การวิเคราะห์ส่วนเก็บไว้ภายใต้ฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมสูงสุดระหว่างบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อ

นายเจนณรงค์ สถาพรพิบูลย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการประกันภัย ภาควิชาสถิติ
คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2557

RETENTION ANALYSIS UNDER MAXIMIZATION OF THE JOINT SURVIVAL FUNCTIONS BETWEEN CEDING COMPANY AND REINSURER

Mr. Gennarong Sathapornpiboon

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Insurance
Department of Statistics
Faculty of Commerce and Accountancy
Chulalongkorn University
Academic Year 2014

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์ส่วนเก็บไว้ภายใต้ฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมสูงสุดระหว่างบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อ
โดย	นายเจนณรงค์ สถาพรพิบูลย์
สาขาวิชา	การประกันภัย
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร. สุวาณี สุรเสียงสังข์

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี

(รองศาสตราจารย์ ดร. พสุ เดชะรินทร์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วัลภา ประกอบผล)

....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุวาณี สุรเสียงสังข์)

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ฐิติวดี ชัยวัฒน์)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร. ทศพร แถลงธรรม)

เจนณรงค์ สถาพรพิบูลย์ : การวิเคราะห์ส่วนเก็บไว้ภายใต้ฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมสูงสุดระหว่างบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อ (RETENTION ANALYSIS UNDER MAXIMIZATION OF THE JOINT SURVIVAL FUNCTIONS BETWEEN CEDING COMPANY AND REINSURER) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รศ. ดร. สุวาณี สุรเสียงสังข์, 68 หน้า.

งานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์หาส่วนเก็บไว้ของการประกันภัยต่อที่เหมาะสมสำหรับแผนประกันชีวิตที่คุ้มครองผู้ถือกรมธรรม์อายุ 50-70 ปี ที่มีจำนวนเงินเอาประกันภัยจำกัดที่ 200,000 บาทของบริษัทประกันชีวิตในประเทศไทยแห่งหนึ่ง การวิเคราะห์ส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมนั้นพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นอยู่รอดร่วมมากที่สุดที่ทำให้ทั้งบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อไม่ขาดทุน ซึ่งค่าความน่าจะเป็นอยู่รอดร่วมนี้ประมาณได้สองวิธีได้แก่ การประมาณค่าจากขอบเขตล่างฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วม และ การประมาณฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมด้วยการแจกแจงแกมมาแปลงสองตัวแปรโดยใช้ข้อมูลการจ่ายผลประโยชน์จากกรมธรรม์ทั้งหมด 9,734 ฉบับ

จากการศึกษาพบว่าเมื่อพิจารณาด้วยวิธีหาค่ามากสุดของขอบเขตล่างฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมจะได้ว่าการประกันภัยต่อตามส่วนที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อเท่ากับ 50% ให้ค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมสูงสุดเท่ากับ 0.5341และการประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้เท่ากับ 60,000 ให้ค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมสูงสุดเท่ากับ 0.5403 นอกจากนี้เมื่อพิจารด้วยการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปรได้ผลสอดคล้องกันคือการประกันภัยต่อตามส่วนที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อเท่ากับ 50% ให้ค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมสูงสุดเท่ากับ 0.7331 และการประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้เท่ากับ 60,000 ให้ค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมสูงสุดเท่ากับ 0.8388 ซึ่งสรุปได้ว่าการประกันภัยต่อที่เหมาะสมสำหรับแผนประกันชีวิตนี้คือแบบความเสียหายส่วนเกินที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ 60,000 บาท

ภาควิชา สถิติ	ลายมือชื่อนิสิต ....
สาขาวิชา การประกันภัย	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก ....
ปีการศึกษา 2557	

5481532626 : MAJOR INSURANCE

KEYWORDS: EXCESS OF LOSS / QUOTA SHARE / OPTIMAL REINSURANCE / PROBABILITY OF THE JOINT SURVIVAL

GENNARONG SATHAPORNPIBOON: RETENTION ANALYSIS UNDER MAXIMIZATION OF THE JOINT SURVIVAL FUNCTIONS BETWEEN CEDING COMPANY AND REINSURER. ADVISOR: SUWANEE SURASIENGSUNK, 68 pp.

The aim of this study is to propose simply method to analyze optimal reinsurance retention for a life insurance plan for ages 50-70 years old which face amount limit is 200,000 baht from one Thai life insurance Company. Optimal retention can be determined by maximizing the joint survival probability provided ceding company and reinsurer do not get loss. Using claim experience from 9,734 policies, this joint survival probability can be estimated by two simple methods including consideration the lower bound of joint survival function and approximation the joint survival function with bivariate translated gamma distribution.

As the result of this study, the optimal retentions analyzed with the maximizing lower bound of joint survival function are quota share level 50% for quota share reinsurance with probability as 0.5403 and retention limit 60,000 baht for excess of loss reinsurance with probability as 0.5341. Moreover, the bivariate translated gamma distribution also reveals optimal retentions which quota share level 50% for quota share reinsurance with probability as 0.8388 and retention limit 60,000 baht for excess of loss reinsurance with probability as 0.7331. In conclusion, excess of loss reinsurance with retention limit 60,000 baht is optimal for this life insurance plan.

Department:	Statistics	Student's Signature	....
Field of Study:	Insurance	Advisor's Signature	....
Academic Year:	2014		

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของ รองศาสตราจารย์ ดร.สุวาณี สุร เสียรสังข์ อาจารย์ที่ปรึษาวิทยานิพนธ์ ที่ช่วยเหลือ ให้คำแนะนำ ข้อคิดเห็น ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ แก่ผู้วิจัยเป็นอย่างดีมาโดยตลอดของการทำวิทยานิพนธ์

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี ภาควิชาสถิติ และคณาจารย์ คณะวิทยาศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ได้กรุณาประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้แก่ผู้วิจัย

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณสมาชิกในครอบครัว ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนในการศึกษาของผู้วิจัย ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ

กิตติกรรมประกาศ .... ฉ

สารบัญ .... ช

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2

1.3 ขอบเขตของการวิจัย 2

1.4 เงื่อนไขที่สำคัญของการวิจัย 3

1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย 4

1.6 วิธีการดำเนินงานโดยย่อ 4

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 6

2.1 แนวคิดและทฤษฎี 6

2.2 เอกสารเกี่ยวข้อง 11

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 16

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย 17

3.1 ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา 17

3.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 17

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 26

4.1 การวิเคราะห์หาการแจกแจงของการจ่ายเงินเอาประกันภัย 26

4.2 การแจกแจงความเสียหายภายใต้สัญญาประกันภัยต่อ 30

4.3 ขอบเขตล่างฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วม 35

หน้า

4.4 ฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปร 38
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปราย และข้อเสนอแนะ 42
5.1 สรุปผลการวิจัย 42
5.2 อภิปรายผลการวิจัย 43
5.3 ข้อเสนอแนะ 44
รายการอ้างอิง 45
ภาคผนวก 47
ภาคผนวก ก 48
ภาคผนวก ข 57
ภาคผนวก ค 62
ภาคผนวก ง 64
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 68

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การประกันภัยต่อตามสัญญา (Treaty Reinsurance) เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นวิธีที่สะดวก และสามารถลดปริมาณงานในการจัดการลงไปได้มาก โดยมีการทำข้อตกลงในรายระเอียดของเงื่อนไขในสัญญาประกันภัยต่อเป็นลายลักษณ์อักษรล่วงหน้าระหว่างบริษัทเอาประกันภัยต่อ (ceding Company) และบริษัทรับประกันภัยต่อ (Reinsurer) ซึ่งระบุเงื่อนไข ขอบเขต ข้อยกเว้น และวงเงินสูงสุดที่บริษัทเอาประกันภัยต่อจะได้รับความคุ้มครองสำหรับงานและภัยต่างๆที่ระบุไว้กว้างๆในสัญญานั้น ซึ่งบริษัทรับประกันภัยต่อตกลงที่จะรับประกันภัยต่อทุกรายที่บริษัทเอาประกันภัยต่อได้จัดสรรเข้าไปในสัญญาประกันภัยต่อตามเงื่อนไขที่ได้ตกลงไว้ โดยการทำสัญญาประกันภัยต่อสามารถแยกตามประเภทของการประกันภัย

การประกันภัยต่อแบ่งรูปแบบของสัญญาได้ 2 แบบใหญ่คือ การประกันภัยต่อตามสัญญาแบบกำหนดสัดส่วน (Proportional Treaty Reinsurance) และการประกันภัยต่อตามสัญญาแบบไม่กำหนดสัดส่วน (Non-Proportional Treaty Reinsurance)

การประกันภัยต่อตามสัญญาแบบกำหนดสัดส่วน (Proportional Treaty Reinsurance) หรือเรียกว่า Proportional Treaty เป็นการเอาประกันภัยต่อซึ่งกำหนดจากจำนวนเงินเอาประกันภัยเป็นหลัก โดยจะมีการแบ่งเบี้ยประกันภัยและเงินเอาประกันภัยระหว่างบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับเอาประกันภัยต่อในสัดส่วนเดียวกับเงินเอาประกันภัยที่แต่ละฝ่ายรับเสี่ยงภัยไว้

การประกันภัยต่อตามสัญญาแบบไม่กำหนดสัดส่วน (Non-Proportional Treaty Reinsurance) หรือเรียกว่า Non-Proportional Treaty เป็นการประกันภัยต่อซึ่งกำหนดจากจำนวนเงินเอาประกันภัยเป็นหลัก โดยบริษัทเอาประกันภัยต่อได้เอาประกันภัยต่อในความเสียหายส่วนที่เกินจากจำนวนเงินจำกัดความรับผิดที่ตนเองจะต้องรับผิดชอบไว้ หากมีความเสียหายเกิดขึ้นและมีค่าเสียหายเกินจำนวนเงิน บริษัทเอาประกันภัยต่อต้องรับผิดชอบเอง บริษัทรับประกันภัยต่อก็จะเข้ามารับผิดชอบชดใช้เงินเอาประกันภัยส่วนเกินจากนั้น แต่ทั้งนี้ต้องไม่เกินจำนวนเงินจำกัดความรับผิดชอบสูงสุดของบริษัทเอาประกันภัยต่อที่ได้ตกลงกันไว้

ในปัจจุบันสัญญาการประกันภัยแต่ละประเภทจะมีรูปแบบของสัญญาที่นิยมใช้และนำมาศึกษาได้แก่ สัญญาประกันภัยต่อตามส่วน (Quota Share) ซึ่งเป็นการประกันภัยต่อตามสัญญาแบบกำหนดสัดส่วน และสัญญาประกันภัยต่อความเสียหายส่วนเกิน (Excess of Loss) ซึ่งเป็นการ

ประกันภัยต่อตามสัญญาแบบกำหนดสัดส่วน โดยที่ผ่านมาได้มีงานวิจัยเกี่ยวกับ ทฤษฎีและหลักการการพิจารณาความเหมาะสมของสัญญาประกันภัยต่อได้แก่งานของ Gerber (1979), Waters (1983), Goovaerts et al. (1989), Daykin et al. (1994), Buhlmann (1996), Bowers et al. (1997), Schmitter (2001), Gollier (2003), Verlaak and Beirlant (2003) งานวิจัยส่วนใหญ่มักจะพิจารณาความเหมาะสมของประกันภัยต่อโดยตั้งเงื่อนไขการอยู่รอดของบริษัทเอาประกันภัยต่อหรือผู้รับประกันภัยต่อด้านใดด้านหนึ่งเท่านั้น ต่อมาจึงมีการสร้างตัวแบบที่พิจารณาในมุมของทั้งบริษัทรับประกันภัยต่อ และบริษัทเอาประกันภัยต่อไปพร้อมกัน

ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงสนใจศึกษาวิธีการหาความเหมาะสมของการรับประกันภัยต่อ โดยคำนึงถึงความเสี่ยงของทั้งบริษัทรับประกันภัยต่อและบริษัทเอาประกันภัยต่อไปพร้อมกัน

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อคำนวณขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสม (Retention Limits) และสัดส่วนประกันภัยต่อ (Quota Share Level) ที่เหมาะสมของสัญญาประกันภัยต่อ

2. เพื่อเปรียบเทียบความเหมาะสมระหว่างสัญญาการคุ้มครองความเสียหายส่วนเกิน (Excess of Loss) กับสัญญาประกันภัยต่อตามส่วน (Quota Share)

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. การประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินมักใช้ในแบบประกันที่มีความเสี่ยงสูงหรือจำนวนเงินเอาประกันภัยสูงมากแต่เนื่องจากปัญหาในการขอความอนุเคราะห์ทางด้านข้อมูลจากบริษัทมีข้อจำกัดมาก งานวิจัยจึงเสนอกระบวนการวิเคราะห์ส่วนเก็บไว้สำหรับแผนประกันชีวิตที่มีจำนวนเงินเอาประกันสูงสุด 200,000 บาท โดยมีรายละเอียดแผนประกันชีวิตดังนี้

อายุรับประกันภัย : 50-70 ปี

ผลประโยชน์ : ปีที่1-2

กรณีเสียชีวิตด้วยสาเหตุจากโรคทั่วไปและโรคชรา รับ 102% ของเบี้ยประกันภัยที่ชำระแล้ว

ปีที่ 3 เป็นต้นไป: รับ 100% ของจำนวนเงินเอาประกันภัย

จำนวนเงินเอาประกันภัย : 20,000 ถึง 200,000 บาท

ระยะการคุ้มครอง : คุ้มครองถึงอายุ 90 ปี

คุ้มครองการเสียชีวิตทุกกรณี

2. ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

ข้อมูลการจ่ายผลประโยชน์รายบุคคลของกรมธรรม์ประกันชีวิตเฉพาะผู้สูงอายุ (50-70 ปี) ในช่วง พ.ศ. 2552-2555 ของบริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่ง โดยจะพิจารณาเฉพาะผลประโยชน์ที่จ่ายให้กรมธรรม์อายุมากกว่า 2 ปี จำนวน 1,691 กรมธรรม์จากผู้ถือกรมธรรม์ทั้งหมด 9,734 ราย

3. ระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการตรวจสอบการแจกแจงความน่าจะเป็นมีค่า 0.05

1.4 เงื่อนไขที่สำคัญของการวิจัย

1.4.1.ข้อกำหนดเบื้องต้น (Assumption)

กำหนดให้ฟังก์ชันการแจกแจงของจำนวนการเรียกร้องเงินเอาประกันภัยเป็นการแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution) มีค่าความน่าจะเป็นของการเรียกร้องเงินเอาประกันภัย (p) เท่ากับ 0.8548 (ศึกษาวิธีการคำนวณได้จาก ภาคผนวก ค)

1.4.2. ข้อจำกัดการวิจัย (Limitation)

รูปแบบสัญญาการประกันภัยต่อที่จะศึกษาในงานวิจัยนี้มีสัญญาประกันภัยต่อความเสียหายส่วนเกิน (Excess of Loss) และสัญญาประกันภัยต่อตามส่วน (Quota Share)

1) ขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ (Retention Limits : M) หมายถึง ส่วนจำกัดของเอาประกันภัยระบุไว้ในสัญญาแบบความเสียหายส่วนเกิน (Excess of loss)

