1)}u_i^{(2)}d\Omega - \int_{\Omega}\left(D_i^{(2)}\phi^{(1)}\right)_{,i}d\Omega + \int_{\Omega}D_{i,i}^{(2)}\phi^{(1)}d\Omega$$
$$- \int_{\Omega}\kappa_{ik}E_i^{(1)}E_k^{(2)}d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma}\tau_i^{(1)}u_i^{(2)}d\Gamma + \int_{\Omega}F_i^{(1)}u_i^{(2)}d\Omega + \int_{\Gamma}q^{(2)}\phi^{(1)}d\Gamma + \int_{\Omega}\rho_e^{(2)}\phi^{(1)}d\Omega$$
$$- \int_{\Omega}\kappa_{ik}E_i^{(1)}E_k^{(2)}d\Omega \tag{3.3}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อทำการหาปริพันธ์ตลอดโดเมนทางด้านขวาของสมการ (3.1) จะได้

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}^{(2)}+e_{kij}E_k^{(2)}\right)\varepsilon_{ij}^{(1)}d\Omega = \int_{\Gamma}\tau_i^{(2)}u_i^{(1)}d\Gamma + \int_{\Omega}F_i^{(2)}u_i^{(1)}d\Omega + \int_{\Gamma}q^{(1)}\phi^{(2)}d\Gamma + \int_{\Omega}\rho_e^{(1)}\phi^{(2)}d\Omega$$
$$- \int_{\Omega}\kappa_{ik}E_i^{(2)}E_k^{(1)}d\Omega \tag{3.4}$$

ซึ่งสมการ (3.3) และ (3.4) เป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานความเครียดที่สะสมภายในชิ้นส่วนเพียโซ-อิเล็กทริก และงาน (สมมติ) ที่เกิดจากแรงภายนอกหรือประจุไฟฟ้าภายนอก ดังนั้นปริพันธ์ตลอดโดเมนของสมการ (3.1) จะได้

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \tau_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_\Omega F_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega + \int_\Gamma q^{(2)} \phi^{(1)} d\Gamma + \int_\Omega \rho_e^{(2)} \phi^{(1)} d\Omega - \int_\Omega \cancel{\kappa_{ik} E_i^{(1)} E_k^{(2)}}\, d\Omega \\ &\quad = \int_\Gamma \tau_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_\Omega F_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega + \int_\Gamma q^{(1)} \phi^{(2)} d\Gamma + \int_\Omega \rho_e^{(1)} \phi^{(2)} d\Omega - \int_\Omega \cancel{\kappa_{ik} E_i^{(2)} E_k^{(1)}}\, d\Omega\end{aligned} \tag{3.5}$$

สมการ (3.5) เป็นสมการความสมมูลของงานที่เกิดจากระบบของแรงหรือประจุไฟฟ้าสองระบบ โดยที่ดัชนีดัมมี i (dummy index i) ในสมการ (3.5) สามารถแทนที่ด้วยดัชนีดัมมี j (dummy index j) ตลอดทั้งสมการ และปริพันธ์ของพจน์ $\kappa_{ik} E_i^{(1)} E_k^{(2)}$ และ $\kappa_{ik} E_i^{(2)} E_k^{(1)}$ จะมีค่าเท่ากันเนื่องจากความสมมาตรของค่าคงตัวไดอิเล็ก-ตริก (κ_{ik}) แล้วทำการจัดรูปสมการ (3.5) จะได้สมการ (3.6) ซึ่งเป็นสมการความสัมพันธ์จากทฤษฎีงานส่วนกลับของเบตติสำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

$$\int_\Gamma \left(\tau_j^{(2)} u_j^{(1)} - \tau_j^{(1)} u_j^{(2)} - q^{(2)} \phi^{(1)} + q^{(1)} \phi^{(2)} \right) d\Gamma = \int_\Omega \left(F_j^{(1)} u_j^{(2)} - F_j^{(2)} u_j^{(1)} + \rho_e^{(2)} \phi^{(1)} - \rho_e^{(1)} \phi^{(2)} \right) d\Omega \tag{3.6}$$

เมื่อกำหนดให้ระบบที่หนึ่ง คือระบบจริง (real system) ที่มีค่า $u_j^{(1)} = u_j$, $\tau_j^{(1)} = \tau_j$, $\phi^{(1)} = \phi$, $q^{(1)} = q$, $F_j^{(1)} = F_j$ และ $\rho_e^{(1)} = \rho_e$ ในขณะที่ระบบที่สอง คือระบบสมมติ (virtual system) ที่สามารถหาได้จากผลเฉลยหลักมูล (ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 2.5) จากการให้น้ำหนักบรรทุกหรือประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วย ทำให้สามารถเขียนสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตได้ 2 สมการ คือสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่ง u_i และสำหรับศักย์ไฟฟ้า ϕ

3.1.1 สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่ง

สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่ง สามารถหาได้โดยการแทนค่าผลเฉลยหลักมูล จากการให้น้ำหนักบรรทุกกระทำเป็นจุดหนึ่งหน่วย ($e_i^{(2)}(\mathrm{x}')$) ในทิศทาง i เมื่อ $i = x,\ z$ ตามลำดับ บนจุดโหลด x' ดังรูปที่ 3.2 ลงในสมการ (3.6) โดยที่ผลเฉลยหลักมูลสามารถเขียนแทนด้วยฟังก์ชันเคอร์เนล (kernel function) ดังนี้

$$\tau_j^{(2)}(\mathrm{x}) = H_{ji}(\mathrm{x}; \mathrm{x}') e_i^{(2)}(\mathrm{x}') \tag{3.7ก}$$

$$u_j^{(2)}(\mathrm{x}) = G_{ji}(\mathrm{x}; \mathrm{x}') e_i^{(2)}(\mathrm{x}') \tag{3.7ข}$$

$$q^{(2)}(\mathrm{x}) = H_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')e_i^{(2)}(\mathrm{x}') \tag{3.7ค}$$

$$\phi^{(2)}(\mathrm{x}) = G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')e_i^{(2)}(\mathrm{x}') \tag{3.7ง}$$

$$\rho_e^{(2)}(\mathrm{x}) = 0 \tag{3.7จ}$$

$$\begin{aligned} F_j^{(2)}(\mathrm{x}) &= e_j^{(2)}(\mathrm{x}) \\ &= e_j^{(2)}(\mathrm{x}')\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}') \\ &= e_i^{(2)}(\mathrm{x}')\delta_{ij}\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}') \end{aligned} \tag{3.7ฉ}$$

โดยที่	$\mathrm{x}(x,z)$	คือ จุดฟีลด์ (field point) เป็นจุดบนขอบเขต ($\mathrm{x} \in \Gamma$)
	$\mathrm{x}'(x,z)$	คือ จุดโหลด (load point หรือ source point) เป็นจุดบนโดเมนและขอบเขต ($\mathrm{x}' \in \Omega \cup \Gamma$)
	δ_{ij}	คือ โครเนคเคอร์เดลตา (Kronecker delta)
	$\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}')$	คือ ฟังก์ชันไดแรกเดลตา (Dirac delta-function)
	$e_i(\mathrm{x}')$	คือ น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วยที่จุดโหลด x' ในทิศทาง $i = x, z$
	$H_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')$	คือ ความเค้นที่ผิวในทิศทาง $j = x, z$ ที่จุดฟีลด์ จากการให้น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วยในทิศทาง $i = x, z$ ที่จุดโหลด
	$G_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')$	คือ การเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทาง $j = x, z$ ที่จุดฟีลด์ จากการให้น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วยในทิศทาง $i = x, z$ ที่จุดโหลด
	$H_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')$	คือ ประจุไฟฟ้าที่ผิวที่จุดฟีลด์ จากการให้น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วยในทิศทาง $i = x, z$ ที่จุดโหลด
	$G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')$	คือ ศักย์ไฟฟ้าที่จุดฟีลด์ จากการให้น้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วยในทิศทาง $i = x, z$ ที่จุดโหลด

ซึ่งฟังก์ชันเคอร์เนล G_{ji} , G_{qi} , H_{ji} และ H_{qi} ที่กล่าวถึงข้างต้น สามารถคำนวณได้จากสมการ (ก.1) ถึง (ก.6) และ (ก.10) ถึง (ก.15) ในภาคผนวก ก

เมื่อแทนค่าผลเฉลยหลักมูล (ฟังก์ชันเคอร์เนล) ที่ได้จากสมการ (3.7ก) ถึง (3.7ฉ) ลงในความสัมพันธ์จากทฤษฎีงานส่วนกลับของเบตติสำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก สมการที่ (3.6) จะได้

$$\int_{\Gamma}\Big(H_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\,\cancel{e_i^{(2)}}u_j-\tau_j G_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\,\cancel{e_i^{(2)}}-H_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\,\cancel{e_i^{(2)}}\phi\;+q\;G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\,\cancel{e_i^{(2)}}\Big)d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\Big(F_j\,G_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\,\cancel{e_i^{(2)}}-\cancel{e_i^{(2)}}\,\delta_{ij}\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}')u_j-\rho_e G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\,\cancel{e_i^{(2)}}\Big)d\Omega \qquad (3.8)$$

จากสมการ (3.8) พบว่าเมื่อกำจัดพจน์ $e_i^{(2)}(\mathrm{x}')$ ออกตลอดทั้งสมการ แล้วสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\int_{\Gamma}\Big(H_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')u_j(\mathrm{x})-\tau_j(\mathrm{x})G_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')-H_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\phi(\mathrm{x})+q(\mathrm{x})G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\Big)d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\Big(F_j\;(\mathrm{x})G_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')-\delta_{ij}\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}')u_j(\mathrm{x})-\rho_e\,(\mathrm{x})G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\Big)d\Omega \qquad (3.9)$$

ปริพันธ์ตลอดโดเมนของพจน์ $\delta_{ij}\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}')u_j(\mathrm{x})$ ในสมการ (3.9) จะได้

$$\int_{\Omega}\delta_{ij}\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}')u_j(\mathrm{x})\,d\Omega=\int_{\Omega}u_i\;(\mathrm{x})\delta(\mathrm{x};\mathrm{x}')\,d\Omega$$

$$=\;c(\mathrm{x}')u_i\;(\mathrm{x}') \qquad (3.10)$$

โดยที่ $c(\mathrm{x}')$ เป็นสัมประสิทธิ์ขอบเขต (boundary coefficient) สำหรับขอบเรียบ มีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดโหลด x' ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.10) ลงในสมการ (3.9) และทำการจัดรูปสมการ จะได้สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่ง u_i จากการให้น้ำหนักบรรทุกกระทำเป็นจุดหนึ่งหน่วยบนจุดโหลด x' ในทิศทาง i เมื่อ $i = x,\ z$ ดังนี้ (Xu และ Rajapakse, 1998)

$$\begin{aligned}c(\mathrm{x}')u_i(\mathrm{x}')=&\int_{\Gamma}\big[G_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\tau_j(\mathrm{x})-H_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')u_j(\mathrm{x})\big]d\Gamma(\mathrm{x})\\&-\int_{\Gamma}\big[G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')q\;(\mathrm{x})-H_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\phi\;(\mathrm{x})\big]d\Gamma(\mathrm{x})\\&+\int_{\Omega}\big[G_{ji}(\mathrm{x};\mathrm{x}')F_j(\mathrm{x})-G_{qi}(\mathrm{x};\mathrm{x}')\rho_e(\mathrm{x})\big]d\Omega,\qquad i,j=x,z\end{aligned} \qquad (3.11)$$

3.1.2 สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตสำหรับศักย์ไฟฟ้า

สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับศักย์ไฟฟ้า สามารถหาได้ในทำนองเดียวกับการหาสมการปริพันธ์ขอบเขตสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่ง โดยการแทนค่าผลเฉลยหลักมูล จากการให้ประจุ

ไฟฟ้าหนึ่งหน่วย ($e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}'\right)$) บนจุดโหลด x' ลงในสมการ (3.6) โดยที่ผลเฉลยหลักมูลสามารถเขียนแทนด้วยฟังก์ชันเคอร์เนลดังนี้

$$\tau_j^{(2)}\left(\mathrm{x}\right)=H_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}'\right) \tag{3.12ก}$$

$$u_j^{(2)}\left(\mathrm{x}\right)=G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}'\right) \tag{3.12ข}$$

$$q^{(2)}\left(\mathrm{x}\right)=H_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}'\right) \tag{3.12ค}$$

$$\phi^{(2)}\left(\mathrm{x}\right)=G_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}'\right) \tag{3.12ง}$$

$$F_j^{(2)}\left(\mathrm{x}\right)=0 \tag{3.12จ}$$

$$\begin{aligned}\rho_e^{(2)}\left(\mathrm{x}\right)&=e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}\right)\\&=e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}'\right)\delta\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\end{aligned} \tag{3.12ฉ}$$

โดยที่	$\mathrm{x}\left(x,z\right)$	คือ จุดฟีลด์ (field point) เป็นจุดบนขอบเขต ($\mathrm{x}\in\Gamma$)
	$\mathrm{x}'\left(x,z\right)$	คือ จุดโหลด (load point หรือ source point) เป็นจุดบนโดเมนและขอบเขต ($\mathrm{x}'\in\Omega\cup\Gamma$)
	$\delta\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)$	คือ ฟังก์ชันไดแรกเดลตา (Dirac delta-function)
	$e_q\left(\mathrm{x}'\right)$	คือ ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยที่จุดโหลด x'
	$H_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)$	คือ ความเค้นที่ผิวในทิศทาง $j=x,z$ ที่จุดฟีลด์ จากการให้ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยที่จุดโหลด
	$G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)$	คือ การเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทาง $j=x,z$ ที่จุดฟีลด์ จากการให้ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยที่จุดโหลด
	$H_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)$	คือ ประจุไฟฟ้าที่ผิวที่จุดฟีลด์ จากการให้ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยที่จุดโหลด
	$G_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)$	คือ ศักย์ไฟฟ้าที่จุดฟีลด์ จากการให้ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยที่จุดโหลด

ซึ่งฟังก์ชันเคอร์เนล G_{jq} , G_{qq} , H_{jq} และ H_{qq} ที่กล่าวถึงข้างต้น สามารถคำนวณได้จากสมการ (ก.7) ถึง (ก.9) และ (ก.16) ถึง (ก.18) ในภาคผนวก ก

เมื่อแทนค่าผลเฉลยหลักมูล ที่ได้จากสมการ (3.12ก) ถึง (3.12ฉ) ลงในสมการความสัมพันธ์จากทฤษฎีงานส่วนกลับของเบตติสำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก สมการที่ (3.6) จะได้

$$\int_{\Gamma}\left(H_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\cancel{e_q^{(2)}}u_j-\tau_j G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\cancel{e_q^{(2)}}-H_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\cancel{e_i^{(2)}}\phi\;+q\;G_{qi}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\cancel{e_q^{(2)}}\right)d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\left(F_j\,G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\cancel{e_q^{(2)}}+\cancel{e_q^{(2)}}\,\delta\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\phi\;-\rho_e G_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\cancel{e_q^{(2)}}\right)d\Omega \qquad (3.13)$$

จากสมการ (3.13) พบว่าเมื่อกำจัดพจน์ $e_q^{(2)}\left(\mathrm{x}'\right)$ ออกตลอดทั้งสมการ แล้วสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\int_{\Gamma}\left(H_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)u_j\left(\mathrm{x}\right)-\tau_j\left(\mathrm{x}\right)G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)-H_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\phi\left(\mathrm{x}\right)+q\left(\mathrm{x}\right)G_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\right)d\Gamma$$

$$=\int_{\Omega}\left(F_j\left(\mathrm{x}\right)G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)+\delta\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\phi\left(\mathrm{x}\right)-\rho_e\left(\mathrm{x}\right)G_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\right)d\Omega \qquad (3.14)$$

ปริพันธ์ตลอดโดเมนของพจน์ $\delta\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\phi\left(\mathrm{x}\right)$ ในสมการ (3.14) จะได้

$$\int_{\Omega}\delta\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\phi\left(\mathrm{x}\right)d\Omega=c\left(\mathrm{x}'\right)\phi\left(\mathrm{x}'\right) \qquad (3.15)$$

โดยที่ $c\left(\mathrm{x}'\right)$ เป็นสัมประสิทธิ์ขอบเขตสำหรับขอบเรียบ มีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดโหลด x' ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.15) ลงในสมการ (3.14) และทำการจัดรูปสมการ จะได้สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซ-อิเล็กทริกสำหรับศักย์ไฟฟ้า ϕ จากการให้ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยบนจุดโหลด x' ดังนี้ (Xu และ Rajapakse, 1998)

$$\begin{aligned} c\left(\mathrm{x}'\right)\phi\left(\mathrm{x}'\right)=&-\int_{\Gamma}\left[G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\tau_j\left(\mathrm{x}\right)-H_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)u_j\left(\mathrm{x}\right)\right]d\Gamma\left(\mathrm{x}\right)\\ &+\int_{\Gamma}\left[G_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)q\left(\mathrm{x}\right)-H_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\phi\left(\mathrm{x}\right)\right]d\Gamma\left(\mathrm{x}\right)\\ &-\int_{\Omega}\left[G_{jq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)F_j\left(\mathrm{x}\right)-G_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\rho_e\left(\mathrm{x}\right)\right]d\Omega,\qquad j=x,z \end{aligned} \qquad (3.16)$$

จากสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขต (3.11) และ (3.16) สามารถเขียนรวมสมการทั้งสองเข้าด้วยกัน โดยกำหนดให้ $u_q\left(\mathrm{x}\right)=-\phi\left(\mathrm{x}\right)$, $\tau_q\left(\mathrm{x}\right)=-q\left(\mathrm{x}\right)$ และ $F_q\left(\mathrm{x}\right)=-\rho_e\left(\mathrm{x}\right)$ เมื่อรวมสมการทั้งสองแล้ว จะได้สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า (displacement-electric potential BIE) ที่ใช้สำหรับศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกซึ่งสามารถแสดงในรูปแบบสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้ (Dingและคณะ, 1998; Liu และ Fan, 2001)

$$\mathbf{C}(\mathrm{x}')\mathbf{U}(\mathrm{x}') = \int_{\Gamma} \left[\mathbf{G}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}')\mathbf{T}(\mathrm{x}) - \mathbf{H}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}')\mathbf{U}(\mathrm{x}) \right] d\Gamma(\mathrm{x})$$

$$+ \int_{\Omega} \left[\mathbf{G}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}')\mathbf{F}(\mathrm{x}) \right] d\Omega \tag{3.17}$$

เมื่อเวกเตอร์ $\mathbf{U}$ แทนการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า เวกเตอร์ $\mathbf{T}$ แทนความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว เวกเตอร์ $\mathbf{F}$ แทนแรงวัตถุและประจุอิสระ เมทริกซ์ $\mathbf{G}$ และ $\mathbf{H}$ แทนฟังก์ชันเคอร์เนล และเมทริกซ์ $\mathbf{C}$ แทนสัมประสิทธิ์ขอบเขตโดยที่

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \\ u_q = -\phi \end{Bmatrix} \tag{3.18ก}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_z \\ \tau_q = -q \end{Bmatrix} \tag{3.19ข}$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \\ F_q = -\rho_e \end{Bmatrix} \tag{3.20ค}$$

$$\mathbf{G}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') = \begin{bmatrix} G_{xx}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & G_{zx}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & G_{qx}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') \\ G_{xz}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & G_{zz}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & G_{qz}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') \\ G_{xq}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & G_{zq}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & G_{qq}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') \end{bmatrix} \tag{3.21ก}$$

$$\mathbf{H}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') = \begin{bmatrix} H_{xx}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & H_{zx}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & H_{qx}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') \\ H_{xz}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & H_{zz}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & H_{qz}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') \\ H_{xq}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & H_{zq}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') & H_{qq}(\mathrm{x};\, \mathrm{x}') \end{bmatrix} \tag{3.21ข}$$

$$\mathbf{C}(\mathrm{x}') = \begin{cases} \mathbf{I}, & \forall \mathrm{x}' \in \Omega \\ \dfrac{1}{2}\mathbf{I}, & \forall \mathrm{x}' \in \Gamma \ (\text{smooth}) \\ 0, & \forall \mathrm{x}' \notin \Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

และเมทริกซ์ $\mathbf{C}$ ในสมการ (3.22) มีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดโหลด x' ที่พิจารณา โดยที่ $\mathbf{I}$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด [3 x 3]

สำหรับปัญหาที่ไม่มีแรงวัตถุและประจุอิสระ ($F_x,\ F_z,\ \rho_e = 0$) พจน์ของ $\int_\Omega \left[\mathbf{G}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)\mathbf{F}\left(\mathrm{x}\right)\right]d\Omega$ ในสมการเมทริกซ์ (3.17) จะมีค่าเท่ากับศูนย์

3.2 ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงและการแปลงเชิงเรขาคณิตของเอลิเมนต์

ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง (interpolation function) และการแปลงเชิงเรขาคณิต (geometrical transformation) ของเอลิเมนต์แบบหนึ่งมิติ หรือเอลิเมนต์แบบเส้น (line element) ดังรูปที่ 3.3 โดยที่ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง เป็นฟังก์ชันสำหรับเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อ (node) ภายในเอลิเมนต์ ซึ่งอาจแทนด้วยฟังก์ชันค่าคงตัว ฟังก์ชันเส้นตรง หรือฟังก์ชันเส้นโค้งพาราโบรา สามารถเขียนแทนฟังก์ชันของค่าที่จุดต่อได้ดังนี้ (Brebbia และ Dominguez, 1992; Banerjee, 1994)

$$x(\eta) = \sum_{k=1}^{n} N^k(\eta)\, x^k \tag{3.23}$$

$$z(\eta) = \sum_{k=1}^{n} N^k(\eta)\, z^k \tag{3.24}$$

โดยที่ $x(\eta)$ และ $z(\eta)$ คือค่าพิกัดตำแหน่ง x และ z ในพิกัดธรรมชาติ x^k และ z^k คือค่าพิกัดตำแหน่ง x และ z ของจุดต่อ k ภายในเอลิเมนต์ในพิกัดคาร์ทีเซียน $N^k(\eta)$ คือฟังก์ชันสัณฐาน (shape functions) ที่เขียนในรูปของพิกัดธรรมชาติ เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n$ และ n คือจำนวนจุดต่อทั้งหมดภายในเอลิเมนต์

- ถ้า $n = 1$ จะได้ “เอลิเมนต์ค่าคงตัว” (constant element) เป็นเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยค่าคงตัวตลอดทั้งเอลิเมนต์ ซึ่งฟังก์ชันสัณฐานจะมีค่าดังนี้

$$N^1(\eta) = 1 \tag{3.25}$$

- ถ้า $n = 2$ จะได้ “เอลิเมนต์เชิงเส้น” (linear element) เป็นเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อสองจุดที่ปลายทั้งสองข้างของเอลิเมนต์ ซึ่งฟังก์ชันสัณฐานจะมีค่าดังนี้

$$N^1(\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta) \tag{3.26ก}$$

$$N^2(\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta) \tag{3.26ข}$$

- ถ้า $n = 3$ จะได้ “เอลิเมนต์กำลังสอง” (quadratic element) เป็นเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อสามจุดที่ปลายทั้งสองข้างและที่กึ่งกลางของเอลิเมนต์ ซึ่งฟังก์ชันสัณฐานจะมีค่าดังนี้

$$N^1\left(\eta\right) = -\frac{1}{2}\eta\left(1-\eta\right) \qquad (3.27ก)$$

$$N^2\left(\eta\right) = \left(1+\eta\right)\left(1-\eta\right) = 1-\eta^2 \qquad (3.27ข)$$

$$N^3\left(\eta\right) = \frac{1}{2}\eta_1\left(1+\eta\right) \qquad (3.27ค)$$

สำหรับค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า ความเค้นที่ผิว และประจุไฟฟ้าที่ผิว สามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงของเอลิเมนต์ขอบเขตได้ดังนี้

$$u_i\left(\eta\right) = \sum_{k=1}^{n} N^k\left(\eta\right) u_i^k, \qquad i = x,\, z,\, q \qquad (3.28)$$

$$\tau_i\left(\eta\right) = \sum_{k=1}^{n} N^k\left(\eta\right) \tau_i^k, \qquad i = x,\, z,\, q \qquad (3.29)$$

โดยที่ $u_i\left(\eta\right)$ คือการเปลี่ยนตำแหน่งหรือศักย์ไฟฟ้าในพิกัดธรรมชาติ $\tau_i\left(\eta\right)$ คือความเค้นที่ผิวหรือประจุไฟฟ้าที่ผิวในพิกัดธรรมชาติ u_i^k คือการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทาง x และ z เมื่อ $i = x,\, z$ หรือศักย์ไฟฟ้าเมื่อ $i = q$ ของจุดต่อ k ในพิกัดคาร์ทีเซียน และ τ_i^k คือความเค้นที่ผิวในทิศทาง x และ z เมื่อ $i = x,\, z$ หรือประจุไฟฟ้าที่ผิวเมื่อ $i = q$ ของจุดต่อ k ในพิกัดคาร์ทีเซียน

ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (3.28) และ (3.29) ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{U} = \mathbf{N}\,\mathbf{u} \qquad (3.30)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}\,\boldsymbol{\tau} \qquad (3.31)$$

โดยที่ $\mathbf{U}$ แทนการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า $\mathbf{T}$ แทนความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว ดังแสดงในสมการ (3.17ก) และ (3.17ข) ตามลำดับ

$$\mathbf{u} = \{\underset{\sim}{\mathbf{u}}^1 \quad \underset{\sim}{\mathbf{u}}^2 \quad \cdots \quad \underset{\sim}{\mathbf{u}}^n\}^T \qquad (3.32ก)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \{\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}}^1 \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}}^2 \quad \cdots \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}}^n\}^T \qquad (3.32ข)$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}^1 \quad \mathbf{N}^2 \quad \cdots \quad \mathbf{N}^n] \qquad (3.32ค)$$

และ $\mathbf{u}$ แทนเวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้าของจุดต่อภายในเอลิเมนต์ $\boldsymbol{\tau}$ แทนเวคเตอร์ความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิวของจุดต่อภายในเอลิเมนต์ และ $\mathbf{N}$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันสัณฐานของเอลิเมนต์

โดยที่

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}}^k = \{u_x^k \quad u_z^k \quad -\phi^k\} \tag{3.33ก}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}}^k = \{\tau_x^k \quad \tau_z^k \quad -q^k\} \tag{3.33ข}$$

$$\mathbf{N}^k = \begin{bmatrix} N^k & 0 & 0 \\ 0 & N^k & 0 \\ 0 & 0 & N^k \end{bmatrix} \tag{3.33ค}$$

การแปลงความยาวของเอลิเมนต์จากพิกัดคาร์ทีเซียน (x, z) มาเป็นพิกัดธรรมชาติ (η) สามารถทำได้ดังนี้

$$d\Gamma(x, z) = J(\eta)\, d\Gamma(\eta) \tag{3.34}$$

$$J(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx(\eta)}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz(\eta)}{d\eta}\right)^2} \tag{3.35}$$

โดยที่ $J(\eta)$ คือจาโคเบียน (Jacobian) ของปริพันธ์ตามเส้น $x(\eta)$ และ $z(\eta)$ คือค่าพิกัดตำแหน่ง x และ z ในพิกัดธรรมชาติ ซึ่งคำนวณจากสมการ (3.23) และ (3.24)

ดังนั้นการแปลงปริพันธ์ตามเส้น (line integral) จากพิกัดคาร์ทีเซียน (x, z) มาเป็นพิกัดธรรมชาติ (η) โดยแปลงฟังก์ชันของตัวแปร x และ y มาเป็นฟังก็ชันของตัวแปร η ด้วยสมการ (3.23) และ (3.24) และทำการแปลงปริพันธ์ โดยใช้สมการ (3.34) และ (3.35) ดังนี้

$$I = \int f(x, z)\, d\Gamma(x, z) = \int f(\eta)\, J(\eta)\, d\Gamma(\eta) \tag{3.36}$$

3.3 สมการบาวดารีเอลิเมนต์

การสร้างสมการบาวดารีเอลิเมนต์ โดยการแบ่งขอบเขตของโดเมนเป็นเอลิเมนต์ขอบเขตย่อยๆ (หรือชิ้นประกอบขอบเขตย่อยๆ) และเขียนสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ขอบเขต แล้วนำสมการที่ได้มาประกอบเข้าด้วยกันเพื่อใช้หาผลเฉลย ซึ่งจำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง และการแปลงเชิงเรขาคณิต ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.2 ดังนั้นสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก (3.17) ในกรณีที่ไม่คิดถึงผลของแรงวัตถุและประจุอิสระ สามารถเขียนเป็นสมการบาวดารีเอลิเมนต์ในรูปแบบสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{C}(\mathrm{x}')\mathbf{U}(\mathrm{x}') = \sum_{m=1}^{NE}\left(\left\{\int_{\Delta\Gamma_m}\left[\mathbf{G}\big(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\big)\mathbf{N}(\eta)J(\eta)\right]d\Gamma(\eta)\right\}\boldsymbol{\tau}^{\langle m\rangle} - \left\{\int_{\Delta\Gamma_m}\left[\mathbf{H}\big(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\big)\mathbf{N}(\eta)J(\eta)\right]d\Gamma(\eta)\right\}\mathbf{u}^{\langle m\rangle}\right) \qquad (3.37)$$

โดยที่ NE คือจำนวนของเอลิเมนต์ขอบเขตทั้งหมด และ $\Delta\Gamma_m$ คือความยาวของเอลิเมนต์ขอบเขต m

เมื่อนำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ (3.37) ที่ได้ของแต่ละเอลิเมนต์มาหาปริพันธ์เชิงตัวเลข โดยคำนึงถึงภาวะเอกฐานที่จะเกิดขึ้นในกรณีที่จุดฟิลด์ซ้อนทับจุดโหลด ดังรูปที่ 3.4 ซึ่งผลของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขของเอลิเมนต์ที่ m สามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{G}_{ji}^{\langle m\rangle} = \int_{\Delta\Gamma_m}\left[\mathbf{G}\big(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\big)\mathbf{N}(\eta)J(\eta)\right]d\Gamma(\eta) \qquad (3.38)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ji}^{\langle m\rangle} = \int_{\Delta\Gamma_m}\left[\mathbf{H}\big(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\big)\mathbf{N}(\eta)J(\eta)\right]d\Gamma(\eta) \qquad (3.39\text{ก})$$

และ

$$\mathbf{H}_{ji}^{\langle m\rangle} = \begin{cases}\hat{\mathbf{H}}_{ji}^{\langle m\rangle} & ;\ i \neq j \in \Delta\Gamma_m \\ \hat{\mathbf{H}}_{ji}^{\langle m\rangle} + \mathbf{C}_{ji} & ;\ i = j \in \Delta\Gamma_m\end{cases} \qquad (3.39\text{ข})$$

จากนั้นทำการประกอบระบบสมการพีชคณิตของปัญหา โดยการนำสมการ (3.38) และ (3.39) ที่ได้ของแต่ละเอลิเมนต์แทนลงในสมการบาวดารีเอลิเมนต์ (3.37) จะได้

$$\sum_{m=1}^{NE}\mathbf{G}_{ji}^{\langle m\rangle}\boldsymbol{\tau}^{\langle m\rangle} = \sum_{m=1}^{NE}\mathbf{H}_{ji}^{\langle m\rangle}\mathbf{u}^{\langle m\rangle} \qquad (3.40)$$

หรือเขียนสมการ (3.40) ในรูปเมทริกซ์ระบบสมการรวมของปัญหา

$$\left[\mathbf{G}\right]\left\{\boldsymbol{\tau}\right\}=\left[\mathbf{H}\right]\left\{\mathbf{u}\right\} \tag{3.41}$$

เมื่อทำการจัดเรียงสมการ (3.41) โดยแยกตัวแปรที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า โดยพิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่กำหนดให้ จะได้ระบบสมการพีชคณิตดังสมการ (3.48) ซึ่งเป็นวิธีการพิจารณาปัญหาแบบหนึ่งโดเมน

สำหรับกรณีที่ปัญหาประกอบด้วยหลายโดเมนที่ประกอบด้วยวัสดุต่างชนิดกัน (งานวิจัยนี้) ดังรูปที่ 3.5 สามารถทำการประกอบระบบสมการพีชคณิตหลายบริเวณ โดยการแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นบริเวณย่อยๆ (โดเมนย่อยๆ) และเขียนเมทริกซ์ระบบสมการพีชคณิตสำหรับแต่ละบริเวณย่อยดังนี้

บริเวณย่อยที่ 1 ;

$$\begin{bmatrix}\mathbf{G}_B^1 & \mathbf{G}_I^1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\tau}_B^1\\ \boldsymbol{\tau}_I^1\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_B^1 & \mathbf{H}_I^1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_B^1\\ \mathbf{u}_I^1\end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

บริเวณย่อยที่ 2 ;

$$\begin{bmatrix}\mathbf{G}_B^2 & \mathbf{G}_I^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\tau}_B^2\\ \boldsymbol{\tau}_I^2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_B^2 & \mathbf{H}_I^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_B^2\\ \mathbf{u}_I^2\end{Bmatrix} \tag{3.43}$$

โดยที่ตัวยก 1, 2 แทนโดเมนหนึ่ง หรือโดเมนสอง ตัวห้อย I แทนตำแหน่งจุดต่อที่ต่อประสานระหว่างโดเมน (interface node) และตัวห้อย B แทนตำแหน่งจุดต่อที่ขอบเขตรอบนอกของแต่ละโดเมน (external boundary node) ที่ไม่ได้ต่อประสานกับโดเมนอื่น

จากการพิจารณา “เงื่อนไขต่อประสาน” (interface condition) ที่ได้จากเงื่อนไขความสอดคล้อง และความสมดุลทั้งทางกลและทางไฟฟ้า ที่ตำแหน่งรอยต่อระหว่างโดเมน สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\mathbf{u}_I=\mathbf{u}_I^1=\mathbf{u}_I^2 \qquad \text{(compatibility)} \tag{3.44ก}$$

$$\boldsymbol{\tau}_I=\boldsymbol{\tau}_I^1=-\boldsymbol{\tau}_I^2 \qquad \text{(equilibrium)} \tag{3.44ข}$$

เมื่อแทนเงื่อนไขต่อประสาน สมการ (3.44ก) และ (3.44ข) ลงในสมการ (3.42) และ (3.43) จะได้สมการ (3.45) และ (3.46) ตามลำดับดังนี้

บริเวณย่อยที่ 1 ;

$$\begin{bmatrix}\mathbf{H}_B^1 & \mathbf{H}_I^1 & -\mathbf{G}_I^1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_B^1\\ \mathbf{u}_I\\ \boldsymbol{\tau}_I\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_B^1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_B^1\end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

บริเวณย่อยที่ 2 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_B^2 & \mathbf{H}_I^2 & \mathbf{G}_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_B^2 \\ \mathbf{u}_I \\ \boldsymbol{\tau}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_B^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_B^2 \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

รวมสมการ (3.45) และ (3.46) ของแต่ละบริเวณย่อย จะได้สมการ (3.47) ดังนี้

$$\left[\begin{array}{c:cc:c} \mathbf{H}_B^1 & \mathbf{H}_I^1 & -\mathbf{G}_I^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_I^2 & \mathbf{G}_I^2 & \mathbf{H}_B^2 \end{array}\right]_{\underbrace{\qquad\qquad}_{Interface}} \left\{\begin{array}{c} \mathbf{u}_B^1 \\ \hdashline \mathbf{u}_I \\ \boldsymbol{\tau}_I \\ \hdashline \mathbf{u}_B^2 \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_B^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_B^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\tau}_B^1 \\ \boldsymbol{\tau}_B^2 \end{Bmatrix} \tag{3.47}$$

เมื่อทำการจัดเรียงสมการ (3.47) โดยแยกตัวแปรที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า โดยพิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ จะได้ระบบสมการพีชคณิตดังนี้

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{B}\} \tag{3.48}$$

โดยที่ $[\mathbf{A}]$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix) $\{\mathbf{X}\}$ คือเวคเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ณ จุดต่อของการเปลี่ยนตำแหน่ง (หรือ ความเค้นที่ผิว) ศักย์ไฟฟ้า (หรือประจุไฟฟ้าที่ผิว) และ $\{\mathbf{B}\}$ คือเวคเตอร์ที่ทราบค่าจากเงื่อนไขขอบเขตที่จุดต่อของการเปลี่ยนตำแหน่ง (หรือ ความเค้นที่ผิว) ศักย์ไฟฟ้า (หรือประจุไฟฟ้าที่ผิว) และเมื่อทำการแก้ระบบสมการพีชคณิต (3.48) จะสามารถหาผลเฉลยของค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า ความเค้นที่ผิว และประจุไฟฟ้าที่จุดต่อบนขอบเขตได้

3.4 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข

ปริพันธ์ที่พบในระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สามารถแบ่งออกเป็นสามชนิดหลักๆ คือปริพันธ์ไม่เอกฐาน (non-singular integral) ปริพันธ์เอกฐานอย่างอ่อน (weakly-singular integral) และปริพันธ์เอกฐานอย่างแข็ง (strongly-singular integral) ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ทำการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข (numerical integration) ของฟังก์ชันสัณฐาน-เคอร์เนล (kernel-shape function) ในสมการ (3.37) โดยพิจารณาชนิดของปริพันธ์จากผลเฉลยหลักมูลหรือฟังก์ชันเคอร์เนลในภาคผนวก ก พบว่าในกรณีที่จุดฟิลด์และจุดโหลดไม่ซ้อนทับกัน (อยู่คนละตำแหน่ง) จะได้ปริพันธ์ไม่เอกฐาน ส่วนกรณีที่จุดฟิลด์ซ้อนทับจุดโหลดภายในเอลิเมนต์เดียวกัน จะเกิดภาวะเอกฐานลอการิทึม ซึ่งสามารถเขียนเป็นผังงานในการคำนวณหาปริพันธ์เชิงตัวเลขของงานวิจัยนี้ได้ดังรูปที่ 3.4 และมีวิธีการคำนวณหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยแบ่งตามชนิดของปริพันธ์ได้ดังนี้

3.4.1 ปริพันธ์ไม่เอกฐาน

ปริพันธ์ไม่เอกฐาน คือปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นอนันต์ตลอดช่วงปริพันธ์ และค่าของปริพันธ์ที่คำนวณได้ไม่เป็นอนันต์ด้วย ซึ่งปริพันธ์ชนิดนี้เกิดขึ้นในกรณีที่จุดฟิลด์และจุดโหลดไม่ซ้อนทับกัน (อยู่คนละตำแหน่ง) สูตรการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขที่ใช้คือ “สูตรการหาปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์” (Gauss-Legendre integration formula)

$$I = \int_{-1}^{+1} f\left(x\right) d\Gamma\left(x\right) \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right) \tag{3.49}$$

โดยที่ w_i คือน้ำหนักจุดเกาส์ (weights) x_i คือตำแหน่งจุดเกาส์ (Gauss point locations) และ n คือจำนวนของจุดเกาส์ (number of Gauss points)

3.4.2 ปริพันธ์เอกฐานอย่างอ่อน

ปริพันธ์เอกฐานอย่างอ่อน คือปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่าเป็นอนันต์ภายในช่วงปริพันธ์ แต่ผลของการหาปริพันธ์ที่คำนวณได้ไม่เป็นอนันต์ เช่น ฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งภาวะที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่า “ภาวะเอกฐานลอการิทึม” (logarithmic singularity) พบในกรณีที่จุดฟิลด์ซ้อนทับจุดโหลดภายในเอลิเมนต์ขอบเขตเดียวกัน สูตรการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขที่ใช้คือ

$$I = \int_{0}^{1} \ln\left(\frac{1}{x}\right) f\left(x\right) d\Gamma\left(x\right) \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right) \tag{3.50}$$