ตัวอย่าง บริษัทเอาประกันภัยต่อ ก. ได้ทำสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินกับบริษัทประกันภัยต่อ A โดยกำหนดส่วนเก็บไว้ของส่วนเกินของเงินเอาประกันภัย (M) =500,000 ต่อการเรียกร้องเงินเอาประกันภัยแต่ละครั้งซึ่งบริษัทประกันภัยต่อจะจ่ายค่าเรียกร้องเงินเอาประกันภัยในส่วนที่เกิน จาก 500,000 แรก

2) สัดส่วนประกันภัยต่อ (Quota Share Level : a) หมายถึง อัตราส่วนของเงินเรียกร้องเงินเอาประกันภัยของบริษัทเอาประกันภัยต่อรับผิดชอบ ซึ่งระบุไว้ในสัญญาประกันภัยต่อตามส่วน (Quota Share)

ตัวอย่าง บริษัทเอาประกันภัยต่อ ข. ได้ทำสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินกับบริษัทรับประกันภัยต่อ B โดยกำหนดส่วนเก็บไว้ของส่วนเกินของเงินเอาประกันภัย (a) =0.4 ต่อการเรียกร้องเงินเอาประกันภัยแต่ละครั้ง ถ้าหากนายสองได้มีการเรียกร้องเงินเอาประกันภัยต่อบริษัท ข. เป็นเงินทั้งสิ้น 1,000,000 นั้นหมายความว่า บริษัทประกันภัย ข. ต้องรับผิดชอบจำนวนเงินเอาประกันภัยของ นายสองเป็นจำนวน 600,000

และบริษัทประกันภัยต่อ B ต้องรับผิดชอบจำนวนเงินเอาประกันภัยของนายสองเป็นจำนวน 400,000

1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. การประกันภัยต่อ (Reinsurance) หมายถึง การโอนความเสี่ยงภัยของบริษัทประกันภัยไปยังบริษัทประกันภัยต่อ เนื่องจากบริษัทประกันภัยสามารถรับความเสี่ยงไว้เองได้จำกัด จึงต้องโอนความเสี่ยงภัยส่วนที่เหลือไปให้กับผู้รับประกันภัยต่อ

2. เบี้ยประกันภัยรับ (Written Premium) หมายถึง ยอดเบี้ยประกันภัยรับจากทุกยอดรวมทั้งเบี้ยประกันภัยจากการรับประกันภัยต่อในระยะเวลาหนึ่งๆ

3. เบี้ยประกันภัยต่อ (Reinsurance Premium) หมายถึง จำนวนเบี้ยที่บริษัทเอาประกันต่อจะจ่ายให้บริษัทรับประกันภัยต่อตามที่สัญญาประกันภัยต่อกำหนดไว้

1.6 วิธีการดำเนินงานโดยย่อ

1. ศึกษาและค้นคว้าเอกสาร ตำรา งานวิจัย รวมถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2. เก็บรวบรวมข้อมูลการจ่ายผลประโยชน์ และ หาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของเงินเอาประกันภัยต่อราย (Claim Severity Distribution Function)

3. นำฟังก์ชันที่ได้จากข้อ 2. มาหาค่าความน่าจะเป็นของฟังก์ชันความเสียหายรายกรมธรรม์ภายใต้สัญญาประกันภัยต่อ โดยกำหนดสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันดังนี้

ตารางที่1.1 สัญลักษณ์ฟังก์ชันของแต่ละสัญญาประกันภัยต่อ

ประเภทสัญญาประกันภัยต่อ	บริษัทเอาประกันภัยต่อ	บริษัทรับประกันภัยต่อ
ความเสียหายส่วนเกิน (Retention Limit : M)	$p_{(M)}(x)$	$q_{(M)}(x)$
ประกันภัยต่อตามส่วน (Quota Share level : a)	$p_{(a)}(x)$	$q_{(a)}(x)$

4. ประมาณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมของบริษัทเอาประกันภัยและบริษัทรับประกันภัยต่อโดยฟังก์ชันที่หาได้จากข้อ 3. โดยวีธีประมาณค่าขอบเขตล่างมากสุด (Maximizing lower bound of the Joint Survival Probability)

เริ่มจากหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของผลรวมความเสียหายของทั้งสองบริษัทด้วยสูตรเวียนเกิดของแพนเจอร์ (Panjer Harry H.,1998) จากนั้นประมาณความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อด้วยค่ามากที่สุดของขอบเขตล่าง

$$L_1(a,M)=\Pr\{S_I\le P_I\}\Pr\{S_R\le P_R\} \quad (1.1)$$

และโดยวิธีการแปลงแกมมาสองตัว

$$L_2(a,M)=G(P_I-\omega_1,P_R-\omega_2) \quad (1.2)$$

5. วิเคราะห์หาค่าส่วนเก็บไว้ของเงินเอาประกันภัยของสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกิน (retention : M) ด้วยวิธีการประมาณค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของสมการ (1.1) และ (1.2)

6. วิเคราะห์หาค่าสัดส่วนประกันภัยต่อของสัญญาประกันภัยต่อตามส่วน (Quota Share Level : a) ด้วยวิธีการประมาณค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นของสมการ (1) และ (2)

7. วิเคราะห์และสังเคราะห์ผลของการวิจัย

8. เขียนรายงานและสรุปผลการวิจัย

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงเอกสารและทฤษฎี รวมถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยจะอธิบายการประกัยภัยต่อแต่ละประเภท และการหาค่าความน่าจะเป็นของความเสียหายรวมด้วยวิธีของแพนเจอร์ (Panjer H.H. ,1998) และพิจารณาความเหมาะสมของการประกัยภัยต่อแต่ละประเภทด้วยวิธีประมาณค่าความน่าจะเป็นอยู่รอดรวมด้วยค่าขอบเขตล่างมากสุดเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการประมาณค่าความน่าจะเป็นอยู่รอดรวมด้วยการแปลงแกมมาสองตัวแปรตามแบบของมาธายและมอสโคเปาลอส (Mathai and Moschopoulos ,1991)

2.1 แนวคิดและทฤษฎี

2.1.1 การประกันภัยต่อ (Reinsurance)

เมื่อบริษัทประกันภัยขายการป้องกันความเสี่ยงภัยโดยเบี้ยประกันภัยที่บริษัทรับความเสี่ยงภัยทางด้านการเงินของเหตุการณ์ที่ไม่คาดฝันที่จะเกิดขึ้นกับผู้ถือกรมธรรม์ ซึ่งบางความเสี่ยงภัยก็มีขนาดใหญ่มากจนบริษัทประกันภัยไม่สามารถรับไว้เองได้ทั้งหมด บางความเสี่ยงภัยก็สามารถเอาประกัยภัยต่อเช่น ส่งต่อไปยังบริษัทรับประกันภัยต่อ (reinsurer) ที่มีส่วนแบ่งของเบี้ยประกันความเสี่ยงภัยนี้ ซึ่งความเสี่ยงภัยบางส่วนที่บริษัทเอาประกันภัยต่อ (cedent) เก็บไว้เอง จะเรียกว่า ส่วนเก็บไว้ (retention)

2.1.2 วัตถุประสงค์หลักของการประกันภัยต่อ

2.1.2.1 เพื่อป้องกันบริษัทเอาประกันภัยต่อ จากเหตุการณ์ภัยพิบัติขนาดใหญ่ เช่นการเรียกร้องขนาดใหญที่มีผลจากแผ่นดินไหว

2.1.2.2 เพิ่มความสามารถในการรับประกันภัย เนื่องจากการเกิดปัญหาเมื่อเกิดภัยในรายใดรายหนึ่งที่มีจำนวนเงินเอาประกันสูงมากหรือหลายรายในพื้นที่เดียวกันที่ได้เอาประกันภัยไว้ นั่นคือ ผู้รับประกันภัยจะต้องเพิ่มความสามารถในการรับประกันภัยโดยการเอาประกันภัยต่อ

2.1.2.3 เพื่อผลการดำเนินงานที่มีประสิทธิภาพต่อบุคคลและธุรกิจโดยการซื้อประกันภัยเพื่อการป้องกันความเสียหายที่อาจเกิดขึ้นได้ทุกเมื่อ หรือ บริษัทรับประกันภัยทั่วไปจะเอาประกันภัยต่อเพื่อป้องกันความเสียหายทางการเงินด้วยเช่นกัน

2.1.3 ชนิดของการประกันภัยต่อ

2.1.3.1 การประกันภัยต่อแบบเฉพาะรายและการประกันภัยต่อแบบสัญญา (Facultative and Treaty reinsurance)

(1) การประกัยภัยต่อแบบเฉพาะราย (Facultative Reinsurance) คือการที่บริษัทรับประกันภัยต่อเลือกบริษัทเอาประกัยภัยต่อเฉพาะความเสี่ยงภัยบางรายที่เห็นสมควรให้บริษัทรับประกันภัยต่อพิจารณา โดยบริษัทรับประกันภัยต่อมีสิทธิที่จะรับความเสี่ยงไว้ทั้งหมด หรือบางส่วน หรือปฏิเสธ ต่อภัยรายนั้นได้ตามเห็นสมควร

(2) การประกันภัยต่อแบบสัญญา (Treaty Reinsurance) คือการประกันภัยต่อที่เป็นข้อผูกมัดระหว่างบริษัทเอาประกันภัยต่อจะต้องประกัยต่อให้แก่บริษัทประกันภัยต่อ และบริษัทรับประกันภัยต่อสัญญาว่าจะรับประกันภัยต่อในสัดส่วนเงื่อนไข และข้อยกเว้นที่ได้ตกลงกันไว้

2.1.3.2 การประกันภัยต่อแบบเป็นสัดส่วน (Proportional reinsurance)

เมื่อบริษัทรับประกันภัยต่อแบบกำหนดสัดส่วนของจำนวนเงินประกันภัย โดยแบ่งจำนวนเงินเอาประกันภัยและเบี้ยประกันภัยของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อตามจำนวนวงประกันภัยที่แต่ละฝ่ายรับไว้ การประกันภัยต่อแบบสัดส่วนเป็นชนิดหนึ่งของการประกันชีวิตต่อและพบน้อยมากในด้านประกันวินาศภัยต่อ และสามารถแบ่งได้เป็น

(1) การประกันภัยต่อแบบส่วนเกิน (Surplus) เหมาะสำหรับบริษัทประกันชีวิตรายบุคคล สัญญาประกันภัยจะมีโครงสร้างที่ให้การประกันภัยต่อแบบส่วนเกินหมายความว่า บริษัทเอาประกันภัยต่อจะเก็บความเสี่ยงภัยไว้เองเต็มจำนวนที่กำหนดในสัญญา และบริษัทรับประกันภัยต่อจะรับประกันความเสี่ยงภัยส่วนที่เกินขอบเขตสัญญา โดยบริษัทเอาประกันภัยต่อกำหนดจำนวนเงินสูงสุดที่รับความเสี่ยงภัยไว้เอง และจะกำหนดจำนวนเงินสูงสุดที่บริษัทรับประกันภัยต่อจะรับผิดชอบสัญญา และถ้าจำนวนเงินของบริษัทเอาประกันภัยต่อที่รับความเสี่ยงภัยไว้เองลดลงส่งผลให้จำนวนเงินที่บริษัทประกันภัยต่อรับผิดชอบลดลงไปตามสัดส่วนเดียวกัน แต่ถ้าจำนวนเงินที่เกินจำนวนเงินสูงสุดของบริษัทเอาประกันภัยรับความเสี่ยงไว้จะไม่ส่งผลต่อจำนวนเงินที่บริษัทรับประกันภัยต่อรับผิดชอบ และถ้าจำนวนเงินเอาประกันภัยต่อเกินกว่าจำนวนเงินที่บริษัทรับประกันภัยต่อรับผิดชอบ บริษัทประกันภัยต่อจะจัดเป็น การประกันภัยต่อแบบเฉพาะราย (Facultative Reinsurance) ของจำนวนเงินที่เกินที่บริษัทรับประกันภัยต่อรับผิดชอบไปยังบริษัทประกันภัยอื่นๆ

(2) การประกันภัยต่อตามส่วน (Quota Share) การประกันภัยต่อที่บริษัทเอาประกันภัยต่อ มีข้อตกลงผูกพันที่ต้องคัดเลือกและบริษัทรับประกันภัยต่อผูกพันที่ต้องรับประกันภัยทุกรายที่มาจากบริษัทเอาประกันภัยต่อและได้คัดเลือกใน

อัตราส่วนที่แน่นอนเข้ามาในสัญญาประกันภัยต่อซึ่งเป็นอัตราส่วนที่แน่นอนกับเบี้ยประกันภัยเดิม และจ่ายเงินเอาประกันภัยที่แน่นอนตามที่ได้รับประกันภัยไว้

2.1.3.3 การประกันภัยต่อแบบไม่กำหนดสัดส่วน (Non – Proportional Reinsurance)

การประกันภัยต่อแบบเป็นสัดส่วนจะสนใจที่รูปแบบกรมธรรม์ประกันภัย แต่การประกันภัยต่อแบบไม่เป็นสัดส่วนจะสนใจที่จำนวนการเรียกร้องความเสียหายโดยการประกันภัยต่อซึ่งบริษัทเอาประกันภัยต่อจะรับความเสี่ยงไว้ส่วนหนึ่งและบริษัทรับประกันภัยต่อจะเข้ามารับผิดชอบความเสียหายส่วนที่เกินมาจาก ความเสี่ยงภัยที่รับไว้ ของบริษัทเอาประกันภัยต่อจนเต็มวงเงินสูงสุดที่กรมธรรม์ประกันภัยกำหนดไว้

(1) การคุ้มครองเพื่อกำหนดค่าความเสียหาย (Stop Loss) เป็นการประกันภัยต่อชนิดหนึ่ง หรืออาจเรียกว่า การรวมความคุ้มครองของความเสียหายส่วนเกิน เพื่อป้องกันปัญหาของบริษัทเอาประกันภัยต่อที่ต้องเจอกับความถี่ที่เพิ่มขึ้นของเงินเอาประกันภัยของรายย่อยจำนวนมาก และเมื่อรวมกันแล้วจำนวนเงินเอาประกันภัยจะมีวงเงินสูงมาก ซึ่งการป้องกันความเสียหายนั้น จำเป็นจะต้องกำหนดระดับค่าความคาดหวังการเรียกร้องค่าเสียหาย ซึ่งคือตัวเลขที่คาดการณ์ขึ้นอยู่กับการสมมติฐานเกี่ยวกับธรรมชาติของความเสี่ยงภัยที่ถือไว้ของบริษัทเอาประกันภัยต่อโดยตรง หรือขึ้นอยู่กับประสบการณ์การจ่ายเงินเอาประกันภัยที่ผ่านมา และตัวเลขถัดไปที่ต้องตัดสินใจระดับสำคัญ คือสัดส่วนของค่าคาดหวังของการเรียกร้องค่าเสียหายที่จะได้รับเงินจากบริษัทรับประกันภัยต่อ และที่ค่าของการเรียกร้องความเสียหายที่มากกว่าระดับความสำคัญจะได้รับเงินจากบริษัทรับประกันภัยต่อที่ตกลงไว้ในขอบเขตที่กำหนด

(2) การคุ้มครองความเสียหายส่วนเกิน (Excess of loss cover) เป็นสัญญาที่บริษัทรับประกันภัยต่อคุ้มครองต้นทุนความเสียหายเกินส่วนของบริษัทเอาประกันภัยต่อที่รับผิดชอบจนมาถึงจำนวนของวงเงินที่มากที่สุดที่ตนเองสามารถรับผิดชอบได้ และถ้าการเรียกร้องความเสียหายเกินกว่าจุดที่บริษัทเอาประกันภัยต่อจะรับได้จะส่งกลับไปที่บริษัทรับประกันภัยต่อ

2.1.4 การหาฟังก์ชันการแจกแจงผสมด้วยสูตรเวียนเกิดของแพนเจอร์

(Panjer Harry H.,1998)

กำหนดให้ $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$ แทนผลรวมของการจ่ายเงินเอาประกันภัย โดย

N คือตัวแปรสุ่มจำนวนการจ่ายเงินเอาประกันภัยทั้งหมดที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นอยู่ในรูปของ (a,b,0) class of distribution และมีคุณสมบัติดังนี้

ให้ $\Pr\{N=k\}=p_k$ แทนความน่าจะเป็นที่ $N=k$ เมื่อ $k\geq 1$ จะได้ว่า

$$p_k=(a+\frac{b}{k})p_{k-1}$$

X_i คือตัวแปรสุ่มขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัยที่เป็นอิสระต่อกันเมื่อ $i=1,2,3,\ldots$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงเขียนแทนด้วย

$$f_h=\Pr\{X_i=h\}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม S สามารถเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันเวียนเกิดได้ดังนี้

$$g_k=\Pr\{S=k\}=\frac{1}{(1-f_0a)^{1+\frac{a}{b}}}\sum_{j=1}^{k}(a+\frac{bj}{k})f_jg_{k-j}$$

โดยค่าเริ่มต้นของฟังก์ชันเวียนเกิดมีค่า

$g_0=W_N(f_0)$ เมื่อ W_N แทนฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ N

2.1.5 ฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปร (Bivariate Gamma Distribution)

(Mathai and Moschopoulos (1991))

นิยาม ให้ $V_i\sim G(\alpha_i,\beta_i),\quad i=0,1,2,\quad \alpha_i>0,\quad \beta_i>0$ โดยที่ V_i เป็นอิสระต่อกันภายใต้ฟังก์ชันความหนาแน่น

$$g(x;\alpha_i,\beta_i)=\frac{x^{\alpha_i-1}e^{-x/\beta_i}}{\beta_i^{\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)}$$

ให้ $Z_i=\frac{\beta_i}{\beta_0}V_0+V_i,\quad i=1,2$ และฟังก์ชันการแจงแจงของ (Z_1,Z_2) เป็นการแจกแจงแบบแกมมาสองตัวแปรที่มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ร่วม (The Join Moment Generation Function) คือ

$$M(t_1,t_2)=(1-\beta_1t_1-\beta_2t_2)^{-\alpha_0}(1-\beta_1t_1)^{-\alpha_1}(1-\beta_2t_2)^{-\alpha_2}$$

และมีคุณสมบัติดังนี้

$$E(Z_1)=\frac{\partial M(t_1,t_2)}{\partial t_1}\Big|_{t_1=t_2=0}=\beta_1(\alpha_0+\alpha_1)$$

$$E(Z_1^2)=\frac{\partial^2 M(t_1,t_2)}{\partial t_1^2}\Big|_{t_1=t_2=0}=\beta_1^2(\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_0+\alpha_1+1)$$

$$E(Z_1Z_2)=\frac{\partial^2 M(t_1,t_2)}{\partial t_2\partial t_1}\Big|_{t_1=t_2=0}=\beta_1\beta_2(\alpha_0+\alpha_0^2+\alpha_0\alpha_2+\alpha_0\alpha_1+\alpha_2\alpha_1)$$

$$E(Z_1^3)=\frac{\partial^3 M(t_1,t_2)}{\partial t_1^3}\Big|_{t_1=t_2=0}=\beta_1^3(\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_0+\alpha_1+1)(\alpha_0+\alpha_1+2)$$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $i=1,2$ จะได้สมการดังนี้

$$E(Z_i)=\beta_i(\alpha_0+\alpha_i)$$

$$Var(Z_i)=E(Z_i^{\,2})+E^2(Z_i)=\beta_i^{\,2}(\alpha_0+\alpha_i)$$

$$Cov(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)=\alpha_0\beta_1\beta_2$$

$$\mu_3=E(Z_i^{\,3})-3E(Z_i^{\,2})E(Z_i)+2E^3(Z_i)=2\beta_i^{\,3}(\alpha_0+\alpha_1)$$

ซึ่ง μ_3 แทนฟังก์ชันโมเมนต์ลำดับที่ 3 รอบจุดกำเนิด ของ Z_i เนื่องจาก $V_i>0$ และ $V_i=Z_i-\frac{\beta_i}{\beta_0}V_0$ จะได้ว่า $V_0<\frac{\beta_0}{\beta_i}Z_i$

ฟังก์ชันความหนาแน่น จากนิยามและคำจำกัดความที่กล่าวมา ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ V_0, Z_1 และ Z_2 สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$g(v_0,z_1,z_2)=\frac{(v_0)^{\alpha_0-1}\exp(-v_0/\beta_0)}{\beta_0^{\,\alpha_0}\Gamma(\alpha_0)}\times\frac{(z_1-\frac{\beta_1}{\beta_0}v_0)^{\alpha_1-1}\exp(-(z_1-\frac{\beta_1}{\beta_0}v_0)/\beta_1)}{\beta_1^{\,\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)}$$

$$\times\frac{(z_2-\frac{\beta_2}{\beta_0}v_0)^{\alpha_2-1}\exp(-(z_2-\frac{\beta_2}{\beta_0}v_0)/\beta_2)}{\beta_2^{\,\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)}$$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันการแจกแจงร่วมของ Z_1 และ Z_2 คือ

$$g(z_1,z_2)=\int_{v_0}g(v_0,z_1,z_2)dv_0$$

$$=\frac{e^{\frac{-z_1}{\beta_1}}e^{\frac{-z_2}{\beta_2}}}{\Gamma(\alpha_0)\beta_1^{\,\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)\beta_2^{\,\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)}\int_{v=0}^{\min(\frac{z_1}{\beta_1},\frac{z_2}{\beta_2})}(v)^{\alpha_0-1}(z_1-\beta_1v)^{\alpha_1-1}(z_2-\beta_2v)^{\alpha 2-1}e^{v}dv$$

ให้ $G(y_1,y_2)$ แทนฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Distribution Function: CDF) ของการแจกแจงแกมมาสองตัวแปร (Bivariate Gamma Distribution) คือ

$$G(y_1,y_2)=\begin{cases}G_1(y_1,y_2) & when\quad \frac{y_2}{\beta_2}<\frac{y_1}{\beta_1}\\ G_2(y_1,y_2) & when\quad \frac{y_1}{\beta_1}<\frac{y_2}{\beta_2}\end{cases}\tag{2.1}$$

ซึ่ง

$$G_1(y_1,y_2)=\int_0^{\frac{y_2}{\beta_2}}\int_{x_2}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_2}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$

$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$

$$+\int_{0}^{\frac{y_2}{\beta_2}}\int_{0}^{x_2}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{0}^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$

และ

$$G_2(y_1,y_2)=\int_{\frac{y_1}{\beta_1}}^{\frac{y_2}{\beta_2}}\int_{0}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{0}^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$
$$+\int_{0}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\int_{0}^{x_2}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{0}^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$
$$+\int_{0}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\int_{x_2}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{0}^{x_2}(v)^{\alpha_0-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$

โดย $\alpha_i > 0$ และ $\beta_i > 0$; $i = 0,1,2.$ และ $\Gamma(t)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}e^{-x}dx$

2.2 เอกสารเกี่ยวข้อง

2.2.1 การหาค่าส่วนเก็บไว้ของเงินเอาประกันภัยของการประกันภัยต่อที่เหมาะสมภายใต้เกณฑ์เหมาะสุดที่เกี่ยวข้องกับความหายนะ (Optimal Reinsurance Retentions under Ruin-Relate Optimization Criteria (Zhi Li, 2008))

สัญญาการประกันภัยต่อที่จะกล่าวถึงในงานวิจัยนี้มีสองประเภทได้แก่สัญญาการคุ้มครองความเสียหายส่วนเกิน (Excess of Loss) ซึ่งมี ขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ของเงินเอาประกันภัย (Retention Limits : M) เป็นเงื่อนไขของสัญญา และสัญญาประกันภัยต่อแบบส่วนเกิน (Quota Share) ซึ่งมีการจำแนกสัดส่วนประกันภัยต่อ (Quota Share Level : a) เป็นเงื่อนไขของสัญญา เพื่อง่ายต่อการศึกษาสัญญาการประกันภัยต่อจะอยู่ในรูปของการรวมกันระหว่าง Excess of Loss และ Quota Share อาจจะกล่าวได้ว่า เมื่อมีการเรียกร้องเงินเอาประกันภัย (Claims) จำนวน X

บริษัทประกันภัยจะต้องจ่าย $Min\{aX, M\}$ และบริษัทประกันภัยต่อต้องจ่ายเงินเอาประกันภัยในส่วนที่เหลือ $X - Min\{aX, M\}$

การประกันภัยต่อมีข้อขัดแย้งที่สำคัญคือแต่ละบริษัท (บริษัทประกันภัยและบริษัทประกันภัยต่อ)พยายามจะลดความเสี่ยง เพื่อเพิ่มกำไรจากเบี้ยประกันภัย ดังนั้นในการพิจารณาสัญญาจึงเกิดความเอนเอียงไปในทิศทางของแต่ละบริษัท หากพิจารณาข้อขัดแย้งนี้ในมุมกลับ ทั้งสองบริษัทมีจุดประสงค์เหมือนกัน ดังนั้นทั้งสองบริษัทสามารถคงไว้ซึ่งจุดประสงค์สำคัญของทั้งคู่โดยการรองรับความเสียหายที่เท่ากัน ด้วยวิธีการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่ทั้งสองบริษัทจะไม่ขาดทุน (Maximizing the Join Survival Probability)

จากที่กล่าวมาแล้วว่า เมื่อเกิดการเรียกร้องเงินเอาประกันภัย ขนาด X ส่วนที่บริษัทประกันภัยต้องจ่ายให้ผู้เอาประกันภัยคือ

$$X_I = aX \wedge M,$$

และส่วนที่บริษัทประกันภัยต่อต้องจ่ายให้ผู้เอาประกันภัย

$$X_R = X - (aX \wedge M)$$

เมื่อพิจารณาเบี้ยประกันภัยของทั้งสองบริษัท โดยขึ้นอยู่กับค่าประมาณของ X และเบี้ยประกันภัยรับ ของบริษัทรับประกันภัยต่อ มีค่าเท่ากับ

$$P_R = (1+\theta_R)E(X_R), \tag{2.2}$$

และ เบี้ยประกันภัยรับที่หักค่าใช้จ่ายในการประกันภัยต่อของบริษัทเอาประกันภัยต่อเท่ากับ

$$P_I = (1+\theta_I)E(X) - P_R \tag{2.3}$$

เมื่อ θ_I และ θ_R คือ ส่วนบวกเพิ่ม (Security load) ของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อ

เงื่อนไขของฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่ทั้งสองบริษัทจะไท่ขาดทุนคือ เงินเอาประกันภัยจะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับเบี้ยประกันภัยที่ทั้งสองบริษัทได้รับ ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วย

$$\Pr\{X_I \le P_I, X_R \le P_R\}$$

2.2.1.1 การหาค่าส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมอย่างเสมอภาคด้วยวิธีการประมาณค่ามากสุดของขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วม (A Fair Optimal Retention for Insurers and Reinsurers by maximizing the Lower Bound of the Joint Survival Probability)

หัวข้อนี้จะกล่าว ถึง เงินเอาประกันภัยรวมหลายช่วงเวลา (Multi – Period Aggregate Claim) โดย

$$S_I = \sum_{i=1}^{N} X_{I_i} = \sum_{i=1}^{N} \min(aX_i, M),$$

คือผลรวมของเงินเอาประกันภัยส่วนเก็บไว้ของ บริษัทประกันภัยและ

$$S_R = \sum_{j=1}^{N} X_{R_j} = \sum_{j=1}^{N} (X_j - \min(aX_j, M)),$$

คือผลรวมของเงินเอาประกันภัยส่วนที่บริษัทประกันภัยต่อต้องจ่าย

โดย X_i แทนเงินเอาประกันภัยในครั้งที่ i

X_{R_j} แทนเงินเอาประกันภัยที่บริษัทรับประกันภัยต่อต้องจ่ายครั้งที่ j

X_{I_i} แทนเงินเอาประกันภัยที่บริษัทเอาประกันภัยต่อต้องจ่ายครั้งที่ i

N แทนจำนวนครั้งการจ่ายเงินเอาประกันภัย

M แทนขีดจำกัดส่วนเก็บไว้

a แทนสัดส่วนประกันภัยต่อ

เมื่อใช้เงื่อนไขของฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่กล่าวไว้ตอนต้น ฟังก์ชันของการอยู่รอดของ P_I และ P_R คือ

$$\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\}$$

โดยเบี้ยประกันภัยสำหรับบริษัทประกันภัยต่อคือ

$$P_R = E(N)(1+\theta_R)E[X - (aX \wedge M)]$$

$$= E(N)(1+\theta_R)\left((1-a)E(X) + \int_{\frac{M}{a}}^{\infty} (ax - M)\,dF(x) \right)$$

และเบี้ยประกันภัยสำหรับบริษัทประกันภัย คือ

$$P_I = E(N)\big((1+\theta_I)E(X) - (1+\theta_R)E[X - (aX \wedge M)]\big)$$

$$= E(N)(1+\theta_I)E(X) - E(N)(1+\theta_R)\left((1-a)E(X) + \int_{\frac{M}{a}}^{\infty} (ax - M)\,dF(x) \right)$$

ทฤษฎีบทที่ 1 สำหรับ $0 < a \le 1$ และ $M > 0$ ตัวแปรสุ่มผลรวมของความเสียหาย S_I และ S_I มีความสัมพันธ์กันจะได้ว่า ฟังชันก์ความน่าจะเป็นสองตัวแปร $\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\}$ มีคุณสบัติ

$$\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} \ge \Pr\{S_I \le P_I\}\Pr\{S_R \le P_R\}$$

การหาค่าความน่าจะเป็นสูงสุดของฟังก์ชันการอยู่รอดร่วม โดยตรงนั้นไม่สามารถทำได้ อย่างไรก็ตาม เราสามารถประมาณ a และ M ที่เหมาะสมได้โดยหาความน่าจะเป็นของเขตล่างสูงสุด (Maximizing Lower Bound the Joint Survival Probability) โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1 แทนและกำหนดให้ $L(a,M)$ แทนขอบเขตล่างของฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วม ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} \ge L(a,M)$$