โดยที่ w_i , x_i และ n คือ น้ำหนักจุดเกาส์ ตำแหน่งจุดเกาส์ และจำนวนของจุดเกาส์ ตามลำดับ

3.4.3 ปริพันธ์เอกฐานอย่างแข็ง

ปริพันธ์เอกฐานอย่างแข็ง คือปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่าเป็นอนันต์ภายในช่วงปริพันธ์ และผลของการหาปริพันธ์ที่ได้มีค่าเป็นอนันต์ด้วย ซึ่งภาวะที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่า “ภาวะเอกฐาน” (singularity) เช่น การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $1/x$ ซึ่งการหาค่าของปริพันธ์เอกฐานอย่างแข็งจะไม่สามารถใช้วิธีหาปริพันธ์โดยตรง แต่จะใช้เทคนิคการแปลงตัวแปรก่อนใช้สูตรการหาปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์ หรือใช้วิธีการคำนวณหาค่าลิมิตของปริพันธ์ เมื่อจุดฟิลด์เข้าใกล้จุดโหลดบนตำแหน่งขอบเขต ซึ่งปริพันธ์ชนิดนี้ไม่พบในงานวิจัยนี้

3.5 การหาผลเฉลย

ผลเฉลยที่คำนวณได้จากสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.3 คือค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า ($\mathbf{u}_{I+B}$) ความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว ($\boldsymbol{\tau}_{I+B}$) บนขอบเขตและรอยต่อประสาน ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคำนวณหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าบนขอบเขต และการคำนวณหาผลเฉลยภายในโดเมน

3.5.1 การหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนขอบเขต

การคำนวณหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนขอบเขต ได้จากการนำผลเฉลยบนขอบเขตจากสมการ (3.48) ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.3 มาแทนลงในสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเค้นที่ผิว (2.7) สมการความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้ากับประจุไฟฟ้าที่ผิว (2.8) และสมการความสัมพันธ์จากการหาอนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้าบนขอบเขตในแต่ละเอลิเมนต์ ดังสมการ (3.51) ดังนี้ (Banerjee, 1994; Xu และ Rajapakse, 1998)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}, \qquad i = x,\ z,\ q \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N^k(\eta)}{\partial \eta}x^k\right) + \frac{\partial u_i}{\partial z}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N^k(\eta)}{\partial \eta}z^k\right) \qquad (3.51ก)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N^k(\eta)}{\partial \eta}u_i^k, \qquad i = x,\ z,\ q \qquad (3.51ข)$$

หรือเขียนรวมสมการ (3.51ก) และสมการ (3.51ข) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N^k(\eta)}{\partial \eta}x^k\right) + \frac{\partial u_i}{\partial z}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N^k(\eta)}{\partial \eta}z^k\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial N^k(\eta)}{\partial \eta}u_i^k$$

โดยที่ $i = x,\ z,\ q$

สำหรับสมการความสัมพันธ์ของความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า ในรูปของอนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_{ij}(\mathrm{x}') = c_{ijkl}\left\{\frac{1}{2}\left(u_{k,l}(\mathrm{x}') + u_{l,k}(\mathrm{x}')\right)\right\} + e_{kij}\left\{\phi_{,k}(\mathrm{x}')\right\} \qquad (3.52ก)$$

$$D_i\left(\mathrm{x}'\right)=e_{ikl}\left\{\frac{1}{2}\left(u_{k,l}\left(\mathrm{x}'\right)+u_{l,k}\left(\mathrm{x}'\right)\right)\right\}-\kappa_{ik}\left\{\phi_{,k}\left(\mathrm{x}'\right)\right\} \qquad \text{(3.52ข)}$$

โดยที่ $i,\ j,\ k,\ l=x,\ z,\ q$

เมื่อนำสมการ (2.7), (2.8), (3.51) และ (3.52) มาเขียนระบบสมการรวม เพื่อคำนวณหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าบนขอบเขตของเอลิเมนต์ที่ m ได้ดังนี้ (กรณีปัญหาความเครียดในระนาบ)

สมการ (2.7) และ (2.8)

เอลิเมนต์ที่ m

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_z & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_x & -n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{11} & 0 & 0 & 0 & -c_{13} & -e_{31} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c_{13} & 0 & 0 & 0 & -c_{33} & -e_{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c_{44} & -e_{15} & -c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -e_{15} & \kappa_{11} & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -e_{31} & 0 & 0 & 0 & -e_{33} & \kappa_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{,\eta} & 0 & 0 & z_{,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{,\eta} & 0 & 0 & z_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{,\eta} & 0 & 0 & z_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zx} \\ D_x \\ D_z \\ u_{x,x} \\ u_{z,x} \\ \phi_{,x} \\ u_{x,z} \\ u_{z,z} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix}^{\langle m\rangle} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_z \\ q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{x,\eta} \\ u_{z,\eta} \\ \phi_{,\eta} \end{Bmatrix}^{\langle m\rangle} \qquad (3.53)$$

สมการ (3.52)

สมการ (3.51)

ส่วนกรณีปัญหาความเค้นในระนาบ สามารถหาหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าบนขอบเขตของเอลิเมนต์ m ด้วยสมการข้างต้น โดยแทนค่าคงตัวของวัสดุตามที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 2.2

3.5.2 การหาผลเฉลยภายในโดเมน

การหาผลเฉลยภายในโดเมน เช่น ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า หน่วยแรง และการกระจัดทางไฟฟ้าที่ตำแหน่งต่างๆ ภายในโดเมน สามารถคำนวณได้โดยการนำผลเฉลยบนขอบเขตจากสมการ (3.48) ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.3 มาแทนลงในสมการ (3.54ก) และ (3.54ข) ตามลำดับ โดยที่สมการ (3.54ก) เป็นสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า ที่แทนค่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ขอบเขต $\mathbf{C}\left(\mathrm{x}'\right)$ ด้วยเมทริกซ์เอกลักษณ์ (พิจารณาตำแหน่งจุดโหลด x' อยู่ภายในโดเมน) ซึ่งสมการ (3.54ก) ใช้สำหรับคำนวณหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้าภายในโดเมน ในขณะที่สมการ (3.54ข) เป็นสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขต

สำหรับความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า ได้มาจากการนำสมการ (3.54ก) มาคำนวณหาอนุพันธ์ตลอดทั้งสมการ แล้วนำไปแทนลงในสมการความสัมพันธ์ของความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า ในรูปของอนุพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้าดังสมการ (3.52) ซึ่งสมการ (3.54ข) ใช้สำหรับคำนวณหาค่าความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้าภายในโดเมน

- สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า :

$$\mathbf{U}(\mathrm{x}') = \sum_{m=1}^{NE} \left(\left\{ \int_{\Delta\Gamma_m} \left[\mathbf{G}\left(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\right) \mathbf{N}(\eta)\, J(\eta) \right] d\Gamma(\eta) \right\} \boldsymbol{\tau}^{\langle m\rangle} - \left\{ \int_{\Delta\Gamma_m} \left[\mathbf{H}\left(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\right) \mathbf{N}(\eta)\, J(\eta) \right] d\Gamma(\eta) \right\} \mathbf{u}^{\langle m\rangle} \right) \qquad \text{(3.54ก)}$$

- สมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตสำหรับความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า :

$$\mathbf{S}(\mathrm{x}') = \sum_{m=1}^{NE} \left(\left\{ \int_{\Delta\Gamma_m} \left[\mathbf{G}^{\sigma}\left(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\right) \mathbf{N}(\eta)\, J(\eta) \right] d\Gamma(\eta) \right\} \boldsymbol{\tau}^{\langle m\rangle} - \left\{ \int_{\Delta\Gamma_m} \left[\mathbf{H}^{\sigma}\left(\mathrm{x}(\eta);\mathrm{x}'\right) \mathbf{N}(\eta)\, J(\eta) \right] d\Gamma(\eta) \right\} \mathbf{u}^{\langle m\rangle} \right) \qquad \text{(3.54ข)}$$

โดยที่ $\mathrm{x}(x,z)$ คือจุดฟิลด์เป็นจุดบนขอบเขต $\mathrm{x}'(x,z)$ คือจุดโหลดเป็นจุดบนโดเมน $\boldsymbol{\tau}^{\langle m\rangle}$ คือเวคเตอร์ความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิวของจุดต่อบนขอบเขตภายในเอลิเมนต์ m ที่มีขนาด [$3n$ x 1] ที่ทราบค่าจากสมการ (3.48) $\mathbf{u}^{\langle m\rangle}$ คือเวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้าของจุดต่อบนขอบเขตภายในเอลิเมนต์ m ที่มีขนาด [$3n$ x 1] ที่ทราบค่าจากสมการ (3.48) $\mathbf{U}$ คือเวคเตอร์การเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้าที่ไม่ทราบค่าภายในโดเมน และ $\mathbf{S}$ คือเวคเตอร์ความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้าที่ไม่ทราบค่าภายในโดเมน

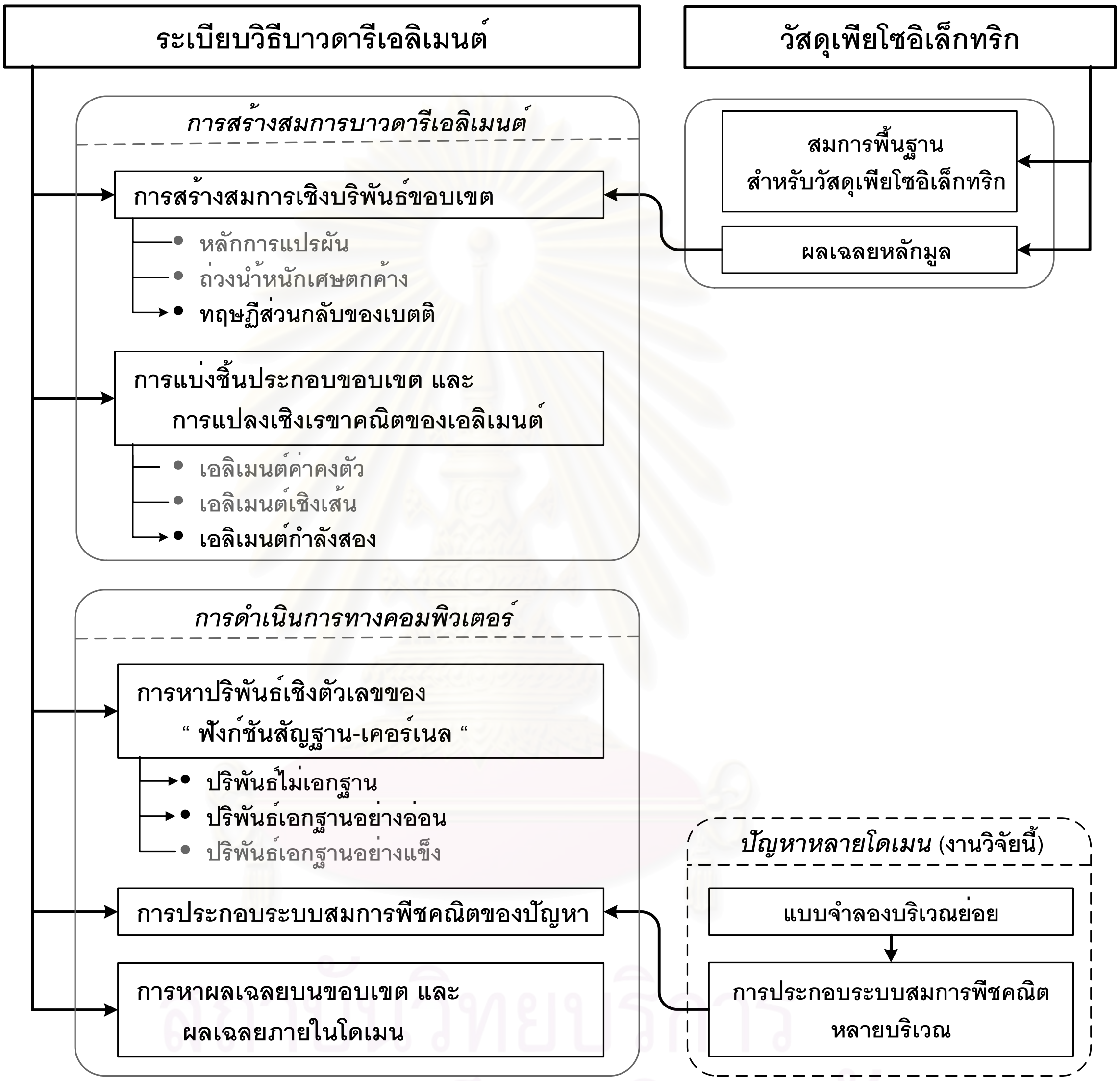
$$\mathbf{S} = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{zx} \quad D_x \quad D_z \right\}^{\mathrm{T}} \qquad \text{(3.55)}$$

ส่วน $\mathbf{G}$ และ $\mathbf{H}$ คือเมทริกซ์เคอร์เนลขนาด [3 x 3] จากสมการ (3.18ก) และ (3.18ข) ที่มีส่วนประกอบของฟังก์ชันเคอร์เนลแสดงได้ดังสมการ (ก.1) ถึง (ก.18) ในขณะที่ $\mathbf{G}^{\sigma}$ และ $\mathbf{H}^{\sigma}$ คืออนุพันธ์ของเมทริกซ์เคอร์เนลที่คำนวณได้จากสมการ (3.56ก) และ (3.56ข) ที่มีขนาด [5 x 3] และมีส่วนประกอบของอนุพันธ์ฟังก์ชันเคอร์เนลแสดงได้ดังสมการ (ก.21) ถึง (ก.50) ในภาคผนวก ก

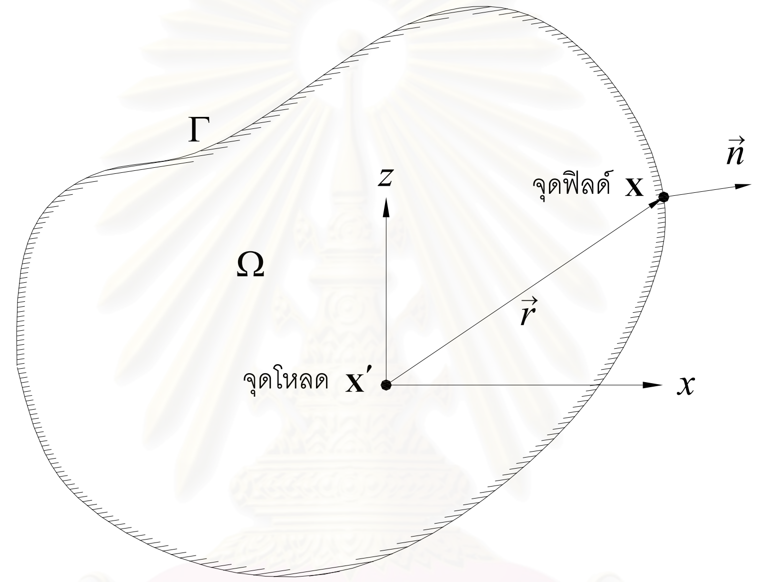
$$\mathbf{G}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 2c_{44} & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 2e_{15} & \kappa_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & 0 \\ \partial/2\partial z & \partial/2\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \end{bmatrix}\mathbf{G}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) \qquad (3.56ก)$$

$$\mathbf{H}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 2c_{44} & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 2e_{15} & \kappa_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & 0 \\ \partial/2\partial z & \partial/2\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \end{bmatrix}\mathbf{H}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) \qquad (3.56ข)$$

ในสมการ (3.56ก) และ (3.56ข) ใช้สำหรับปัญหาความเครียดในระนาบ ส่วนกรณีปัญหาความเค้นในระนาบ จะแทนค่าคงตัวของวัสดุตามที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 2.2

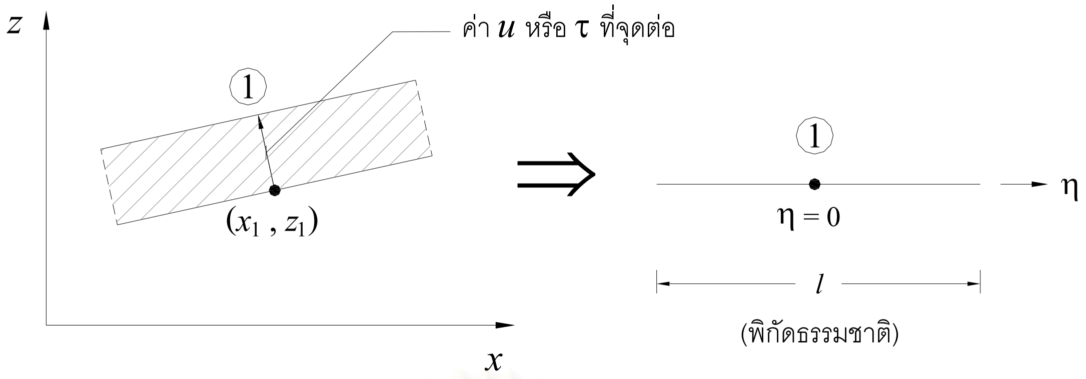


รูปที่ 3.1 ผังงานของระเบียบวิธีการบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

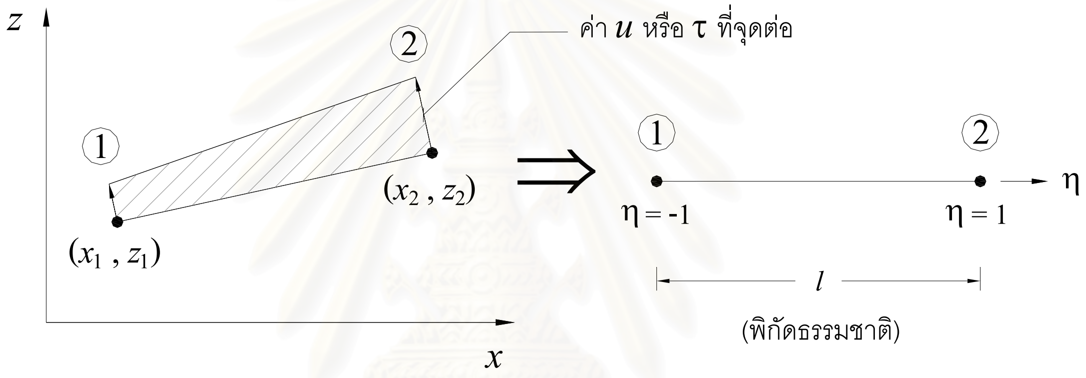


จุดฟีลด์ ($\mathrm{x} \in \Gamma$) และจุดโหลด ($\mathrm{x}' \in \Omega \cup \Gamma$)

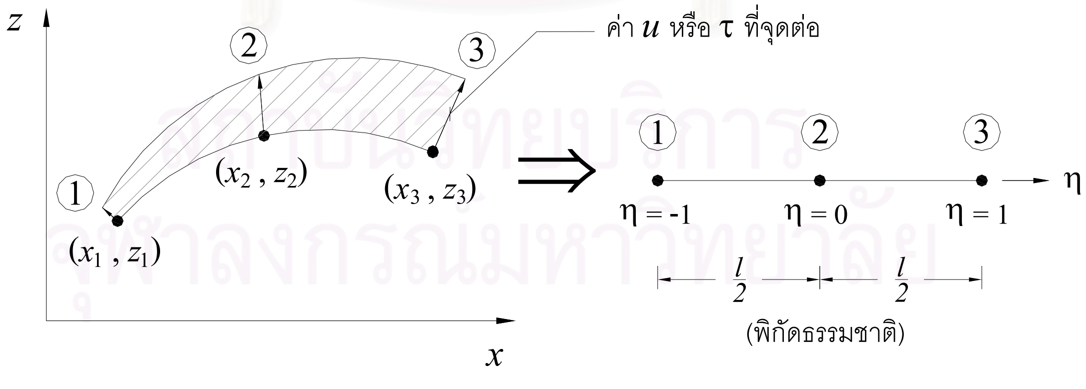
รูปที่ 3.2 นิยามเชิงเรขาคณิตที่ใช้ในการคำนวณ



(ก) เอลิเมนต์ค่าคงตัว

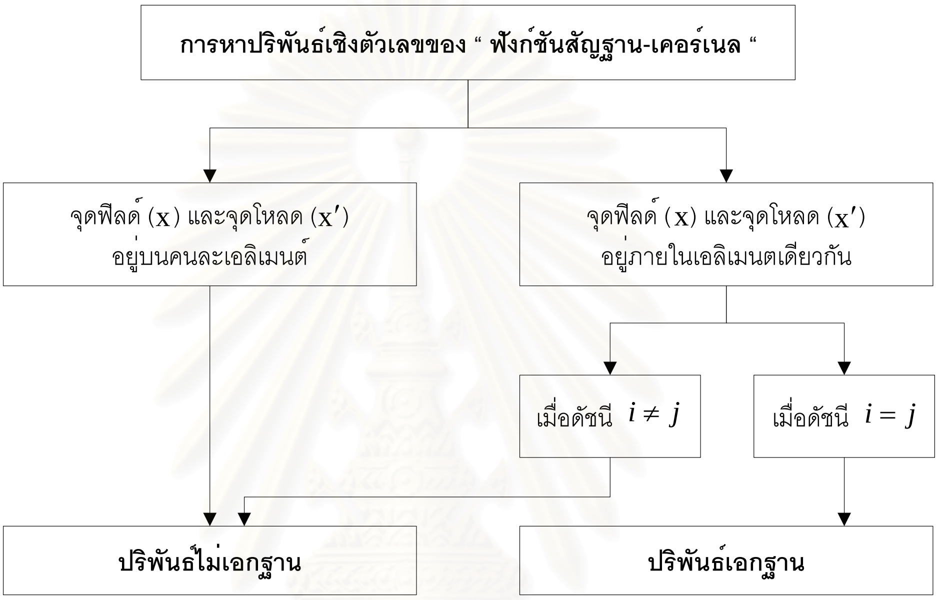


(ข) เอลิเมนต์เชิงเส้น

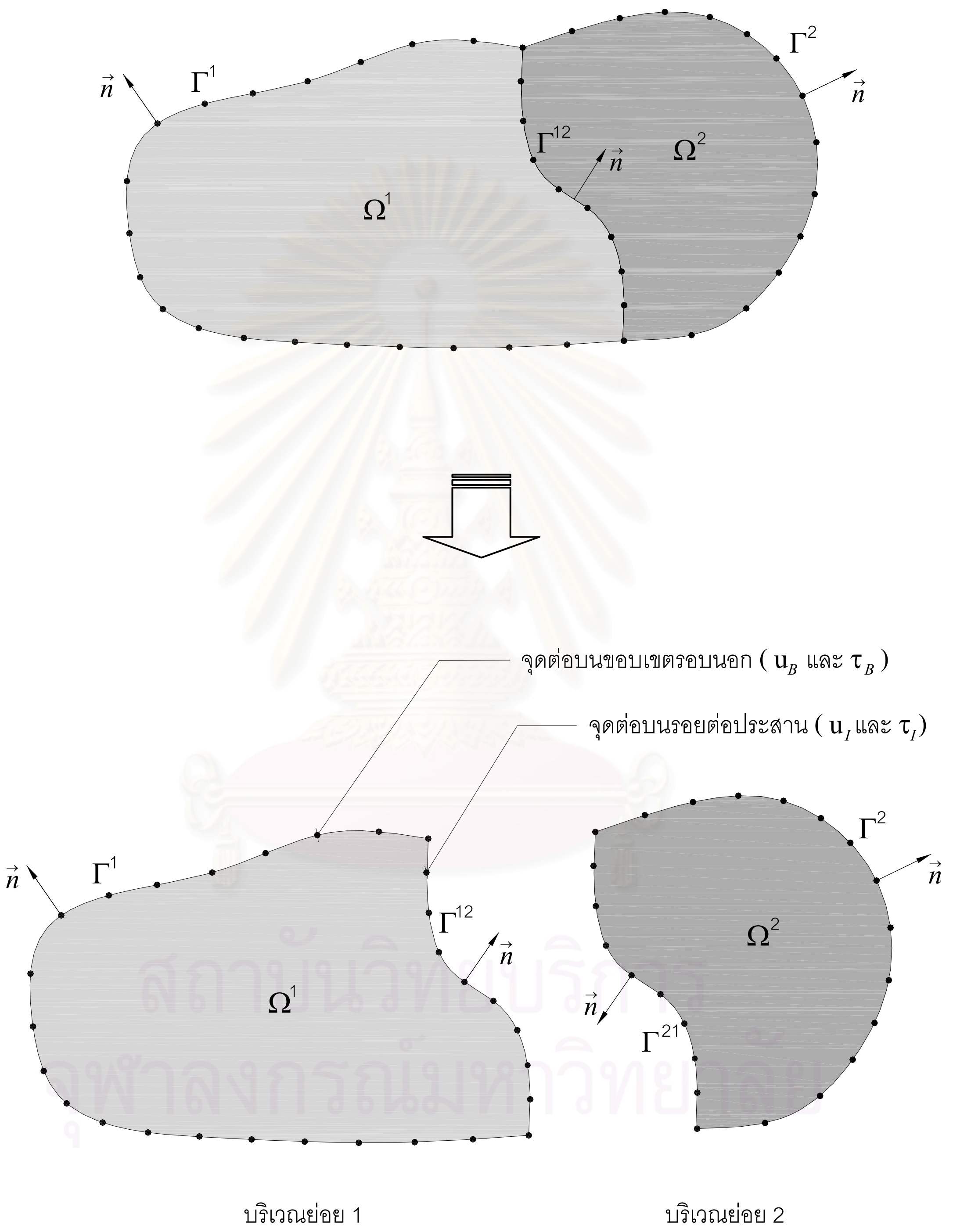


(ค) เอลิเมนต์กำลังสอง

รูปที่ 3.3 การแปลงเชิงเรขาคณิตของเอลิเมนต์จากพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นพิกัดธรรมชาติ



รูปที่ 3.4 ผังงานการคำนวณปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก



รูปที่ 3.5 การสร้างและประกอบระบบสมการพีชคณิตสองบริเวณ

บทที่ 4

ผลการศึกษา

ในบทนี้จะเสนอผลการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ โดยการใช้แบบจำลองบริเวณย่อยและการประกอบระบบสมการพีชคณิตหลายบริเวณ แบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นโดเมนย่อยๆ (บริเวณย่อยๆ) เพื่อศึกษาหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า ที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก (ทั้งบนขอบเขตและภายในโดเมนของปัญหา) ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า โดยไม่คิดผลของแรงวัตถุและประจุไฟฟ้าอิสระ ในขั้นแรกเป็นการทดสอบโปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์กับปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูกลวงตรงกลางที่มีผลเฉลยแม่นตรง (Sosa, 1991) เพื่อเปรียบเทียบความถูกต้องแม่นยำและการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ จากนั้นจะทำการศึกษาในกรณีปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นจำกัดที่มีรูกลวงตรงกลาง และมีผลเฉลยของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Wang และคณะ, 2004) เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (งานวิจัยนี้) กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หลังจากนั้นจะทำการศึกษาตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (วัสดุสองชนิดที่มีคุณสมบัติแตกต่างกัน) ทั้งในกรณีที่ไม่มีความบกพร่อง และกรณีที่มีความบกพรอง เช่น รูกลวงตรงกลาง และรอยบากด้านข้าง

4.1 การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ

การศึกษาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ สามารถนำระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ได้สองวิธีคือ วิธีแรกเป็นการประยุกต์ใช้ผลเฉลยหลักมูล (หรือฟังก์ชันของกรีน) สำหรับชิ้นส่วนสองวัสดุ (bimaterial Green’s function) ที่สอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหาที่กำลังพิจารณา ซึ่งวิธีการนี้มักมีข้อจำกัดในการใช้งาน และใช้ได้กับปัญหาที่ไม่ซับซ้อน ส่วนวิธีที่สองเป็นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิมเนต์หลายโดเมน (muti-domain BEM) โดยทำการพิจารณาแบ่งขอบเขตรูปร่างปัญหาออกเป็นโดเมนย่อยๆ ตามชนิดของวัสดุ งานวิจัยนี้ได้เลือกใช้วิธีที่สองเนื่องจากสามารถพิจารณาปัญหาที่มีความซับซ้อน และเกี่ยวข้องกับความบกพร่องหรือตำหนิ ที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุได้

ดังนั้นงานวิจัยนี้เป็นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ เพื่อใช้ศึกษาวิเคราะห์หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง เช่น รอยบาก รูกลวง หรือโพรง ซึ่งสามารถแสดงเป็นผังงานในการคำนวณเพื่อศึกษาปัญหาได้ดังรูปที่ 4.1 โดยเริ่มจากการใช้แบบจำลองบริเวณย่อยแบ่งขอบเขตรูปร่างปัญหาออกเป็นบริเวณย่อยๆ (โดเมนย่อยๆ) ตามชนิดของวัสดุ หรือแบ่งขอบเขตผ่านบริเวณที่เกิดความบกพร่อง โดยที่ผิวรอยต่อที่ทำขึ้น (artificial interface) จะประกอบด้วยผิวของรอยต่อประสานกับผิวในตำแหน่งที่เกิดความบกพร่อง ดังตัวอย่างแสดงในรูปที่ 4.2 เมื่อนำสมการบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้กล่าวถึง

ในหัวข้อ 3.3 มาแยกพิจารณาในแต่ละโดเมนย่อย จะได้ระบบสมการพีชคณิตสำหรับแต่ละบริเวณย่อยดังสมการ (3.42) และ (3.43) และอาศัยความสอดคล้องของเงื่อนไขต่อประสาน ทั้งที่เป็นเงื่อนไขทางกลและเงื่อนไขทางไฟฟ้าจากสมการ (3.44ก) และ (3.44ข) บนตำแหน่งผิวรอยต่อประสาน (ผิวในตำแหน่งที่มีความบกพร่องจะไม่นำมาพิจารณาเงื่อนไขต่อประสาน) และทำการประกอบระบบสมการพีชคณิตหลายบริเวณ ซึ่งจะได้ระบบสมการพีชคณิต (3.47) แล้วทำการจัดเรียงสมการเพื่อแยกตัวแปรที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า โดยพิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้จะได้สมการ (3.48) เมื่อทำการแก้ระบบสมการพีชคณิตจะได้ผลเฉลยของค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า ความเค้นที่ผิว และประจุไฟฟ้าที่ผิวของจุดต่อบนขอบเขตและรอยต่อประสาน ซึ่งผลเฉลยที่ได้นี้สามารถนำมาคำนวณหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนขอบเขตและรอยต่อประสาน ตามที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.5.1 หรือนำผลเฉลยที่ได้มาหาผลเฉลยภายในโดเมน โดยการแทนค่าลงในสมการ (3.54ก) และ (3.54ข) ตามที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.5.2

4.2 การทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมและการลู่เข้าของผลลัพธ์

การทดสอบเปรียบเทียบความถูกต้องแม่นยำและการลู่เข้าของผลลัพธ์ ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ โดยเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูกลวงตรงกลาง (Sosa, 1991) ดังรูปที่ 4.3 ภายใต้แรงกระทำทางกลที่อนันต์ ($\sigma_{zz}^{\infty} = \sigma_0$) หรือโหลดทางไฟฟ้าที่อนันต์ ($D_z^{\infty} = D_0$) เมื่อมีคุณสมบัติของวัสดุ PZT-4 ตามตารางที่ 4.1 และกำหนดให้เงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งขอบรอบรูกลวงปราศจากความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว เนื่องจากค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ($k_{ij} \approx 10^{-9}$ Fm^{-1}) มีค่าสูงกว่าค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของอากาศ ($k_0 = 8.85\text{x}10^{-12}$ Fm^{-1}) ภายในช่องว่างมาก และจากผลการศึกษาของ Sosa และ Khutoryansky (1996) เกี่ยวกับเงื่อนไขขอบเขตทางไฟฟ้ารอบรูกลวง ซึ่งพบว่าถ้าอัตราส่วนรูปร่างรูวงรี (b/a) มากกว่า 0.01 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ทั้งในกรณีที่คำนึงถึงประจุไฟฟ้าที่ผิวและกรณีที่ไม่คำนึงถึงประจุไฟฟ้าที่ผิวจะให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน ดังนั้นจึงสามารถเขียนเงื่อนไขขอบเขตรอบรูกลวงได้ดังนี้ (Sosa, 1991)

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z = 0 \tag{4.1ก}$$

$$\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zz} n_z = 0 \tag{4.1ข}$$

และ

$$D_x n_x + D_z n_z = 0 \tag{4.2}$$

โดยงานวิจัยนี้กำหนดให้สัญลักษณ์ $u_i^* = u_i / \sigma_0$, $\phi^* = \phi / \sigma_0$, $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} / \sigma_0$, $D_i^* = D_i / \sigma_0$ และ $E_i^* = E_i / \sigma_0$ เป็นค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากการให้แรงกระทำทางกล (σ_0) ในขณะที่ $u_i^{**} = u_i / D_0$, $\phi^{**} = \phi / D_0$, $\sigma_{ij}^{**} = \sigma_{ij} / D_0$, $D_i^{**} = D_i / D_0$ และ $E_i^{**} = E_i / D_0$ เป็นค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากการให้โหลดทางไฟฟ้า (D_0) เมื่อ i , $j = x$, z

การคำนวณหาหน่วยแรงและการกระจัดทางไฟฟ้าบนระนาบ θ = 0 (หรือระนาบ z = 0) สำหรับปัญหานี้ด้วยระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ สามารถพิจารณาได้ทั้งแบบหนึ่งโดเมนและสองโดเมน ซึ่งแต่ละวิธีมีความแตกต่างกันดังนี้

ก) การพิจารณาปัญหาแบบหนึ่งโดเมน ด้วยการใช้แบบจำลองเต็มหน้าตัด (full model) ดังรูปที่ 4.4ก จะคำนวณหาผลลัพธ์บนระนาบ θ = 0 ด้วยการหาผลเฉลยภายในโดเมนที่ตำแหน่งจุดภายใน (internal point) ซึ่งได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.5.2 ในขณะที่การใช้แบบจำลองหนึ่งในสี่ของหน้าตัด (quarter model) ดังรูปที่ 4.4ข จะใช้สำหรับกรณีปัญหาที่มีความสมมาตร และคำนวณหาผลลัพธ์บนระนาบ θ = 0 (ซึ่งเป็นระนาบสมมาตร) ด้วยการหาผลเฉลยบนขอบเขต ตามที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 3.5.1

ข) การพิจารณาปัญหาแบบสองโดเมน ทำได้โดยการใช้แบบจำลองบริเวณย่อยดังรูปที่ 4.5 โดยการแบ่งปัญหาผ่านบริเวณที่ต้องการศึกษา ใช้ได้ทั้งกรณีที่ปัญหามีความสมมาตรและไม่มีความสมมาตร ซึ่งจะคำนวณผลลัพธ์บนระนาบ θ = 0 ด้วยการหาผลเฉลยบนขอบเขตที่ตำแหน่งรอยต่อประสาน

จากผลการศึกษาเปรียบเทียบการลู่เข้าของผลลัพธ์ เพื่อหาอัตราส่วนขนาดรู (a/W) และจำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตรอบรูกลวงที่เหมาะสม เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยสำหรับชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูกลวงตรงกลางดังรูปที่ 4.3 เมื่อมีอัตราส่วนรูปร่างรู (b/a = 1 และ 0.1) โดยการพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรงสูงสุด และการกระจัดทางไฟฟ้าสูงสุด ที่เกิดขึ้นบนตำแหน่งขอบรูกลวง (a, 0) เทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (Sosa, 1991) แสดงได้ดังรูปที่ 4.6 พบว่าเมื่ออัตราส่วน a/W เพิ่มขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนจะมากขึ้น เนื่องจากอัตราส่วน a/W ที่เพิ่มขึ้น (มีลักษณะเป็นแผ่นจำกัดมากขึ้น) จะทำให้หน่วยแรงและการกระจัดทางไฟฟ้าที่คำนวณได้มีค่าสูงกว่าผลเฉลยแม่นตรง และถ้าให้อัตราส่วน a/W คงที่ แล้วเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน b/a ลดลง ค่าความคลาดเคลื่อนจะลดลงด้วยเนื่องจากระยะห่างระหว่างแรงกระทำกับตำแหน่งที่พิจารณามากขึ้น (อัตราส่วน b/H เพิ่มขึ้น) ส่วนรูปที่ 4.7 แสดงให้เห็นว่าเมื่ออัตราส่วน b/a ลดลง จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตที่ใช้จะเพิ่มขึ้น เนื่องจากอัตราส่วน b/a ที่ลดลงจะมีรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นรูวงรีมากขึ้น (วงรีตีบมากขึ้น) ทำให้เกิดความเข้มของหน่วยแรงและความเข้มของการกระจัดทางไฟฟ้าที่ตำแหน่งขอบรูกลวง (a, 0) มีค่าสูงขึ้น ดังนั้นจำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตที่ใช้จึงต้องเพิ่มขึ้นด้วย

การทดสอบเพื่อเปรียบเทียบการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากแบบจำลองชนิดต่างๆ โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นบนตำแหน่งขอบรูกลวง (a, 0) กับจำนวนของเอลิเมนต์ขอบเขตทั้งหมดที่ใช้ เมื่อให้จำนวนเอลิเมนต์รอบรูกลวงคงที่ แสดงได้ดังรูปที่ 4.8 และ 4.9 พบว่าแบบจำลองเต็มหน้าตัด ให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเร็วที่สุด ในขณะที่แบบจำลองหนึ่งในสี่ของหน้าตัดและแบบจำลองบริเวณย่อย จะมีลักษณะการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่เหมือนกัน คือลู่เข้าอย่างรวดเร็วในช่วงแรกแล้วค่อยคงที่ เนื่องจากจำนวนเอลิเมนต์บนระนาบสมมาตรหรือบนผิวต่อประสานที่ใช้พิจารณาจะต้องมากเพียงพอ ค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จึงจะเริ่มลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

การทดสอบเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้บนระนาบ $\theta = 0$ จากการพิจารณาปัญหาแบบหนึ่งโดเมนและแบบสองโดเมน เทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูวงกลม (b/a = 1) ดังรูปที่ 4.10 และ 4.11 และกรณีรูวงรี (b/a = 0.2) ดังรูปที่ 4.14 และ 4.15 ซึ่งเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากการพิจารณาปัญหาในแบบหนึ่งโดเมน มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าการพิจาณาปัญหาแบบสองโดเมน เนื่องจากการพิจารณาปัญหาแบบหนึ่งโดเมนด้วยแบบจำลองเต็มหน้าตัดมีผิวขอบเขตรอบรูกลวงที่ราบเรียบกว่าจึงให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า ในขณะที่การพิจาณาปัญหาแบบสองโดเมนด้วยแบบจำลองบริเวณย่อยมีผิวของขอบเขตรอบรูกลวงที่ไม่ราบเรียบเกิดขอบและมุมขึ้นที่ตำแหน่ง (a, 0) ซึ่งจะทำให้ค่าความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว ที่คำนวณได้บนตำแหน่ง (a, 0) เกิดความคลาดเคลื่อนมากขึ้น เนื่องจากที่ตำแหน่งขอบหรือมุมของจุดต่อเดียวกันมีค่าโคไซน์แสดงทิศทางที่แตกต่างกัน