จะสังเกตเห็นว่า

$$\begin{aligned} L(a,M) &= \Pr\{S_I \le P_I\}\Pr\{S_R \le P_R\} \\ &= \Pr\{\sum_{i=1}^{N} \min(X_i, M) \le P_I\}\Pr\{\sum_{j=1}^{N} X_j - \min(X_j, M) \le P_R\} \end{aligned}$$

กำหนดค่าที่เหมาะสมของ a และ M ด้วยวิธีหาค่าสูงสุดขอบเขตล่าง (Maximizing the Lower Bound) แทนด้วย $\hat{a}$ และ $\hat{M}$ สามารถเขียนได้ว่า

$$L(\hat{a}, \hat{M}) = \max_{a,M} L(a,M)$$

จากตัวอย่างการหาค่าความเหมาะสมของ a และ M ด้วยวิธีหาค่าสูงสุดขอบเขตล่าง (Maximizing the Lower Bound) สามารถพิจารณาได้เพียงแต่ในส่วนของวงเงินที่รับเสี่ยงไว้เอง (Retention Limit: M) เท่านั้นเนื่องจากสมการของความน่าจะเป็น $L(a,M)$ นั้นเป็นสมการ 2 ตัวแปรจึงยากต่อการประมาณค่าความน่าจะเป็นสูงสุด

ในการหาค่าของ a และ M ด้วยหาค่าสูงสุดขอบเขตล่าง (Maximizing the Lower Bound) จำเป็นต้องศึกษาการแจกแจงแกมมาแปลงสองตัวแปร (Bivariate Translated Gamma Distribution) เพื่อประมาณ ค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจง (S_I, S_R)

2.2.1.2 การแจกแจงแกมมาแปลงสองตัวแปร (Bivariate Translated Gamma Distribution)

ให้ $G(Z_1, Z_2)$ เป็นการแจกแจงสะสมแบบแกมมาสองตัวแปรโดยให้ Z_1 แทนค่าเงินเอาประกันภัยที่บริษัทเอาประกันภัยต่อต้องจ่าย และ Z_2 แทนจำนวนเงินเอาประกันภัยที่บริษัทรับประกันภัยต่อต้องจ่าย จะได้ว่า V_0 คือจำนวนเงินเอาประกันภัยที่ทั้งบริษัทประกันภัยและบริษัทประกันภัยต่อต้องรับไว้

ดังนั้นเมื่อแทนฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมของทั้งสองบริษัทด้วยฟังก์ชันการแจกแจงแกมมาสองตัวแปรสามารถเขียนได้ดังนี้

กำหนดให้ $S_I = Z_I + \omega_1$ และ $S_R = Z_R + \omega_2$ ซึ่ง $\omega_1 > 0$ และ $\omega_2 > 0$

$$\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} = \Pr\{Z_I \le P_I - \omega_1, Z_R \le P_R - \omega_2\}$$
$$= G(P_I - \omega_1, P_R - \omega_2)$$

เนื่องจากฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $G(P_I - \omega_1, P_R - \omega_2)$ มีสมการเดียวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดของฟังก์ชันการแจกแจงแกมมาสองตัวแปรดังนั้น $G(P_I - \omega_1, P_R - \omega_2)$ จึงมีคุณสมบัติเหมือนกับฟังก์ชันการแจกแจงแกมมาสองตัวแปรมดังนี้

$$Cov(S_I, S_R) = \alpha_0 \beta_1 \beta_2$$
$$E(S_I) = (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_1 + \omega_1$$
$$E(S_R) = (\alpha_0 + \alpha_2)\beta_2 + \omega_2$$
$$Var(S_I) = (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_1^2$$
$$Var(S_R) = (\alpha_0 + \alpha_2)\beta_2^2$$
$$\mu_3(S_I) = 2(\alpha_0 + \alpha_1)\beta_1^3$$
$$\mu_3(S_R) = 2(\alpha_0 + \alpha_2)\beta_2^3$$

สังเกตได้ว่า CDF ของ การแจกแจงแกมมานี้มีพารามิเตอร์ทั้งหมด 7 ตัวได้แก่ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \omega_1$ และ ω_2 โดยจากคุณสมบัติที่กล่าวไว้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ทั้งจากสมการดังต่อไปนี้ (Bower และคณะ ; 1997)

$$\beta_1 = \frac{\mu_3(S_I)}{2Var(S_I)};$$
$$\beta_2 = \frac{\mu_3(S_R)}{2Var(S_R)};$$
$$\alpha_0 = \frac{4Var(S_I)Var(S_R)\operatorname{cov}(S_I, S_R)}{\mu_3(S_I)\mu_3(S_R)};$$
$$\alpha_1 = \frac{4Var^3(S_I)}{\mu_3^{\,2}(S_I)} - \frac{4Var(S_I)Var(S_R)\operatorname{cov}(S_I, S_R)}{\mu_3(S_I)\mu_3(S_R)};$$
$$\alpha_2 = \frac{4Var^3(S_R)}{\mu_3^{\,2}(S_R)} - \frac{4Var(S_I)Var(S_R)\operatorname{cov}(S_I, S_R)}{\mu_3(S_I)\mu_3(S_R)};$$
$$\omega_1 = E(S_I) - \frac{2Var^2(S_I)}{\mu_3(S_I)};$$
$$\omega_2 = E(S_R) - \frac{2Var^2(S_R)}{\mu_3(S_R)}$$

จากที่กล่าวมาทั้งหมดเราสามารถสร้างฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมของทั้งสองบริษัทภายใต้ฟังก์ชันการแจกแจงแกมมาแปลงสองตัวแปร โดยพารามิเตอร์ $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\omega_1$ และ ω_2 ได้ และเพื่อหาค่า a และ M ที่เหมาะสม ทำได้โดยการหาค่าความน่าจะเป็นสูงสุดของฟังก์ชันความน่าเป็นการอยู่รอดร่วมดังนี้

$$\max_{a,M} \Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} = \max_{a,M} G(P_I-\omega_1, P_R-\omega_2)$$

แต่เนื่องจากเรายังไม่สามารถหารูปแบบชัดแจ้ง (explicit form) ของ

$$\int_{v=0}^{\min(x_1,x_2)} v^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1} e^v dv$$

ซึ่งเป็นพจน์หนึ่งใน $G(y_1,y_2)$ ได้ ฉะนั้นการประมาณค่าความน่าจะเป็นสูงสุดของฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมนั้น ทำได้โดยการวิเคราะห์ทางตัวเลข (Numerical analysis)

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปีค.ศ. 2001 สมิธเธอร์ฮาน (Schmitter Hans, 2001) ได้เสนอตัวอย่างการกำหนดส่วนเก็บไว้ของการประกันภัยต่อภายใต้ความเสี่ยงของประกันภัยแต่ละประเภทในมุมมองของบริษัทรับประกันภัยต่อ ด้วยพิจารณาผ่านปัจจัยหลายๆ ด้านเช่นความแข็งแรงทางด้านการเงิน ความสามารถในการรับความเสี่ยง คู่แข่งทางด้านธุรกิจประกันภัยต่อ เป็นต้น ด้วยมุมมองเดียวกัน โรเบิร์ตและแจน (Robert Varllak & Jan Beirlant ,2003) ได้หาความเหมาะสมของการประกันภัยต่อโดยพิจารณาด้วยวิธีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนที่เหมาะสม (Mean-Variance Optimization) ซึ่งได้ทำภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบผสมเช่น ความเสียหายส่วนเกินหลังจากประกันภัยต่อตามส่วน ประกันภัยต่อตามส่วนหลังจากความเสียหายส่วนเกิน โดยงานวิจัยนี้ได้วิเคราะห์ข้อมูลที่สมมติขึ้นจากการแจกแจงต่างๆ โดยต่อมาในปี ค.ศ. 2008 คาเพนไทเออร์ (Charpentier ,2008) ได้กล่าวว่า “A reinsurance treaty, is "an equitable" transfer of the risk of a risk, from one entity (the insurance company, also called ceding company) to another (the reinsurance company), in exchange for a fee called premium.” ซึ่งมีใจความสัญญาประกันภัยต่อนั้นคือการโอนความเสี่ยงจากบริษัทหนึ่งไปยังอีกบริษัทหนึ่งอย่างเป็นธรรม งานวิจัยดังกล่าวได้ศึกษาผ่านเงื่อนไขการอยู่รอดร่วมของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อโดยพิจารณารูปแบบความเสียหายที่สร้างขึ้นด้วยวิธีจำลองอย่างสุ่ม (Monte Carlo algorithm) และด้วยเงื่อนไขเดียวกัน ไคล์และธาน (Cai & Tan 2008) ได้พิจารณาจากมูลค่าความเสี่ยงภัย (Value at risk) โดยศึกษาผ่านวิธีการคำนวณเบี้ยประกันภัยสองวิธีคือหลักการของแวง (Wanng’s premium principle) และหลักการของดัช (Dutch premium principle)

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

หัวข้อนี้จะอธิบายเกี่ยวกับวิธีจัดการข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยเบื้องต้น จากนั้นตรวจสอบการแจกแจงของข้อมูลเพื่อใช้ในการหาความน่าจะเป็นของการอยู่รอดร่วมด้วยวิธีการประมาณค่ามากสุดของขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วม และวิธีการแจกแจงแกมมาแปลงสองตัวแปรที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 ซึ่งขั้นตอนต่างๆนั้นมีรายละเอียดดังนี้

3.1 ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา

ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยของประกันชีวิตแผนผู้สูงอายุ 50-70 ปีและไม่ต้องตรวจสุขภาพในช่วงพ.ศ. 2552-2555 โดยแผนประกันชีวิตนี้คุ้มครองกรณีเสียชีวิตเท่านั้นซึ่งมีจำนวนผู้มีอายุกรมธรรม์มากกว่าสองปีจำนวน 1,691 รายจากผู้ถือกรมธรรม์ทั้งหมด 9,734 ราย เงื่อนไขการรับผลประโยชน์หลังจากเสียชีวิต ของเบี้ยประกันภัยที่ชำระแล้วและจำนวนเงินเอาประกันภัย กรณีที่เสียชีวิตในปีที่สามเป็นต้นไปจะได้รับจำนวนเงินเอาประกันภัย จากข้อมูลที่ได้รับมามีการเรียกร้องจำนวนเงินเอาประกันภัยอยู่ในระหว่าง 20,000 - 200,000 บาท

3.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะเริ่มพิจารณาผลรวมของค่าเรียกร้องจำนวนเงินเอาประกันภัยภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนและความเสียหายส่วนเกินด้วยการหาฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมของบริษัทประกันภัยต่อและบริษัทเอาประกันภัยต่อ แต่เนื่องจากการหาฟังก์ชันอยู่รอดร่วมโดยตรงนั้นทำได้ยากในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาค่าความน่าจะเป็นมากที่สุดของการอยู่รอดร่วมด้วยวิธีหาค่ามากสุดของผลคูณระหว่างขอบเขตล่างของฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดของแต่ละบริษัทแทน โดยเริ่มจากการพิสูจน์ขอบเขตล่างของฟังก์ชันการอยู่รอดรวมว่ามีความสัมพันธ์กัน (Associated) ของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของผลรวมค่าความเสียหายของแต่ละบริษัท แล้วพิจารณาความเหมาะสมของส่วนเก็บไว้ของการประกันภัยต่อด้วยการหาค่ามากสุดขอบเขตล่างของฟังก์ชันการอยู่รอดร่วม จากวิธีดังกล่าวนั้นไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นที่แน่นอนของสองบริษัทจะอยู่รอดได้ งานวิจัยนี้จึงได้ศึกษาวิธีการประมาณค่าความน่าจะเป็นของการอยู่รอดร่วมของทั้งสองบริษัทด้วย การแปลงแกมมาสองตัวแปรโดยจะแทนตัวแปรสุ่มของแกมม่าแปลงสองตัวแปรด้วยผลรวมความเสียหายภายใต้สัญญาประกันภัยต่อของแต่ละบริษัท

3.2.1 ความสัมพันธ์ของผลรวมความเสียหาย

ก่อนที่จะหาค่าขอบเขตล่าวของฟังก์ชันอยู่รอดร่วม ในหัวข้อนี้จะตรวจสอบความสัมพันธ์ของความเสียหายภายใต้สัญญาประกันภัยต่อ

<u>นิยาม</u> ตัวแปรสุ่ม $T_1,...,T_n$ มีความสัมพันธ์ ถ้า $Cov[f(T_1,...,T_n),g(T_1,...,T_n)]\geq 0$ สำหรับทุกๆ ฟังก์ชันเพิ่ม f และ g โดยที่ $E[f(T_1,...,T_n)],E[g(T_1,...,T_n)]$ และ $E[f(T_1,...,T_n)g(T_1,...,T_n)]$ สามารถหาค่าได้ (Esary, และคณะ 1967)

<u>บทตั้ง 3.1</u> ความสัมพันธ์จะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ (Esary, และคณะ 1967)

1) สับเซตใดๆของตัวแปรสุ่มที่มีความสัมพันธ์กันนั้นมีความสัมพันธ์กันด้วย

2) ส่วนรวม (union) ของสองเซตตัวแปรสุ่มที่มีความสัมพันธ์กัน นั้นมความสัมพันธ์กันด้วย

3) เซตที่ประกอบด้วยตัวแปรสุ่มนั้นมีความสัมพันธ์กัน

4) ฟังก์ชันเพิ่มของตัวแปรสุ่มที่มีความสัมพันธ์กันนั้น มีความสัมพันธ์กันด้วย

5) เซตของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันนั้นมีความสัมพันธ์กัน

<u>บทตั้ง 3.2</u> ให้ $T_1,...,T_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีความสัมพันธ์กันและ $f_i, i=1,...,k$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มแล้ว

$$\Pr\{f_1(T_1,...,T_n)\leq t_1,..., f_k(T_1,...,T_n)\leq t_k\}\geq\prod_{i=1}^{k}\Pr\{f_i(T_1,...,T_n)\leq t_i\}$$

และ

$$\Pr\{f_1(T_1,...,T_n)> t_1,..., f_k(T_1,...,T_n)> t_k\}\geq\prod_{i=1}^{k}\Pr\{f_i(T_1,...,T_n)> t_i\}$$

ทุก $t_1,...,t_k$ (Esary, และคณะ 1967)

<u>ทฤษฎีบท 3.1</u> กำหนดให้ $0<a\leq 1$ และ $M>0$ ตัวแปรสุ่ม S_I และ S_R มีความสัมพันธ์กัน ดังนั้นฟังก์ชันอยู่รอดรวม $\Pr\{S_I<P_I,S_R<P_R\}$ มีคุณสมบัติ

$$\Pr\{S_I<P_I,S_R<P_R\}\geq\Pr\{S_I<P_I\}\Pr\{S_R<P_R\}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $h(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\min(ax_i,M)$ และ $l(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\min(ax_i,M))$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด (non-decreasing) ทุก $n=1,2,...$ ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n}\min(aX_i,M)$ และ $\sum_{j=1}^{n}(X_j-\min(aX_j,M))$ มีความสัมพันธ์กันเนื่องจาก $X_1,...,X_n$ เป็นอิสระต่อกัน และคุณสมบัติจากบทตั้ง 3.1 ข้อ 4) และ ข้อ 5) สำหรับฟังก์ชันไม่ลด f และ g ใดใดจะได้ว่า

$E[f(S_I)g(S_R)]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[f(\sum_{i=1}^{n} \min(aX_i, M)g(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \min(aX_j, M)))] \Pr\{N = n\}$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} E[f(\sum_{i=1}^{n} \min(aX_i, M)]E[g(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \min(aX_j, M)))] \Pr\{N = n\}$$

$$= E[f_1(N)g_1(N)]$$

ซึ่งอสมการข้างต้นเป็นผลมาจากความสัมพันธ์กันของ $\sum_{i=1}^{n} \min(aX_i, M)$ และ $\sum_{j=1}^{n}(X_j - \min(aX_j, M))$

กำหนดให้ f_1 และ g_1 ดังนี้

$$f_1(n) = E[f(\sum_{i=1}^{n} \min(aX_i, M))]$$

และ

$$g_1(n) = E[g(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \min(aX_j, M)))]$$

สังเกตได้ว่า $f_1(n)$ และ $g_1(n)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดจากบทตั้งที่ 3.1 ข้อ 3) จะได้ว่า

$$E[f_1(N)g_1(N)] \geq E[f_1(N)]E[g_1(N)]$$

โดย

$$E[f_1(N)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[f(\sum_{i=1}^{n} \min(aXi, M)] \Pr\{N = n\}$$

$$= E[f(\sum_{i=1}^{N} \min(aXi, M)]$$

$$= E[f(S_I)]$$

และ

$$E[g_1(N)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[g(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \min(aX_j, M)))] \Pr\{N = n\}$$

$$= E[g(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \min(aX_j, M)))]$$

$$= E[f(S_R)]$$

เพราะฉะนั้น

$$E[f(S_I)g(S_R)] \geq E[f(S_I)]E[g(S_R)]$$

จะได้ว่า S_I และ S_R มีความสัมพันธ์กันดังนั้นขอบเขตล่างของฟังก์ชันอยู่รอดรวมของทั้งสองบริษัทมีคุณสมบัติตามบทตั้ง 3.2

3.2.2 การหาค่าขอบเขตล่างมากสุดของฟังก์ชันการอยู่รอดร่วม

ในหัวข้อที่แล้วได้พิสูจน์ว่าตัวแปรสุ่มผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อมีความสัมพันธ์กันดังนั้นตัวแปรสุ่มผลรวมความเสียหายมีคุณสมบัติตามบทตั้ง 3.2 ในหัวข้อนี้กำหนดให้ขอบเขตล่างของฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดรวมของทั้งสองบริษัทแทนด้วย $L(a,M)$ โดยที่

$$
\begin{aligned}
&L(a,M)\\
&=\Pr\{S_I \le P_I\}\Pr\{S_R \le P_R\}\\
&=\Pr\{\sum_{i=1}^{N}\min(aX_i,M) \le P_I\}\Pr\{\sum_{j=1}^{N}(X_j-\min(aX_j,M)) \le P_R\} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

ซึ่งเบี้ยประกันภัยและเบี้ยประกันภัยต่อสามารถประมาณได้จากค่าเฉลี่ยความเสียหายของแต่ละบริษัทตามสมการ (2.2) และ (2.3)

ให้สัดส่วนประกันภัยต่อ a สำหรับสัญญาประกันภัยต่อต่อตามส่วนและขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M สำหรับสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินดีที่สุดภายใต้เงื่อนไขที่ทั้งสองบริษัทไม่ขาดทุนเขียนแทนด้วย $\hat{a}$ และ $\hat{M}$ พิจารณาโดย

$$L(\hat{a},\hat{M})=\max_{a,M} L(a,M) \qquad (3.2)$$

จะสังเกตได้ว่าหากต้องการพิจารณาแยกส่วนระหว่างสัญญาประกันภัยต่อทำได้โดยกำหนดให้สัดส่วนประกันภัยต่อ $a=1$ เมื่อต้องหาค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M เช่นเดียวกันกำหนดค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ $M=0$ เมื่อต้องการหาค่าสัดส่วนประกันภัยต่อที่เหมาะสมของประกันภัยต่อตามส่วน ในส่วนการแจกแจงของผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อ S_I และผลรวมความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อ S_R นั้นจะหาได้โดยสูตรเวียนเกิดของแพนเจอร์ ที่จะอธิบายในหัวข้อไป

3.2.3 ฟังก์ชันการแจกแจงของผลรวมความเสียหาย S_I และ S_R

กำหนดให้ฟังก์ชันการแจกแจงของการเรียกร้องจำนวนเงินเอาประกันภัยของประกันชีวิตแผนผู้สูงอายุแทนด้วย

$$f(k)=\Pr\{X=k\} \quad \text{เมื่อ} \quad k=20000,\dots,200000 \qquad (3.3)$$

เมื่อแผนประกันชีวิตนี้อยู่ภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินแล้วจะได้ว่าค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M จะมีค่า $0<M<200000$ หากพิจารณาจากมุมมองของบริษัทเอาประกันภัยต่อแล้วฟังก์ชันการแจกแจงความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อสามารถเขียนได้ว่า

$$p(k)=\Pr\{X\wedge M=k\}=\Pr\{X=k\}=f(k) \quad \text{เมื่อ } k=20000,\ldots,M-1$$

และ

$$p(M)=\Pr\{X\wedge M=M\}=\Pr\{X\geq M\}=f(M)+\ldots+f(200000) \qquad (3.4)$$

พิจารณาในมุมมองของบริษัทรับประกันภัยต่อแล้วฟังก์ชันการแจกแจงความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อสามารถเขียนได้ว่า

$$q(0)=\Pr\{(X-M)_+=0\}=\Pr\{X\leq M\}=f(0)+\ldots+f(M)$$

และ

$$q(k)=\Pr\{(X-M)_+=k\}=\Pr\{X=M+k\}=f(M+k)$$

$$\text{เมื่อ } k=1,\ldots,m-M \qquad (3.5)$$

เมื่อแผนประกันชีวิตนี้อยู่ภายใต้สัญญาประกันภัยต่อต่อตามส่วนแล้วจะได้ว่าสัดส่วนประกันภัยต่อ a จะมีค่า $0<a<1$ หากพิจารณาจากมุมมองของบริษัทเอาประกันภัยต่อแล้วฟังก์ชันการแจกแจงความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อสามารถเขียนได้ว่า

$$p(k)=\Pr\{aX=k\}=f(\frac{k}{a}) \quad \text{เมื่อ } 0<k\leq\frac{200000}{a} \qquad (3.6)$$

พิจารณาในมุมมองของบริษัทรับประกันภัยต่อแล้วฟังก์ชันการแจกแจงความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อสามารถเขียนได้ว่า

$$q(k)=\Pr\{(1-a)X=k\}=f(\frac{k}{1-a}) \quad \text{เมื่อ } 0<k\leq\frac{200000}{(1-a)} \qquad (3.7)$$

ต่อไปกำหนดให้ S เป็นตัวแปรสุ่มผลรวมเรียกร้องเงินเอาประกันภัยจะได้ว่า

$$S=X_1+X_2+\ldots+X_N$$

โดยที่ $X_1,X_2,\ldots$ เป็นตัวแปรสุ่มการเรียกร้องเงินเอาประกันภัยที่เป็นอิสระต่อกันและ N เป็นตัวแปรสุ่มจำนวนการเรียกร้องเงินเอาประกันภัยซึ่งมีการแจกแจงแบบทวินามตามที่กำหนดไว้ในบทที่ 1 การแจกแจงของ N ซึ่งสามารถเขียนการแจกแจงของ N แทนด้วย $h(n)$ ได้ดังนี้

$$h(n)=\binom{N}{n}(p)^n(1-p)^{N-n}$$

หรือ

$$h(n)=\binom{9734}{n}(0.8548)^n(0.1452)^{9734-n} \quad \text{เมื่อ } n=0,1,2,\ldots,9734$$

สังเกตได้ว่า $h(n)$ อยู่ในลักษณะ (a,b,0) class

$$\frac{h(n)}{h(n-1)}=a+b\frac{1}{n} \quad \text{เมื่อ } n=0,1,2,\ldots,9734$$

โดยที่

$$a = \frac{-p}{1-p} = -5.8882 \quad (3.8)$$

และ

$$b = \frac{p(N+1)}{1-p} = 57321.5905 \quad (3.9)$$

จากสมการ (3.3) (3.8) (3.9) และคุณสมบัติของตัวแปรสุ่ม N ทำให้สามารถหาฟังก์ชันการแจกแจงผลรวมเงินเอาประกันภัย $g(k)$ ได้โดยสูตรเวียนเกิดของแพนเจอร์ จะได้ว่า

$$g(k) = \frac{1}{1-af(0)}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)f(j)g(k-j) \text{ เมื่อ } k = 1,2,3,\ldots$$

และ

$$g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n}(0)\Pr(N=n) = P(f(0)) \quad (3.10)$$

เมื่อ $P(z)$ คือฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม N

จากสมการ (3.10) (3.4) และ (3.6) จะเขียนฟังก์ชันการแจกแจงของผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อ $g_I(k)$ ได้ดังนี้

$$g_I(k) = \frac{1}{1-ap(0)}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)p(j)g_I(k-j) \text{ เมื่อ } k = 1,2,3,\ldots$$

และ

$$g_I(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n}(0)\Pr(N=n) = P(p(0)) \quad (3.11)$$

จากสมการ (3.10) (3.5) และ (3.7) จะเขียนฟังก์ชันการแจกแจงของผลรวมความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อ $g_R(k)$ ได้ดังนี้

$$g_R(k) = \frac{1}{1-aq(0)}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q(j)g_R(k-j) \text{ เมื่อ } k = 1,2,3,\ldots$$

และ

$$g_R(0) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n}(0)\Pr(N=n) = P(q(0)) \quad (3.12)$$

ดังนั้นขอบเขตล่างของความจะเป็นการอยู่ยอดรวมของทั้งสองบริษัท (3.1) คำนวณได้จาก (3.11) และ (3.12) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$L(a,M) = \Pr\{\sum_{i=1}^{N}\min(aX_i, M) \le P_I\}\Pr\{\sum_{j=1}^{N}(X_j - \min(aX_j, M)) \le P_R\}$$

$$L(a,M) = \sum_{i=0}^{P_I} g_I(i)\sum_{r=0}^{P_R} g_R(r)$$

และพิจารณาค่าขอบเขตล่างมากสุดเพื่อหาสัดส่วนประกันภัยต่อและค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมต่อไป

3.2.4 ประมาณความน่าจะเป็นของผลรวมความเสียหายด้วยฟังก์ชันแกมม่าแปลงสองตัวแปร

กำหนดให้ $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$ เป็นผลรวมจำนวนเงินเอาประกันภัย โดย X_i คือตัวแปรสุ่มขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัยที่เป็นอิสระต่อกัน และ N คือตัวแปรสุ่มจำนวนครั้งการจ่ายเงินเอาประกันภัยจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E(S) &= E(N)E(X) \\
Var(S) &= E(N)Var(X)+Var(N)E^2(X) \\
\mu_3(S) &= E(\mu_3(S\,|\,N))+\mu_3(E(S\,|\,N))+3Cov(E(S\,|\,N),Var(S\,|\,N)) \\
&= E(N)\mu_3(X_i)+\mu_3(NE(X_i))+3Cov(NE(X_i),NVar(X_i)) \\
&= E(N)\mu_3(X)+E3(X)\mu_3(N)+3E(X)Var(X)Var(N) \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $\mu_3(S)$ แทนฟังก์ชันโมเมนต์ที่ 3 รอบจุดศูนย์กลาง (Third central moment) ของ S เมื่อพิจารณาแยกตามบริษัทโดยที่ I แทนบริษัทเอาประกันภัยต่อ และ R แทนบริษัทรับประกันภัยต่อจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E(S_I S_R) &= E(\sum_{i=1}^{N} X_{I_i} \sum_{j=1}^{N} X_{R_j}) \\
&= E(E(\sum_{i=1}^{N} X_{I_i} \sum_{j=1}^{N} X_{R_j}\,|\,N)) \\
&= E(NE(X_{I_i}X_{R_j})+(N^2-N)E(X_{I_i}X_{R_j})) \\
&= E(X_I X_R)E(N)+E(N^2-N)E(X_I)E(X_R) \\
Cov(S_I,S_R) &= E(S_I S_R)-E(S_I)E(S_R) \\
&= E(X_I X_R)E(N)+E(N^2)E(X_I)E(X_R) \\
&\quad -E(N)E(X_I)E(X_R)-E(N)E(X_I)E(N)E(X_R) \\
&= E(X_I X_R)E(N)-E(N)E(X_I)E(X_R) \\
&\quad +E(N^2)E(X_I)E(X_R)-E(N)E(X_I)E(N)E(X_R) \\
&= E(N)Cov(X_I,X_R)+Var(N)E(X_I)E(X_R)
\end{aligned}
$$

ขั้นตอนที่สำคัญในการประมาณผลรวมความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อและบริษัทเอาประกันภัยต่อคือการประมาณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันแกมม่าแปลงสองตัวแปร จากการได้

ศึกษาวิจัยสามารถสรุปวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ด้วยค่า โมเมนต์ที่ 3 รอบจุดศูนย์กลางและค่าความแปรปรวนต่างๆที่กล่าวไว้

ให้ผลรวมความเสียหายของทั้งสองบริษัทแทนด้วย $S_I = Z_1 + \omega_1$ และ $S_R = Z_2 + \omega_2$ เมื่อ Z_1, Z_2 แทนตัวแปรสุ่มที่การแจกแจงแบบแกมมาแปลงสองตัวแปรและพารามิเตอร์ $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ โดยฟังก์ชันแกมม่าแปลงสองตัวแปรที่ใช้ประมานความน่าจะเป็นของการอยู่รอดร่วมเขียนแทนด้วย

$$\begin{aligned}\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} &= \Pr\{Z_1 \le P_I - \omega_1, Z_2 \le P_R - \omega_2\} \\ &= G(P_I - \omega_1, P_R - \omega_2)\end{aligned}$$

เมื่อฟังก์ชัน $G(y_1, y_2)$ ที่มีสมการเป็นไปตาม (2.1)

จะได้ว่าพารามิเตอร์ทั้ง 7 ได้แก่ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \omega_1, \omega_2$ ซึ่งมีคุณสมบัติเหมือนกับฟังก์ชันแกมมาตัวแปรดังนี้

$$\begin{aligned}Cov(S_I, S_R) &= \alpha_0 \beta_1 \beta_2 \\ E(S_I) &= (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_1 + \omega_1 \\ E(S_R) &= (\alpha_0 + \alpha_2)\beta_2 + \omega_2 \\ Var(S_I) &= (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_1^2 \\ Var(S_R) &= (\alpha_0 + \alpha_2)\beta_2^2 \\ \mu_3(S_I) &= 2(\alpha_0 + \alpha_1)\beta_1^3 \\ \mu_3(S_R) &= 2(\alpha_0 + \alpha_2)\beta_2^3\end{aligned}$$