นอกจากนี้งานวิจัยนี้ได้ทำการคำนวณหาผลเฉลยภายในโดเมน สำหรับศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูกลวงตรงกลาง ที่มีอัตราส่วนรูปร่างรู b/a = 1 และ 0.2 ภายใต้แรงกระทำทางกล เมื่อใช้จำนวนจุดภายใน 160 - 320 จุด แล้วนำค่าผลลัพธ์ที่ได้มาวาดเส้นชั้นความสูง เพื่อแสดงลักษณะการกระจายของหน่วยแรงและการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้ารอบรูกลวงแสดงได้ดังรูปที่ 4.12, 4.13, 4.16 และ 4.17 ตามลำดับ ซึ่งพบว่าหน่วยแรงและการกระจัดทางไฟฟ้าจะมีค่าเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วในช่วงสองเท่าของรัศมี (2R) โดยเฉพาะในกรณีอัตราส่วนรูปร่างรู b/a = 0.2 จะเกิดความเข้มของหน่วยแรงและการกระจัดทางไฟฟ้าที่ตำแหน่งขอบ ($\pm$ a, 0)

การทดสอบเปรียบเทียบผลการศึกษาที่ได้จากระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (งานวิจัยนี้) กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Wang และคณะ, 2004) ในการศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นจำกัดที่มีรูวงกลม ภายใต้แรงกระทำทางกล พบว่าผลของอัตราส่วน a/W กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ขอบรอบนอก (W, 0) ของทั้งสองวิธีให้ค่าสอดคล้องใกล้เคียงกันดังรูปที่ 4.18ก ในขณะที่ผลของอัตราส่วน a/W กับหน่วยแรงสูงสุดที่ขอบรูวงกลม (a, 0) แสดงได้ดังรูปที่ 4.18ข พบว่าการพิจารณาปัญหาแบบสองโดเมนในระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ จะให้ค่าหน่วยแรงที่ต่ำกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Wang และคณะ, 2004) เล็กน้อย (ผลต่าง $\approx$ -1.25%) และเมื่อพิจารณาในกรณีที่อัตราส่วนขนาดรู a/W = 0.05 เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากแบบจำลองทั้ง 3 ชนิด ดังแสดงในตารางที่ 4.2 พบว่าแบบจำลองเต็มหน้าตัด (ดังรูปที่ 4.4ก) ให้ค่าสอดคล้องใกล้เคียงกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Wang และคณะ, 2004) มากที่สุด ในขณะที่แบบจำลองบริเวณย่อย (ดังรูปที่ 4.5) และแบบจำลองหนึ่งในสี่ของหน้าตัด (ดังรูปที่ 4.4ข) จะให้ค่าที่ต่ำกว่าเล็กน้อย (ผลต่าง $\approx$ -1.19% และ -1.06%) เนื่องจากผิวของขอบเขตรอบรูกลวงในตำแหน่ง (a, 0) ที่พิจารณาไม่ราบเรียบเกิดขอบและมุม

สำหรับตัวอย่างชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นจำกัดที่มีรูวงกลม และมีอัตราส่วนขนาดรู a/W = 0.25 ภายใต้แรงกระทำทางกล เพื่อเปรียบเทียบหน่วยแรงบนระนาบ $z = 0$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.19 พบว่าค่าที่คำนวณได้ของการพิจารณาปัญหาแบบสองโดเมน มีค่าใกล้เคียงและสอดคล้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Wang และคณะ, 2004) ตลอดช่วงที่พิจารณา ยกเว้นบริเวณขอบรอบนอก (4, 0) ซึ่งระเบียบวิธีบาวดารีเอลิ-เมนต์ให้ค่าต่ำกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เล็กน้อย

Lee (1994) ได้ทำการพิจารณาปัญหาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูกลวงวงกลม (b/a = 1) ภายใต้แรงกระทำทางกล (P = 1 N/m^2) ที่ขอบรูกลวงดังรูปที่ 4.20 การเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ของระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ เมื่อพิจารณาปัญหาแบบหนึ่งโดเมน (Lee, 1994) และแบบสองโดเมน (งานวิจัยนี้) พบว่าให้ค่าที่สอดคล้องกันดังรูปที่ 4.21 จากการพิจารณาเปรียบเทียบหน่วยแรงวงแหวนสูงสุดในตำแหน่ง θ = 45° และ 135° พบว่าผลการศึกษาของ Lee (1994) ให้ค่าหน่วยแรง 1.067 N/m^2 และงานวิจัยนี้ได้ค่าหน่วยแรง 1.065 N/m^2 และเมื่อเปรียบเทียบค่าการกระจัดทางไฟฟ้าวงแหวนสูงสุดในตำแหน่ง θ = 180° พบว่าผลการศึกษาของ Lee (1994) ให้ค่าการกระจัดทางไฟฟ้า 0.935E-11 C/m^2 และงานวิจัยนี้ได้ค่ากระจัดทางไฟฟ้า 0.915E-11 C/m^2

4.3 ตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่อง

การศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่องดังรูปที่ 4.22 ทั้งกรณีที่ประกอบกันในแนวนอนดังรูป 4.22ก และกรณีที่ประกอบกันในแนวตั้งดังรูปที่ 4.22ข เพื่อเป็นการศึกษาถึงค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า ที่เกิดขึ้นบนตำแหน่งกึ่งกลางหรือรอยต่อของวัสดุบนระนาบ AB (z/H = 0) ภายใต้แรงกระทำทางกล (σ_0 = 1 N/m^{-2}) หรือโหลดทางไฟฟ้า (D_0 = 1 C/m^{-2}) เมื่อกำหนดให้ชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกประกอบด้วย PZT-5H และ PZT-5 ที่มีคุณสมบัติของวัสดุตามตารางที่ 4.1 โดยที่ชิ้นส่วนมีขนาดอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างคงที่ (H/W = 1) และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

- ที่ตำแหน่งขอบด้านบน z = +H และ -W ≤ x ≤ W

$$\sigma_{xz}(x,\mathrm{H}) = 0 \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{zz}(x,\mathrm{H}) = \sigma_0 = 1\ \mathrm{N/m^{-2}} \\ &D_z(x,\mathrm{H}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(เงื่อนไขแรงกระทำทางกล)} \tag{4.4}$$

หรือ

$$\left.\begin{aligned} &D_z(x,\mathrm{H}) = D_0 = 1\ \mathrm{C/m^{-2}} \\ &\sigma_{zz}(x,\mathrm{H}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(เงื่อนไขโหลดทางไฟฟ้า)} \tag{4.5}$$

- ที่ตำแหน่งขอบด้านล่าง z = -H และ -W ≤ x ≤ W

$$u_z(x,-\mathrm{H}) = \phi(x,-\mathrm{H}) = 0 \tag{4.6}$$

$$u_x(0,-\mathrm{H}) = 0 \quad \text{(สมมาตรรอบแกน } z \text{)} \tag{4.7}$$

- ที่ตำแหน่งขอบด้านข้าง $x = \pm W$ และ $-H \leq z \leq H$

$$\sigma_{xx}(\pm \mathrm{W}, z) = \sigma_{xz}(\pm \mathrm{W}, z) = D_z(\pm \mathrm{W}, z) = 0 \tag{4.8}$$

งานวิจัยนี้ได้ทดสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ เทียบกับจำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตทั้งหมดที่ใช้ในตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนสองวัสดุ (ที่ประกอบกันในแนวนอน) ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้าดังรูปที่ 4.22ก พบว่าเมื่อจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นบนตำแหน่งกึ่งกลาง (0, 0) และขอบ (W, 0) มีค่าลู่เข้าแสดงได้ดังรูปที่ 4.23 การศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่อง เมื่อพิจาณาแบบสองโดเมน จะใช้จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตทั้งหมด 44 เอลิเมนต์ดังรูปที่ 4.24ก และนำค่าผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ (ANSYS) ที่ใช้เอลิเมนต์ประเภท PLANE 13 (2D coupled-field element) ทั้งหมดจำนวน 1156 เอลิเมนต์ดังรูปที่ 4.24ข พบว่าผลลัพธ์ที่ได้สอดคล้องและใกล้เคียงกัน ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.25ก ถึง 4.25ฉ และรูปที่ 4.26ก ถึง 4.26ฉ ตามลำดับ

จากผลการศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกวัสดุเดียว (PZT-5H หรือ PZT-5) ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า พบว่าค่าผลลัพธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า บนระนาบ AB (z/H = 0, x/W = 0 ถึง 1) มีค่าคงที่ตลอดความกว้างของชิ้นส่วน (x/W = 0 ถึง 1) ดังรูปที่ 4.25 และ 4.26 ในขณะที่กรณีชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ประกอบกันในแนวนอน (PZT-5H / PZT-5 bimaterial) ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้าดังรูปที่ 4.22ก ค่าผลลัพธ์ที่ตำแหน่งรอยต่อของวัสดุบนระนาบ AB (x/W = 0 ถึง 1, z/H = 0) มีค่าไม่คงที่ตลอดความกว้าง โดยเฉพาะที่ตำแหน่งขอบ (x/W = 1) ค่าศักย์ไฟฟ้า ความเค้น การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า จะมีค่าสูงกว่าค่าที่ตำแหน่งกึ่งกลาง (x/W = 0) ดังรูปที่ 4.25ค ถึง 4.25ฉ และรูปที่ 4.26ค ถึง 4.26ฉ ในขณะที่ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทาง z ที่ตำแหน่งขอบ (x/W = 1) จะมีค่าต่ำกว่าค่าที่ตำแหน่งกึ่งกลาง (x/W = 0) ดังรูปที่ 4.25ข และ 4.26 ข

เมื่อนำชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ประกอบกันในแนวนอน ภายใต้แรงกระทำทางกล หรือโหลดทางไฟฟ้าดังรูปที่ 4.22ข มาพิจารณาเปรียบเทียบหาผลเฉลยภายในโดเมนที่ใช้จำนวนจุดภายในโดเมนทั้งหมด 400 จุด (โดเมนละ 200 จุด) แล้วนำค่าที่คำนวณได้มาวาดเส้นชั้นความสูงเพื่อแสดงลักษณะการกระจายของหน่วยแรงและการกระจัดทางไฟฟ้า ได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ (ANSYS) ดังรูปที่ 4.27 ถึง 4.30 ตามลำดับ พบว่าที่ตำแหน่งขอบ (x/W = ± 1, z/H = 0) จะเป็นตำแหน่งที่เกิดความเข้มของหน่วยแรงและความเข้มของการกระจัดทางไฟฟ้าสูงสุด

ส่วนในกรณีชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ประกอบกันในแนวตั้ง (PZT-5H / PZT-5 bimaterial) ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้าดังรูปที่ 4.22ข พบว่าค่าผลลัพธ์ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของวัสดุบนระนาบ AB (x/W = -1 ถึง 1, z/H = 0) มีค่าไม่คงที่ตลอดความกว้างแสดงได้ดังรูปที่ 4.31 และ 4.32 โดยที่ตำแหน่งกึ่งกลางของรอยต่อในช่วง x/W = -0.1 ถึง 0.1 จะเป็นตำแหน่งที่เกิดหน่วยแรง และการกระจัดทางไฟฟ้าสูงสุด

4.4 ตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง

การศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (วัสดุต่างชนิดกัน) ที่มีความบกพร่องหรือตำหนิ เช่น รูกลวงตรงกลาง และรอบบากด้านข้างดังรูปที่ 4.33 และ 4.40 ตามลำดับ เพื่อเป็นการศึกษาหาหน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า ที่เกิดขึ้นบนตำแหน่งรอยต่อของวัสดุบนระนาบ AB (z/H = 0) ภายใต้แรงกระทำทางกล (σ_0 = 1 N/m^{-2}) หรือโหลดทางไฟฟ้า (D_0 = 1 C/m^{-2}) เมื่อกำหนดให้คุณสมบัติของวัสดุมีค่าตามตารางที่ 4.1 โดยที่ชิ้นส่วนมีขนาดอัตราส่วนความสูงต่อความกว้างคงที่ (H/W = 1) และมีเงื่อนไขขอบเขตในบริเวณที่มีความบกพร่องดังสมการ (4.1) ถึง (4.2) โดยไม่คำนึงถึงความเค้นที่ผิวและประจุไฟฟ้าที่ผิว ส่วนเงื่อนไขขอบเขตรอบนอกแสดงได้ดังสมการ (4.3) ถึง (4.8)

การศึกษาเพื่อเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ของชิ้นส่วนที่มีความบกพร่อง ที่ประกอบด้วยวัสดุชนิดต่างๆ เช่น PZT-5, PZT-5H, อีพอกซีเรซิน (epoxy resin), ชิ้นส่วนเชิงประกอบ PZT-5H กับ PZT-5 และชิ้นส่วนเชิงประกอบ PZT-5H กับอีพอกซีเรซิน พบว่ากรณีให้แรงกระทำทางกล (σ_0) ค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นมีค่าใกล้เคียงกันทั้งหมด ยกเว้นชิ้นส่วนเชิงประกอบ PZT-5H กับอีพอกซีเรซินจะให้ค่าหน่วยแรงที่แตกต่างดังรูปที่ 4.34ก และ 4.34ข ส่วนค่าการกระจัดทางไฟฟ้า ที่เกิดขึ้นในวัสดุ PZT-5, PZT-5H และชิ้นส่วนเชิงประกอบ PZT-5H กับ PZT-5 มีค่าใกล้เคียงกัน ยกเว้นวัสดุอีพอกซีเรซิน และชิ้นส่วนเชิงประกอบ PZT-5H กับอีพอกซีเรซินจะมีค่าการกระจัดทางไฟฟ้าเท่ากับศูนย์ดังรูปที่ 4.34ค ส่วนในกรณีให้โหลดทางไฟฟ้า (D_0) พบว่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในวัสดุ PZT-5 และ PZT-5H จะมีลักษณะใกล้เคียงกัน ส่วนวัสดุอีพอกซีเรซินจะมีค่าหน่วยแรงเท่ากับศูนย์ และชิ้นส่วนเชิงประกอบจะให้ค่าหน่วยแรงที่แตกต่างออกไปดังรูปที่ 4.35ก และ 4.35ข ในขณะที่ค่าการกระจัดทางไฟฟ้ามีค่าใกล้เคียงกันทั้งหมดทุกวัสดุดังรูปที่ 4.35ค

4.3.1 ชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรูวงรีตรงกลาง

การศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (PZT-5H / PZT-5 bimaterial) ที่มีรูวงรีตรงกลาง ภายใต้แรงกระทำทางกล ในกรณีอัตราส่วนรูปร่างรูวงรีคงที่ (b/a = 0.5) เมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนขนาดรูวงรี (a/W = 0.1, 0.2 และ 0.3) พบว่าหน่วยแรง (σ_{zz}^*) และการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ ในขณะที่สนามไฟฟ้า (E_z^*) จะมีค่าลดลงอย่างสม่ำเสมอ และในทางกลับกันเมื่อให้อัตราส่วนขนาดรูวงรีคงที่ (a/W = 0.1) แล้วเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนรูปร่างรูวงรี (b/a = 0.5, 1 และ 2) พบว่าถ้าอัตราส่วนรูปร่างรูวงรีลดลง (รูวงรีแคบลง) หน่วยแรง (σ_{zz}^*) การกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) และสนามไฟฟ้า (E_z^*) จะมีค่าเปลี่ยนแปลงอย่างมากในบริเวณใกล้ๆ ขอบรูวงรี (x/W = 0.1 ถึง 0.3) หรือในช่วงสองเท่าของความกว้างรูวงรี (2a) ดังรูปที่ (4.36ก) ถึง (4.36ค)

ส่วนในกรณีชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรูวงรีตรงกลาง ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า พบว่าหน่วยแรง (σ_{zz}^{**}) จะไม่เปลี่ยนแปลงดังรูป (4.37ก) ในขณะที่การกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**}) และสนามไฟฟ้า (E_z^{**}) จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอดังรูปที่ (4.37ข) ถึง (4.37ค)

เมื่อนำชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีอัตราส่วนรู b/a = 1 และ a/W = 0.1 ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า มาหาผลเฉลยภายในโดเมนที่ใช้จำนวนจุดภายในโดเมนทั้งหมด 440 จุด (โดเมนละ 220 จุด) แล้วนำค่าที่คำนวณได้มาวาดเส้นชั้นความสูง ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.38 และ 4.39 ตามลำดับ ซึ่งพบว่าที่ตำแหน่งขอบรูกลวง (x/W = ± 0.1, z/H = 0) จะเป็นตำแหน่งที่เกิดความเข้มของหน่วยแรง และความเข้มของการกระจัดทางไฟฟ้า

4.3.2 ชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรอยบากด้านข้าง

การศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (PZT-5H / PZT-5 bimaterial) ที่มีรอยบากด้านข้าง ภายใต้แรงกระทำทางกล ในกรณีอัตราส่วนรูปร่างรอยบากคงที่ (b/a = 0.5) เมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนขนาดรอยบาก (a/W = 0.1, 0.2 และ 0.3) พบว่าหน่วยแรง (σ_{zz}^{*}) และการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{*}) จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ ในขณะที่สนามไฟฟ้า (E_z^{*}) จะมีค่าลดลงอย่างสม่ำเสมอ และในทางกลับกันเมื่อให้อัตราส่วนขนาดรอยบากคงที่ (a/W = 0.1) แล้วเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนรูปร่างรอยบาก (b/a = 0.5, 1 และ 2) พบว่าถ้าอัตราส่วนรูปร่างรอยบากลดลง (รอยบากแคบลง) หน่วยแรง (σ_{zz}^{*}) การกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{*}) และสนามไฟฟ้า (E_z^{*}) จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นอย่างมากที่ตำแหน่งขอบของรอยบาก (x/W = 0.7 ถึง 0.9) ดังรูปที่ (4.41ก) ถึง (4.41ค)

ส่วนในกรณีชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (PZT-5H / PZT-5 bimaterial) ที่มีรอยบากด้านข้าง ภายใต้แรงโหลดทางไฟฟ้า พบว่าหน่วยแรง (σ_{zz}^{**}) จะค่อยลดลงแล้วเพิ่มขึ้นเมื่อเข้าใกล้ตำแหน่งขอบของรอยบาก ในขณะที่ค่าการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**}) และสนามไฟฟ้า (E_z^{**}) จะเพิ่มอย่างสม่ำเสมอ ดังรูปที่ (4.42ก) ถึง (4.42ค)

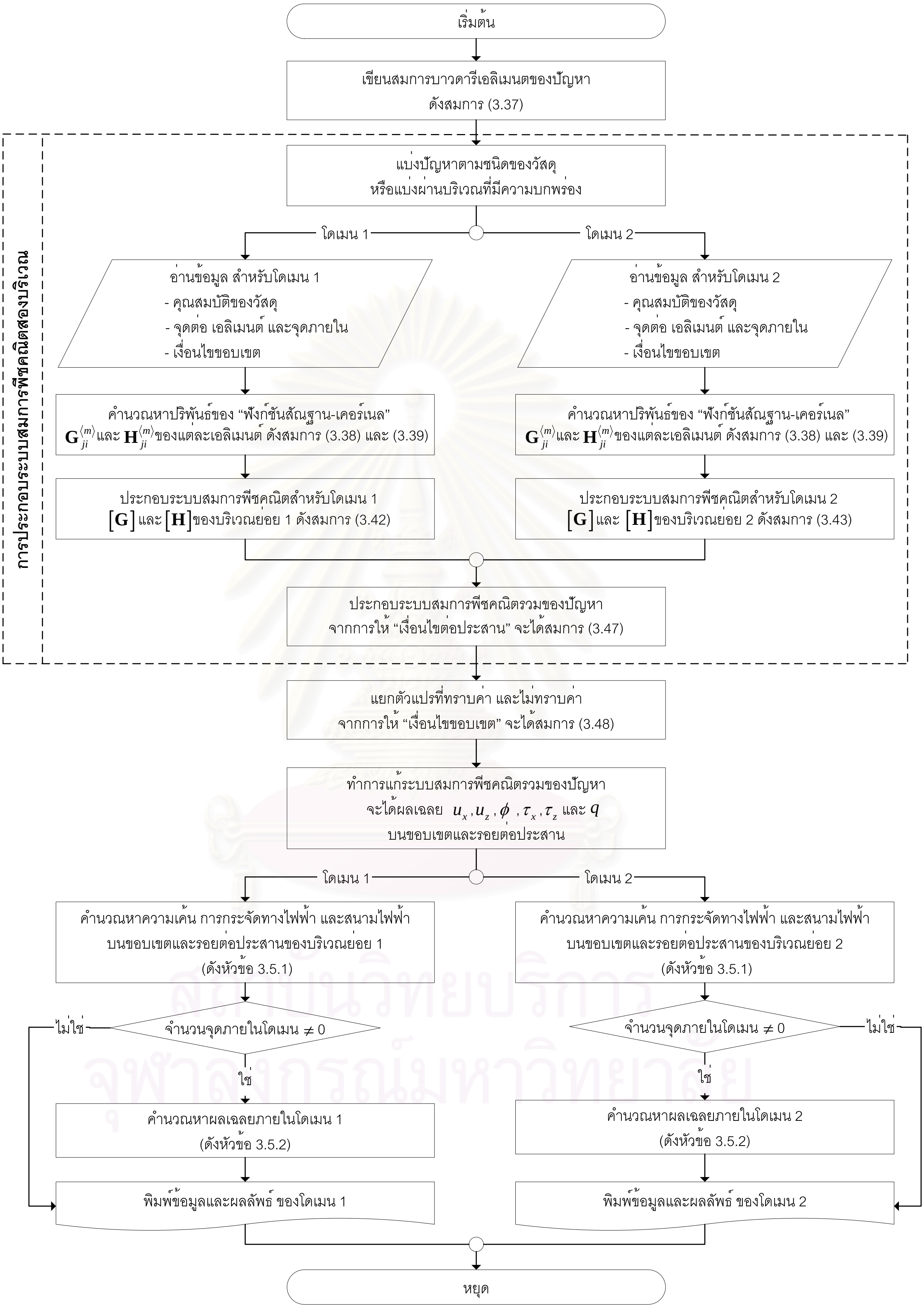
เมื่อนำชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีอัตราส่วนรอยบาก b/a = 1 และ a/W = 0.1 ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้าดังรูปที่ 4.40 มาหาผลเฉลยภายในโดเมนที่ใช้จำนวนจุดภายในโดเมนทั้งหมด 440 จุด (โดเมนละ 220 จุด) แล้วนำค่าที่คำนวณได้มาวาดเส้นชั้นความสูง ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.43 และ 4.44 ตามลำดับ พบว่าที่ตำแหน่งขอบรอยบาก (x/W = ± 0.9, z/H = 0) จะเป็นตำแหน่งที่เกิดความเข้มของหน่วยแรงและความเข้มของการกระจัดทางไฟฟ้า

ตารางที่ 4.1 คุณสมบัติของวัสดุ

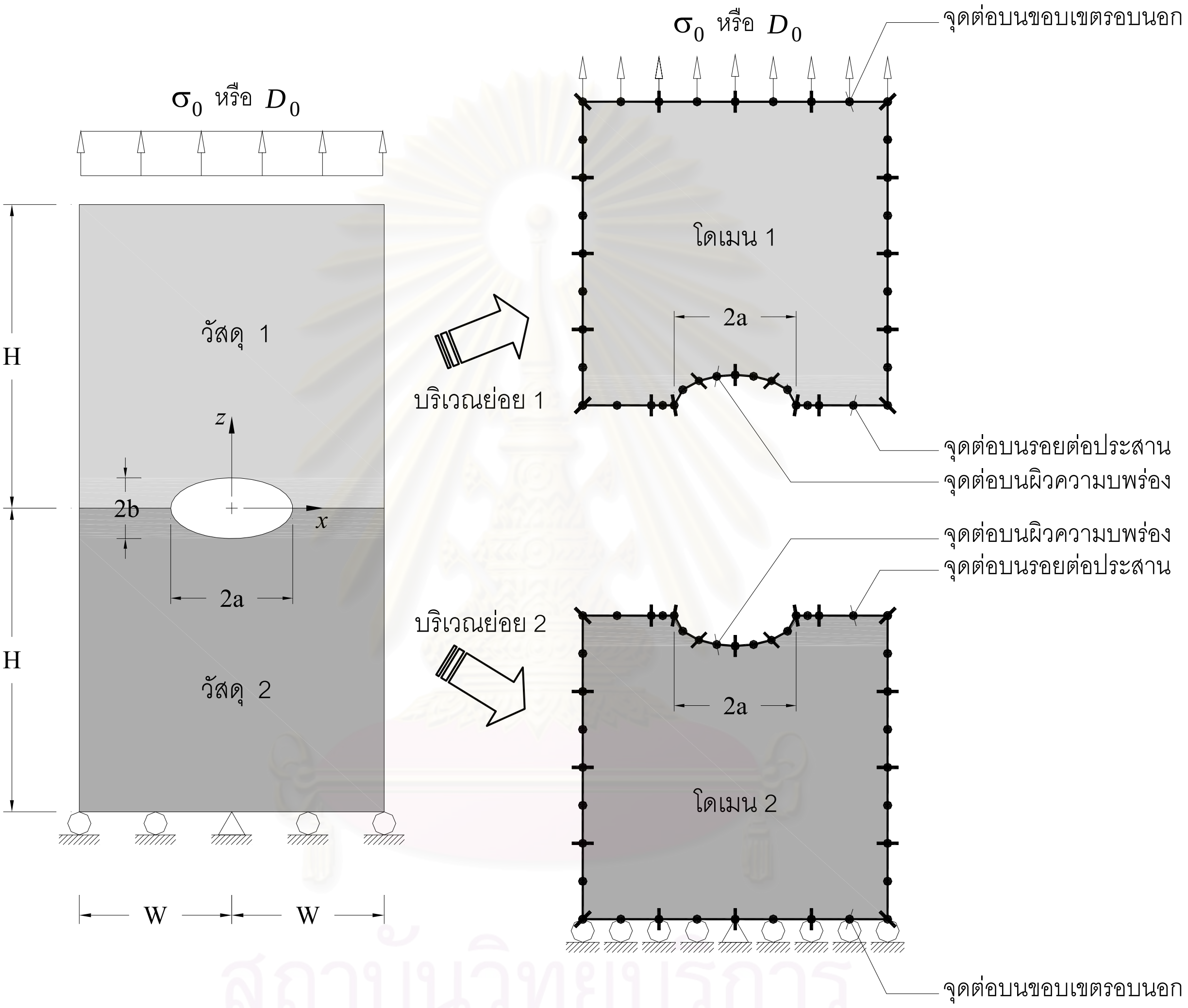
วัสดุ	เพียโซอิเล็กทริก			อีพอกซี เรซิน
	PZT-4	PZT-5	PZT-5H	
ค่าคงตัวโมดูลัสยืดหยุ่น				
c_{11} (10^{10} Nm^{-2})	13.9	12.1	12.6	0.80
c_{12} (10^{10} Nm^{-2})	7.78	7.54	5.5	0.44
c_{13} (10^{10} Nm^{-2})	7.43	7.52	5.3	0.44
c_{33} (10^{10} Nm^{-2})	11.3	11.1	11.7	0.80
c_{44} (10^{10} Nm^{-2})	2.56	2.11	3.53	0.18
ค่าคงตัวเพียโซอิเล็กทริก				
e_{15} (Cm^{-2})	13.44	12.3	17.0	-
e_{31} (Cm^{-2})	-6.98	-5.4	-6.5	-
e_{33} (Cm^{-2})	13.84	15.8	23.3	-
ค่าคงตัวไดอิเล็กตริก				
κ_{11} (10^{-9} Fm^{-1})	6.00	8.170	15.1	0.037
κ_{33} (10^{-9} Fm^{-1})	5.47	7.346	13.0	0.037

ตารางที่ 4.2 ผลการเปรียบเทียบชนิดของแบบจำลองกับค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้

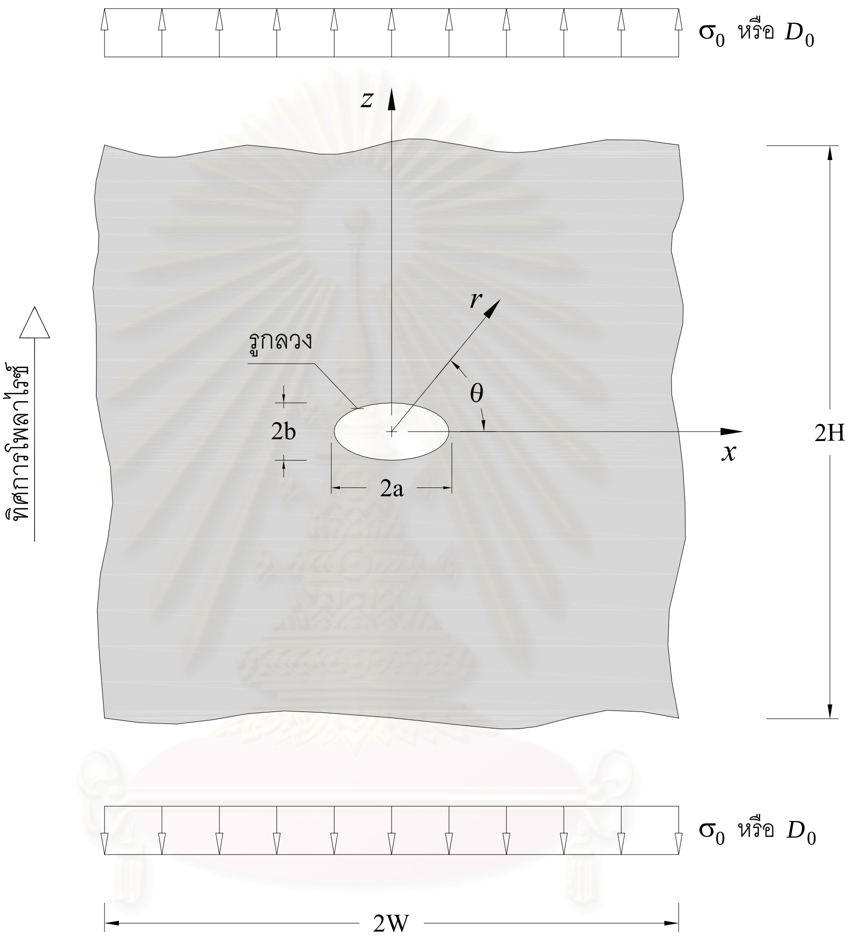
ระเบียบวิธี / ชนิดแบบจำลอง	หน่วยแรงสูงสุด		การกระจัดทางไฟฟ้าสูงสุด	
▪ แรงกระทำทางกล ($\sigma_{zz}^{\infty} = \sigma_0$)	หน่วยแรง ($\sigma_{zz}^{*}(a,0)$)	ผลต่าง (%)	การกระจัดทางไฟฟ้า ($D_z^{*}(a,0)$)	ผลต่าง (%)
- วิธีเชิงวิเคราะห์สำหรับโดเมนอนันต์				
Sosa (1991)	2.6712	-	1.7850E-10	-
- วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (a/W = 0.05)				
Wang และคณะ (2004)	2.6865	+0.57%	-	-
- วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (a/W = 0.05)				
1) แบบจำลองเต็มหน้าตัด	2.6874	+0.61%	1.8158E-10	+1.73%
2) แบบจำลองหนึ่งในสี่ของหน้าตัด	2.6581	-0.49%	1.6992E-10	-4.81%
3) แบบจำลองบริเวณย่อย (งานวิจัยนี้)	2.6538	-0.65%	1.6880E-10	-5.43%
▪ โหลดทางไฟฟ้า ($D_z^{\infty} = D_0$)	หน่วยแรง ($\sigma_{zz}^{**}(a,0)$)	ผลต่าง (%)	การกระจัดทางไฟฟ้า ($D_z^{**}(a,0)$)	ผลต่าง (%)
- วิธีเชิงวิเคราะห์สำหรับโดเมนอนันต์				
Sosa (1991)	8.6712E+07	-	1.8980	-
- วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (a/W = 0.05)				
1) แบบจำลองเต็มหน้าตัด	8.3346E+07	-3.88%	1.9004	+0.13%
2) แบบจำลองหนึ่งในสี่ของหน้าตัด	8.3659E+07	-3.52%	1.8876	-0.55%
3) แบบจำลองบริเวณย่อย (งานวิจัยนี้)	8.4654E+07	-2.37%	1.8878	-0.54%



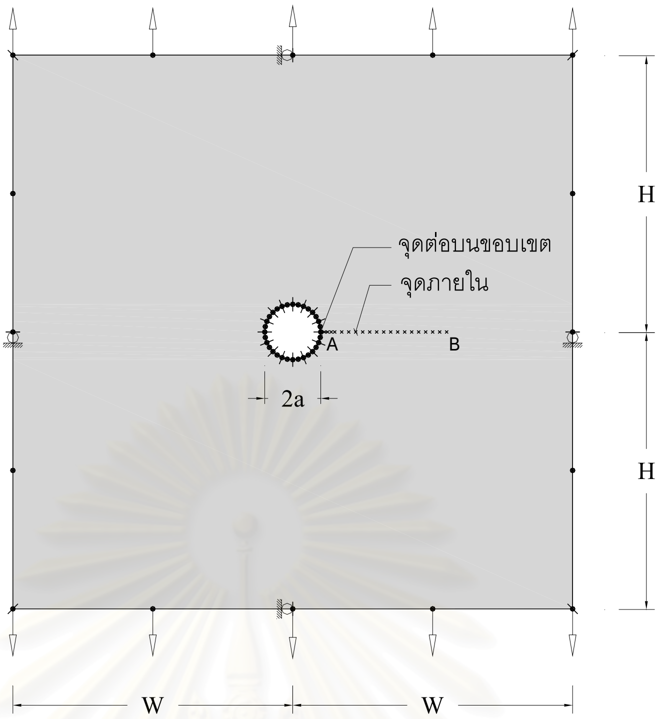
รูปที่ 4.1 ผังงานการคำนวณสำหรับแก้ปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุในงานวิจัยนี้



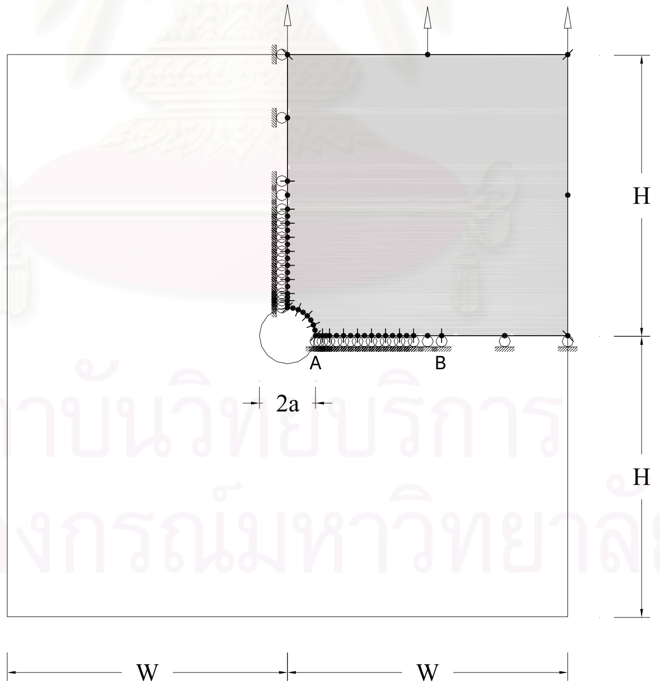
รูปที่ 4.2 แบบจำลองบริเวณย่อยของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง



รูปที่ 4.3 ปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูกลวงตรงกลาง ภายใต้แรงกระทำทางกล หรือโหลดทางไฟฟ้าที่อนันต์