(3.14)

จากคุณสมบัติดังกล่าวสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\mu_3(S_I)}{2Var(S_I)} \\ \beta_2 &= \frac{\mu_3(S_R)}{2Var(S_R)} \\ \alpha_0 &= \frac{4Var(S_I)Var(S_R)Cov(S_I, S_R)}{\mu_3(S_I)\mu_3(S_R)} \\ \alpha_1 &= \frac{4Var^3(S_I)}{\mu_3^2(S_I)} - \frac{4Var(S_I)Var(S_R)Cov(S_I, S_R)}{\mu_3(S_I)\mu_3(S_R)} \\ \alpha_2 &= \frac{4Var^3(S_R)}{\mu_3^2(S_R)} - \frac{4Var(S_I)Var(S_R)Cov(S_I, S_R)}{\mu_3(S_I)\mu_3(S_R)} \\ \omega_1 &= E(S_I) - \frac{2Var^2(S_I)}{\mu_3(S_I)} \\ \omega_2 &= E(S_R) - \frac{2Var^2(S_R)}{\mu_3(S_R)}\end{aligned} \tag{3.15}$$

นอกจากนี้หากการประมาณค่าพารามิเตอร์ α หรือ β ดังกล่าวนั้นให้ค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งไม่เป็นไปตามฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปร (2.1) ตามงานวิจัยของจิลี้ (Zhi Li, 2008) ได้ศึกษาและพิสูจน์การแทนค่าพารามิเตอร์ α ด้วย $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ซึ่งจะสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์อื่นได้โดย

$$a_0 = \frac{Cov(S_I, S_R)}{\sqrt{Var(S_R)Var(S_I)} - Cov(S_I, S_R)}$$

$$\beta_1 = \sqrt{Var(S_I)(1 - \frac{Cov(S_I, S_R)}{\sqrt{Var(S_R)Var(S_I)}})}$$

$$\beta_2 = \sqrt{Var(S_R)(1 - \frac{Cov(S_I, S_R)}{\sqrt{Var(S_R)Var(S_I)}})}$$

$$\omega_1 = E(S_I) - \sqrt{Var(S_I)\frac{\sqrt{Var(S_R)Var(S_I)}}{\sqrt{Var(S_R)Var(S_I)} - Cov(S_I, S_R)}}$$

$$\omega_2 = E(S_R) - \sqrt{Var(S_R)\frac{\sqrt{Var(S_R)Var(S_I)}}{\sqrt{Var(S_R)Var(S_I)} - Cov(S_I, S_R)}}$$

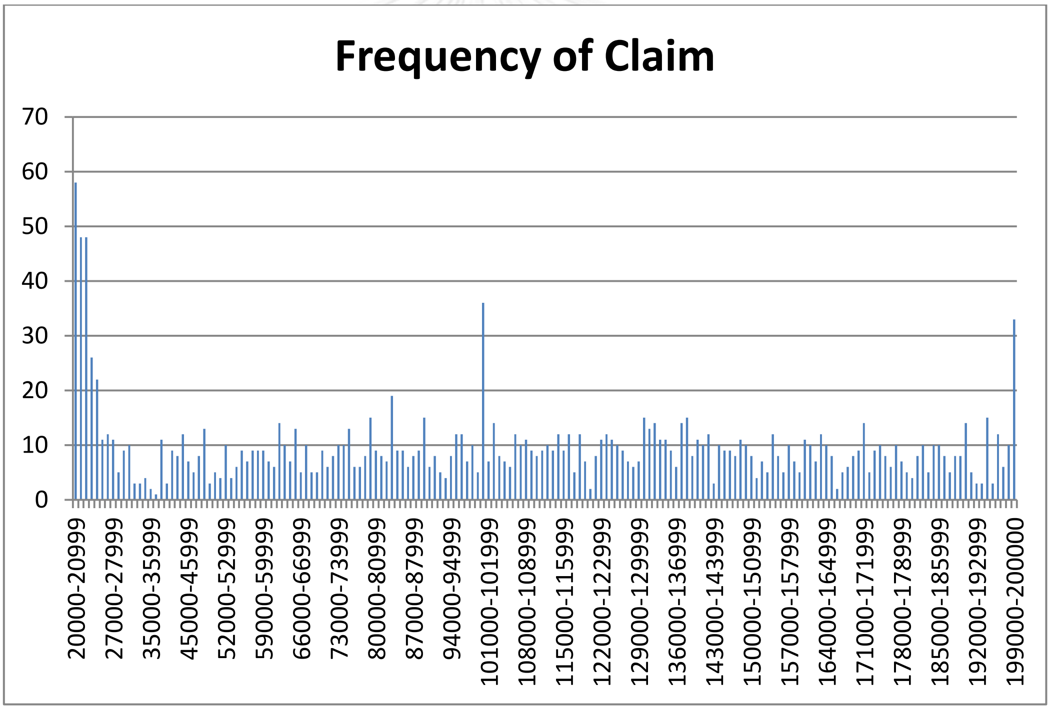
จากการแทนฟังก์ชันการอยู่รอดรวมของทั้งสองบริษัทด้วยฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปร สามารถพิจารณาค่า a และ M ที่เหมาะสม ทำได้โดยการหาค่าความน่าจะเป็นสูงสุดของฟังก์ชันความน่าเป็นการอยู่รอดร่วมดังนี้

$$\max_{a,M} \Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} = \max_{a,M} G(P_I - \omega_1, P_R - \omega_2)$$

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์หาตัวแบบการแจกแจงที่เหมาะสมจากข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยในเบื้องต้น จากนั้นนำฟังก์ชันการแจกแจงของการจ่ายเงินเอาประกันภัยที่ได้มาหาฟังก์ชันความเสียหายส่วนเก็บไว้สำหรับบริษัทเอาประกันภัยต่อและฟังก์ชันความเสียหายส่วนเกินสำหรับบริษัทรับประกันภัยต่อโดยในงานวิจัยนี้จะแยกพิจารณาสัญญาประกันภัยแบบความเสียหายส่วนเกินและประกันภัยต่อตามส่วนเพื่อหาส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมของการประกันภัยแต่ละแบบ ซึ่งแต่ละแบบสัญญาประกัยภัยต่อนั้นจะพิจารณาหาส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมได้โดยสองวิธีที่กล่าวไว้ในบทที่ 3

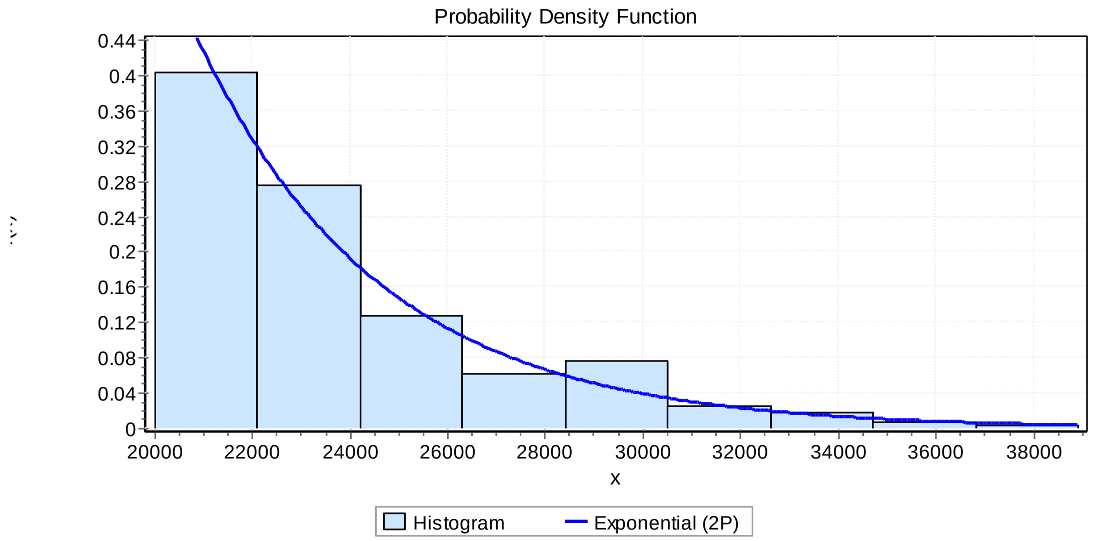
4.1 การวิเคราะห์หาการแจกแจงของการจ่ายเงินเอาประกันภัย



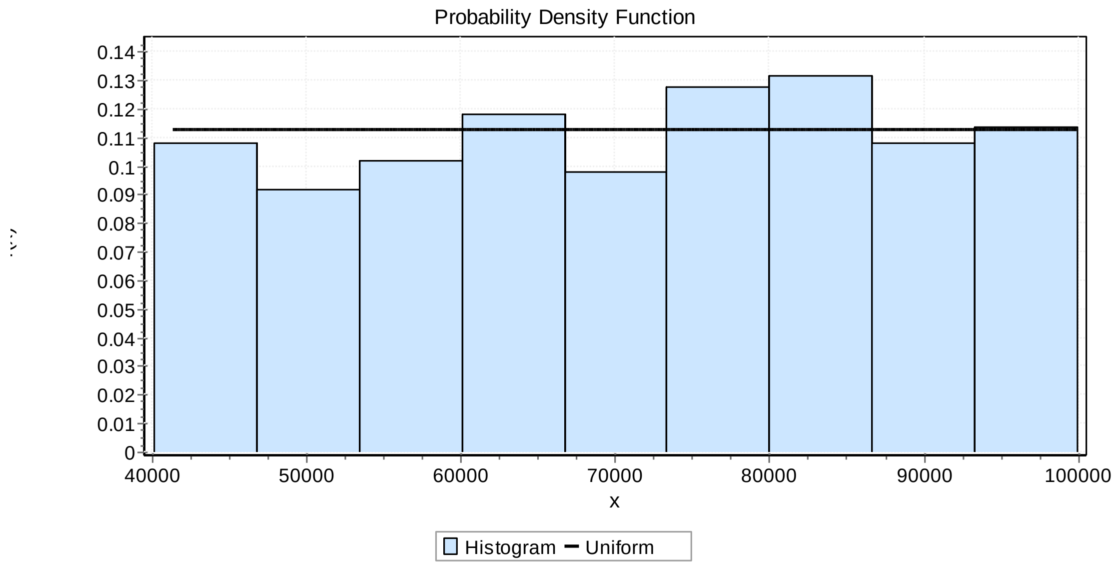
ภาพที่ 4.1 ความถี่ของค่าการจ่ายเงินเอาประกันภัย

เมื่อนำข้อมูลค่าการจ่ายเงินเอาประกันภัยมาพิจารณาโดยรวมแล้วจะเห็นว่าข้อมูลเป็นแบบเบ้ขวาและหางของข้อมูลมีลักษณะยาว สักเกตจากในช่วงหลังจาก 40,000 เป็นต้นไปนั้นมีความโค้งหรือความลาดเอียงของข้อมูลน้อยหรือไม่มีเลยและที่จุด 100,000 กับ 200,000 มีความถี่สูงขึ้นอย่างเห็นได้ชัด เพื่อการตรวจสอบการแจกแจงที่แม่นยำข้อมูลถูกแบ่งออกเป็นช่วงๆ ได้แก่ ช่วงแรก 20,000-40,000 ช่วงสอง 40,001-99,999 ช่วงสาม 100,000-199,999 โดยที่ 100,000 และ 200,000 จะถูกกำหนดให้ความน่าจะเป็งคงที่ (Mass Propability) และผลตรวจสอบการแจกแจงแบบแบ่งตามช่วง

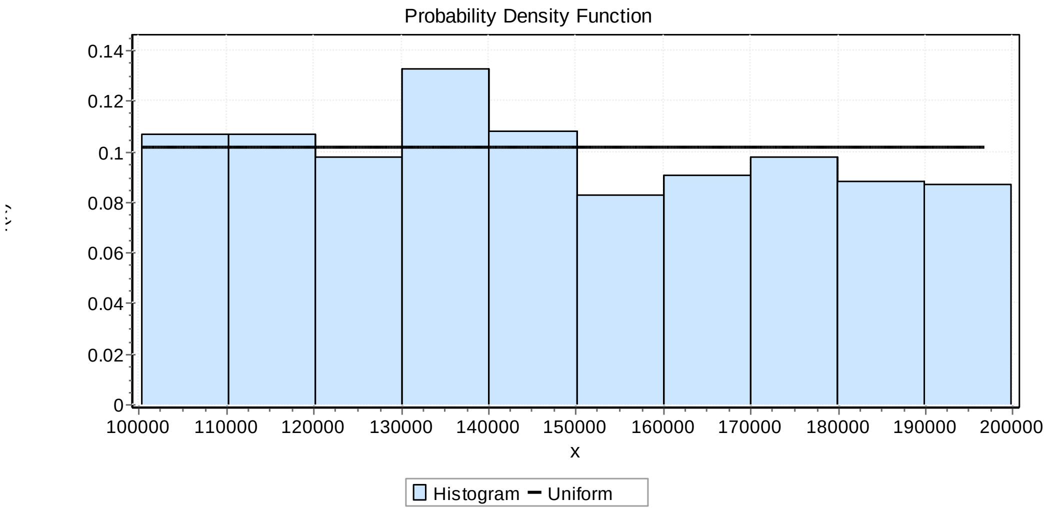
ด้วยระดับความเชื่อมั่น 95% คือในช่วงแรกมีการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลและในช่วงที่สองและสามนั้นมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มดังกราฟที่ 4.2-4.4



ภาพที่ 4.2 การประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลในช่วงข้อมูล 20,000-40,000



ภาพที่ 4.3 การประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วงข้อมูล 40,001-99,999



ภาพที่ 4.4 การประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วงข้อมูล 100,001-199,999

สามารถเขียนสมการฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของการจ่ายเงินเอาประกันภัยได้ดังนี้

$$f(x) \begin{cases} 0.000043e^{(-0.000266(x-20000))} & \text{เมื่อ } 20000 \le x \le 40000 \\ \dfrac{0.292726}{59998} & \text{เมื่อ } 40000 < x < 100000 \\ 0.020698 & \text{เมื่อ } x = 100000 \\ \dfrac{0.505618}{99998} & \text{เมื่อ } 100000 < x < 199999 \\ 0.019515 & \text{เมื่อ } x = 200000 \end{cases}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ตรวจสอบได้นั้นมีโดเมนจำนวนมาก ค่าความน่าจะเป็นของการจ่ายเงินเอาประกันภัยจากฟังก์ชันการแจกแจงจะแสดงเป็นช่วงเพื่อให้ง่ายต่อแสดง ดังตารางที่ 4.1 โดยค่าที่ได้คำนวณจากโปรแกรม Microsoft Excel

ตารางที่ 4.1 ค่าความน่าจะเป็นของการจ่ายเงินเอาประกันภัยจากฟังก์ชันการแจกแจงที่ตรวจสอบได้

เงินเอาประกันภัย (บาท)	ความน่าจะเป็นขอบบน	เงินเอาประกันภัย (บาท)	ความน่าจะเป็นขอบบน
20000-22000	0.066806	110000-112000	0.010215
22000-24000	0.039328	112000-114000	0.010215
24000-26000	0.023122	114000-116000	0.010215
26000-28000	0.013594	116000-118000	0.010215
28000-30000	0.007992	118000-120000	0.010215
30000-32000	0.004699	120000-122000	0.010215
32000-34000	0.002762	122000-124000	0.010215
34000-36000	0.001624	124000-126000	0.010215
36000-38000	0.000955	126000-128000	0.010215
38000-40000	0.000561	128000-130000	0.010215
40000-42000	0.009923	130000-132000	0.010215
42000-44000	0.009923	132000-134000	0.010215
44000-46000	0.009923	134000-136000	0.010215
46000-48000	0.009923	136000-138000	0.010215
48000-50000	0.009923	138000-140000	0.010215
50000-52000	0.009923	140000-142000	0.010215
52000-54000	0.009923	142000-144000	0.010215
54000-56000	0.009923	144000-146000	0.010215
56000-58000	0.009923	146000-148000	0.010215
58000-60000	0.009923	148000-150000	0.010215
60000-62000	0.009923	150000-152000	0.010215
62000-64000	0.009923	152000-154000	0.010215
64000-66000	0.009923	154000-156000	0.010215
66000-68000	0.009923	156000-158000	0.010215
68000-70000	0.009923	158000-160000	0.010215
70000-72000	0.009923	160000-162000	0.010215
72000-74000	0.009923	162000-164000	0.010215
74000-76000	0.009923	164000-166000	0.010215
76000-78000	0.009923	166000-168000	0.010215
78000-80000	0.009923	168000-170000	0.010215
80000-82000	0.009923	170000-172000	0.010215
82000-84000	0.009923	172000-174000	0.010215
84000-86000	0.009923	174000-176000	0.010215
86000-88000	0.009923	176000-178000	0.010215
88000-90000	0.009923	178000-180000	0.010215
90000-92000	0.009923	180000-182000	0.010215
92000-94000	0.009923	182000-184000	0.010215
94000-96000	0.009923	184000-186000	0.010215
96000-98000	0.009923	186000-188000	0.010215
98000-100000	0.025659	188000-190000	0.010215
100000-102000	0.010215	190000-192000	0.010215
102000-104000	0.010215	192000-194000	0.010215
104000-106000	0.010215	194000-196000	0.010215
106000-108000	0.010215	196000-198000	0.010215
108000-110000	0.010215	198000-200000	0.024622

4.2 การแจกแจงความเสียหายภายใต้สัญญาประกันภัยต่อ

หลังจากที่หาฟังก์ชันการแจกแจงของการจ่ายเงินเอาประกันภัยในหัวข้อที่ผ่าน จากนั้นจะนำฟังก์ชันที่ได้ใช้ประมาณค่าความน่าจะเป็นของความเสียหายภายใต้สัญญาประกันภัยต่อโดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินและประกันภัยต่อตามส่วน

ค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการจ่ายเงินเอาประกันภัย $f(X)$ จากตาราง 4.1 และ 4.2 สามารถนำไปคำนวณเพื่อหาฟังก์ชันการแจกแจงความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อ $p(k)$ และ $q(k)$ ด้วยสมการ (3.4) และ (3.5) ตามลำดับโดยแต่ละขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M จะให้ค่าความน่าจะเป็นแตกต่างกัน เช่นเดียวกันสามารถคำนวณเพื่อหาฟังก์ชันการแจกแจงความเสียของบริษัทรับประกันภัยต่อ $p(k)$ และ $q(k)$ ด้วยสมการ (3.6) และ (3.7) แต่ละสัดส่วนประกันภัยต่อ a ตามลำดับ

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของบริษัทเอาประกันภัยต่อแบบความเสียส่วนเกิน $p_{(1,M)}(k)$ ที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$p_{(1,M)}(k)\begin{cases} p_{(1,M)}(k)=\Pr\{X\wedge M=k\}=\Pr\{X=k\}=f(k) \quad \text{เมื่อ } k=20000,..,M-1 \\ \\ p_{(1,M)}(M)=\Pr\{X\wedge M=M\}=\Pr\{X\geq M\}=f(M)+...+f(200000)\end{cases} \tag{4.1}$$

และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของบริษัทรับประกันภัยต่อแบบความเสียส่วนเกิน $q_{(1,M)}(k)$ ที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$q_{(1,M)}(k)\begin{cases} q_{(1,M)}(0)=\Pr\{(X-M)_{+}=0\}=\Pr\{X\leq M\}=f(20000)+...+f(M) \\ \\ q_{(1,M)}(k)=\Pr\{(X-M)_{+}=k\}=\Pr\{X=M+k\}=f(M+k) \\ \text{เมื่อ } k=20000,...,200000-M\end{cases} \tag{4.2}$$

โดยแต่ละค่า M จะให้ฟังก์ชัน $p(k)$ และ $q(k)$ ที่แตกต่างกัน

สังเกตได้ว่าฟังก์ชัน $f(X)$ มีลักษณะเป็นแบบเบ้ขวาซึ่งมีความน่าจะเป็นสูงมากในช่วง X เท่ากับ 1-40,000 และหลังจากนั้นความน่าจะเป็นจะลดลง ดังนั้นฟังก์ชัน $p(k)$ และ $q(k)$ ก็จะมีลักษณะคล้ายกัน อาจสันนิษฐานได้ว่าค่าของ a และ M ที่ให้ค่าขอบเขตล่างของฟังก์ชันอยู่รอดร่วมมีค่ามากสุดจะอยู่ในช่วงต้น

ตารางที่ 4.2 ความน่าจะความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อภายใต้สัญญาความเสียหายส่วนเกินที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M

	ค่าขีดสุดส่วนเก็บไว้ (บาท)				
ความเสี่ยหาย (บาท)	M=30,000	M=70,000	M=110,000	M=150,000	M=190,000
20000-25000	0.11922	0.11922	0.11922	0.11922	0.11922
25000-30000	0.88078	0.03162	0.03162	0.03162	0.03162
30000-35000	0.00000	0.00838	0.00838	0.00838	0.00838
35000-40000	0.00000	0.00222	0.00222	0.00222	0.00222
40000-45000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481	0.02481
45000-50000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481	0.02481
50000-55000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481	0.02481
55000-60000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481	0.02481
60000-65000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481	0.02481
65000-70000	0.00000	0.71452	0.02481	0.02481	0.02481
70000-75000	0.00000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481
75000-80000	0.00000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481
80000-85000	0.00000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481
85000-90000	0.00000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481
90000-95000	0.00000	0.00000	0.02481	0.02481	0.02481
95000-100000	0.00000	0.00000	0.04054	0.04054	0.04054
100000-105000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554	0.02554
105000-110000	0.00000	0.00000	0.49960	0.02554	0.02554
110000-115000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554
115000-120000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554
120000-125000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554
125000-130000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554
130000-135000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554
135000-140000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554
140000-145000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554	0.02554
145000-150000	0.00000	0.00000	0.00000	0.29531	0.02554
150000-155000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
155000-160000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
160000-165000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
165000-170000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
170000-175000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
175000-180000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
180000-185000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
185000-190000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
190000-195000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.06548
195000-200000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

ตารางที่ 4.3 ความน่าจะความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อภายใต้สัญญาความเสียหายส่วนเกินที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M

	ค่าขีดสุดส่วนเก็บไว้ (บาท)				
ความเสี่ยหาย (บาท)	M=30,000	M=70,000	M=110,000	M=150,000	M=190,000
0	0.15084	0.31029	0.52594	0.73023	0.93963
1-10000	0.01060	0.04961	0.05107	0.05107	0.06037
10000-20000	0.04961	0.04961	0.05107	0.05107	0.00000
20000-25000	0.02481	0.02481	0.02554	0.02554	0.00000
25000-30000	0.02481	0.04054	0.02554	0.02554	0.00000
30000-35000	0.02481	0.02554	0.02554	0.02554	0.00000
35000-40000	0.02481	0.02554	0.02554	0.02554	0.00000
40000-45000	0.02481	0.02554	0.02554	0.02554	0.00000
45000-50000	0.02481	0.02554	0.02554	0.03994	0.00000
50000-55000	0.02481	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000
55000-60000	0.02481	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000
60000-65000	0.02481	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000
65000-70000	0.04054	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000
70000-75000	0.02554	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000
75000-80000	0.02554	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000
80000-85000	0.02554	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000
85000-90000	0.02554	0.02554	0.03994	0.00000	0.00000
90000-95000	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000
95000-100000	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000
100000-105000	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000
105000-110000	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000
110000-115000	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000
115000-120000	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000
120000-125000	0.02554	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000
125000-130000	0.02554	0.03994	0.00000	0.00000	0.00000
130000-135000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
135000-140000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
140000-145000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
145000-150000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
150000-155000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
155000-160000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
160000-165000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
165000-170000	0.03994	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
170000-175000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
175000-180000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
180000-185000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของบริษัทเอาประกันภัยต่อตามส่วน $p_{(a,200000)}(k)$ ที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อ a เขียนอยู่ในรูป

$$p_{(a,200000)}(k) = \Pr\{aX = k\} = f(\frac{k}{a}) \quad \text{เมื่อ } 0 < k \le \frac{200000}{a} \tag{4.3}$$

และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของบริษัทรับประกันภัยต่อตามส่วน $q(k)$ ที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อ a สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$q_{(a,200000)}(k) = \Pr\{(1-a)X = k\} = f(\frac{k}{1-a}) \quad \text{เมื่อ } 0 < k \le \frac{200000}{(1-a)} \tag{4.4}$$

โดยแต่ละค่า a จะให้ฟังก์ชัน $p(k)$ และ $q(k)$ ที่แตกต่างกัน

ตารางที่ 4.4 ความน่าจะความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อภายใต้ประกันภัยต่อตามส่วนที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อ a

	สัดส่วนประกันภัยต่อ (a)								
ความเสียหาย (บาท)	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
1-10000	0.47487	0.21106	0.15710	0.11922	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10000-20000	0.52513	0.26381	0.13334	0.09184	0.16144	0.15710	0.14285	0.11922	0.06681
20000-25000	0.00000	0.12768	0.08434	0.05954	0.04961	0.00930	0.01637	0.03428	0.07014
25000-30000	0.00000	0.12768	0.10008	0.06450	0.04961	0.04465	0.01214	0.00697	0.02015
30000-35000	0.00000	0.12768	0.08172	0.05954	0.04961	0.03969	0.03969	0.01586	0.00378
35000-40000	0.00000	0.14209	0.08682	0.08024	0.04961	0.03969	0.03473	0.03473	0.02041
40000-45000	0.00000	0.00000	0.08682	0.06129	0.04961	0.04465	0.03473	0.02977	0.02977
45000-50000	0.00000	0.00000	0.08172	0.06639	0.06535	0.03969	0.03473	0.02977	0.02481
50000-55000	0.00000	0.00000	0.08682	0.06129	0.05107	0.03969	0.03473	0.02977	0.02977
55000-60000	0.00000	0.00000	0.10123	0.06639	0.05107	0.06039	0.03473	0.03473	0.02481
60000-65000	0.00000	0.00000	0.00000	0.06129	0.05107	0.04086	0.03473	0.02977	0.02977
65000-70000	0.00000	0.00000	0.00000	0.06639	0.05107	0.04086	0.05543	0.02977	0.02481
70000-75000	0.00000	0.00000	0.00000	0.06129	0.05107	0.04597	0.03575	0.02977	0.02977
75000-80000	0.00000	0.00000	0.00000	0.08080	0.05107	0.04086	0.03575	0.05047	0.02481
80000-85000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.05107	0.04086	0.03575	0.03064	0.02977
85000-90000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.05107	0.04597	0.03575	0.03064	0.04551
90000-95000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.05107	0.04086	0.03575	0.03064	0.02554
95000-100000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.06548	0.04086	0.03575	0.03575	0.03064
100000-105000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.04597	0.04086	0.03064	0.02554
105000-110000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.04086	0.03575	0.03064	0.03064
110000-115000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.04086	0.03575	0.03064	0.02554
115000-120000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.06037	0.03575	0.03575	0.03064
120000-125000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03575	0.03064	0.02554
125000-130000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03575	0.03064	0.03064
130000-135000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03575	0.03064	0.03064
135000-140000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.05527	0.03575	0.02554
140000-145000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03064	0.03064
145000-150000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03064	0.02554
150000-155000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03064	0.03064
155000-160000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.05016	0.02554
160000-165000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03064
165000-170000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.02554
170000-175000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.03064
175000-180000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.04505
180000-185000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

ตารางที่ 4.5 ความน่าจะความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อภายใต้ประกันภัยต่อตามส่วนที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อ a

	สัดส่วนประกันภัยต่อ (a)								
ความเสียหาย (บาท)	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
1-10000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.11922	0.15710	0.21106	0.47487
10000-20000	0.06681	0.11922	0.14285	0.15710	0.16144	0.09184	0.13334	0.26381	0.52513
20000-25000	0.07014	0.03428	0.01637	0.00930	0.04961	0.05954	0.08434	0.12768	0.00000
25000-30000	0.02015	0.00697	0.01214	0.04465	0.04961	0.06450	0.10008	0.12768	0.00000
30000-35000	0.00378	0.01586	0.03969	0.03969	0.04961	0.05954	0.08172	0.12768	0.00000
35000-40000	0.02041	0.03473	0.03473	0.03969	0.04961	0.08024	0.08682	0.14209	0.00000
40000-45000	0.02977	0.02977	0.03473	0.04465	0.04961	0.06129	0.08682	0.00000	0.00000
45000-50000	0.02481	0.02977	0.03473	0.03969	0.06535	0.06639	0.08172	0.00000	0.00000
50000-55000	0.02977	0.02977	0.03473	0.03969	0.05107	0.06129	0.08682	0.00000	0.00000
55000-60000	0.02481	0.03473	0.03473	0.06039	0.05107	0.06639	0.10123	0.00000	0.00000
60000-65000	0.02977	0.02977	0.03473	0.04086	0.05107	0.06129	0.00000	0.00000	0.00000
65000-70000	0.02481	0.02977	0.05543	0.04086	0.05107	0.06639	0.00000	0.00000	0.00000
70000-75000	0.02977	0.02977	0.03575	0.04597	0.05107	0.06129	0.00000	0.00000	0.00000
75000-80000	0.02481	0.05047	0.03575	0.04086	0.05107	0.08080	0.00000	0.00000	0.00000
80000-85000	0.02977	0.03064	0.03575	0.04086	0.05107	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
85000-90000	0.04551	0.03064	0.03575	0.04597	0.05107	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
90000-95000	0.02554	0.03064	0.03575	0.04086	0.05107	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
95000-100000	0.03064	0.03575	0.03575	0.04086	0.06548	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
100000-105000	0.02554	0.03064	0.04086	0.04597	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
105000-110000	0.03064	0.03064	0.03575	0.04086	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
110000-115000	0.02554	0.03064	0.03575	0.04086	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
115000-120000	0.03064	0.03575	0.03575	0.06037	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
120000-125000	0.02554	0.03064	0.03575	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
125000-130000	0.03064	0.03064	0.03575	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
130000-135000	0.03064	0.03064	0.03575	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
135000-140000	0.02554	0.03575	0.05527	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
140000-145000	0.03064	0.03064	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
145000-150000	0.02554	0.03064	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
150000-155000	0.03064	0.03064	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
155000-160000	0.02554	0.05016	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
160000-165000	0.03064	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
165000-170000	0.02554	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
170000-175000	0.03064	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
175000-180000	0.04505	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
180000-185000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