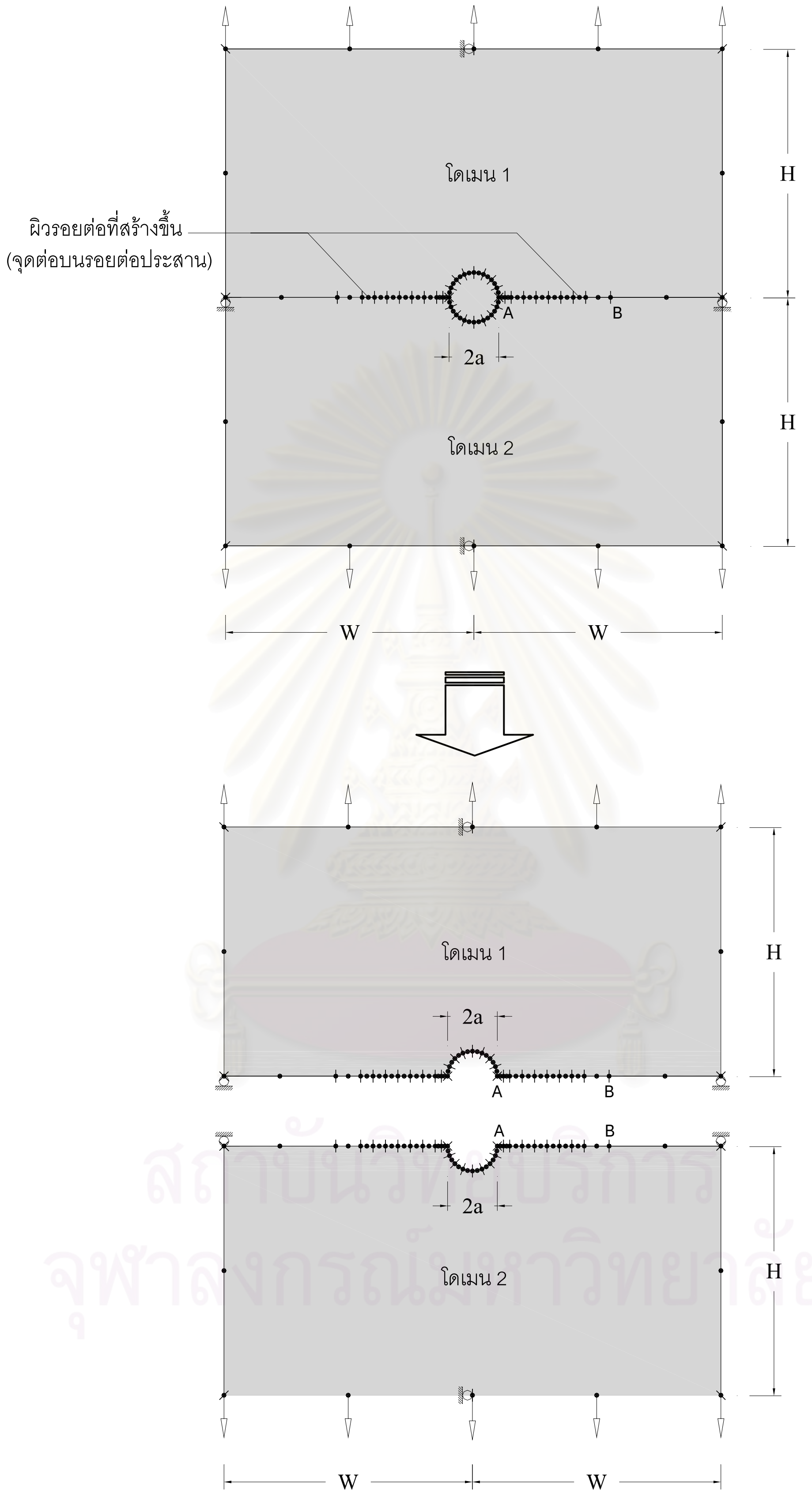


ก) แบบจำลองเต็มหน้าตัด

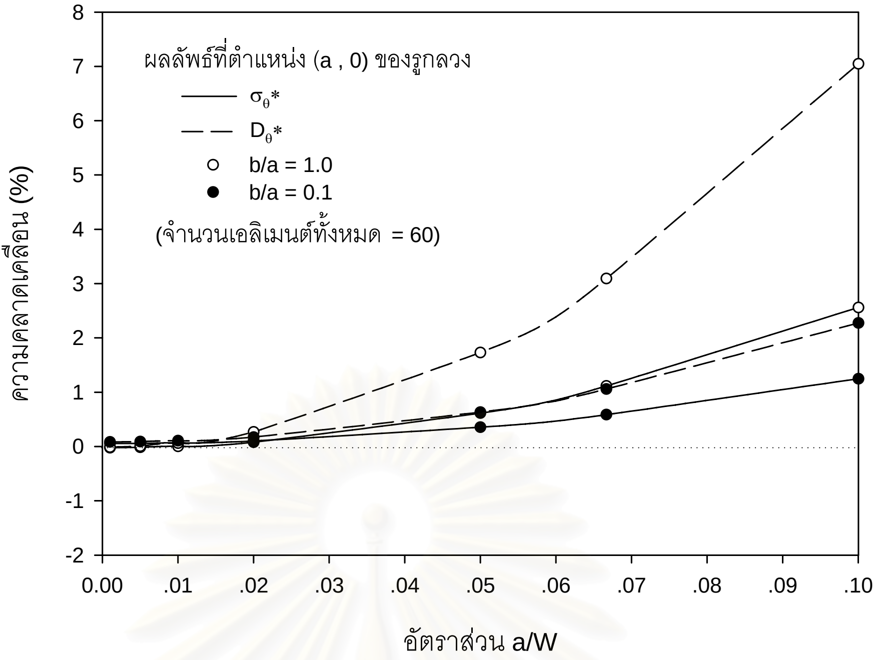


ข) แบบจำลองหนึ่งในสี่ของหน้าตัด

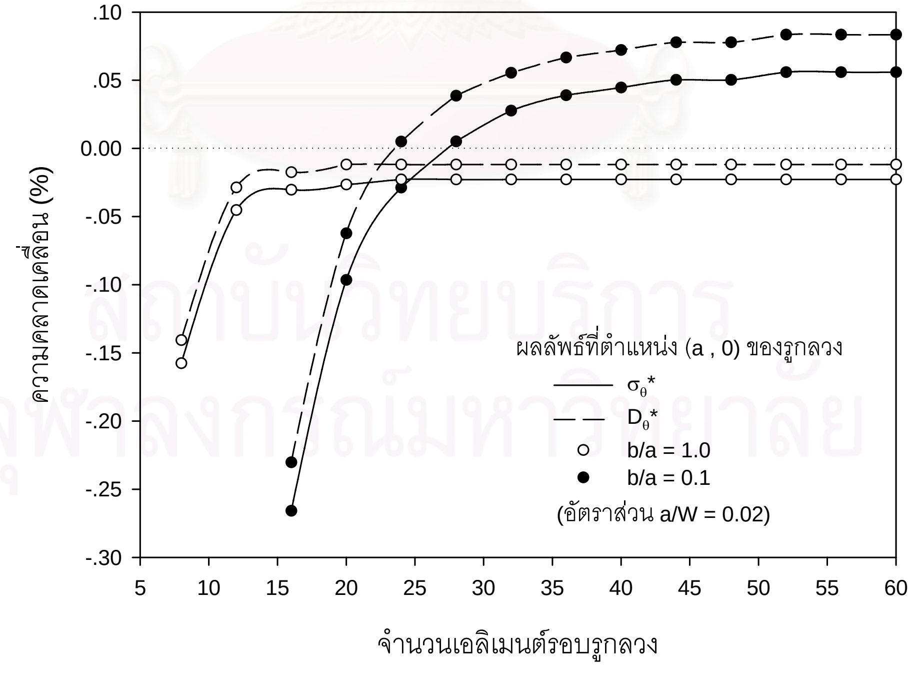
รูปที่ 4.4 การพิจารณาปัญหาแบบหนึ่งโดเมน



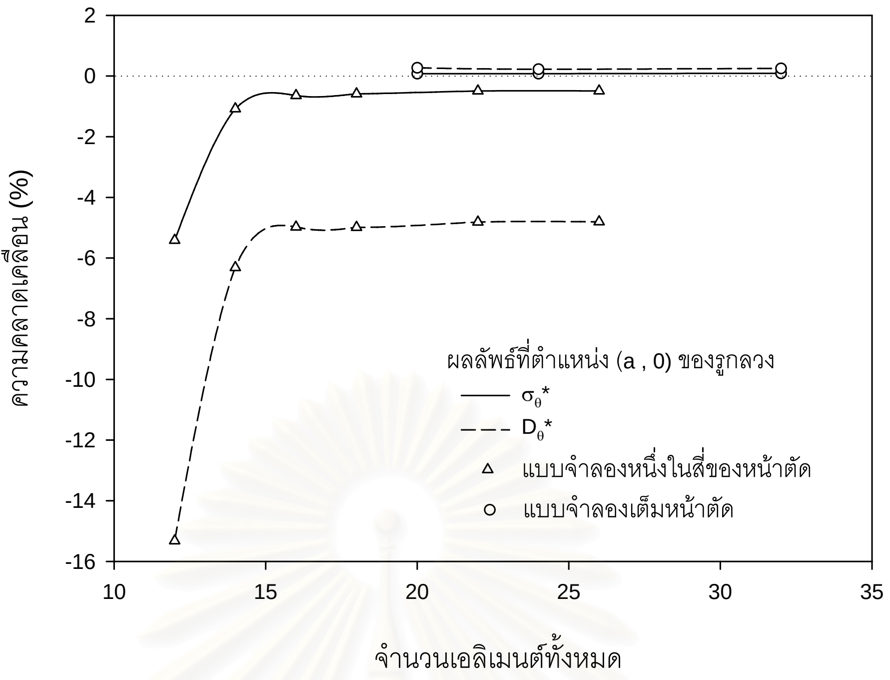
รูปที่ 4.5 การพิจารณาปัญหาแบบสองโดเมน



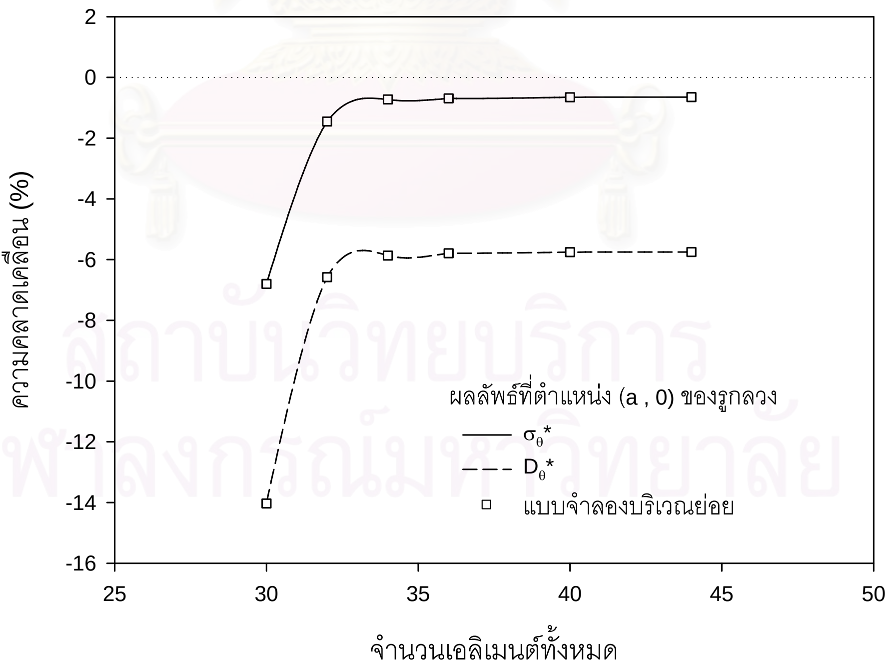
รูปที่ 4.6 การเปรียบเทียบการลู่เข้าของค่าผลลัพธ์ เพื่อหาอัตราส่วน a/W ที่เหมาะสม ภายใต้แรงกระทำทางกล



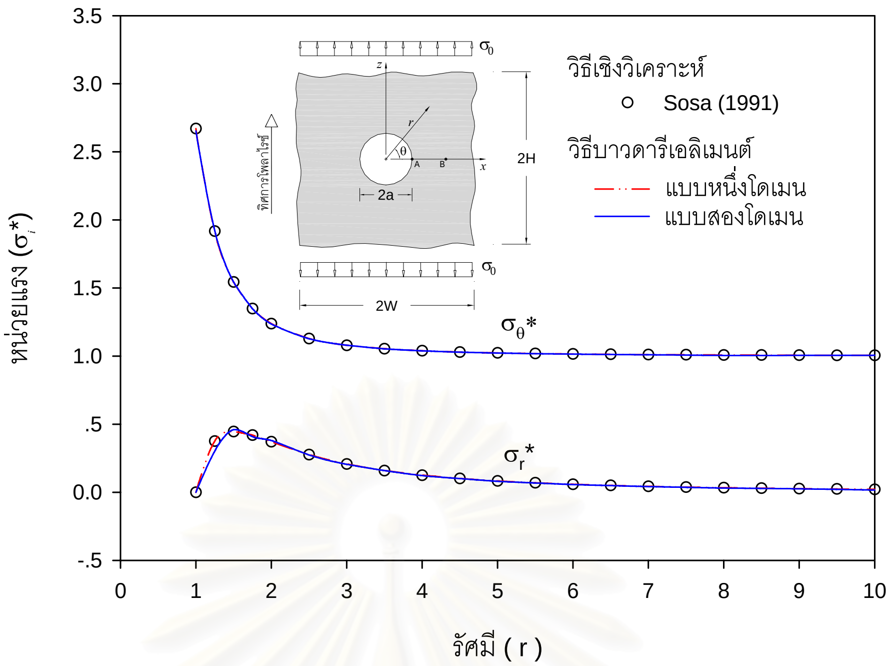
รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบการลู่เข้าของค่าผลลัพธ์ เพื่อหาจำนวนเอลิเมนต์รอบรูกลวงที่เหมาะสม ภายใต้แรงกระทำทางกล



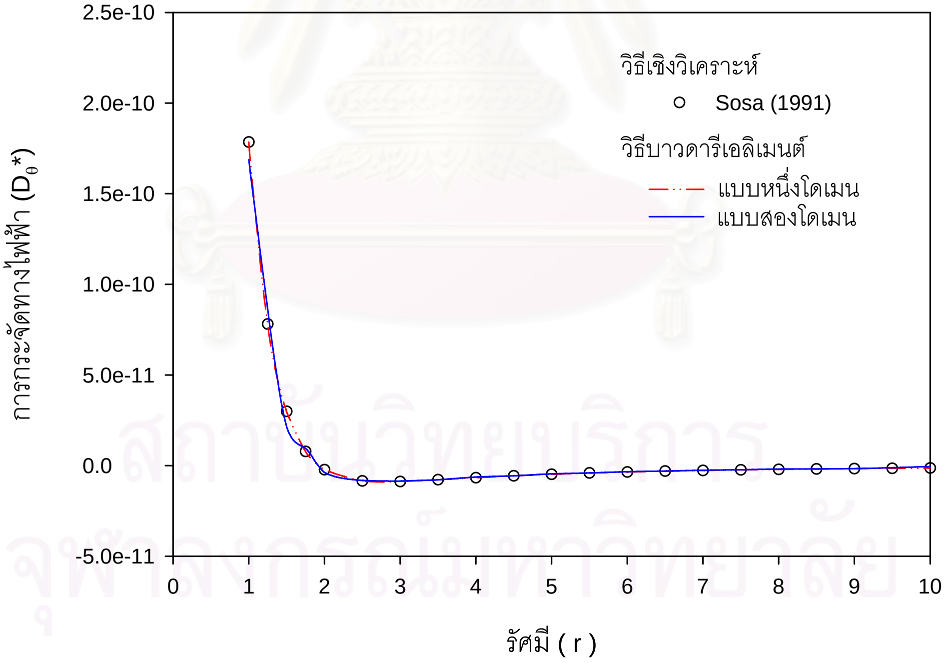
รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบการลู่เข้าของค่าผลลัพธ์ เมื่อพิจารณาปัญหาแบบหนึ่งโดเมนภายใต้แรงกระทำทางกล



รูปที่ 4.9 การเปรียบเทียบการลู่เข้าของค่าผลลัพธ์ เมื่อพิจารณาปัญหาแบบสองโดเมนภายใต้แรงกระทำทางกล

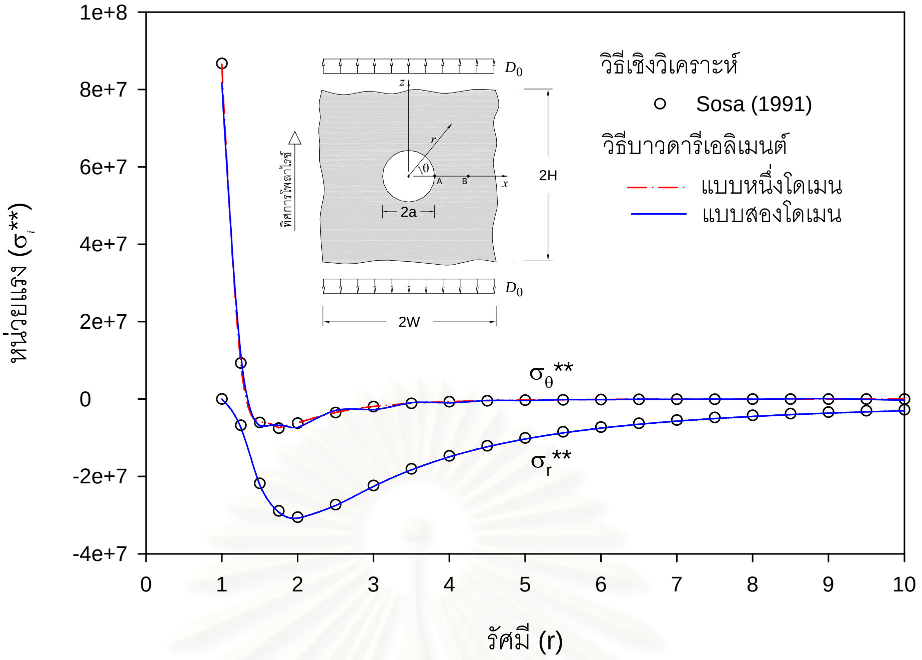


ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง บนระนาบ $\theta = 0$

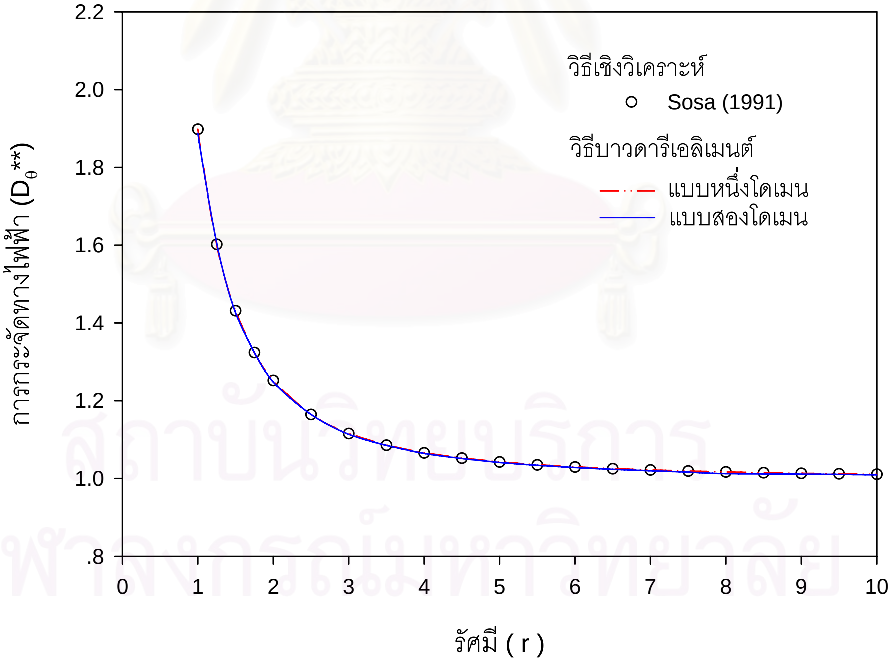


ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า บนระนาบ $\theta = 0$

รูปที่ 4.10 การเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ เมื่ออัตราส่วน b/a = 1
ภายใต้แรงกระทำทางกล

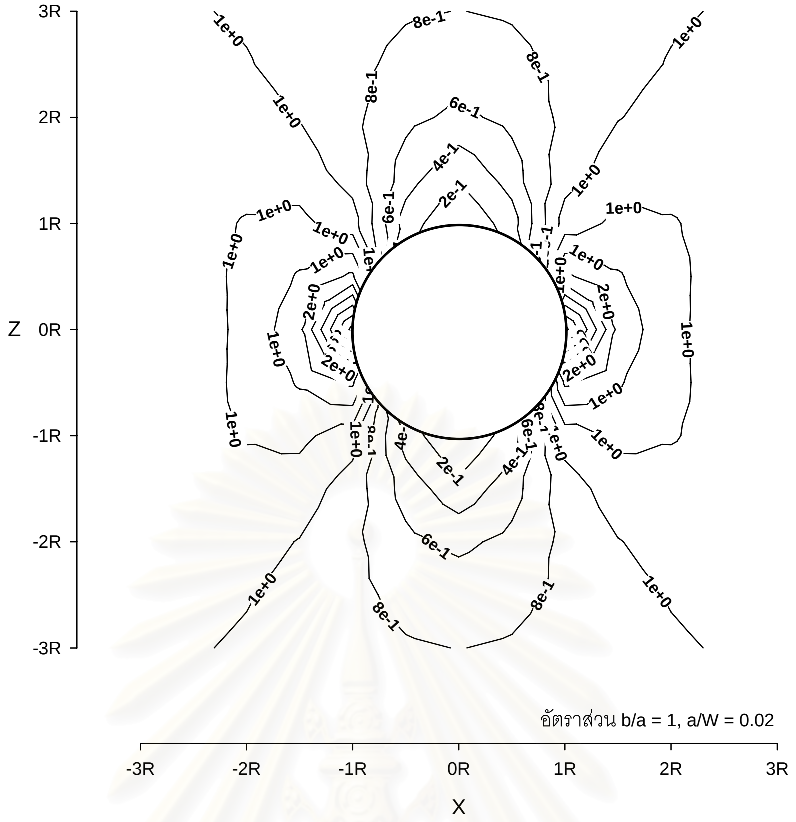


ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง บนระนาบ θ = 0

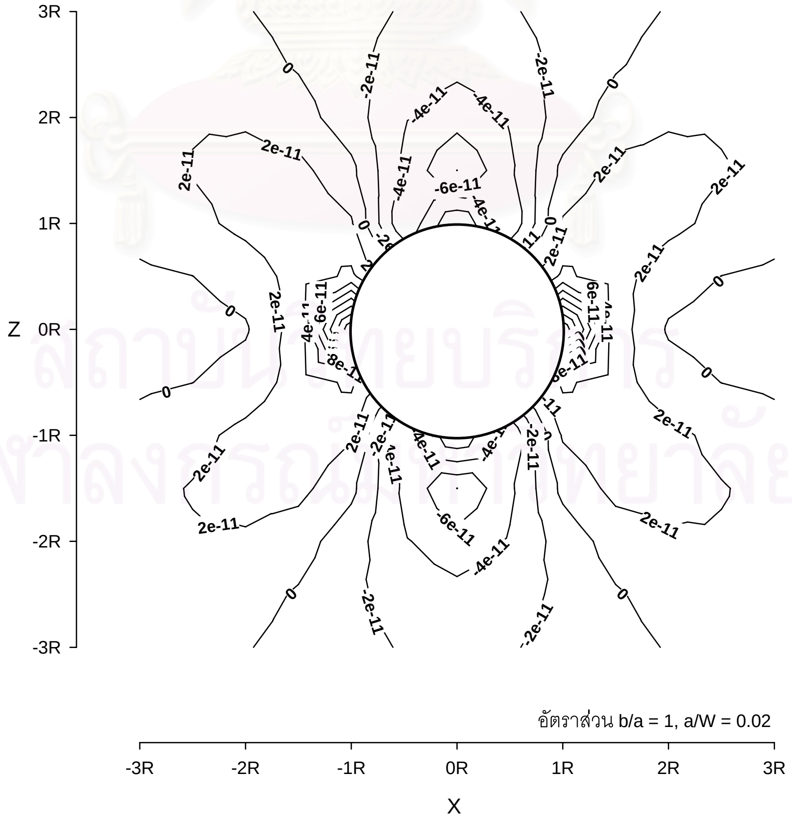


ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า บนระนาบ θ = 0

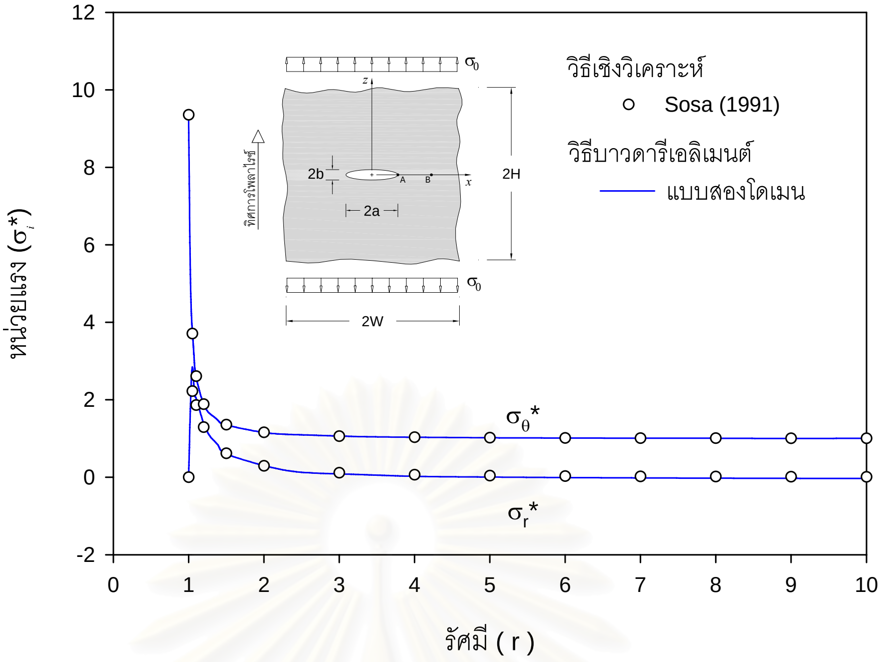
รูปที่ 4.11 ผลการเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ เมื่ออัตราส่วน b/a = 1
ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



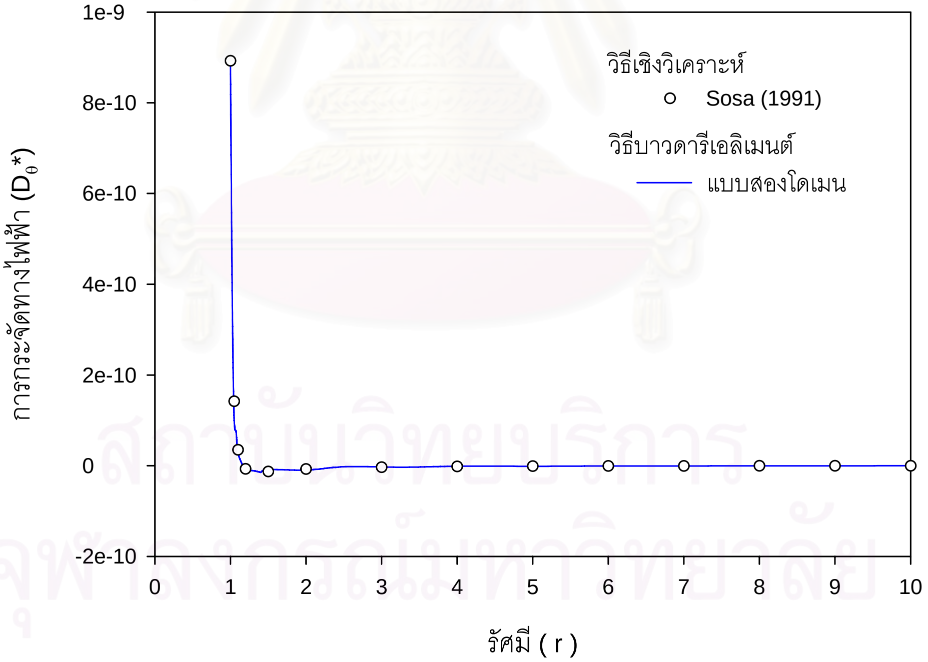
รูปที่ 4.12 ลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ_{zz}^*) รอบรูวงกลม ภายใต้แรงกระทำทางกล



รูปที่ 4.13 ลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) รอบรูวงกลม ภายใต้แรงกระทำทางกล



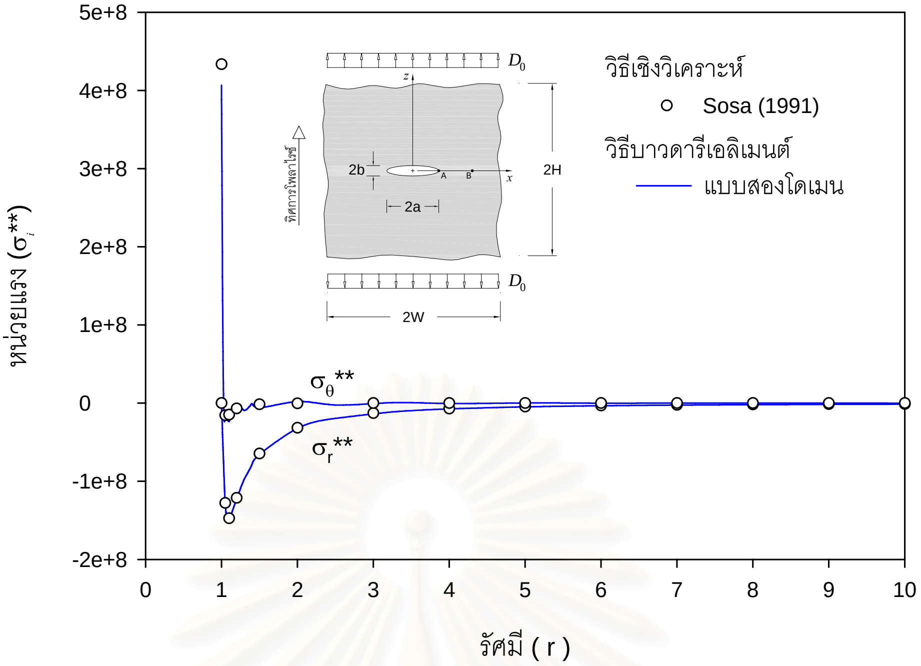
ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง บนระนาบ θ = 0



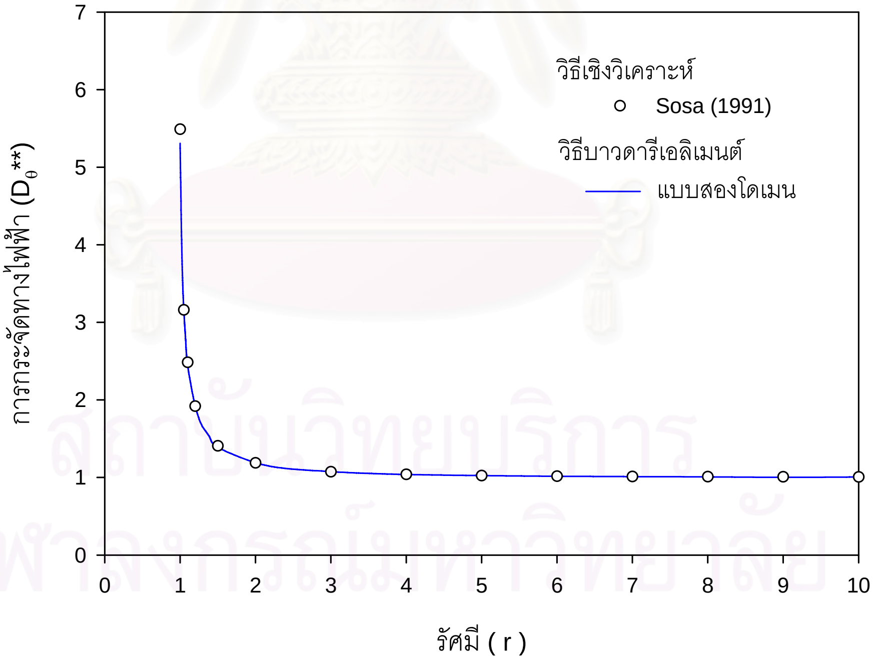
ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า บนระนาบ θ = 0

รูปที่ 4.14 การเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ เมื่ออัตราส่วน b/a = 0.2

ภายใต้แรงกระทำทางกล

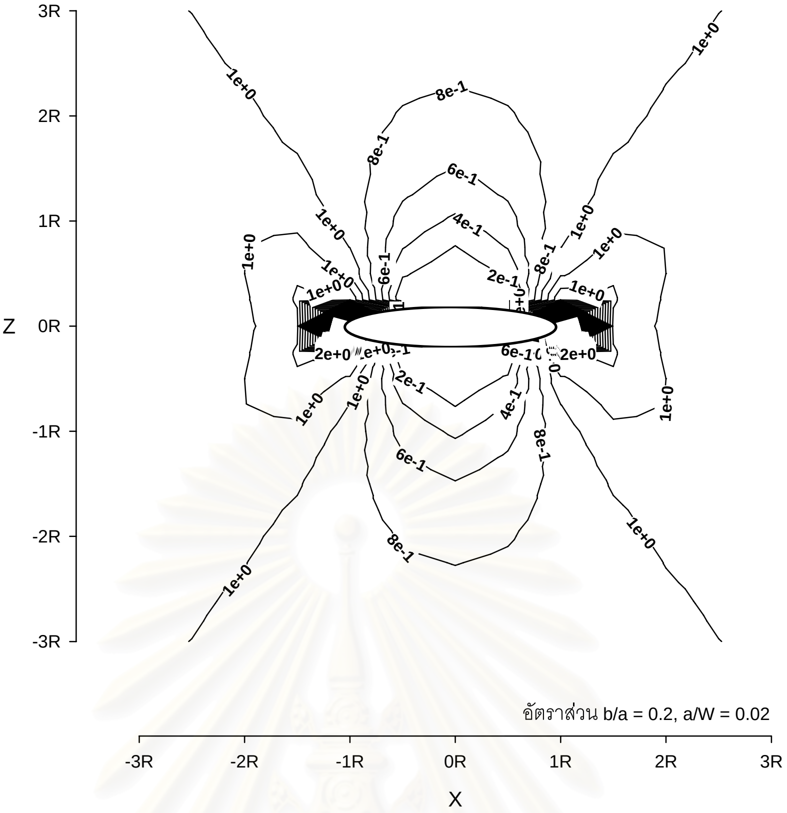


ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง บนระนาบ $\theta = 0$



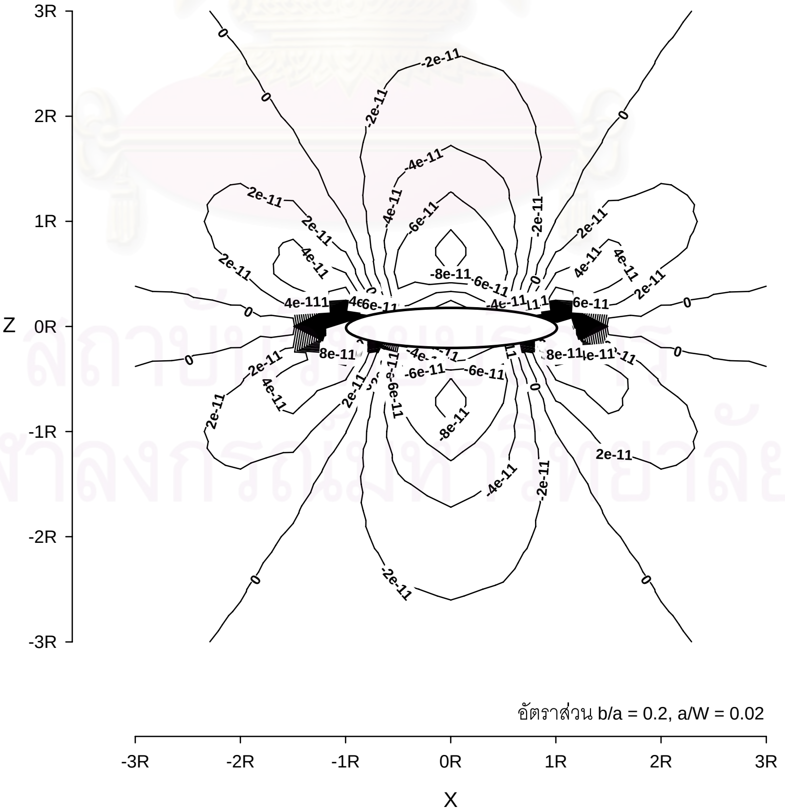
ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า บนระนาบ $\theta = 0$

รูปที่ 4.15 การเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ เมื่ออัตราส่วน b/a = 0.2
ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



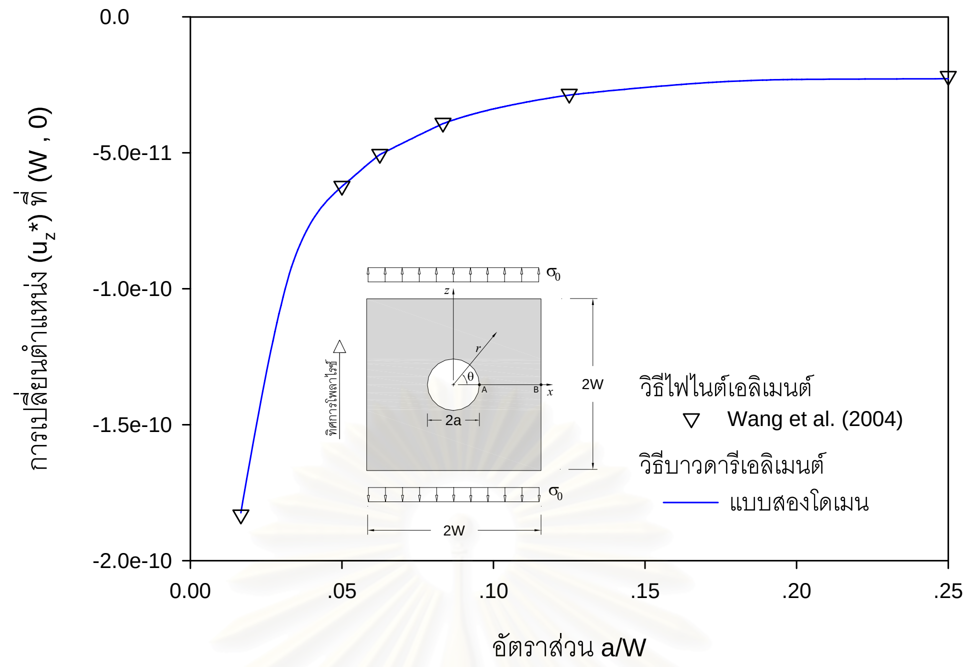
อัตราส่วน b/a = 0.2, a/W = 0.02

รูปที่ 4.16 ลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ^*_{zz}) รอบรูวงรี ภายใต้แรงกระทำทางกล

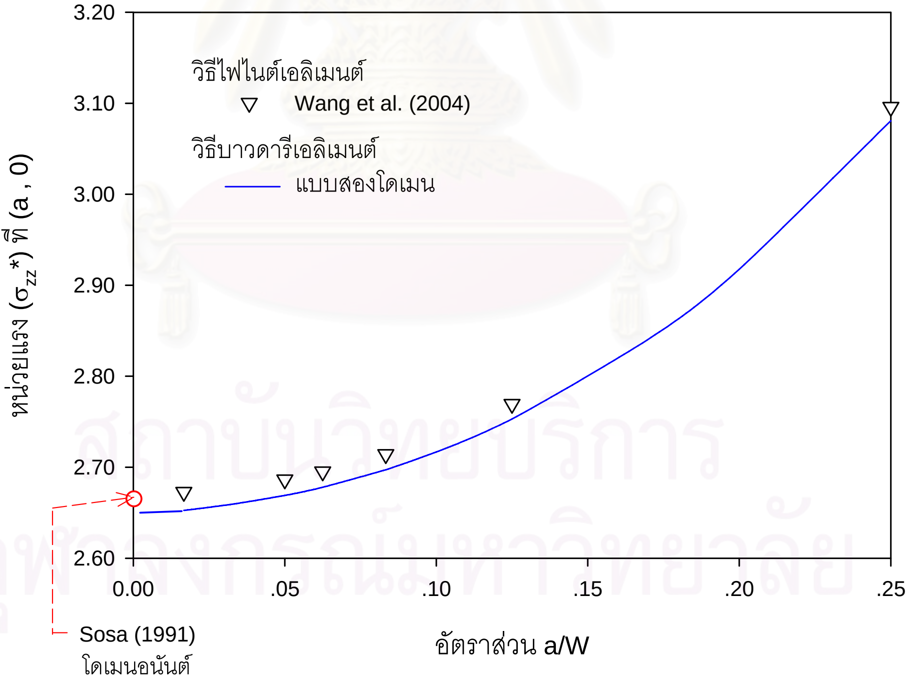


อัตราส่วน b/a = 0.2, a/W = 0.02

รูปที่ 4.17 ลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D^*_z) รอบรูวงรี ภายใต้แรงกระทำทางกล

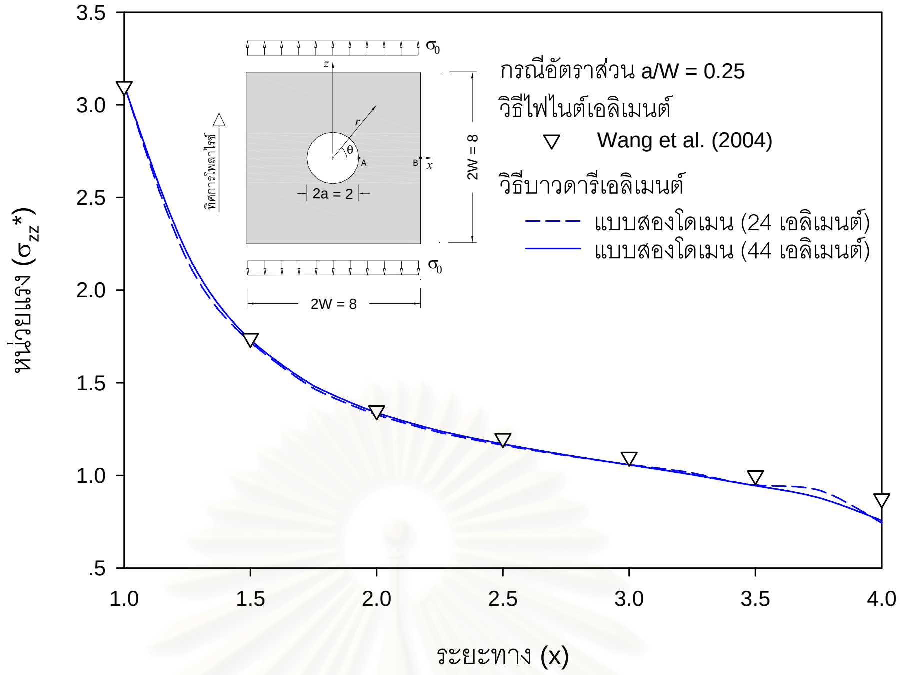


ก) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง ที่ขอบรอบนอก (W , 0)

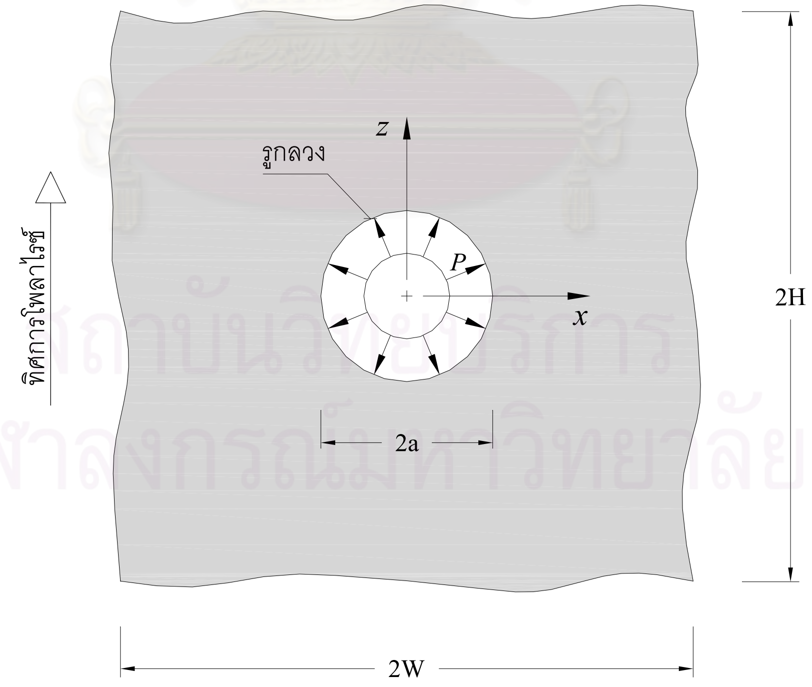


ข) การเปรียบเทียบหน่วยแรงสูงสุด ที่ขอบรูวงกลม (a , 0)

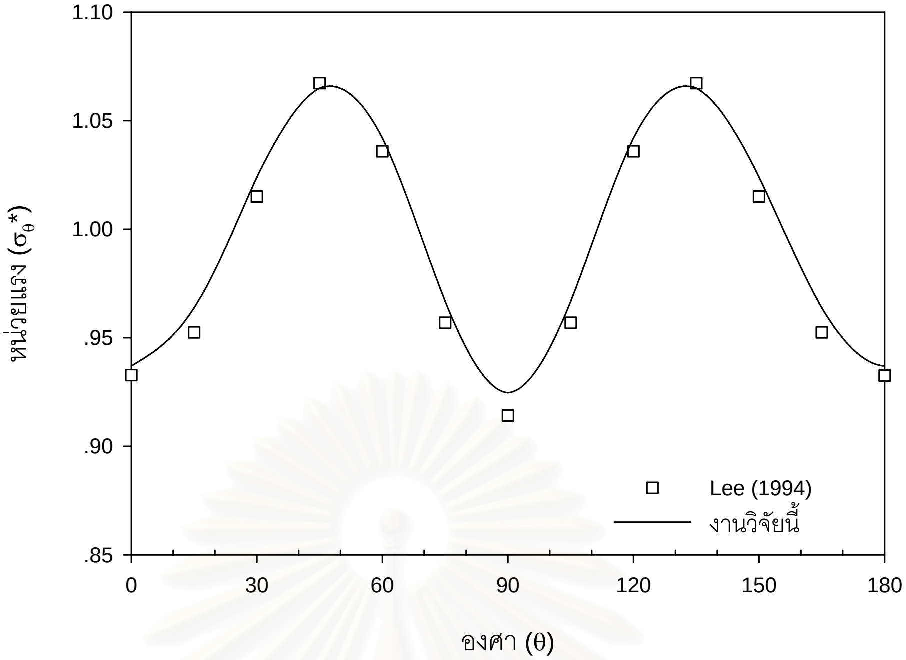
รูปที่ 4.18 การเปรียบเทียบผลของอัตราส่วน a/W ที่มีต่อค่าผลลัพธ์
ภายใต้แรงกระทำทางกล



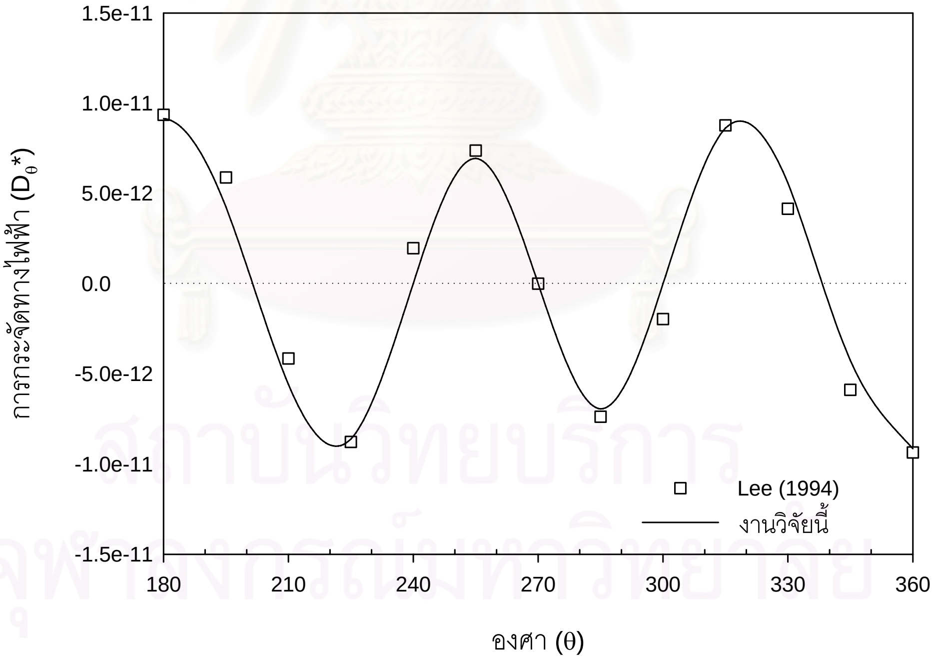
รูปที่ 4.19 การเปรียบเทียบหน่วยแรงบนระนาบ $z = 0$ สำหรับแผ่นจำกัดที่มีอัตราส่วนขนาดรู a/W = 0.25 ภายใต้แรงกระทำทางกล



รูปที่ 4.20 ปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูวงกลม ภายใต้แรงกระทำทางกล (P) ที่ขอบรูกลวง

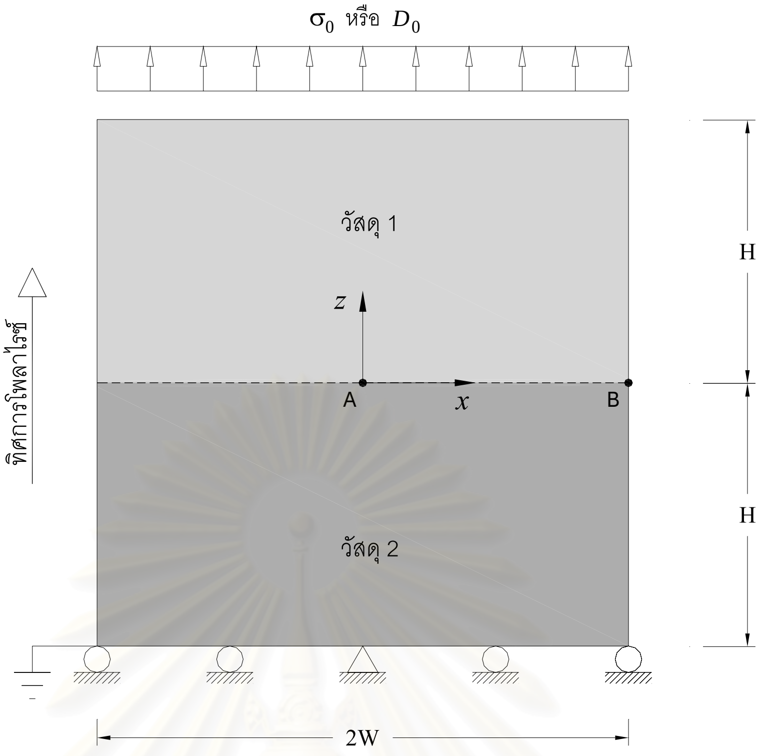


ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรงรอบรูวงกลม

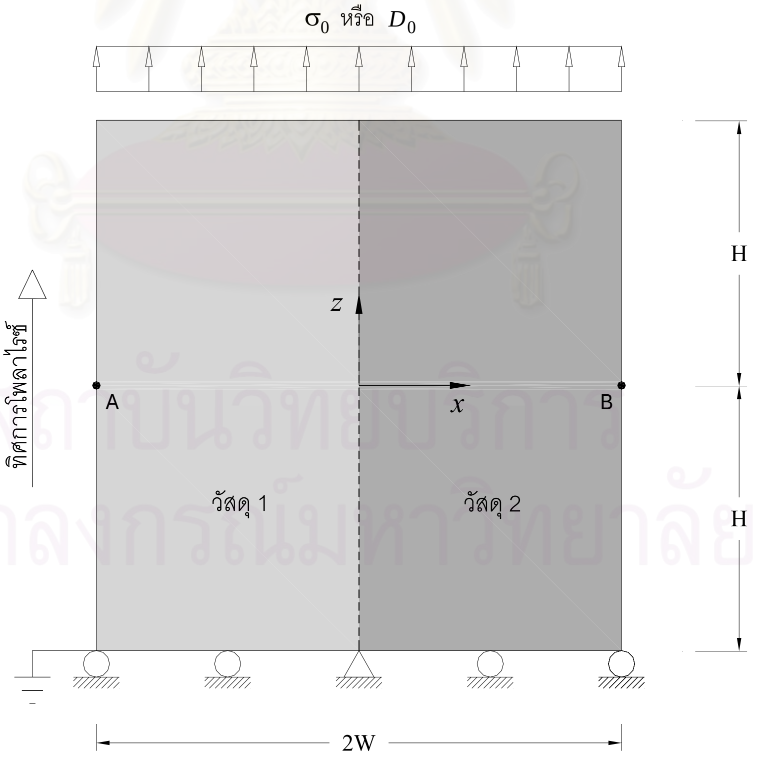


ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้ารอบรูวงกลม

รูปที่ 4.21 การเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกแผ่นอนันต์ที่มีรูวงกลม ภายใต้แรงกระทำทางกล (P) ที่ขอบรูกลวง

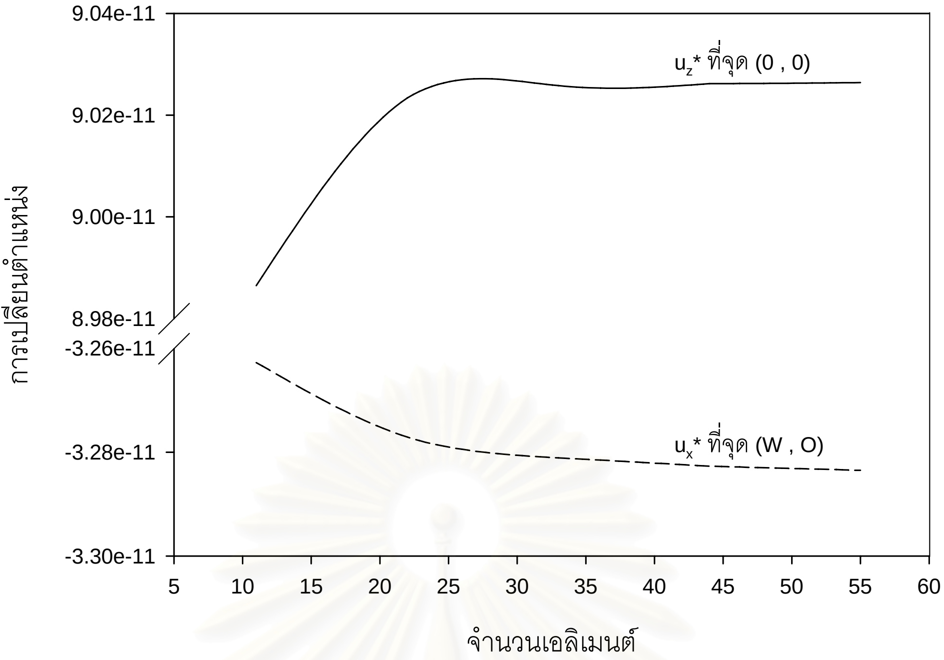


ก) ประกอบในแนวนอน

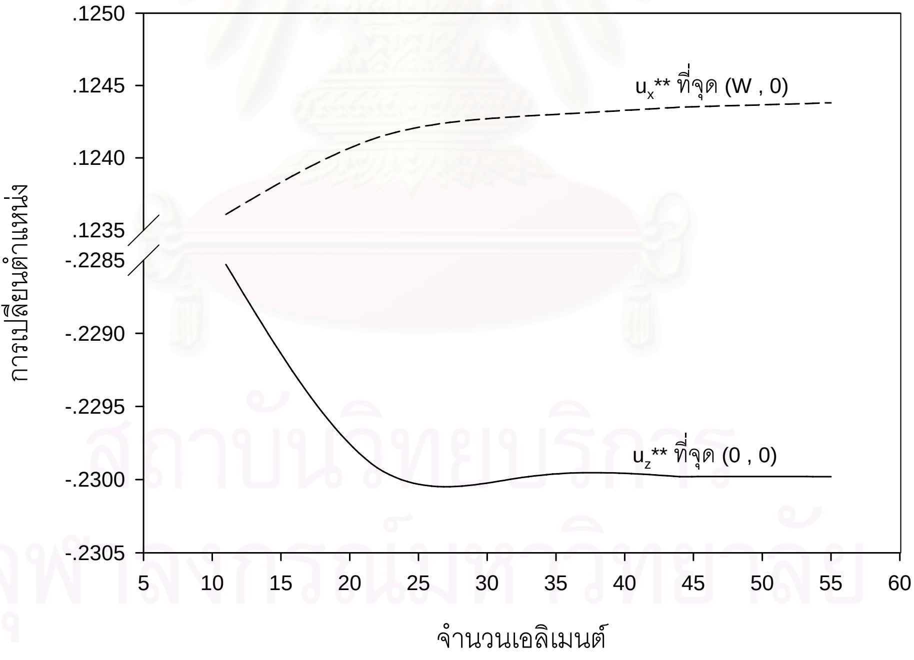


ข) ประกอบในแนวตั้ง

รูปที่ 4.22 ตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่อง

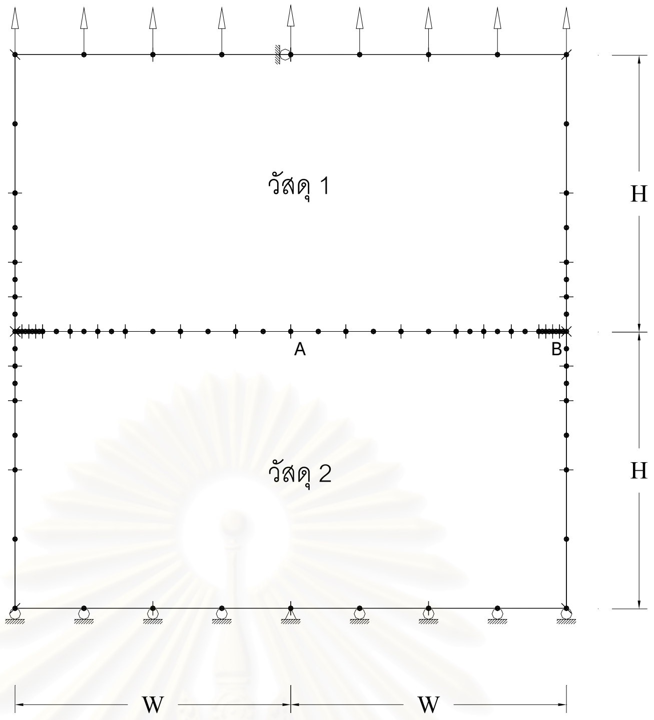


ก) การลู่เข้าของผลลัพธ์ เมื่อให้แรงกระทำทางกล

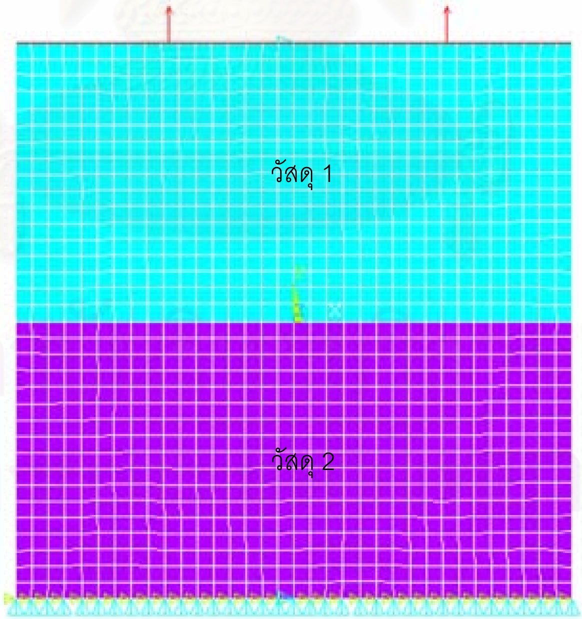


ข) การลู่เข้าของผลลัพธ์ เมื่อให้โหลดทางไฟฟ้า

รูปที่ 4.23 การลู่เข้าของค่าผลลัพธ์กับจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้
สำหรับปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ ที่ไม่มีความบกพร่อง

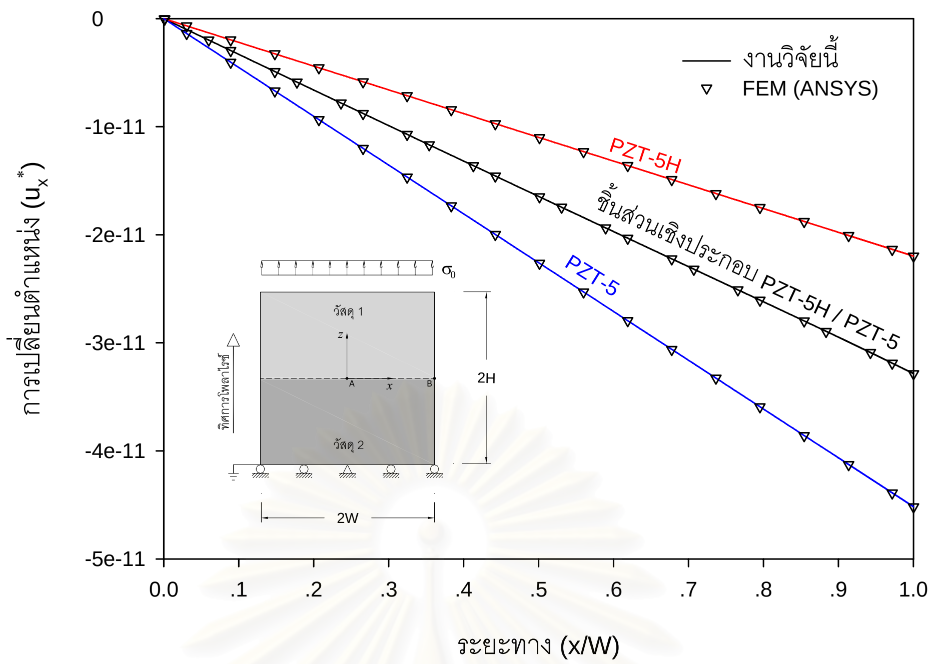


ก) ระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (งานวิจัยนี้) เมื่อใช้ 44 เอลิเมนต์ขอบเขต

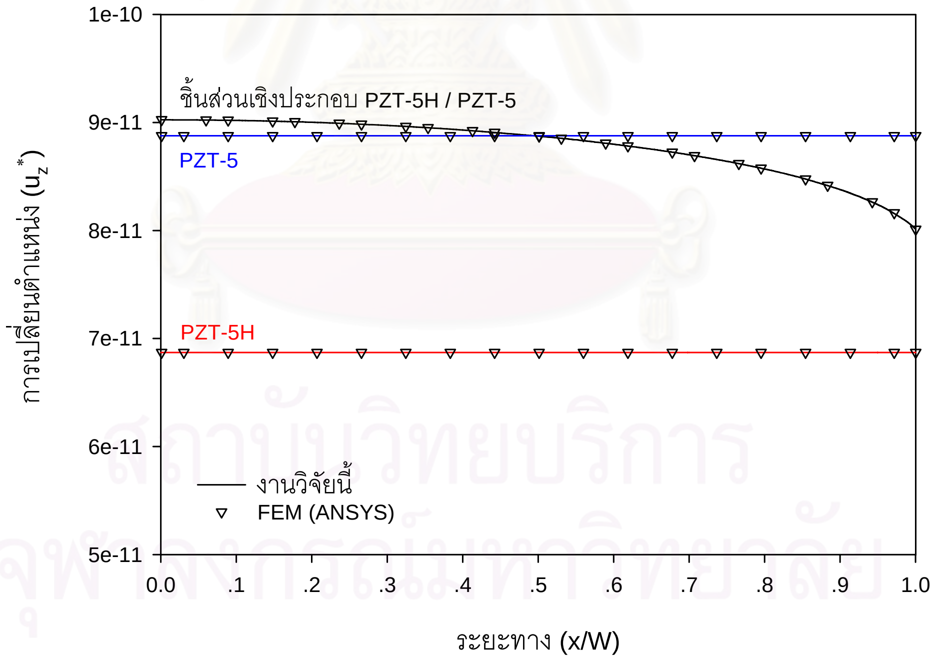


ข) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (ANSYS) เมื่อใช้ 1156 เอลิเมนต์

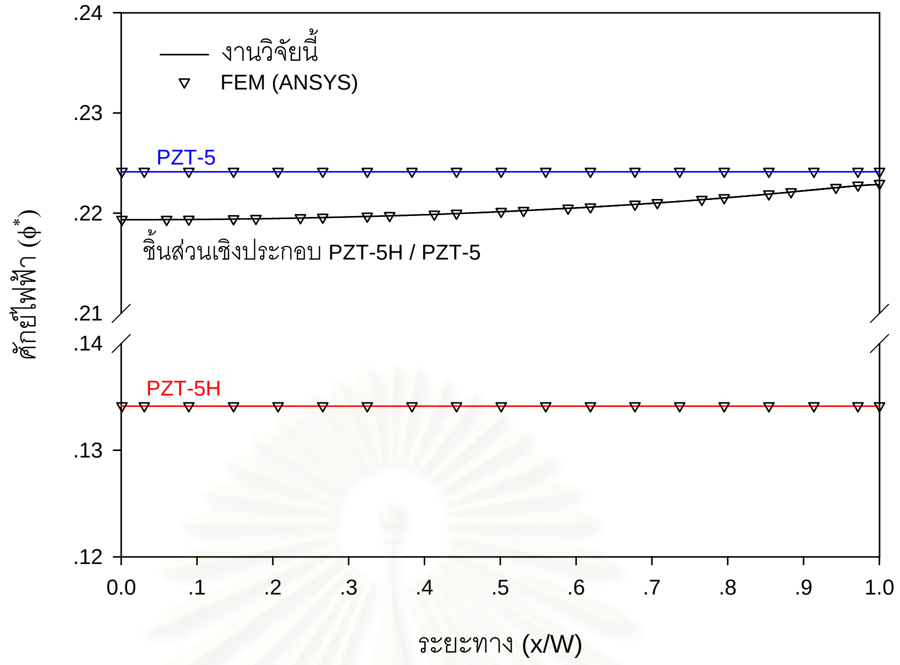
รูปที่ 4.24 การเปรียบเทียบแบบจำลองระหว่างวิธีบาวดารีเอลิเมนต์กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ ที่ไม่มีความบกพร่อง



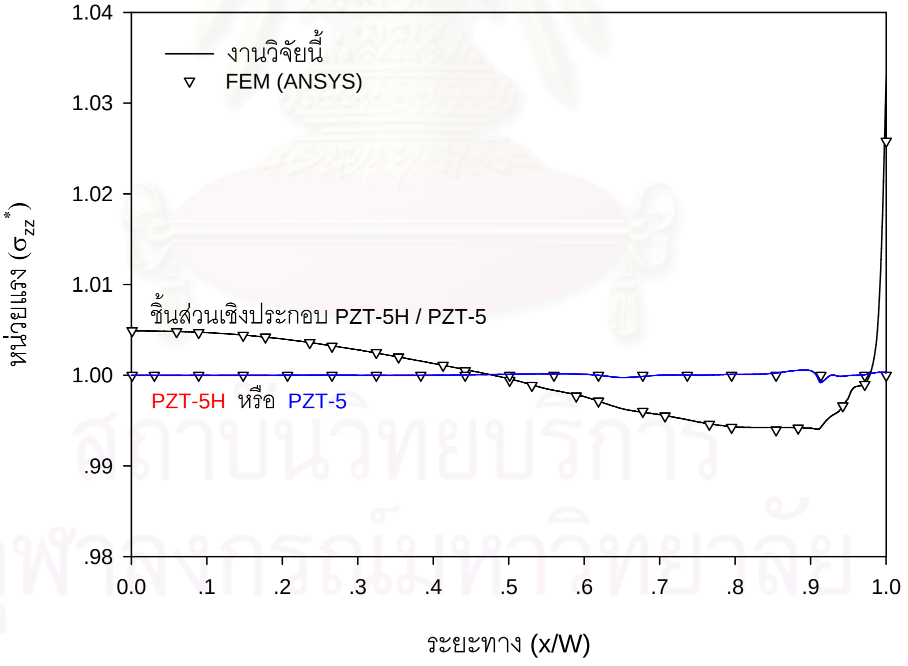
ก) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_x^*) บนระนาบ $z = 0$



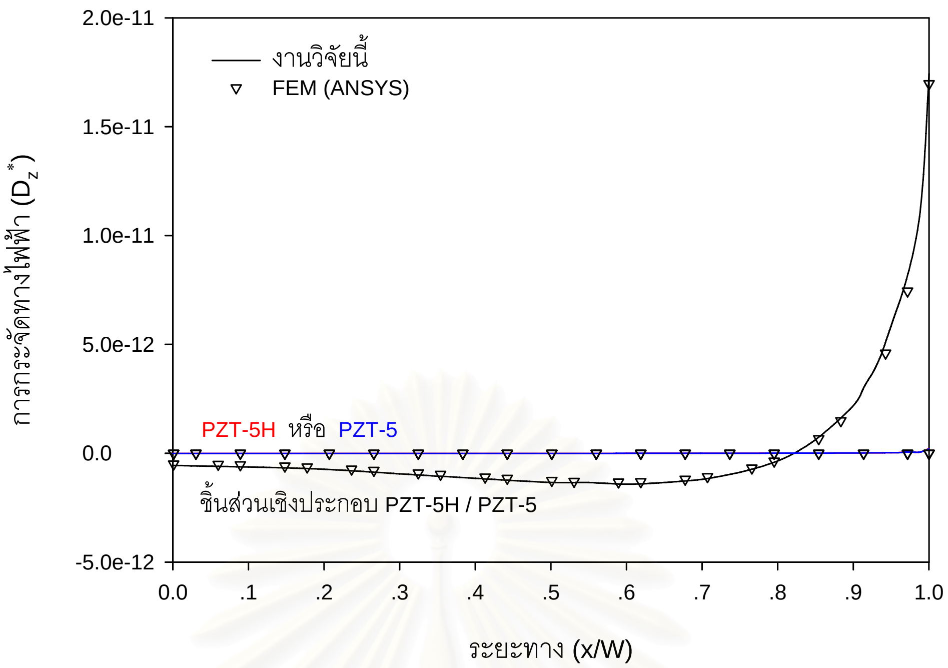
ข) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_z^*) บนระนาบ $z = 0$



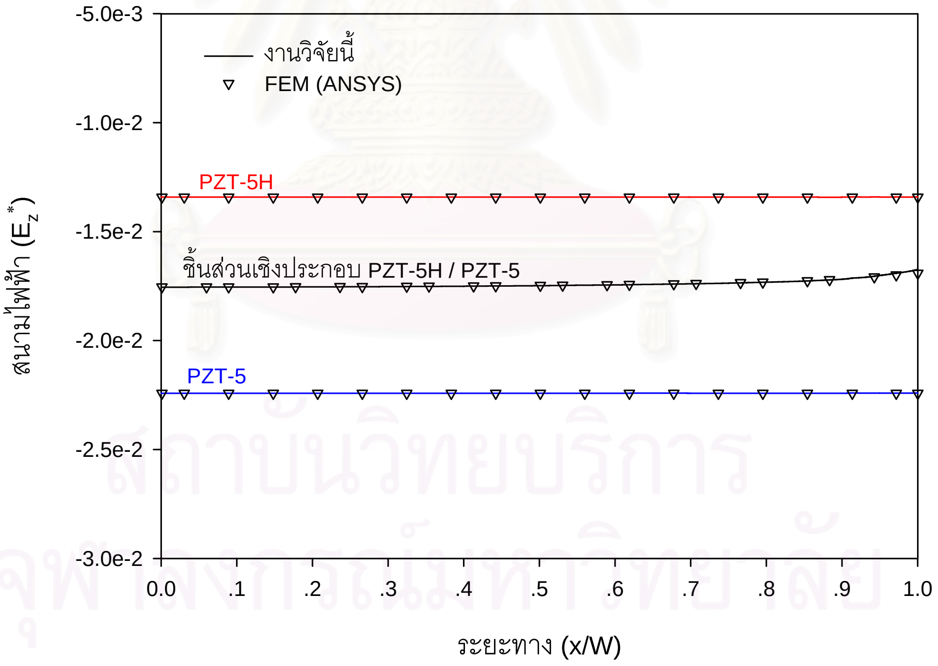
ค) การเปรียบเทียบศักย์ไฟฟ้า (ϕ) บนระนาบ $z = 0$



ง) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^*) บนระนาบ $z = 0$

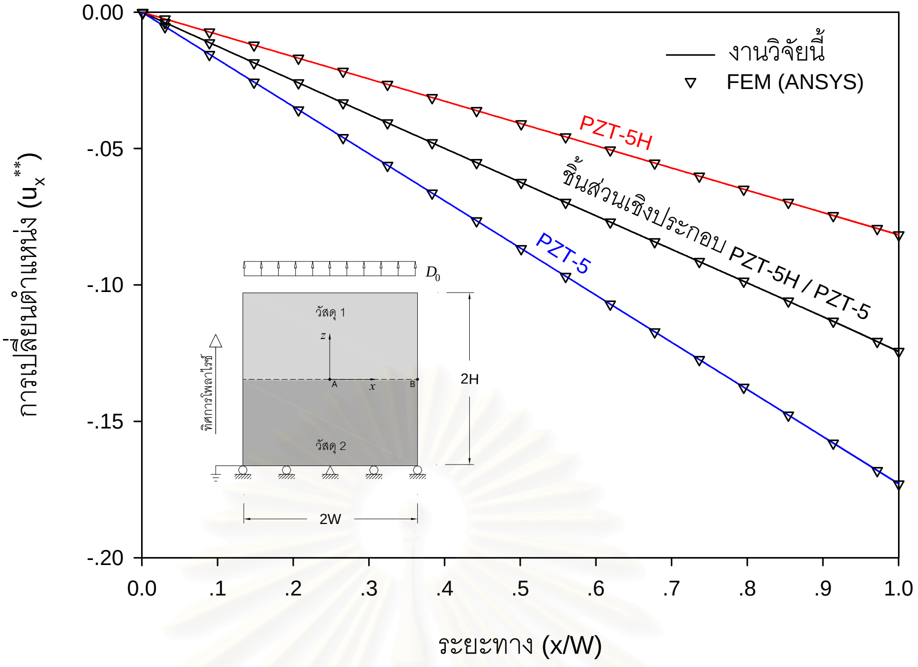


จ) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) บนระนาบ z = 0

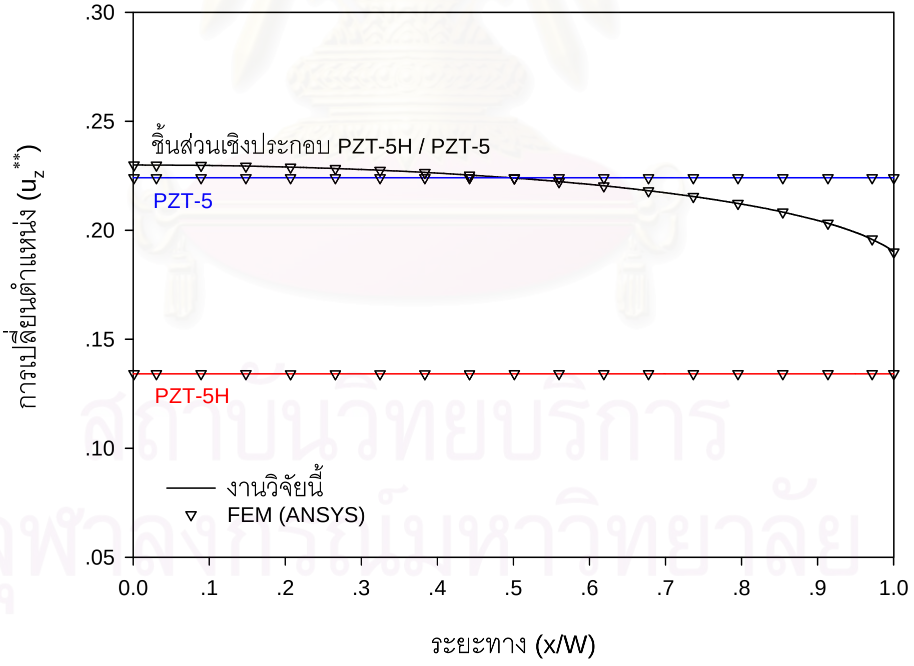


ฉ) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^*) บนระนาบ z = 0

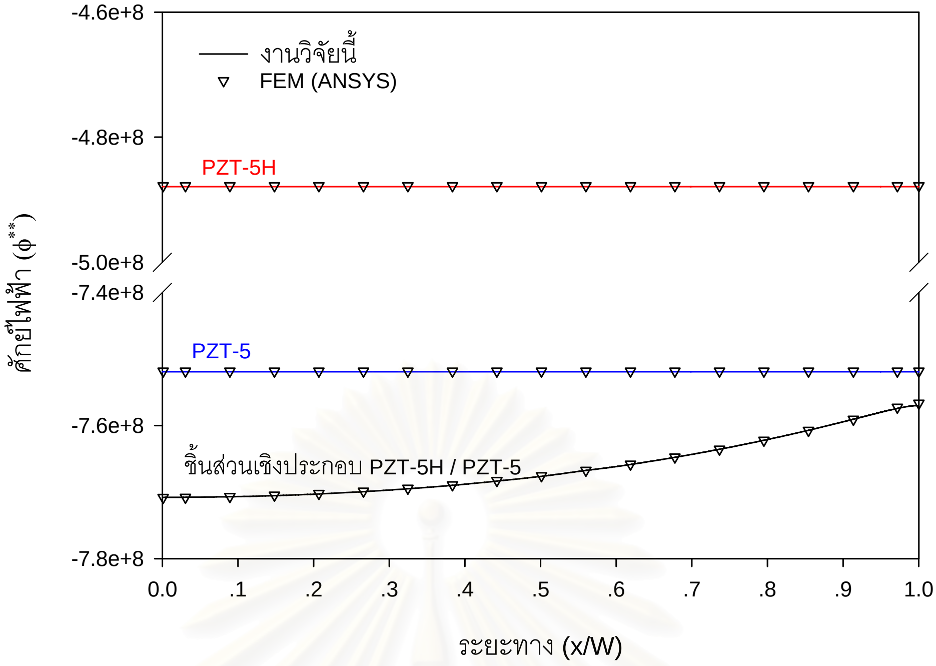
รูปที่ 4.25 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (ประกอบในแนวนอน) ที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้แรงกระทำทางกล



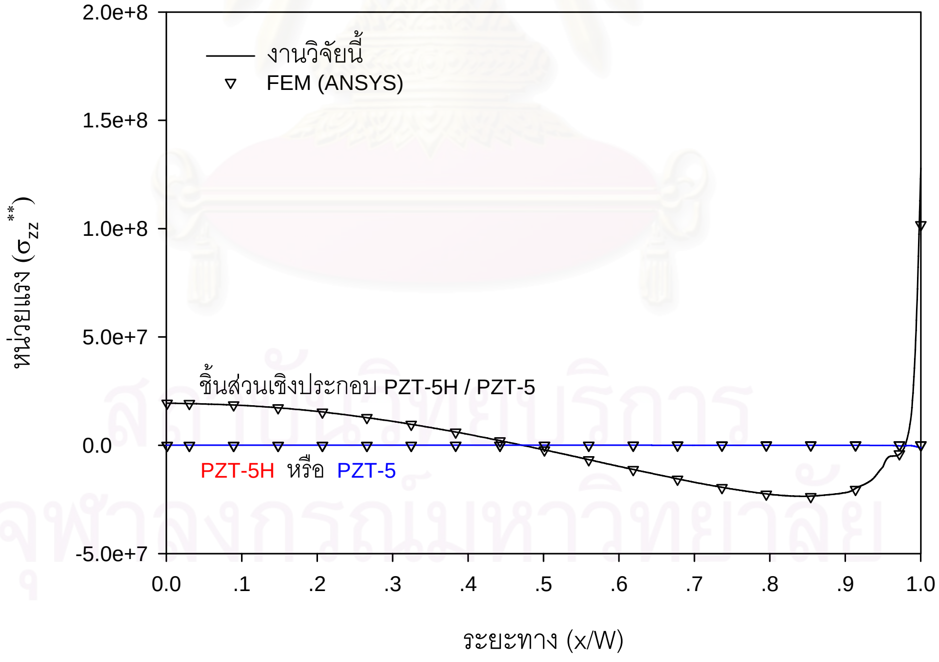
ก) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_x^{**}) บนระนาบ $z = 0$



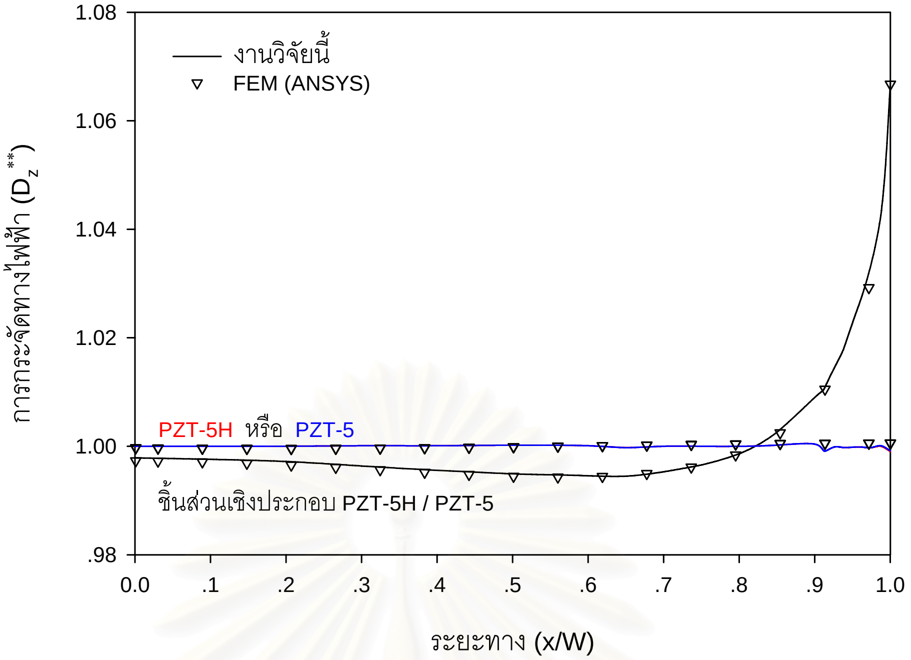
ข) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_z^{**}) บนระนาบ $z = 0$



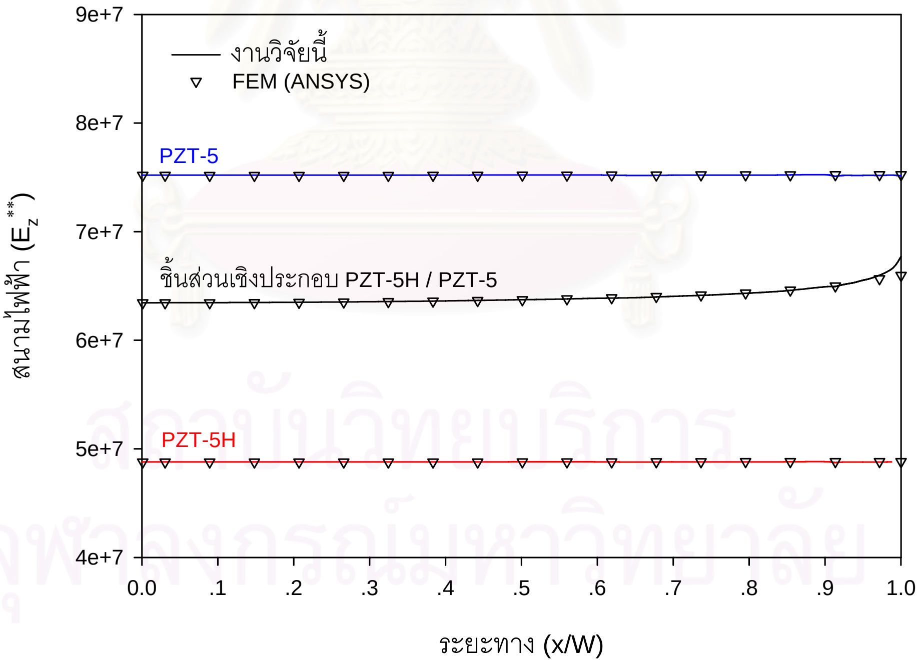
ค) การเปรียบเทียบศักย์ไฟฟ้า (ϕ^{**}) บนระนาบ $z = 0$



ง) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^{**}) บนระนาบ $z = 0$

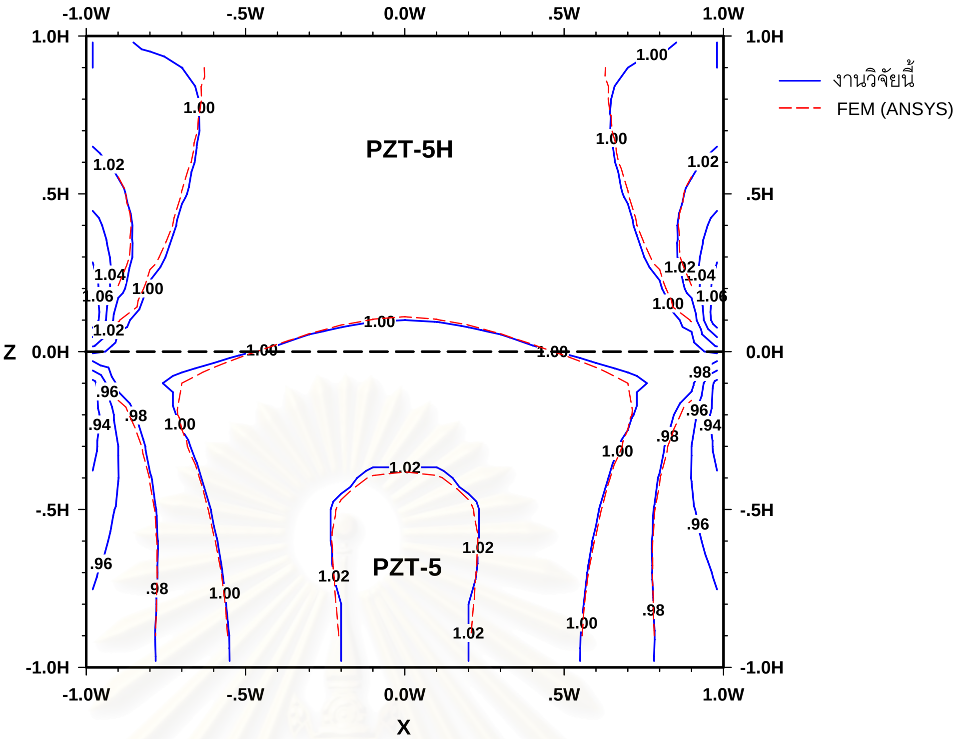


จ) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**}) บนระนาบ z = 0

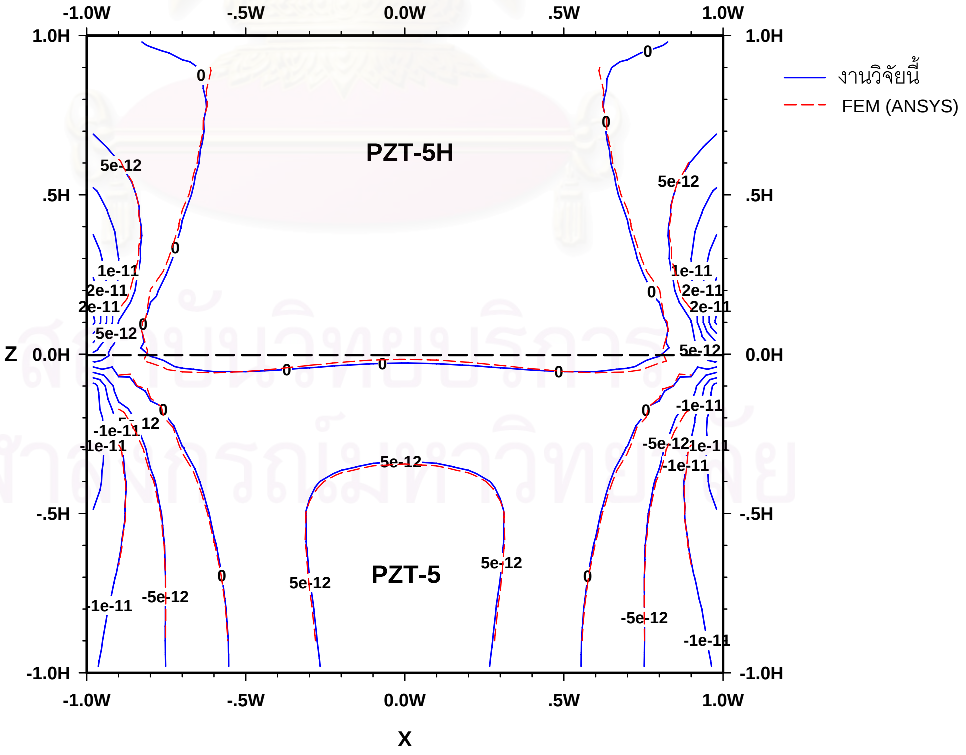


ฉ) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^{**}) บนระนาบ z = 0

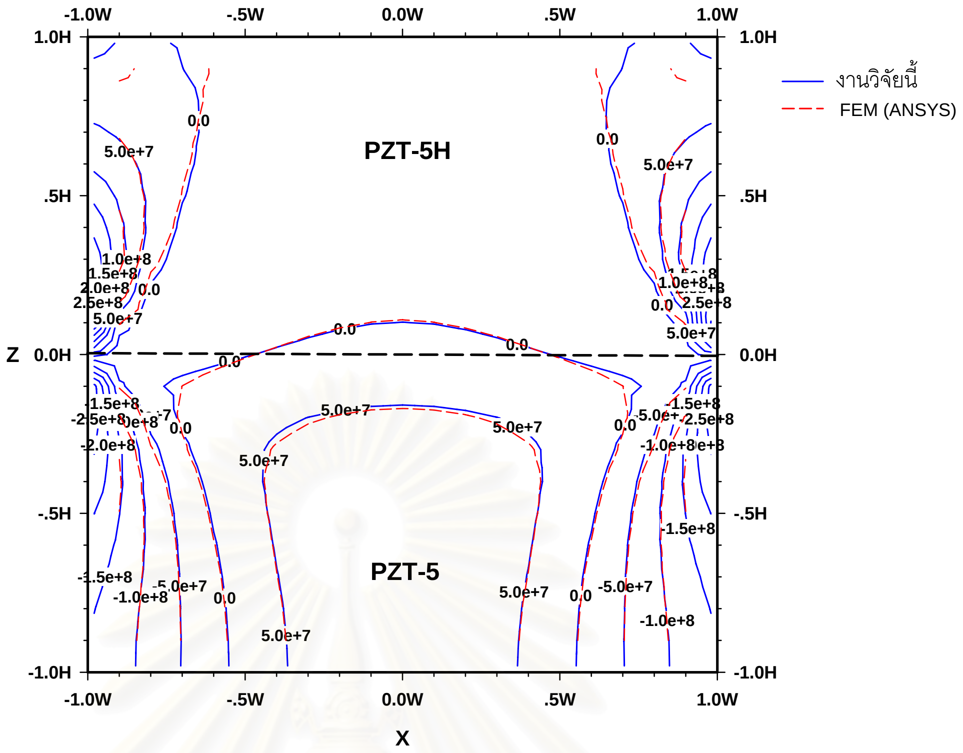
รูปที่ 4.26 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (ประกอบในแนวนอน) ที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



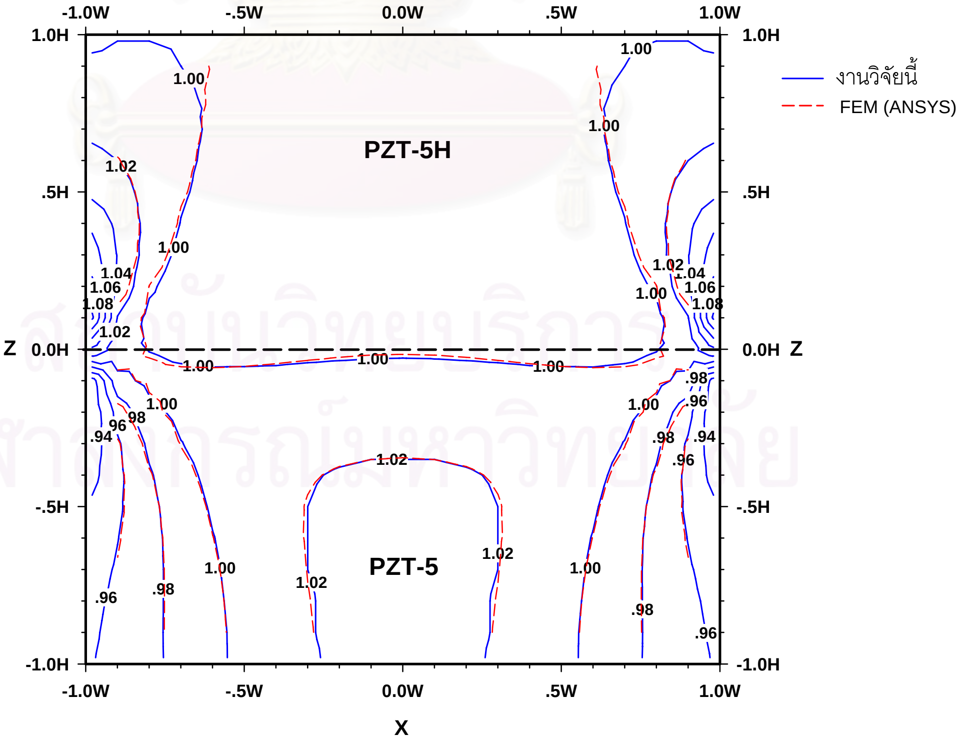
รูปที่ 4.27 การเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ^*_{zz})
ภายในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้แรงกระทำทางกล



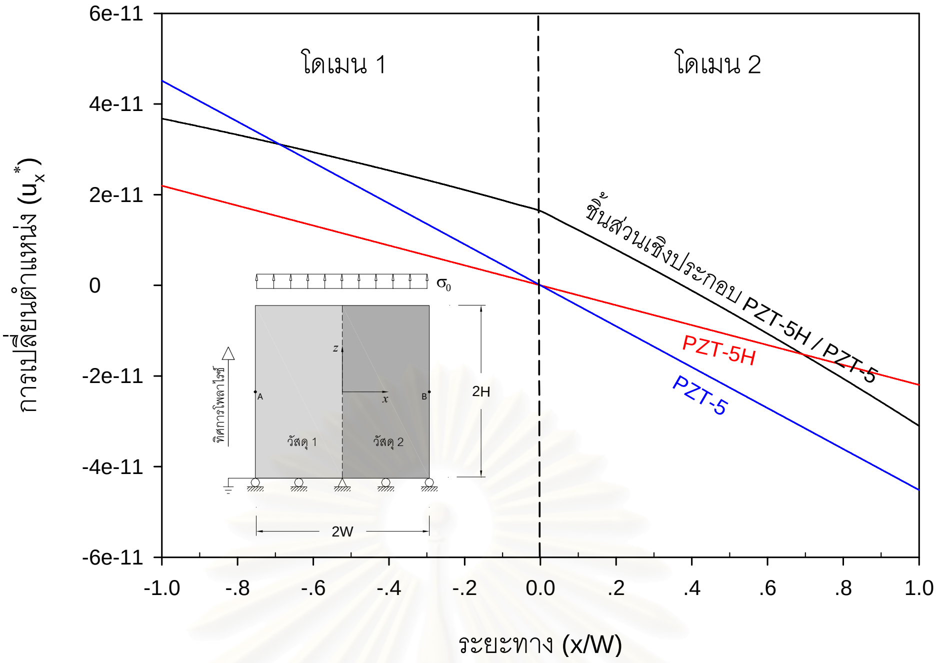
รูปที่ 4.28 การเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D^*_z)
ภายในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้แรงกระทำทางกล



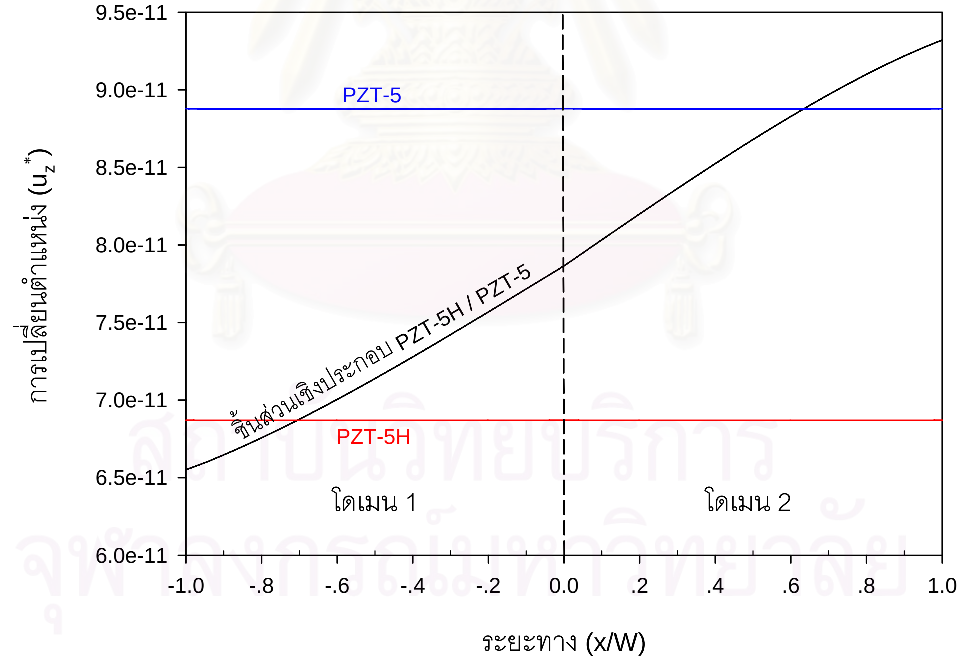
รูปที่ 4.29 การเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ_{zz}^{**})
ภายในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



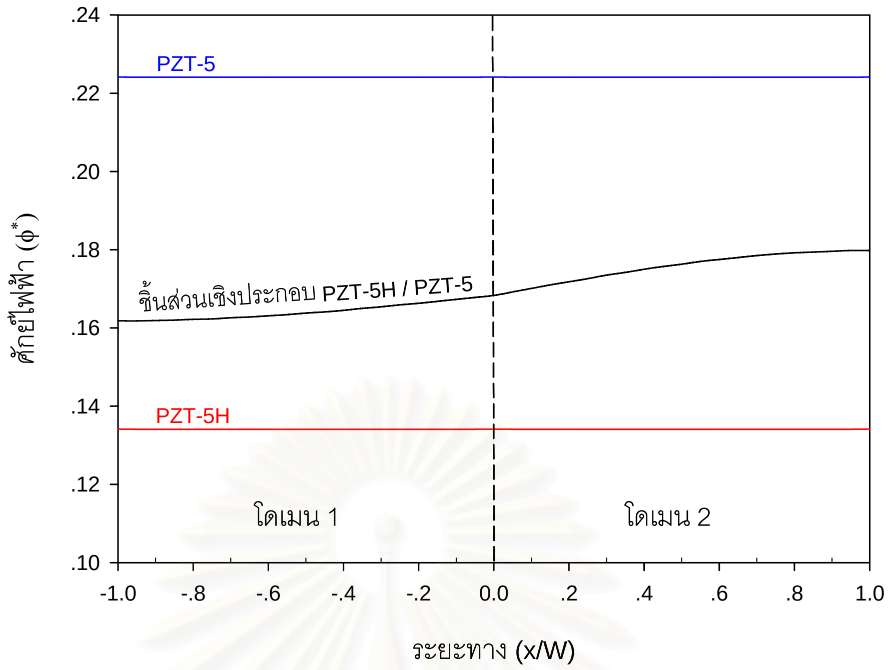
รูปที่ 4.30 การเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**})
ภายในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



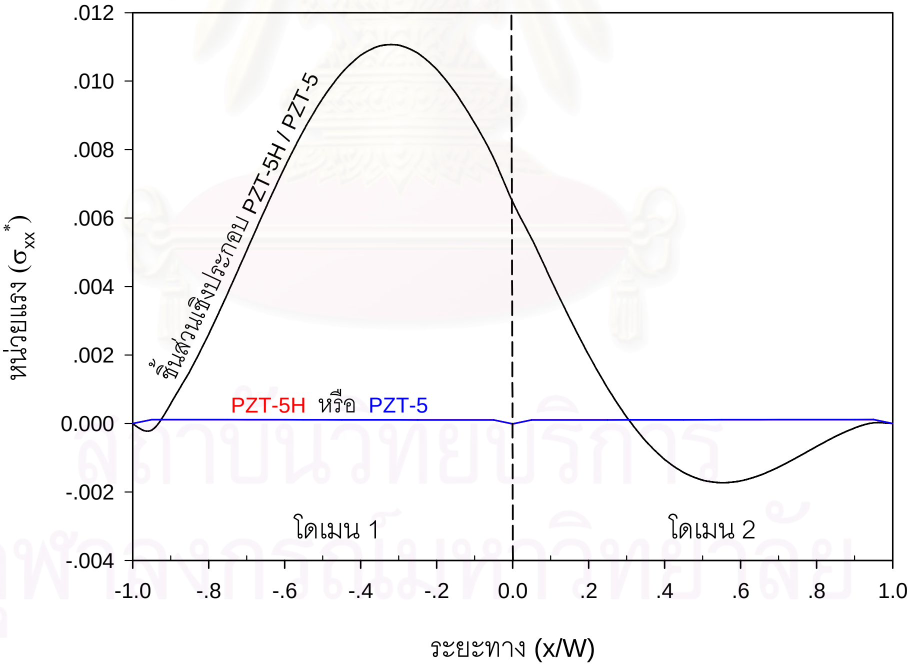
ก) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_x^*) บนระนาบ $z = 0$



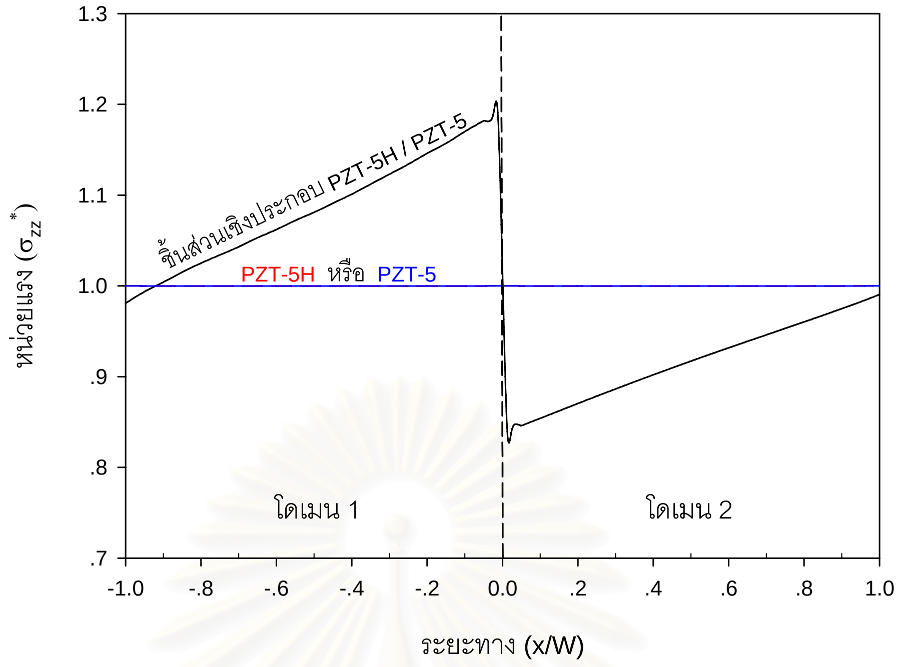
ข) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_z^*) บนระนาบ $z = 0$



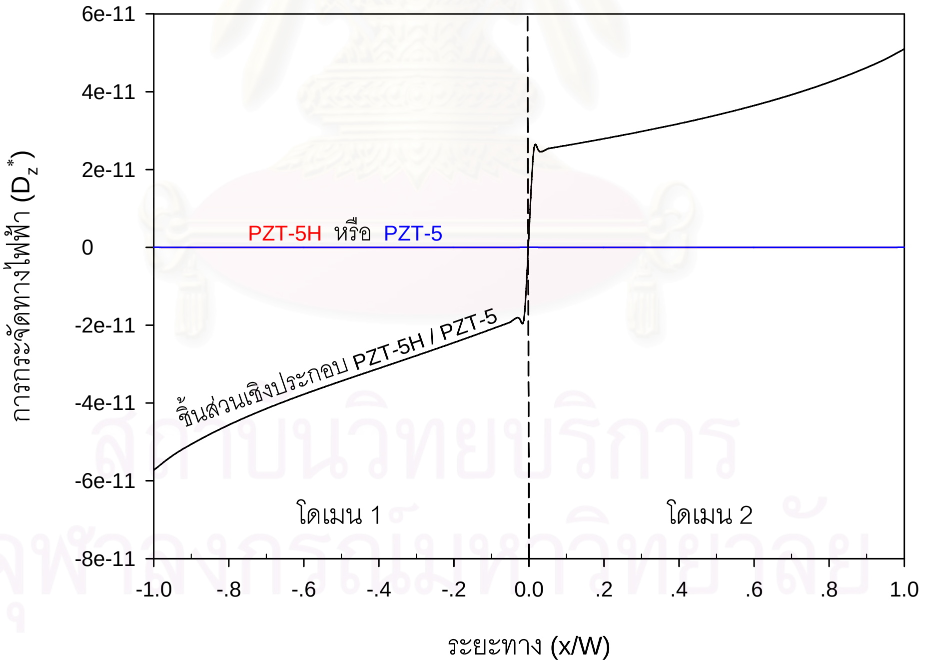
ค) การเปรียบเทียบศักย์ไฟฟ้า (ϕ^*) บนระนาบ $z = 0$



ง) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{xx}^*) บนระนาบ $z = 0$

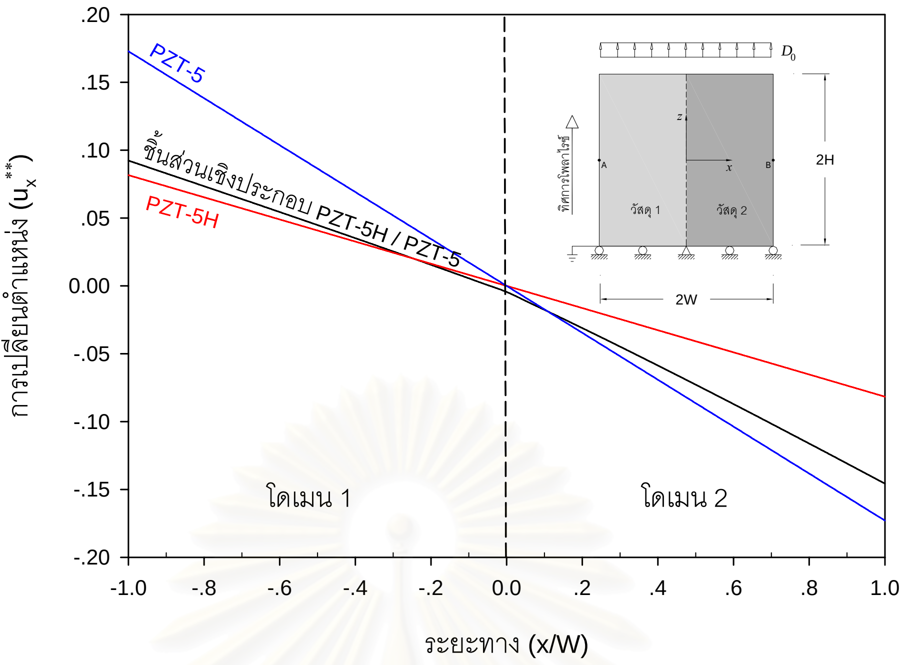


จ) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^*) บนระนาบ z = 0

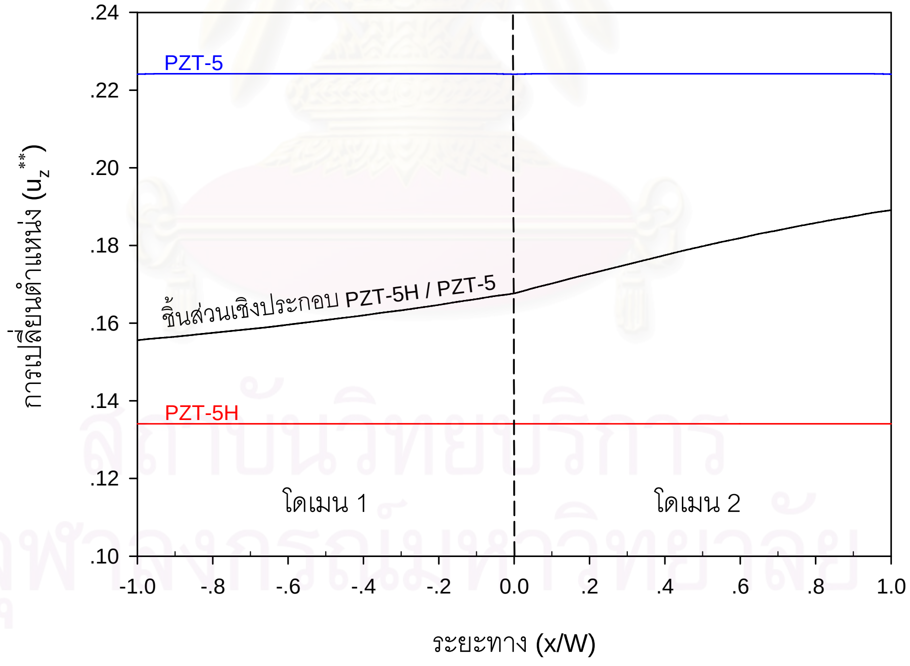


ฉ) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) บนระนาบ z = 0

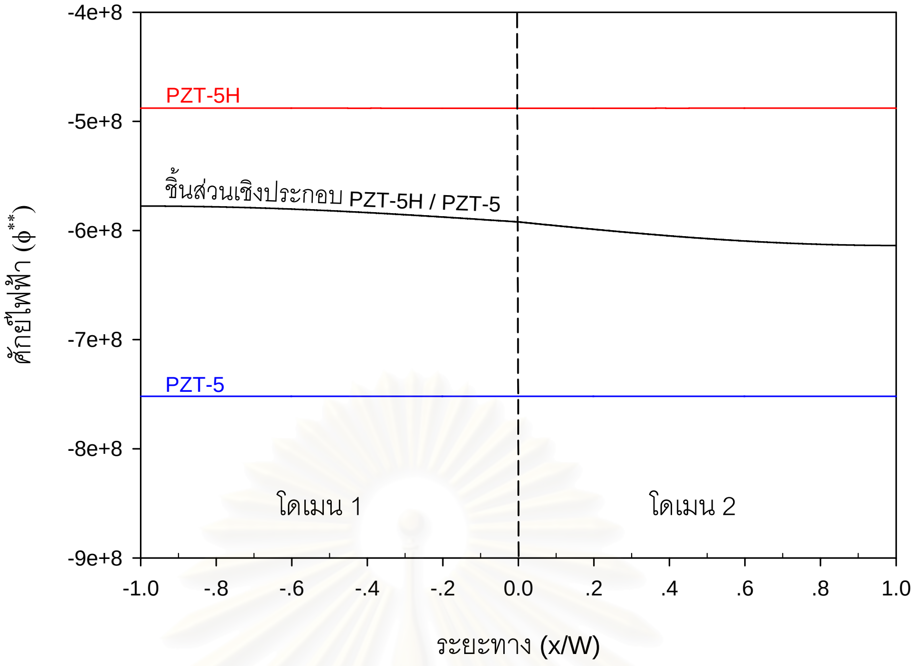
รูปที่ 4.31 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (ประกอบในแนวตั้ง) ที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้แรงกระทำทางกล



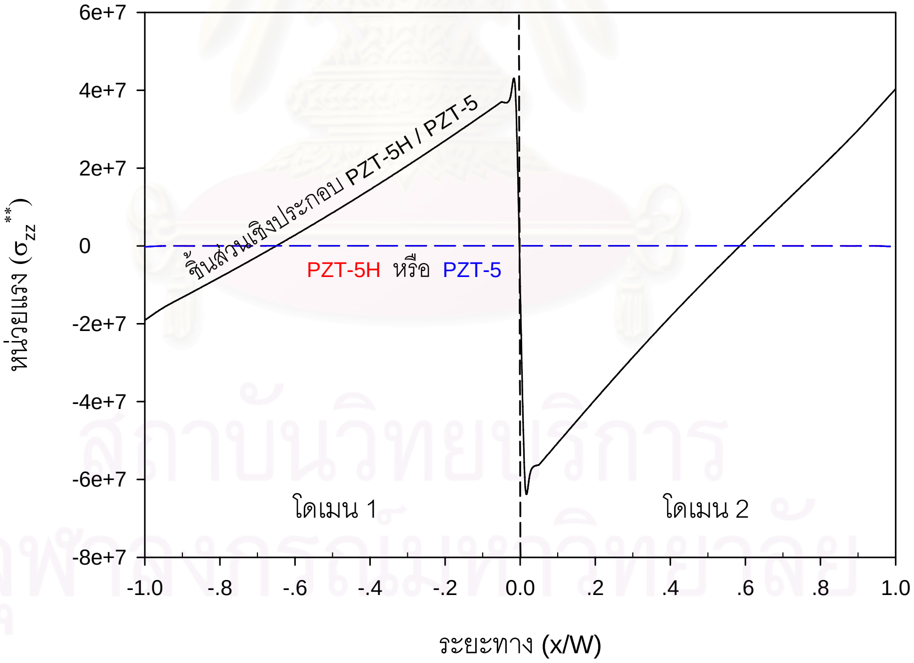
ก) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_x^{**}) บนระนาบ z = 0



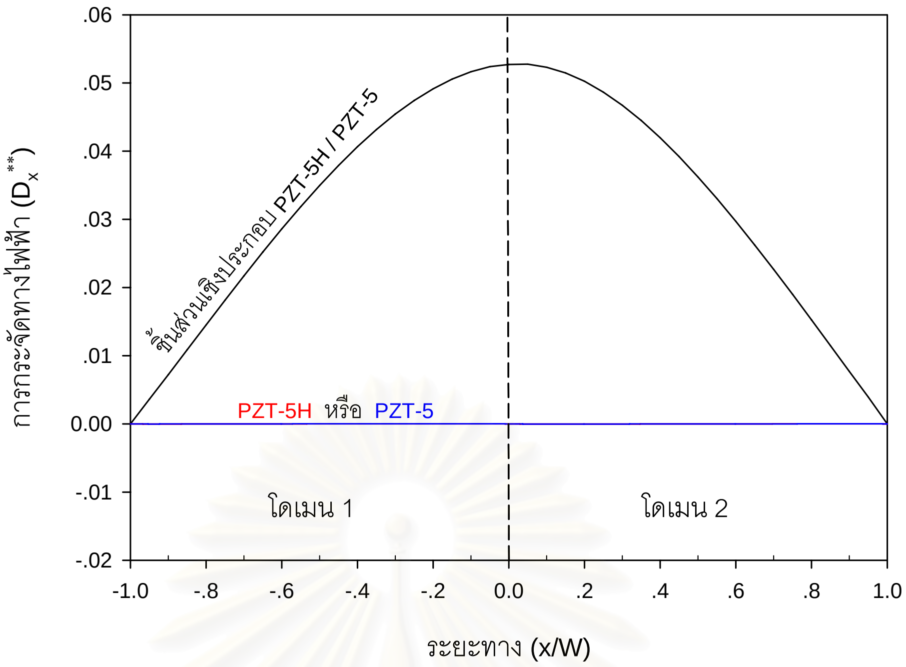
ข) การเปรียบเทียบการเปลี่ยนตำแหน่ง (u_z^{**}) บนระนาบ z = 0



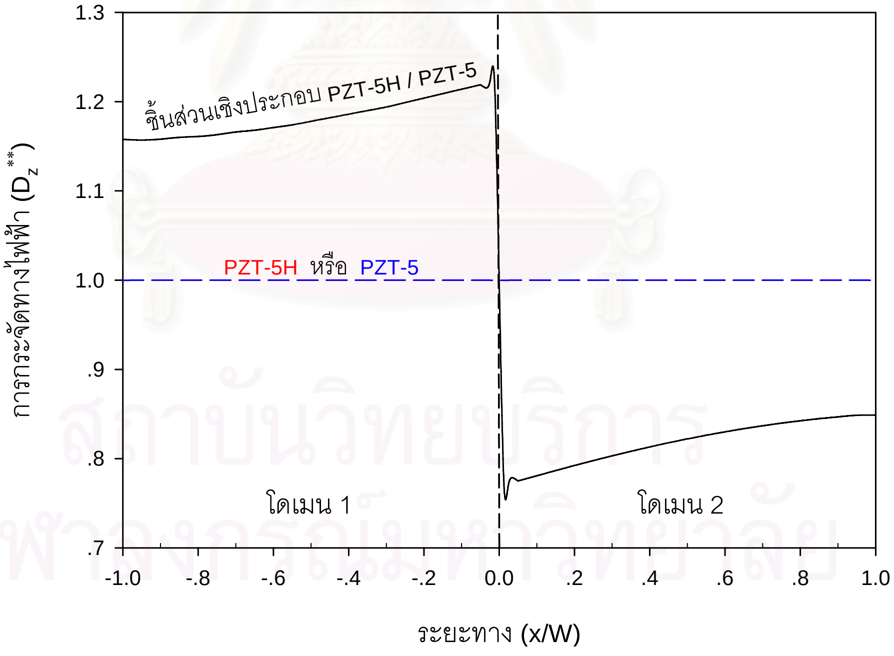
ค) การเปรียบเทียบศักย์ไฟฟ้า (ϕ^{**}) บนระนาบ $z = 0$



ง) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^{**}) บนระนาบ $z = 0$

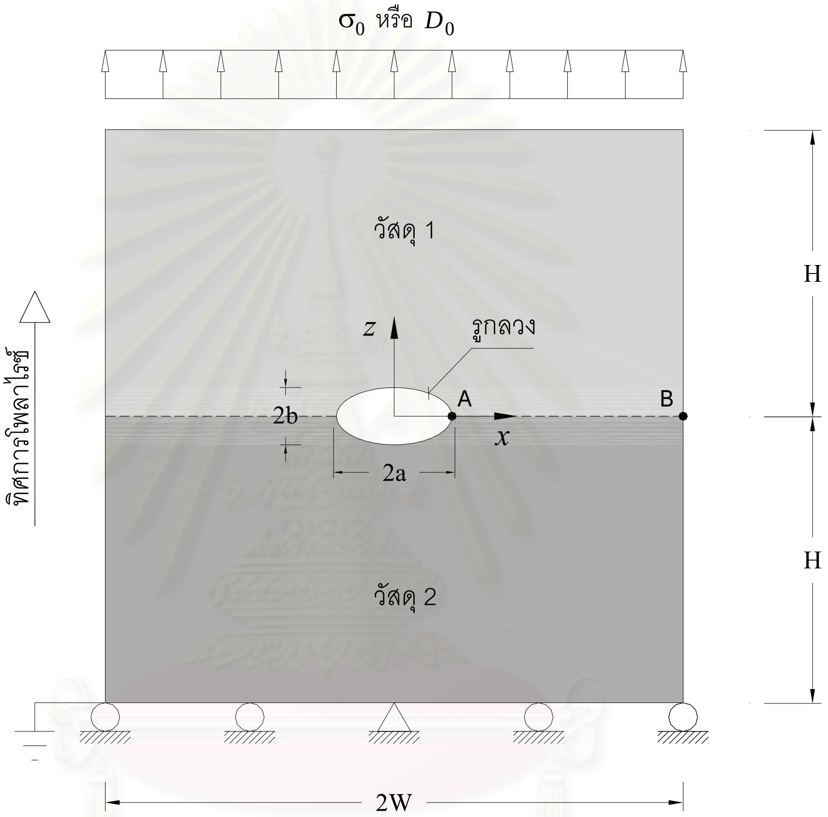


จ) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_x^{**}) บนระนาบ $z = 0$

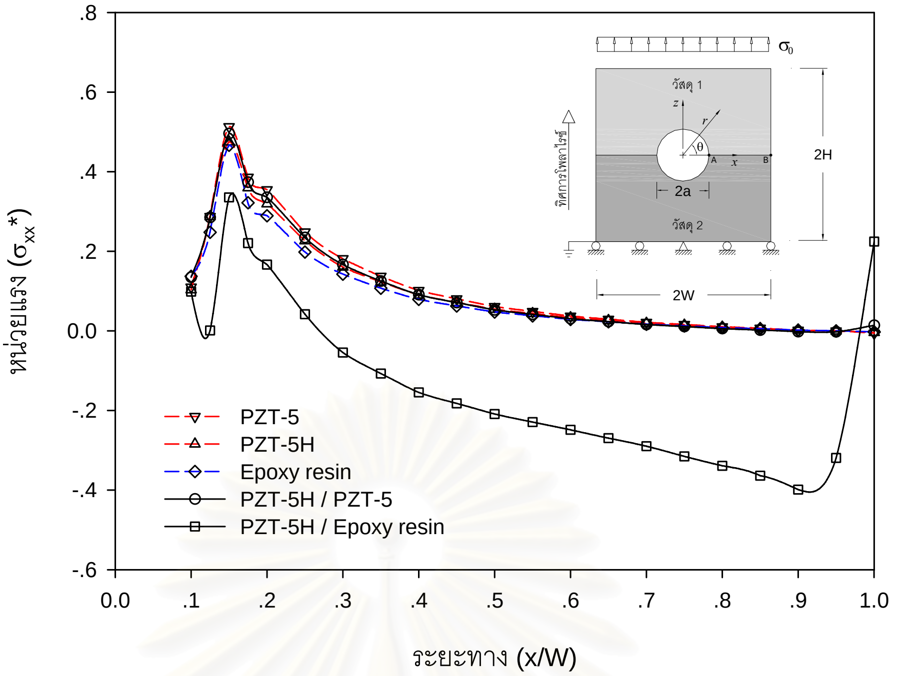


ฉ) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**}) บนระนาบ $z = 0$

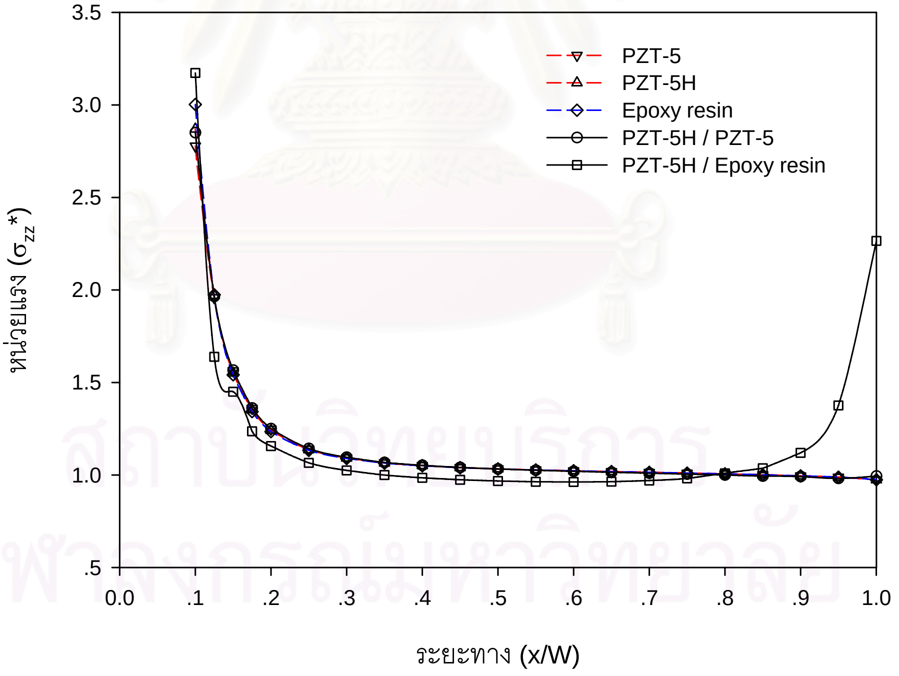
รูปที่ 4.32 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (ประกอบในแนวตั้ง) ที่ไม่มีความบกพร่อง ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



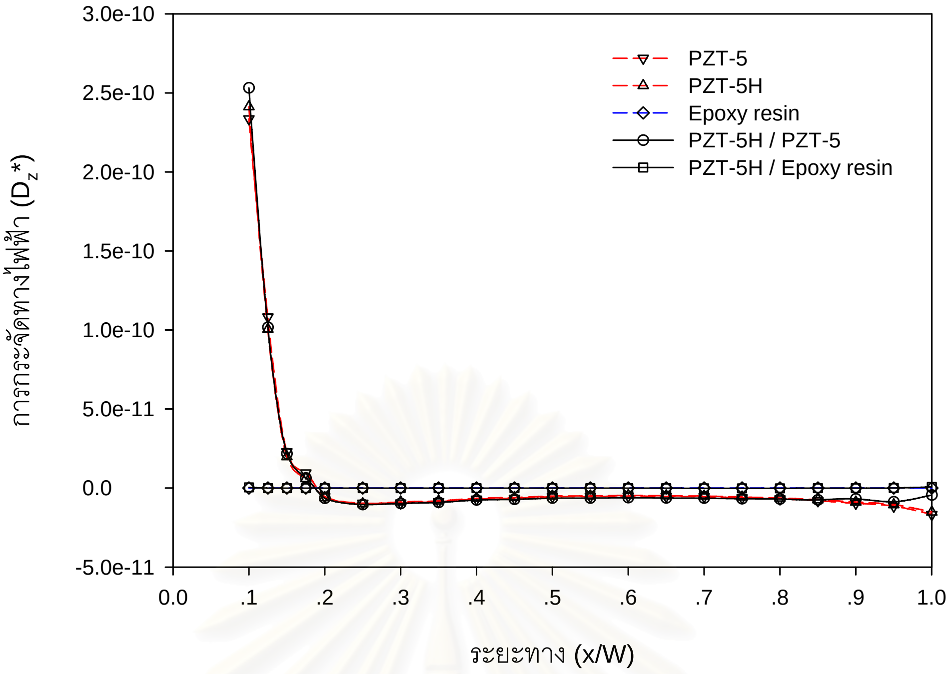
รูปที่ 4.33 ตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรูกลวงตรงกลาง



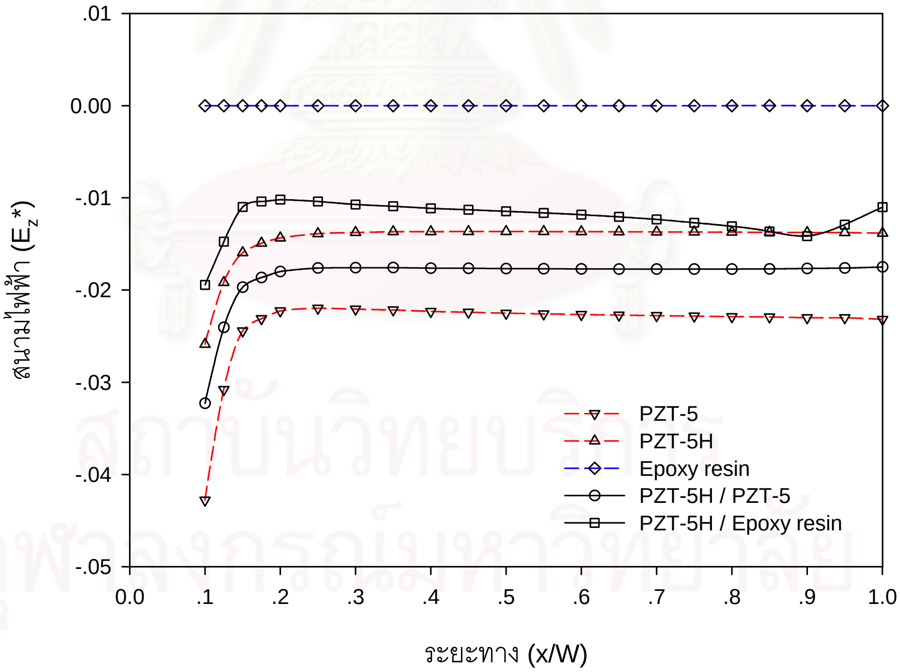
ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ^{*}_{xx}) บนระนาบ $z = 0$



ข) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ^{*}_{zz}) บนระนาบ $z = 0$

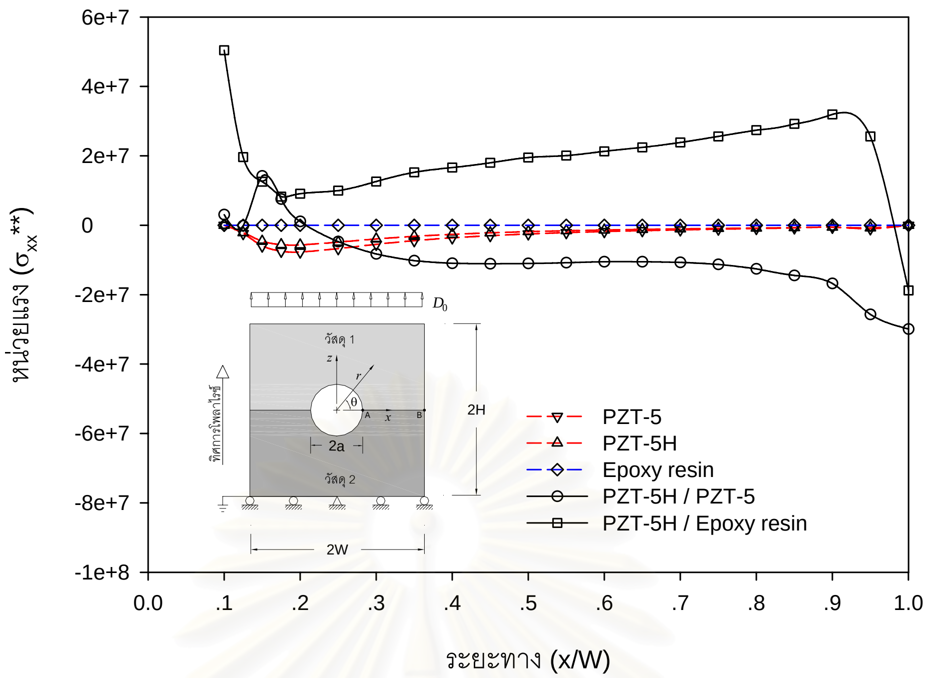


ค) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) บนระนาบ z = 0

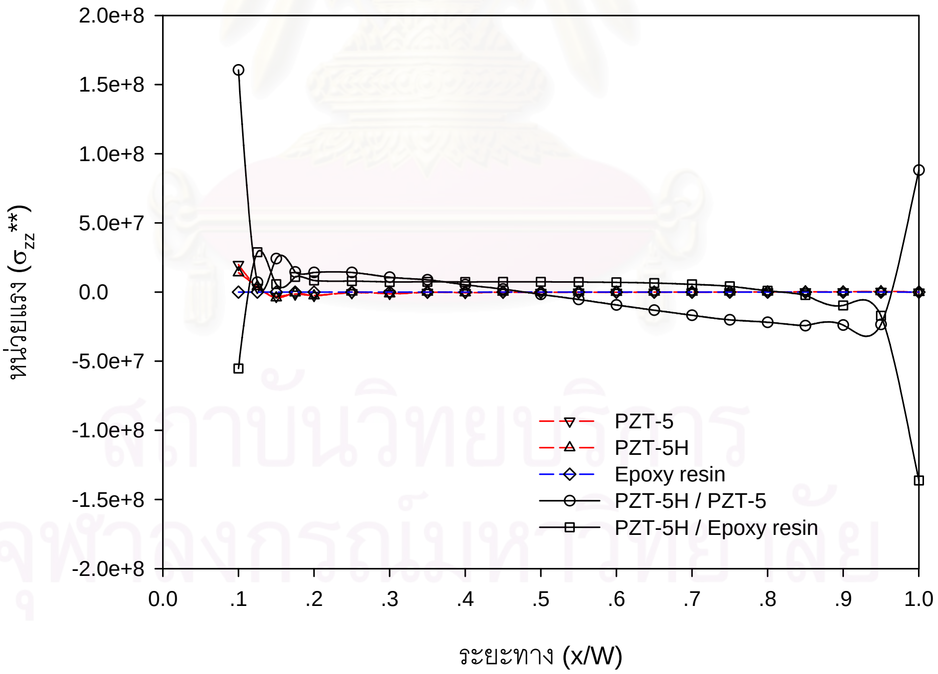


ง) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^*) บนระนาบ z = 0

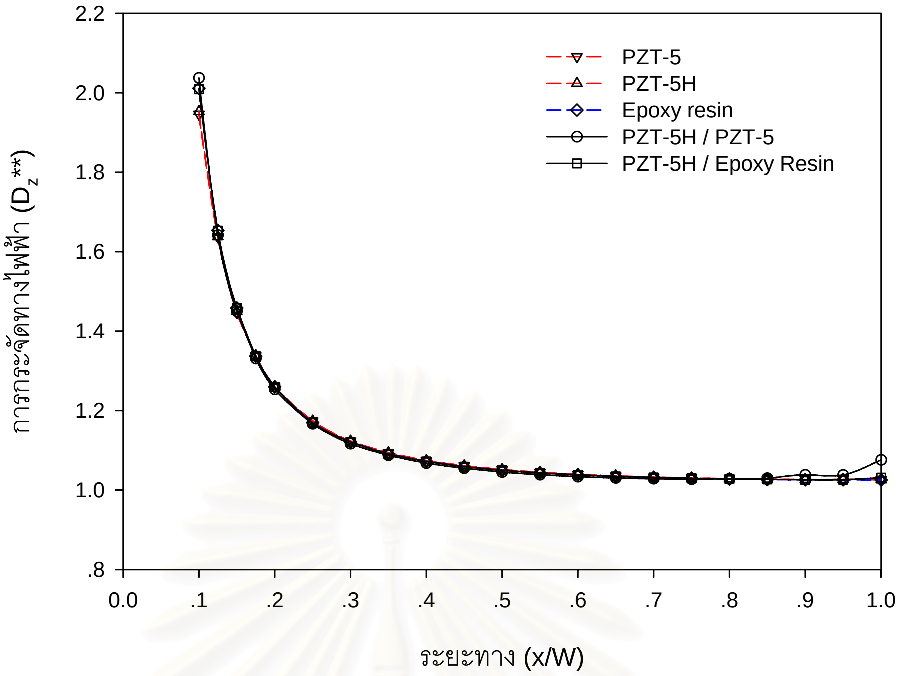
รูปที่ 4.34 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีรูวงกลม
ภายใต้แรงกระทำทางกล



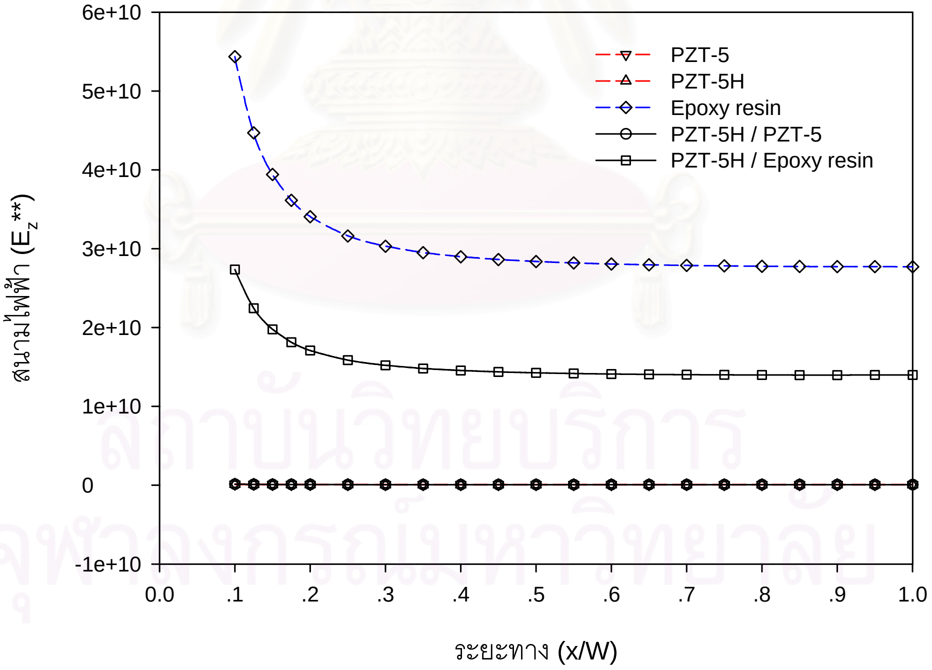
ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{xx}^{**}) บนระนาบ $z = 0$



ข) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^{**}) บนระนาบ $z = 0$

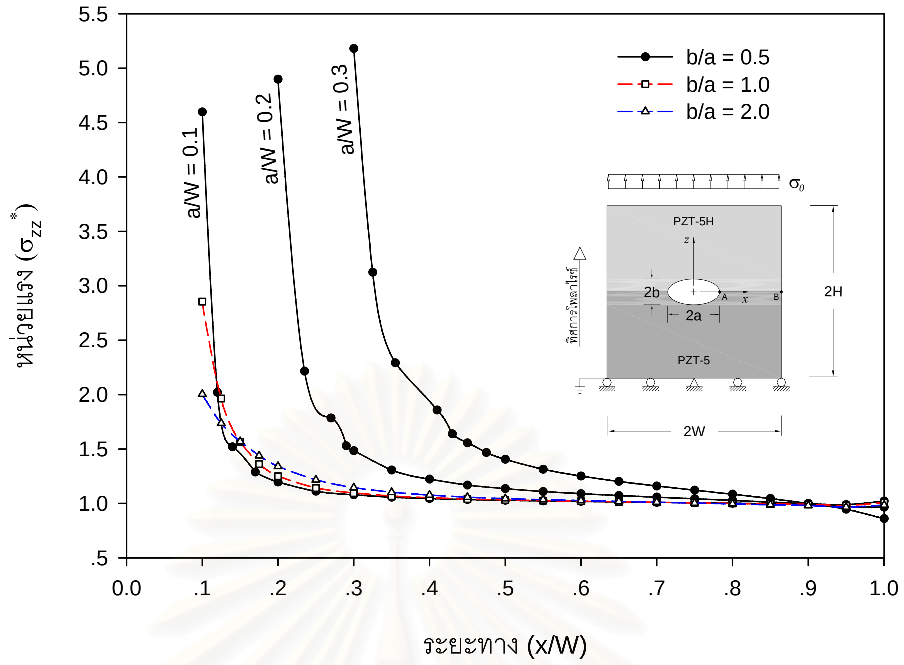


ค) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**}) บนระนาบ z = 0

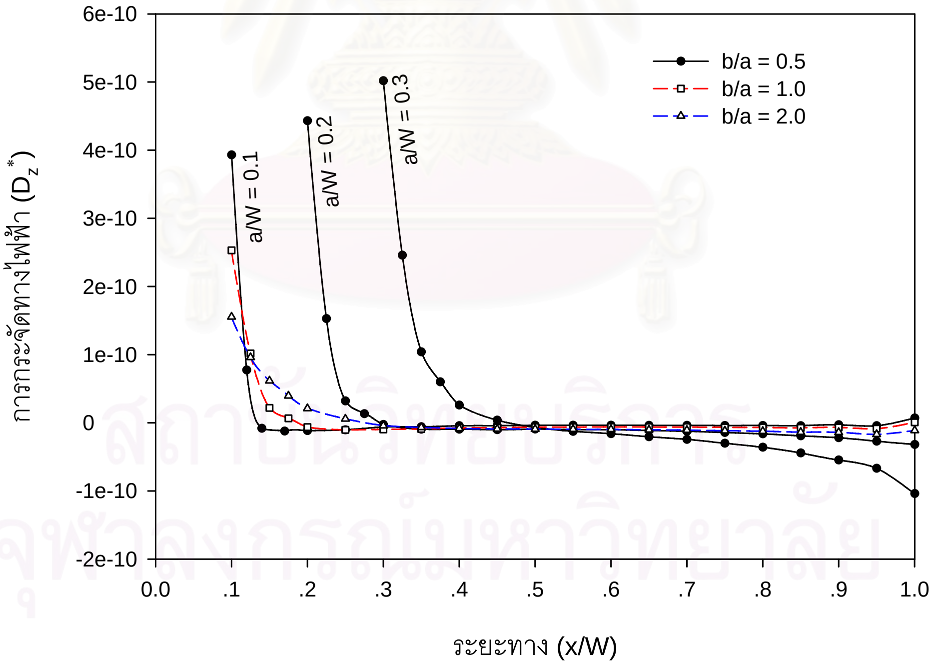


ง) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^{**}) บนระนาบ z = 0

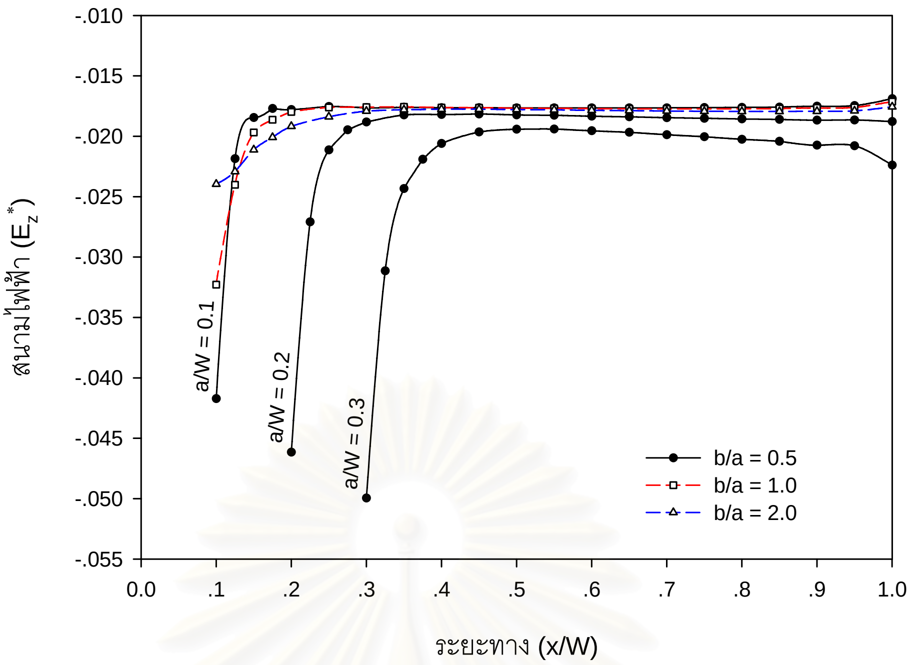
รูปที่ 4.35 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีรูวงกลม
ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^*) บนระนาบ z = 0

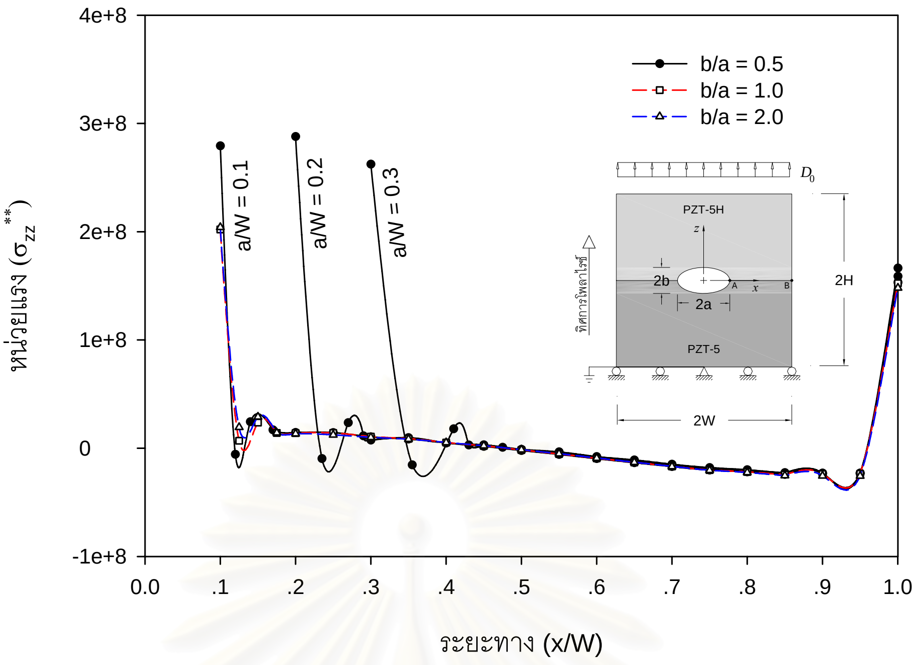


ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) บนระนาบ z = 0

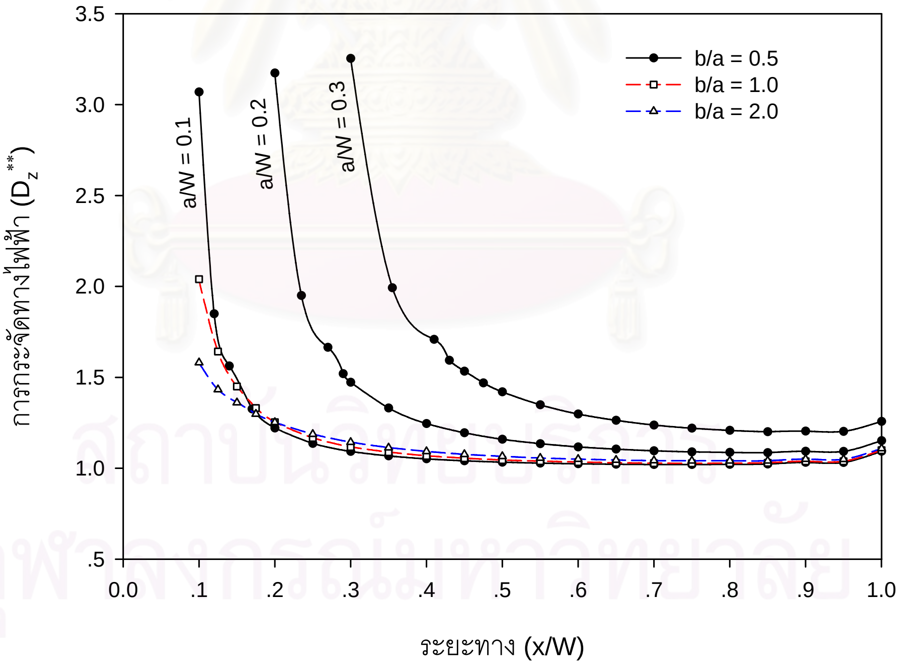


ค) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^*) บนระนาบ $z = 0$

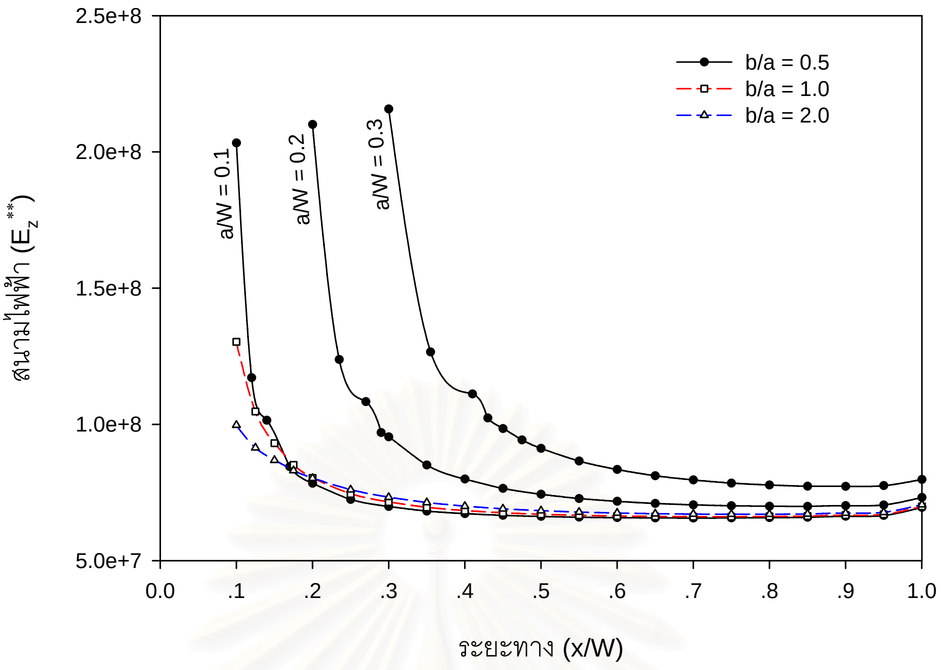
รูปที่ 4.36 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรูวงรี เมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน b/a และ a/W ภายใต้แรงกระทำทางกล



ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^{**}) บนระนาบ $z = 0$

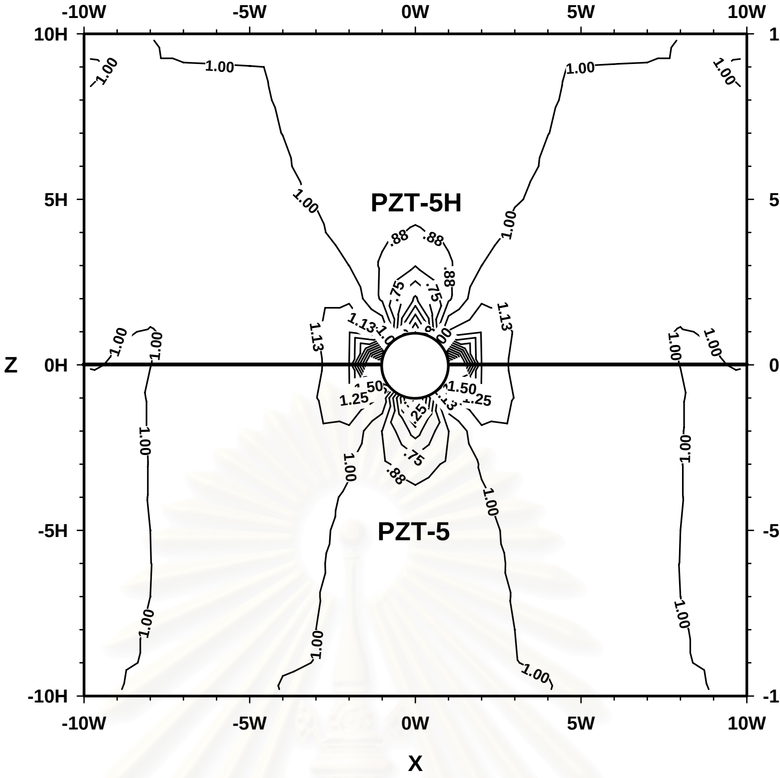


ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**}) บนระนาบ $z = 0$

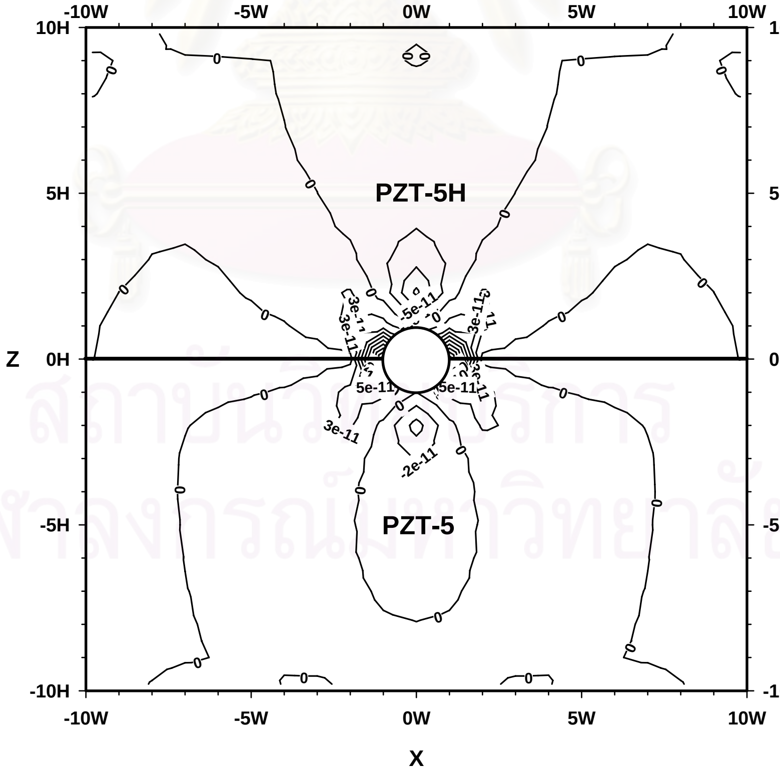


ง) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^{**}) บนระนาบ z = 0

รูปที่ 4.37 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรูวงรี เมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน b/a และ a/W ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า

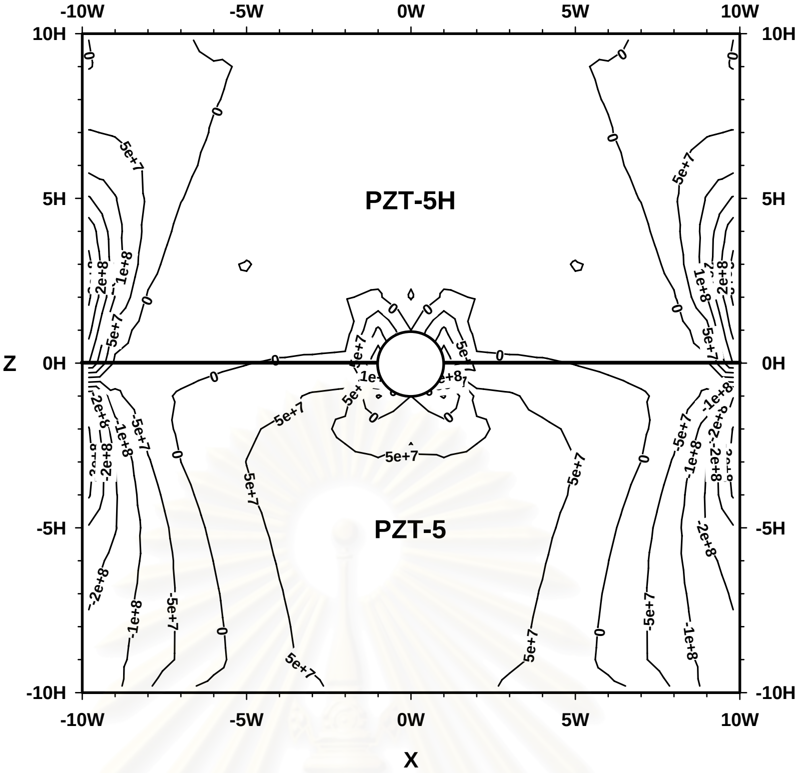


ก) ลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ_{zz}^{*})

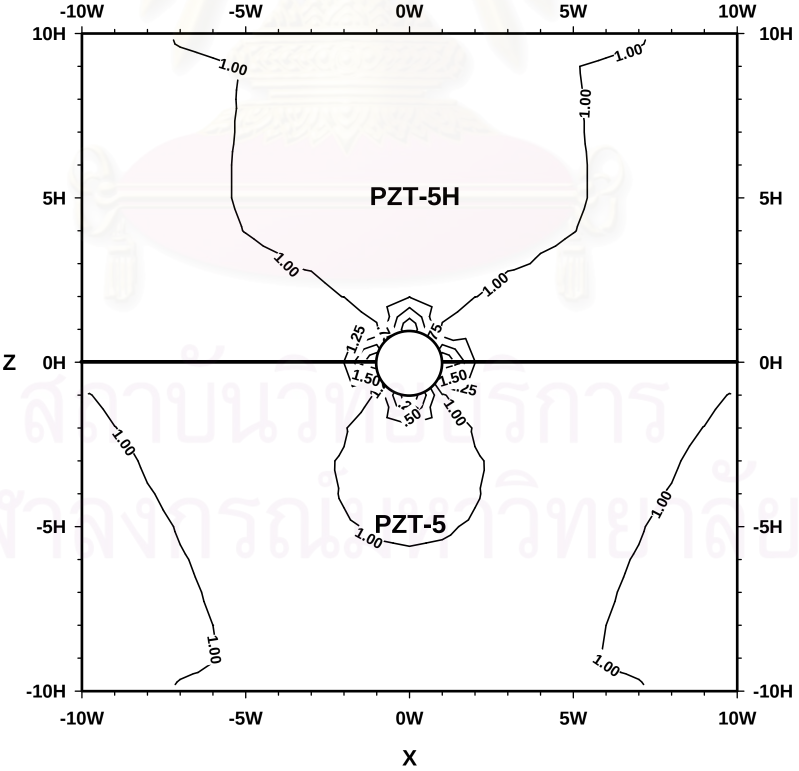


ข) ลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D_{z}^{*})

รูปที่ 4.38 เส้นชันความสูงของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรูวงกลม ภายใต้แรงกระทำทางกล

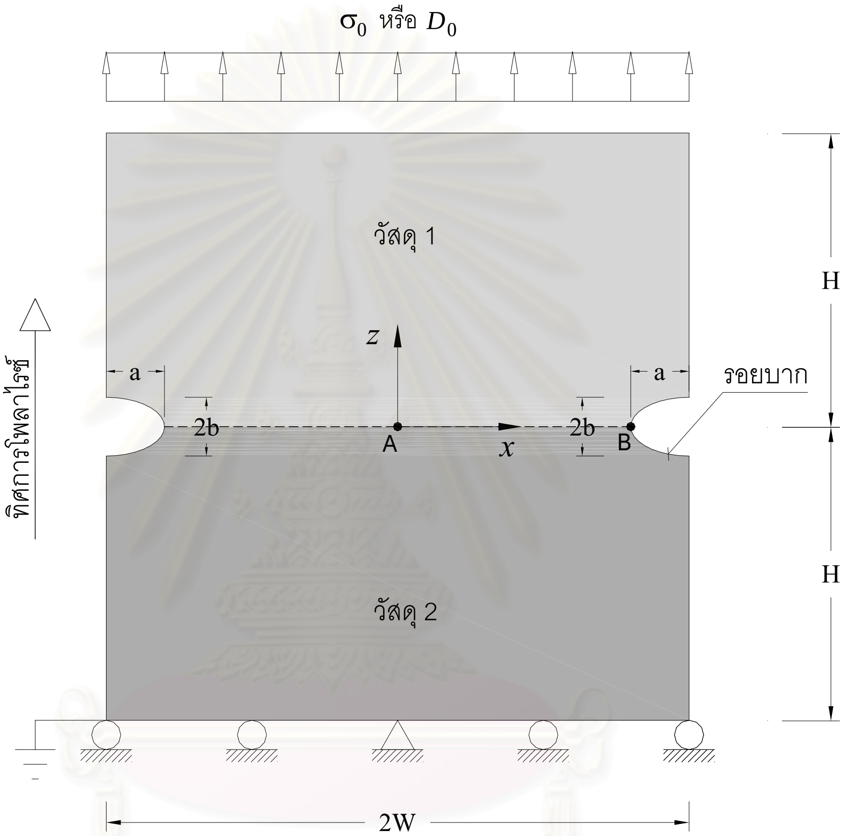


ก) ลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ_{zz}^{**})

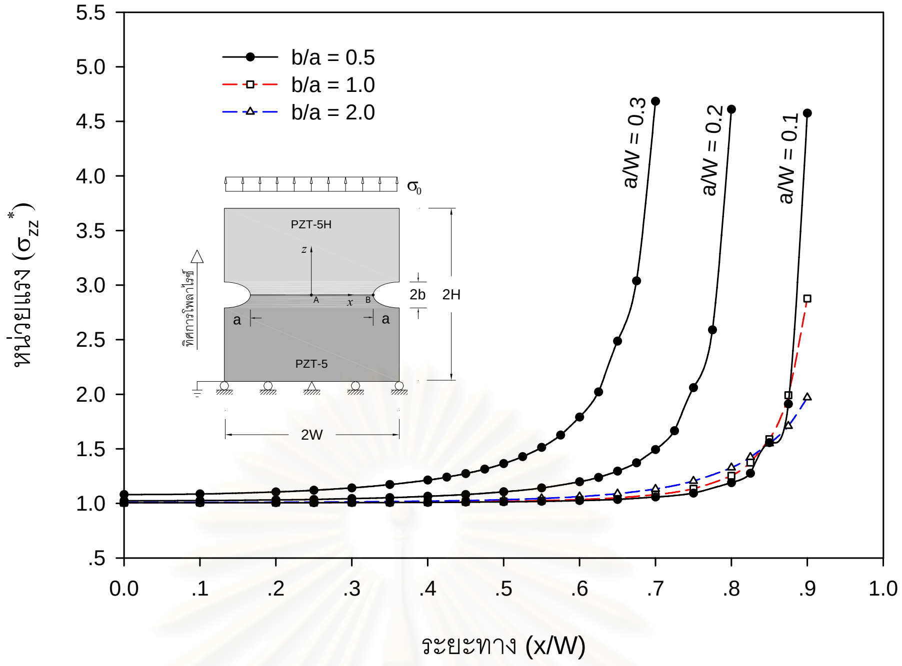


ข) ลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**})

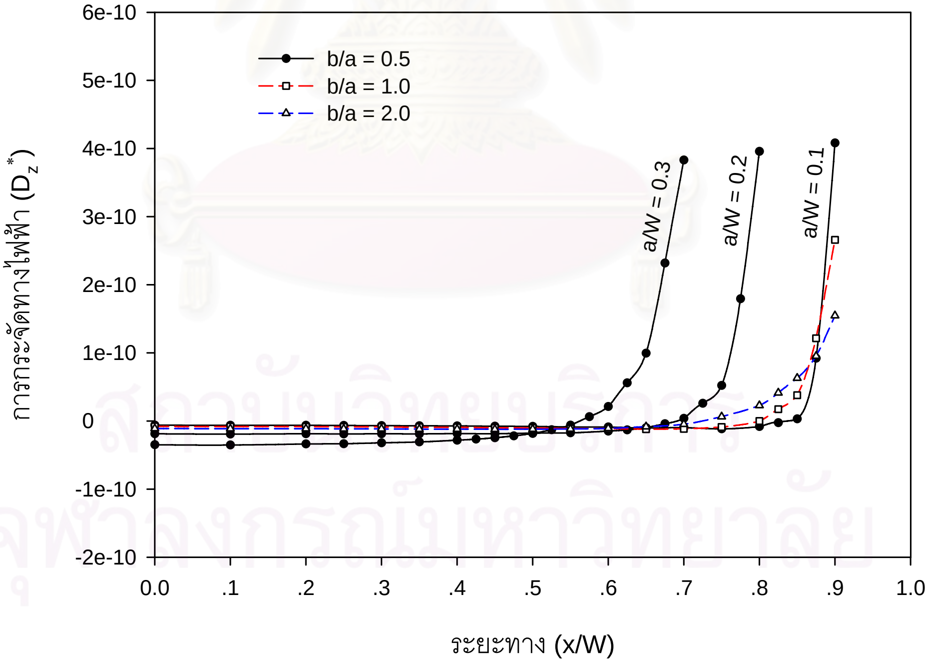
รูปที่ 4.39 เส้นชันความสูงของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรูวงกลม ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า



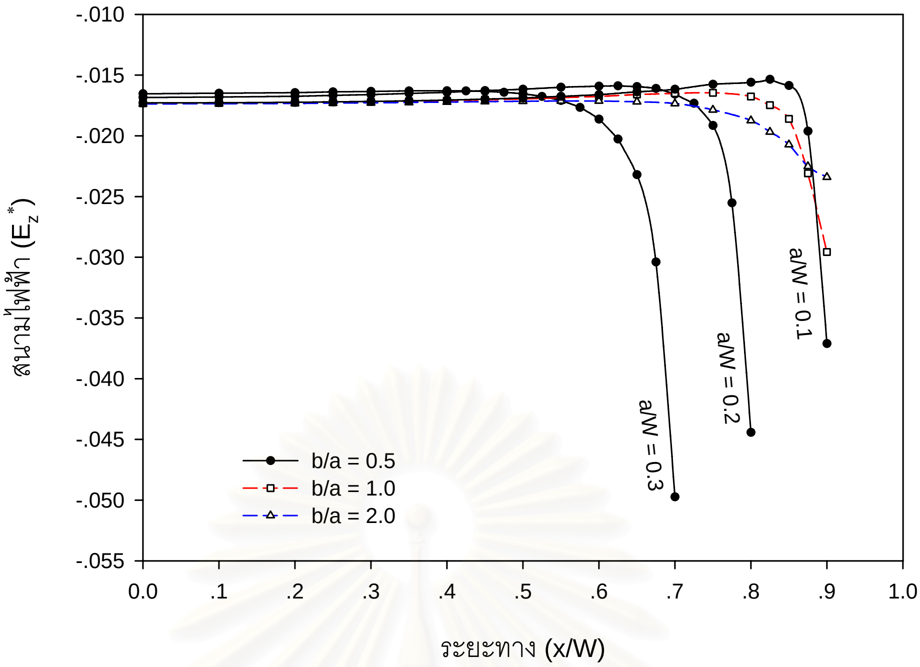
รูปที่ 4.40 ตัวอย่างปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรอยบากด้านข้าง



ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^*) บนระนาบ $z = 0$

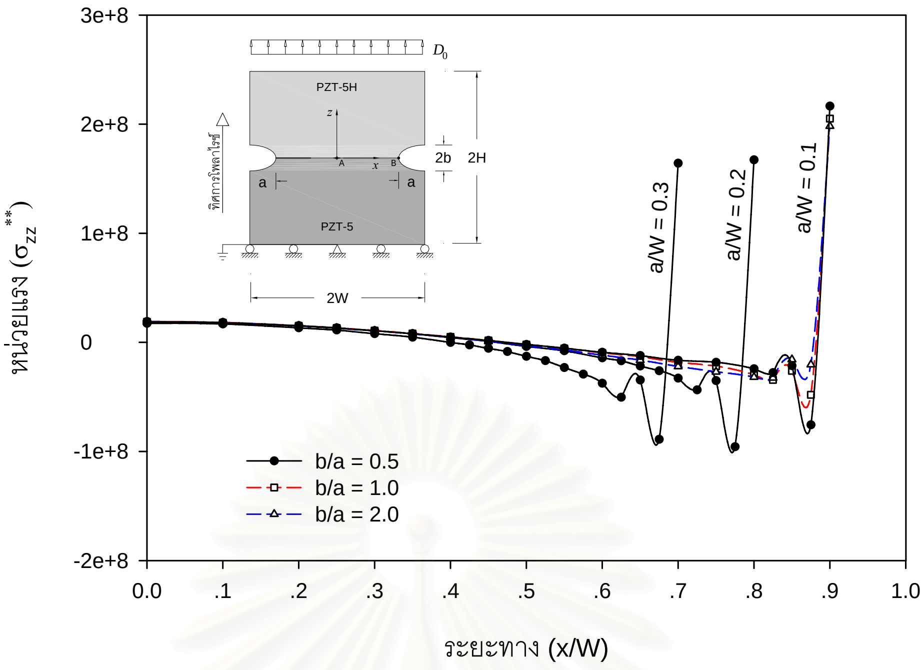


ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^*) บนระนาบ $z = 0$

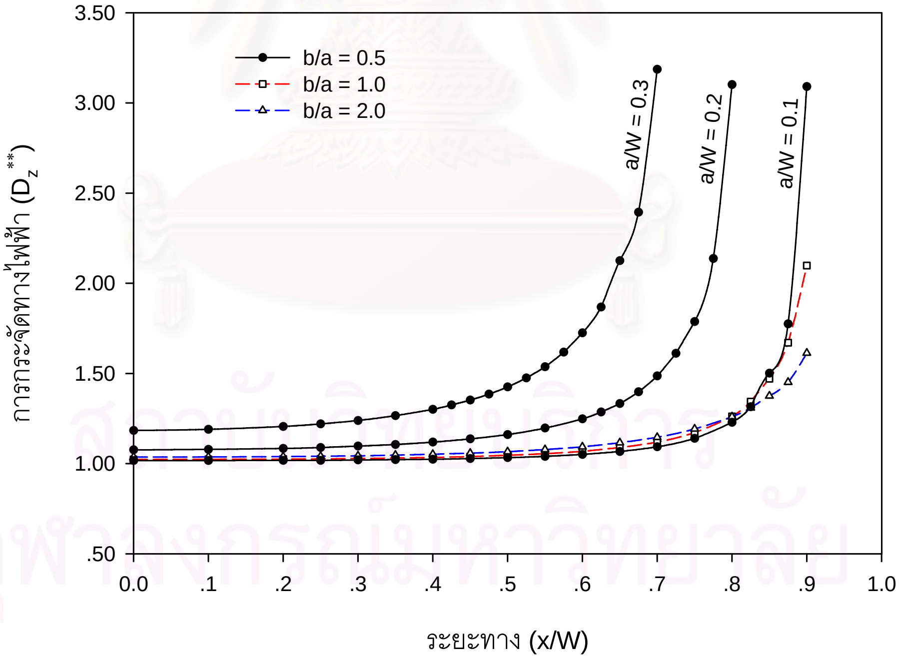


ค) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^*) บนระนาบ z = 0

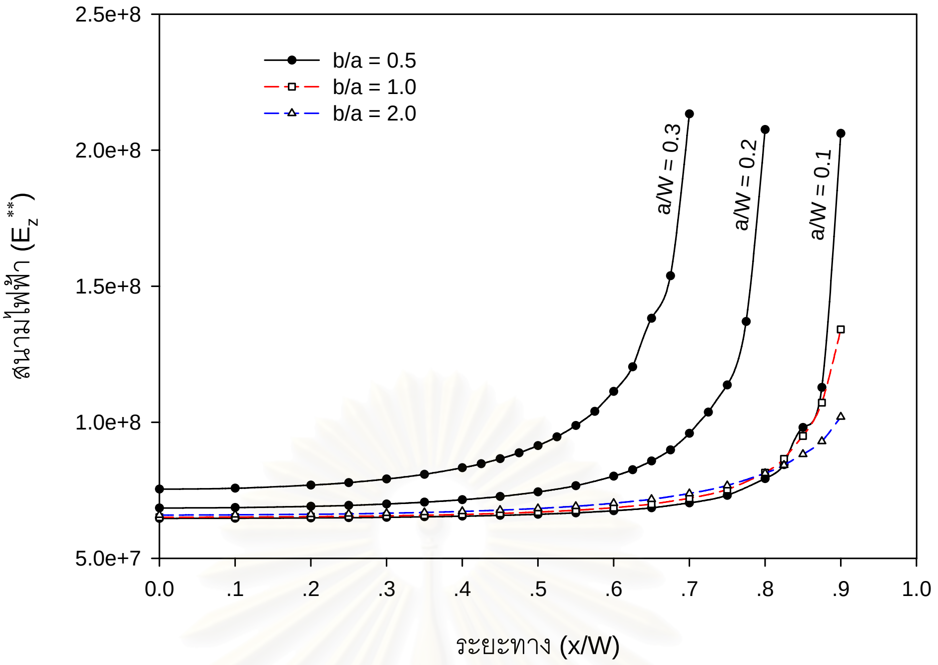
รูปที่ 4.41 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ ที่มีรอยบาก เมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน b/a และ a/W ภายใต้แรงกระทำทางกล



ก) การเปรียบเทียบหน่วยแรง (σ_{zz}^{**}) บนระนาบ $z = 0$

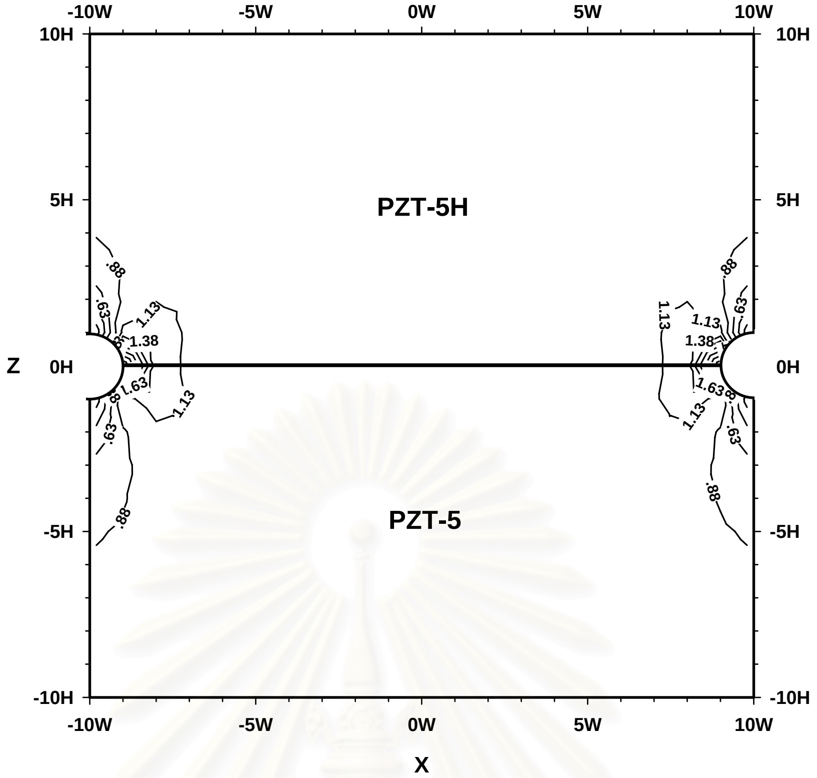


ข) การเปรียบเทียบการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**}) บนระนาบ $z = 0$

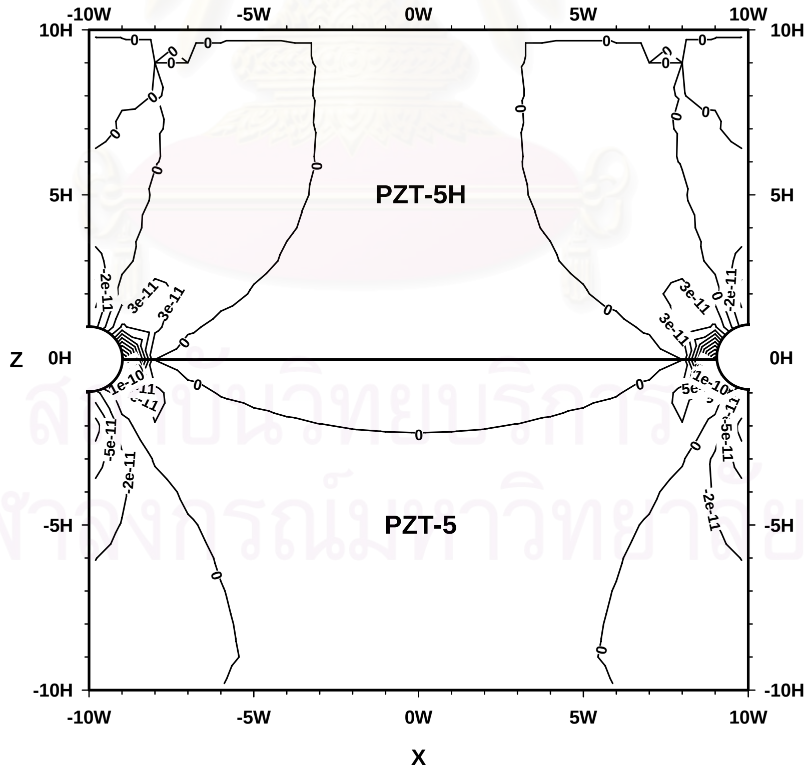


ค) การเปรียบเทียบสนามไฟฟ้า (E_z^{**}) บนระนาบ z = 0

รูปที่ 4.42 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ ที่มีรอยบาก เมื่อเปลี่ยนแปลงอัตราส่วน b/a และ a/W ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า

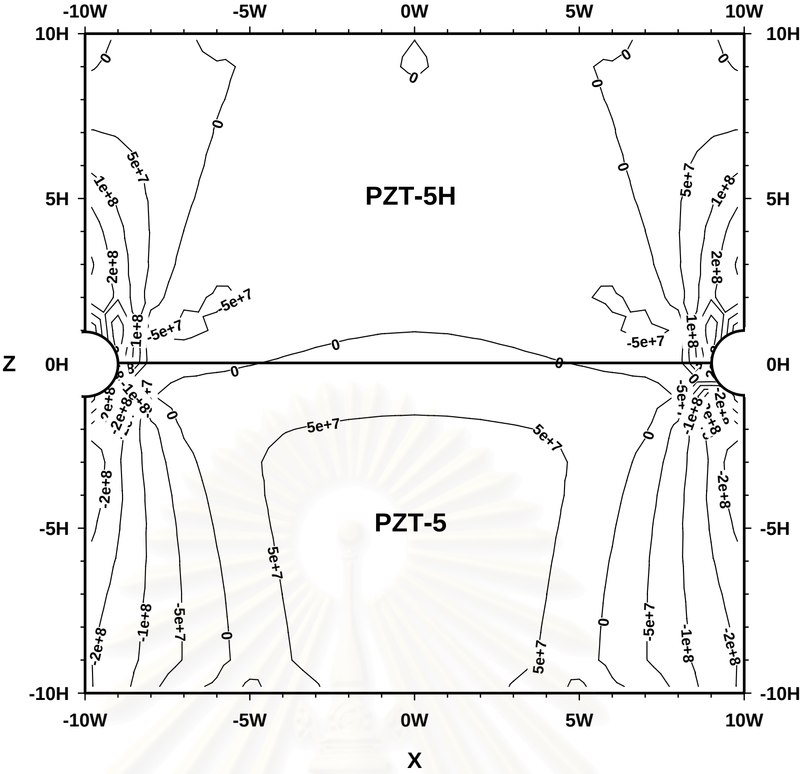


ก) ลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ_{zz}^{*})

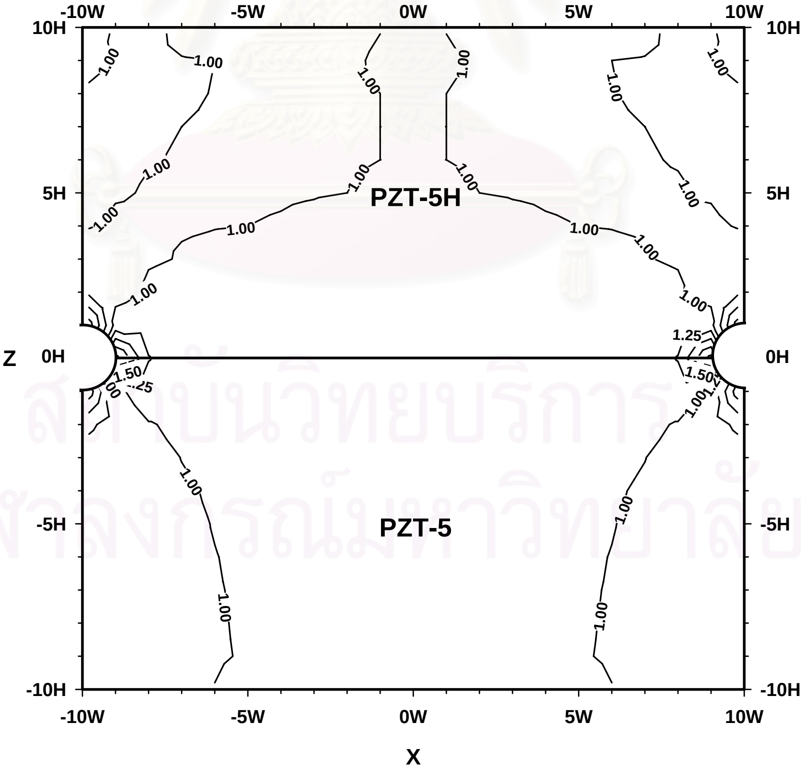


ข) ลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{*})

รูปที่ 4.43 เส้นชันความสูงของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรอยบาก ภายใต้แรงกระทำทางกล



ก) ลักษณะการกระจายของหน่วยแรง (σ_{zz}^{**})



ข) ลักษณะการกระจายของการกระจัดทางไฟฟ้า (D_z^{**})

รูปที่ 4.44 เส้นชันความสูงของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีรอยบาก ภายใต้โหลดทางไฟฟ้า

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้เกี่ยวข้องกับการพัฒนาโปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์ เพื่อทำการวิเคราะห์แผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง โดยการประยุกต์ใช้แบบจำลองบริเวณย่อย (subregion model) กับการประกอบระบบสมการพีชคณิตหลายบริเวณ (multi-region assembly) เพื่อนำไปดำเนินการกับตัวอย่างปัญหา สำหรับส่วนที่สองของงานวิจัยจะเกี่ยวข้องกับการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น การเปลี่ยนตำแหน่ง ศักย์ไฟฟ้า หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง เช่น รอยบาก รู หรือโพรง ภายใต้แรงกระทำทางกลหรือโหลดทางไฟฟ้า โดยไม่คิดผลของแรงวัตถุ และประจุไฟฟ้าอิสระ

5.1 สรุปผลการศึกษา

จากการศึกษาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง ภายใต้ขอบเขตของงานวิจัยนี้ ด้วยโปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์ มีผลสรุปที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. โปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์ที่พัฒนาขึ้น ใช้ได้กับปัญหาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ ทั้งในกรณีขอบรอยต่อประสานเรียบและกรณีขอบรอยต่อประสานไม่เรียบเกิดขอบ (edges) หรือมุม (corners) สำหรับกรณีที่ขอบรอยต่อประสานไม่เรียบ มีค่าโคไซน์แสดงทิศทางแตกต่างกันในแต่ละด้านของจุดต่อประสาน (interface node) ซึ่งจะส่งผลให้ความเค้นที่ผิว และประจุไฟฟ้าที่ผิวที่คำนวณได้ในตำแหน่งขอบหรือมุมของจุดต่อเดียวกันมีค่าแตกต่างกัน แต่ไม่ส่งผลต่อค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้าที่คำนวณได้

2. เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีรูกลวงตรงกลาง ที่คำนวณด้วยระเบียบวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ จากการใช้แบบจำลองชนิดต่างๆ พบว่าแบบจำลองบริเวณย่อยให้ค่าผลลัพธ์ใกล้เคียงกับแบบจำลองหนึ่งในสี่ของหน้าตัด แต่มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงน้อยกว่าแบบจำลองเต็มหน้าตัด เนื่องจากแบบจำลองเต็มหน้าตัดมีผิวของขอบเขตรอบรูกลวงที่ราบเรียบไม่เกิดขอบและมุม จึงให้ค่าผลลัพธ์ที่ดีกว่า

3. จากการศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่ไม่มีความบกพร่อง พบว่ากรณีชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก (วัสดุชนิดเดียว) ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของชิ้นส่วนมีค่าคงที่ตลอดความกว้าง ในขณะที่กรณีชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุ (วัสดุต่างชนิดกัน) ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ที่ตำแหน่งรอยต่อของชิ้นส่วนมีค่าไม่คงที่ตลอดความกว้าง โดยเฉพาะที่ตำแหน่งขอบรอยต่อของวัสดุ

4. จากการศึกษาชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสองวัสดุที่มีความบกพร่อง (เช่น รูกลวงตรงกลาง หรือรอยบากด้านข้าง) พบว่าถ้าอัตราส่วนรูปร่างของความบกพร่อง b/a น้อยลง (รูหรือรอยบากรูปร่างแคบลง) หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า ที่คำนวณได้มีค่าเปลี่ยนแปลงอย่างมากในช่วงสองเท่าของความกว้างของความบกพร่อง (2a) เช่น สองเท่าของความกว้างรู หรือสองเท่าของความลึกรอยบาก สำหรับกรณีที่อัตราส่วนขนาดของความบกพร่อง a/W เพิ่มขึ้น (รูหรือรอยบากมีขนาดใหญ่ขึ้น) หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จะมีค่าความชันคงที่

5.2 ข้อเสนอแนะ

1 โปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้พัฒนาขึ้น ยังพบปัญหาในการคำนวณแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีขอบของรอยต่อประสานไม่เรียบเกิดขอบหรือมุม ซึ่งทำให้หน่วยแรง การกระจัดทางไฟฟ้า และสนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่งดังกล่าวมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ดังนั้นควรมีการปรับปรุงค่าผลลัพธ์ในตำแหน่งดังกล่าวโดยการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์กำลังสองแบบไม่ต่อเนื่อง (quadratic discontinuous element) หรือการใช้เอลิเมนต์พิเศษ (special element) และควรปรับปรุงขั้นตอนวิธี (algorithm) ให้สามารถพิจารณาปัญหาหลายโดเมนเพื่อความหลากหลายในการใช้งาน

2 โปรแกรมบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้สามารถคำนวณหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า ได้ถูกต้องแม่นยำกว่าค่าหน่วยแรง ดังนั้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้ศึกษาแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกที่มีรอยแตกโดยเพิ่มส่วนของการคำนวณหาตัวประกอบความเข้มหน่วยแรง (stress intensity factor) ด้วยวิธีสหสัมพันธ์การเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement correlation method) ที่คำนวณจากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้าของรอยแตก

รายการอ้างอิง

Banerjee, P.K. The Boundary Element Methods in Engineering. London : McGraw-Hill, 1994.

Brebbia, C.A. and Dominguez, J. Boundary Elements An Introductory Course. New York : McGraw-Hill, 1992.

Crawley, E.F. Intelligent structures for aerospace: A technology overview and assessment. AIAA Journal, 32 (1994) : 1689-1699.

Curie, P. and Curie, J. Comptes Rendus. 91 (1880)

Davi, G. and Milazzo, A. Multidomain boundary integral formulation for piezoelectric materials fracture mechanic. International Journals of solids and structures. 38 (2001) : 7065-7078.

Denda, M. and Lua, J. Development of boundary element method for 2D piezoelectricity. Composites. 30B (1999) : 699-707.

Ding, H., Wang, G. and Chen, W. A boundary integral formulation and 2D fundamental solutions for piezoelectric media. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 158 (1998) : 65-80.

Gao, C.F. and Fan, W.X. Exact solutions for plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or crack. International Journals of solids and structures. 36 (1999) : 2525-2540.

Groh, U. and Kuna, M. Efficient boundary element analysis of cracks in 2D piezoelectric structures. International Journals of solids and structures. 42 (2005) : 2399-2416.

Lee, J.S. Boundary element method for electroelastic interaction in piezoceramics. Engineering Analysis with Boundary Elements. 15 (1995) : 321-328.

Lee, K.J. and Jiang, L.Z. A boundary integral formulation and 2D fundamental solutions for piezoelectric media. Mechanical Research Communications. 21 (1994) : 47-54.

Liu, Y. and Fan, H. On the conventional boundary integral equation formulation for piezoelectric solids with defects or of thin shapes. Engineering Analysis with Boundary Elements. 25 (2001) : 77-91.

Lu, P. and Mahrenholtz, O. A variational boundary element formulation for piezoelectricity Mechanical Research Communications. 21 (1994) : 605-611.

Khutoryansky, N., Sosa, H. and Zu, W. Approximate green's functions and a boundary element method for electro-elastic analyses of active materials. Computer and Structures. 66 (1998) : 289-299.

Rajapakse, R.K.N.D. Plane strain/stress solutions for piezoelectric solid. Composites. 28B (1997) : 385-396.

Rao, S.S. and Sunar, M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of Flexible Structures: A survey. Applied Mechanics Review. 47 (1994) : 113-123.

Parton, V.Z. and Kudryavtsev, B.A. Electromagnetoelasticit. New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1988.

Sosa, H.A. Plane problems in piezoelectric media with defects. International Journals of solids and structure. 28 (1991) : 491-505.

Sosa, H.A., and Khutoryansky, N. New developments concerning piezoelectric materials with defects. International Journals of solids and structure. 33 (1996) : 3399-3414.

Xu, X.-L. and Rajapakse, R.K.N.D. Boundary element analysis of piezoelectric solids with defects. Composites. 29B (1998) : 655-669.

Xu, X.-L. and Rajapakse, R.K.N.D. Analytical solution for an arbitrarily oriented void/crack and fracture of piezoceramics. Acta Materialia. 47 (1999) : 1735-1747.

Weian, Y. and Wang, H. Virtual boundary element integral method for 2-D piezoelectric media. Finite Elements in Analysis and Design. 41 (2005) : 875-891.

Wang, X., Zhou, Y. and Zhou, W. A novel hybrid finite element with a hole for analysis of plane piezoelectric medium with defects. International Journals of solids and structure. 41 (2004) : 7111-7128.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ฟังก์ชันเคอร์เนลสำหรับแผ่นระนาบชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก

ฟังก์ชันเคอร์เนลที่ใช้ในงานวิจัยนี้ประกอบด้วย ฟังก์ชันเคอร์เนลในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า (displacement-electric potential BIE) และอนุพันธ์ของฟังก์ชันเคอร์เนลในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับความเค้น และการกระจัดทางไฟฟ้า (stress-electric displacement BIE)

ก.1 ฟังก์ชันเคอร์เนลในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า

ฟังก์ชันเคอร์เนลในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริก สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งและศักย์ไฟฟ้า สมการที่ (3.37) และ (3.54ก) ในรูปเมทริกซ์เคอร์เนล $\mathbf{G}(\mathrm{x};\mathrm{x}')$ และ $\mathbf{H}(\mathrm{x};\mathrm{x}')$ สามารถคำนวณได้จากผลเฉลยหลักมูล โดยการแทนค่าเซตของฟังก์ชันเลือก $M_j(\xi)$ ที่สอดคล้องที่คำนวณได้ในหัวข้อ 2.2.1 ถึง 2.2.3 ลงในสมการ (2.12) ถึง (2.13) แล้วทำการจัดรูปสมการ จะได้ฟังก์ชันเคอร์เนลตามสมการ (ก.1) ถึง (ก.18) ดังต่อไปนี้ (Rajapakse, 1997)

$$G_{xx}(\mathrm{x};\mathrm{x}') = -\sum_{j=1}^{3}\beta_j f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_j|\xi|z}}{|\xi|}e^{-i\xi x}d\xi\right] \qquad (ก.1)$$

$$G_{zx}(\mathrm{x};\mathrm{x}') = \sum_{j=1}^{3}\eta_j f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \qquad (ก.2)$$

$$G_{qx}(\mathrm{x};\mathrm{x}') = \sum_{j=1}^{3}\delta_j f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \qquad (ก.3)$$

$$G_{xz}(\mathrm{x};\mathrm{x}') = \sum_{j=1}^{3}\beta_j a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \qquad (ก.4)$$

$$G_{zz}(\mathrm{x};\mathrm{x}') = \sum_{j=1}^{3}\eta_j a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi^2}e^{-i\xi x}d\xi\right] \qquad (ก.5)$$

$$G_{qz}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}\delta_j a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi^2}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.6}$$

$$G_{xq}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}\beta_j b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.7}$$

$$G_{zq}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}\eta_j b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi^2}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.8}$$

$$G_{qq}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}\delta_j b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi^2}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.9}$$

$$\begin{aligned}H_{xx}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=&\left\{\sum_{j-1}^{3}d_{1j}f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\xi.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{|\xi|}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x\\&+\left\{-\sum_{j=1}^{3}d_{3j}f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z\end{aligned} \tag{ก.10}$$

$$\begin{aligned}H_{zx}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=&\left\{-\sum_{j=1}^{3}d_{3j}f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x\\&+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\xi.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{|\xi|}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z\end{aligned} \tag{ก.11}$$

$$\begin{aligned}H_{qx}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=&\left\{-\sum_{j=1}^{3}d_{4j}f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x\\&+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{5j}f_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\xi.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{|\xi|}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z\end{aligned} \tag{ก.12}$$

$$\begin{aligned}H_{xz}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=&\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{1j}a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x\\&+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{3j}a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i|\xi|.e^{-\alpha_j|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z\end{aligned} \tag{ก.13}$$

$$H_{zz}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{3j}a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\left|\xi\right|.e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.14)$$

$$H_{qz}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{4j}a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\left|\xi\right|.e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{5j}a_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.15)$$

$$H_{xq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{1j}b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{3j}b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\left|\xi\right|.e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.16)$$

$$H_{zq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{3j}b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\left|\xi\right|.e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.17)$$

$$H_{qq}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{4j}b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\left|\xi\right|.e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{5j}b_j\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_j\left|\xi\right|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.18)$$

โดยที่ค่า f_j , a_j , b_j คำนวณได้ในสมการ (2.16), (2.19) และ (2.22) ส่วนค่า β_j , η_j , δ_j , d_{1j} , d_{2j} , d_{3j} , d_{4j} , d_{5j} แทนด้วยสมการ (ก.19ก) ถึง (ก.19ค) และสมการ (ก.20ก) ถึง (ก.20จ) ตามลำดับดังนี้

$$\beta_j=\left(c_{13}+c_{44}\right)\left(e_{33}\alpha_j^2-e_{15}\right)\alpha_j-\left(c_{33}\alpha_j^2-c_{44}\right)\left(e_{31}+e_{15}\right)\alpha_j \qquad (ก.19ก)$$

$$\eta_j=\left(c_{11}-c_{44}\alpha_j^2\right)\left(e_{33}\alpha_j^2-e_{15}\right)-\left(c_{13}+c_{44}\right)\left(e_{31}+e_{15}\right)\alpha_j^2 \qquad (ก.19ข)$$

$$\delta_j=-\left(c_{44}\alpha_j^2-c_{11}\right)\left(c_{44}-c_{33}\alpha_j^2\right)+\left(c_{13}+c_{44}\right)^2\alpha_j^2 \qquad (ก.19ค)$$

$$d_{1j} = c_{11}\beta_j - c_{13}\alpha_j\eta_j - e_{31}\alpha_j\delta_j \qquad (\text{ก.20ก})$$

$$d_{2j} = c_{13}\beta_j - c_{33}\alpha_j\eta_j - e_{33}\alpha_j\delta_j \qquad (\text{ก.20ข})$$

$$d_{3j} = -c_{44}\alpha_j\beta_j - c_{44}\eta_j - e_{15}\delta_j \qquad (\text{ก.20ค})$$

$$d_{4j} = -c_{15}\alpha_j\beta_j - e_{15}\eta_j + \kappa_{11}\delta_j \qquad (\text{ก.20ง})$$

$$d_{5j} = e_{31}\beta_j - e_{33}\alpha_j\eta_j + \kappa_{33}\alpha_j\delta_j \qquad (\text{ก.20จ})$$

และ n_i คือโคไซน์แสดงทิศทางของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย ที่ตั้งฉากกับผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณา เมื่อ $i = x,\ z$

ก.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเคอร์เนลในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเคอร์เนลที่ใช้ในสมการเชิงปริพันธ์ขอบเขตของชิ้นส่วนเพียโซอิเล็กทริกสำหรับความเค้นและการกระจัดทางไฟฟ้า สมการที่ (3.54ข) ในรูปเมทริกซ์ $\mathbf{G}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right)$ และ $\mathbf{H}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right)$ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ทำการคำนวณโดยการนำสมการ (ก.1) ถึง (ก18) มาหาอนุพันธ์แล้วแทนลงในสมการ (3.56ก) และ (3.56ข) ตามลำดับ ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$G_{11}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right) = \sum_{j=1}^{3} d_{1j}^{*}\beta_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}}{|\xi|} e^{-i\xi x} d\xi \right] \qquad (\text{ก.21})$$

$$G_{12}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right) = \sum_{j=1}^{3} d_{1j}^{*}\eta_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_j|\xi|z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \qquad (\text{ก.22})$$

$$G_{13}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right) = \sum_{j=1}^{3} d_{1j}^{*}\delta_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_j|\xi|z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \qquad (\text{ก.23})$$

$$G_{21}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right) = \sum_{j=1}^{3} d_{2j}^{*}\beta_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}}{|\xi|} e^{-i\xi x} d\xi \right] \qquad (\text{ก.24})$$

$$G_{22}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right) = \sum_{j=1}^{3} d_{2j}^{*}\eta_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_j|\xi|z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \qquad (\text{ก.25})$$

$$G_{23}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\, \mathrm{x}'\right) = \sum_{j=1}^{3} d_{2j}^{*}\delta_j \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_j|\xi|z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \qquad (\text{ก.26})$$

$$G_{31}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=-\sum_{j=1}^{3}d_{3j}^{*}\beta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_{j}|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.27}$$

$$G_{32}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}d_{3j}^{*}\eta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i|\xi|\;e^{-\alpha_{j}|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.28}$$

$$G_{33}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}d_{3j}^{*}\delta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i|\xi|\;e^{-\alpha_{j}|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.29}$$

$$G_{41}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=-\sum_{j=1}^{3}d_{4j}^{*}\beta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_{j}|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.30}$$

$$G_{42}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}d_{4j}^{*}\eta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i|\xi|\;e^{-\alpha_{j}|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.31}$$

$$G_{43}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}d_{4j}^{*}\delta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i|\xi|\;e^{-\alpha_{j}|\xi|z}}{\xi}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.32}$$

$$G_{51}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}d_{5j}^{*}\beta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\xi\;e^{-\alpha_{j}|\xi|z}}{|\xi|}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.33}$$

$$G_{52}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}d_{5j}^{*}\eta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_{j}|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.34}$$

$$G_{53}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=\sum_{j=1}^{3}d_{5j}^{*}\delta_{j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha_{j}|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right] \tag{ก.35}$$

$$\begin{aligned}H_{11}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\,\mathrm{x}'\right)=&\left\{\sum_{j-1}^{3}d_{1j}^{*}d_{1j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\;e^{-\alpha_{j}|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_{x}\\&+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{1j}^{*}d_{3j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\;e^{-\alpha_{j}|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_{z}\end{aligned} \tag{ก.36}$$

$$H_{12}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{1j}^{*}d_{3j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{1j}^{*}d_{2j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.37)$$

$$H_{13}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{1j}^{*}d_{4j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{1j}^{*}d_{5j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.38)$$

$$H_{21}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j-1}^{3}d_{2j}^{*}d_{1j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}^{*}d_{3j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.39)$$

$$H_{22}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}^{*}d_{3j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}^{*}d_{2j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.40)$$

$$H_{23}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}^{*}d_{4j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{2j}^{*}d_{5j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.41)$$

$$H_{31}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{\sum_{j-1}^{3}d_{3j}^{*}d_{1j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{-\sum_{j=1}^{3}d_{3j}^{*}d_{3j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.42)$$

$$H_{32}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right)=\left\{-\sum_{j=1}^{3}d_{3j}^{*}d_{3j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_x$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{3}d_{3j}^{*}d_{2j}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\xi\ e^{-\alpha_j|\xi|z}e^{-i\xi x}d\xi\right]\right\}n_z \qquad (ก.43)$$

$$\begin{aligned} H_{33}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) = & \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{3j}^{*} d_{4j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi\right| \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_x \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{3j}^{*} d_{5j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_z \qquad \text{(ก.44)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{41}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) = & \left\{ \sum_{j-1}^{3} d_{4j}^{*} d_{1j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_x \\ & + \left\{ -\sum_{j=1}^{3} d_{4j}^{*} d_{3j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi\right| \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_z \qquad \text{(ก.45)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{42}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) = & \left\{ -\sum_{j=1}^{3} d_{4j}^{*} d_{3j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi\right| \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_x \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{4j}^{*} d_{2j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_z \qquad \text{(ก.46)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{43}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) = & \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{4j}^{*} d_{4j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi\right| \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_x \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{4j}^{*} d_{5j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_z \qquad \text{(ก.47)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{51}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) = & \left\{ \sum_{j-1}^{3} d_{5j}^{*} d_{1j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_x \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{5j}^{*} d_{3j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi\right| \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_z \qquad \text{(ก.48)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{52}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) = & \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{5j}^{*} d_{3j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi\right| \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_x \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{5j}^{*} d_{2j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_z \qquad \text{(ก.49)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{53}^{\sigma}\left(\mathrm{x};\mathrm{x}'\right) = & \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{5j}^{*} d_{4j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi\right| \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_x \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^{3} d_{5j}^{*} d_{5j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \, e^{-\alpha_j |\xi| z} e^{-i\xi x} d\xi \right] \right\} n_z \qquad \text{(ก.50)} \end{aligned}$$

โดยที่ค่า d_{1j}^{*} , d_{2j}^{*} , d_{3j}^{*} , d_{4j}^{*} , d_{5j}^{*} ในสมการ (ก21) ถึง (ก50) แทนด้วยสมการดังนี้

$$d_{1j}^{*} = c_{11} f_j - c_{13} \alpha_j a_j + e_{31} \alpha_j b_j \tag{ก.51ก}$$

$$d_{2j} = c_{13} f_j - c_{33} \alpha_j a_j + e_{33} \alpha_j b_j \tag{ก.51ข}$$

$$d_{3j}^{*} = -c_{44} \alpha_j f_j - c_{44} a_j - e_{15} b_j \tag{ก.51ค}$$

$$d_{4j}^{*} = -e_{15} \alpha_j f_j - e_{15} a_j - \kappa_{11} b_j \tag{ก.51ง}$$

$$d_{5j}^{*} = e_{31} f_j - e_{33} \alpha_j a_j - \kappa_{33} \alpha_j b_j \tag{ก.51จ}$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายจารุวัจน์ วิรัชพงศานนท์ เกิดวันที่ 7 ตุลาคม พ.ศ. 2522 ที่จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ในปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2545