4.3 ขอบเขตล่างฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วม

กำหนดให้ผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อแทนด้วย $S_I = \sum_{i=1}^{n} \min(aX_i, M)$ และผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อแทนด้วย $S_R = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \min(aX_i, M))$ โดยที่ n คือตัวแปรสุ่มจำนวนการจ่ายเงินเอาประกันภัยที่มีการแจกแจงแบบทวินามซึ่งมีพารามิเตอร์ $p = 0.854824$ และ $N = 9734$ และ X_i แทนตัวแปรสุ่มการจ่ายเงินเอาประกันภัยที่มีฟังก์ชันให้ค่าตามตาราง 4.1 และ 4.2 เริ่มจากการพิจารณาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินจะได้ว่า $S_I = \sum_{i=1}^{n} \min(X_i, M)$ และ $S_R = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \min(X_i, M))$ คือความเสียหายรวมของแต่ละบริษัท สังเกตได้ว่า $\min(X_i, M)$ และ $(X_i - \min(X_i, M))$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันตามสมการ (4.1) และ (4.2) ตามลำดับดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุมความเสียหายรวม S_I และ S_R สามารถคำนวณได้โดยวิธี Panjer Recursive Formula ดังสมการ (3.11) และ (3.12) ดังนี้

ให้ $g_I(k)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงของผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อภายใต้สัญญาความเสียหายส่วนเกินจะได้ว่า

$$g_{I(1,M)}(k) = \frac{1}{1-ap_{(1,M)}(0)} \sum_{j=1}^{k} (a + \frac{bj}{k}) p_{(1,M)}(j) g_{I(1,M)}(k-j) \text{ เมื่อ } k = 1,2,3,\ldots$$

และ

$$g_{I(1,M)}(0) = (1-0.8548)^{9734}$$

ให้ $g_R(k)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงของผลรวมความเสียหายของบริษัทรับประกันภัยต่อภายใต้สัญญาความเสียหายส่วนเกินจะได้ว่า

$$g_{R(1,M)}(k) = \frac{1}{1-aq_{(1,M)}(0)} \sum_{j=1}^{k} (a + \frac{bj}{k}) q_{(1,M)}(j) g_{R(1,M)}(k-j) \text{ เมื่อ } k = 1,2,3,\ldots$$

และ

$$g_{R(1,M)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (q^n(0) \binom{9734}{n} (1-0.8548)^{(9734-n)} (0.8548)^n)$$

ฉะนั้นค่าขอบเขตล่างของฟังก์ชันอยู่รอดร่วมภายใต้สัญญาประกันภัยต่อความเสียหายส่วนเกินจะเขียนได้ว่า

$$L(1,M) = \sum_{i=1}^{P_{I(1,M)}} g_{I(1,M)}(i) \sum_{j=1}^{P_{R(1,M)}} g_{R(1,M)}(j)$$

โดยที่เบี้ยของแต่ละบริษัทประมาณได้จาก สมการ (2.2) และ (2.3) สำหรับสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกิน

$$P_{R(1,M)} = E(N) \sum_{n=0}^{200000-M} nq_{(1,M)}(n)$$
$$P_{I(1,M)} = E(N) \sum_{n=1}^{M} np_{(1,M)}(n) - P_{R(1,M)}$$

จากนั้นพิจารณาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินจะได้ว่า $S_I = \sum_{i=1}^{n} \min(aX_i, 200000)$ และ $S_R = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \min(aX_i, 200000))$ คือความเสียหายรวมของแต่ละบริษัท สังเกตได้ว่า $\min(aX_i, 200000)$ และ $(X_i - \min(aX_i, 200000))$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันตามสมการ (4.3) และ (4.4) ตามลำดับดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุมความเสียหายรวม S_I และ S_R สามารถคำนวณได้โดยวิธี Panjer Recursive Formula ดังสมการ (3.11) และ (3.12) ดังนี้

ให้ $g_I(k)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงของผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อภายใต้สัญญาความเสียหายส่วนเกินจะได้ว่า

$$g_{I(a,200000)}(k) = \frac{1}{1 - ap_{(a,200000)}(0)} \sum_{j=1}^{k} (a + \frac{bj}{k}) p_{(a,200000)}(j) g_{I(a,200000)}(k-j)$$

เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots$

และ

$$g_{I(a,200000)}(0) = (1 - 0.8548)^{9734}$$

ให้ $g_R(k)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงของผลรวมความเสียหายของบริษัทเอาประกันภัยต่อภายใต้สัญญาความเสียหายส่วนเกินจะได้ว่า

$$g_{R(a,200000)}(k) = \frac{1}{1 - aq_{(a,200000)}(0)} \sum_{j=1}^{k} (a + \frac{bj}{k}) q_{(a,200000)}(j) g_{R(a,200000)}(k-j)$$

เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots$

และ

$$g_{R(a,200000)}(0) = (1 - 0.8548)^{9734}$$

และขอบเขตล่างของฟังก์ชันอยู่รอดร่วมภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนจะเขียนได้ว่า

$$L(a, 200000) = \sum_{i=1}^{P_{I(a,200000)}} g_{I(a,200000)}(i) \sum_{j=1}^{P_{R(a,200000)}} g_{R(a,200000)}(j)$$

และเบี้ยสัญญาประกันภัยต่อตามส่วน

$$P_{I(a,200000)} = E(N) \sum_{n=1}^{\frac{200000}{a}} np_{(a,200000)}(n) - P_{R(a,200000)}$$

$$P_{R(a,200000)} = E(N) \sum_{n=1}^{\frac{200000}{1-a}} nq_{(a,200000)}(n)$$

ตารางที่ 4.6 ค่าขอบเขตล่างฟังก์ชันการอย่รอดร่วมภายสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินที่ขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ M

M (บาท)	$\sum_{i=1}^{P_{R(1,M)}} g_{R(1,M)}(i)$	$\sum_{i=1}^{P_{I(1,M)}} g_{I(1,M)}(i)$	$L(1,M)$
30,000	0.721499	0.666867	0.481144
40,000	0.731299	0.716856	0.524236
50,000	0.714692	0.741797	0.530156
60,000	0.715243	0.755511	0.540374
70,000	0.689988	0.763599	0.526874
80,000	0.685336	0.768506	0.526685
90,000	0.666957	0.771562	0.514599
100,000	0.670431	0.773337	0.518469
110,000	0.659657	0.774185	0.510697
120,000	0.640331	0.774477	0.495922
130,000	0.630381	0.774327	0.488121
140,000	0.609992	0.773856	0.472046
150,000	0.590727	0.773225	0.456765
160,000	0.565522	0.772470	0.436849
170,000	0.534032	0.771729	0.412128
180,000	0.509612	0.770983	0.392902
190,000	0.463254	0.770416	0.356898

ตารางที่ 4.7 ค่าขอบเขตล่างฟังก์ชันการอย่รอดร่วมภายสัญญาประกันภัยต่อตามส่วนที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อ a

a	$\sum_{i=1}^{P_{R(a,200000)}} g_{R(a,200000)}(i)$	$\sum_{i=1}^{P_{I(a,200000)}} g_{I(a,200000)}(i)$	$L(a,200000)$
10%	0.714754	0.009406	0.006723
20%	0.713930	0.010187	0.007273
30%	0.716410	0.012599	0.009026
40%	0.714329	0.122338	0.087390
50%	0.713937	0.748109	0.534102
60%	0.716213	0.287136	0.205651
70%	0.722312	0.216408	0.156314
80%	0.724611	0.392688	0.284546
90%	0.739527	0.318490	0.235532

ค่าขอบเขตล่างฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมจากตาราง 4.6 สามารถนำมาพิจารณาค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ของประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินโดยดูจากค่าขอบเขตล่างมากสุด ซึ่งคือ 0.54037 เมื่อค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้เท่า 60,000 บาท เมื่อพิจารณาค่าขอบเขตล่างฟังก์ชันอยู่รอดร่วมตารางที่ 4.7 จะได้ว่าค่าสัดส่วนประกันภัยต่อสำหรับภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนคือ 50% ด้วยขอบเขตล่างความน่าจะเป็นมากสุดเท่ากับ 0.534102

4.4 ฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปร

จากตาราง 4.2 4.3 4.4 และ 4.5 สังเกตได้ว่าฟังก์ชันความเสียหายภายใต้การประกันภัยต่อนั้นมีลักษณะเบ้ขวาทั้งบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อ ดังนั้นการประมาณค่าฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมของทั้งสองบริษัทควรเลือกการแจกแจงความน่าจะเป็นหลายตัวแปรที่ลักษณะเบ้ขวาเช่นเดียวกันซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยแกมมาแปลงสองตัวแปรของมาธายและมอสโคเปาลอส (Mathai and Moschopoulos ,1991)

ให้ผลรวมความเสียหายของทั้งสองบริษัทแทนด้วย $S_I = Z_1 + \omega_1$ และ $S_R = Z_2 + \omega_2$ เมื่อ Z_1, Z_2 แทนตัวแปรสุ่มที่การแจกแจงแบบแกมมาแปลงสองตัวแปรและพารามิเตอร์ $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ โดยฟังก์ชันแกมม่าแปลงสองตัวแปรที่ใช้ประมานความน่าจะเป็นของการอยู่รอดร่วมเขียนแทนด้วย

$$\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} = \Pr\{Z_1 \le P_I - \omega_1, Z_2 \le P_R - \omega_2\}$$

เนื่องจาก Z_1, Z_2 มีการแจกแจงแบบแกมมาแปลงสองตัวแปรจะได้ว่า

$$\Pr\{S_I \le P_I, S_R \le P_R\} = G(P_I - \omega_1, P_R - \omega_2)$$

โดย G แทนฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมแกมมาแปลงสองตัวแปรตามสมการ (2.1) จะได้ว่าพารามิเตอร์ทั้ง 7 นั้นสามารถประมาณค่าได้จากค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของความเสียหายรวมทั้งสองบริษัทได้โดยสมการ (3.15)

กำหนดให้ $G_{(1,M)}$ แทนฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมอยู่รอดรวมของทั้งสองบริษัทภายใต้สัญญาประกันภัยต่อความเสียส่วนเกินมีสมการดังนี้

$$G_{(1,M)}(y_1, y_2) = \begin{cases} G_1(y_1, y_2) & when \quad \dfrac{y_2}{\beta_2} < \dfrac{y_1}{\beta_1} \\ G_2(y_1, y_2) & when \quad \dfrac{y_1}{\beta_1} < \dfrac{y_2}{\beta_2} \end{cases}$$

$$G_1(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{y_2}{\beta_2}} \int_{x_2}^{\frac{y_1}{\beta_1}} \frac{e^{-x_1} e^{-x_2} (x_1)^{\alpha_1 - 1} (x_2)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{x_2} (v)^{\alpha_0 - 1} \left(1 - \frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1 - 1}$$

$$\times \left(1 - \frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2 - 1} e^{v} dv dx_1 dx_2$$

$$+ \int_0^{\frac{y_2}{\beta_2}} \int_0^{x_2} \frac{e^{-x_1} e^{-x_2} (x_1)^{\alpha_1 - 1} (x_2)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{x_1} (v)^{\alpha_0 - 1} \left(1 - \frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1 - 1}$$

$$\times \left(1 - \frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2 - 1} e^{v} dv dx_1 dx_2$$

$$G_2(y_1,y_2)=\int_{\frac{y_1}{\beta_1}}^{\frac{y_2}{\beta_2}}\int_0^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$
$$+\int_0^{\frac{y_1}{\beta_1}}\int_0^{x_2}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$
$$+\int_0^{\frac{y_1}{\beta_1}}\int_{x_2}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_2}(v)^{\alpha_0-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$

เมื่อ $y_1=P_{I(1,M)}-\omega_1$ และ $y_2=P_{R(1,M)}-\omega_2$

กำหนดให้ $G_{(a,200000)}$ แทนฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมอยู่รอดรวมของทั้งสองบริษัทภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนมีสมการดังนี้

$$G_{(a,200000)}(y_1,y_2)=\begin{cases}G_1(y_1,y_2) & when\quad \dfrac{y_2}{\beta_2}<\dfrac{y_1}{\beta_1}\\ G_2(y_1,y_2) & when\quad \dfrac{y_1}{\beta_1}<\dfrac{y_2}{\beta_2}\end{cases}$$

$$G_1(y_1,y_2)=\int_0^{\frac{y_2}{\beta_2}}\int_{x_2}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_2}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$
$$+\int_0^{\frac{y_2}{\beta_2}}\int_0^{x_2}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$

$$G_2(y_1,y_2)=\int_{\frac{y_1}{\beta_1}}^{\frac{y_2}{\beta_2}}\int_0^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$

$$+\int_0^{\frac{y_1}{\beta_1}}\int_0^{x_2}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_1}(v)^{\alpha_0-1}\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$
$$+\int_0^{\frac{y_1}{\beta_1}}\int_{x_2}^{\frac{y_1}{\beta_1}}\frac{e^{-x_1}e^{-x_2}(x_1)^{\alpha_1-1}(x_2)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{x_2}(v)^{\alpha_0-1}$$
$$\times\left(1-\frac{v}{x_1}\right)^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{v}{x_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{v}dvdx_1dx_2$$

เมือ $y_1 = P_{I(a,200000)} - \omega_1$ และ $y_2 = P_{R(a,200000)} - \omega_2$

พารามิเตอร์ทั้งหมด 7 ตัวได้แก่ $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \omega_1$ และ ω_2 ประมาณได้จากสมการที่ (3.15) โดยโปรแกรม Micorsoolf Excel ค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมภายใต้แต่ละสัญญาประกันภัยต่อประมาณด้วยโปรแกรม Mathematica ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.8 ความน่าจะเป็นการอยู่รวดร่วมด้วยฟังก์ชันแกมม่าแปลงสองตัวแปรภายใต้สัญญาประกันภัยแบบความเสียหายส่วนเกิน

M (บาท)	$G_{(1,M)}$
30,000	0.578485
40,000	0.714306
50,000	0.795024
60,000	0.838895
70,000	0.825322
80,000	0.628550
90,000	0.694397
100,000	0.439346
110,000	0.576073
120,000	0.734035
130,000	0.572985
140,000	0.669994
150,000	0.549268
160,000	0.601415
170,000	0.649745
180,000	0.696951
190,000	0.703575

ตารางที่ 4.9 ความน่าจะเป็นการอยู่รวดร่วมด้วยฟังก์ชันแกมม่าแปลงสองตัวแปรภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วน

a	$G_{(a,200000)}$
10%	0.008747
20%	0.009372
30%	0.011969
40%	0.121115
50%	0.733147
60%	0.258422
70%	0.196931
80%	0.37698
90%	0.31212

ค่าความน่าจะเป็นฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมที่ประมาณด้วยวิธีแกมมาแปลงสองตัวแปรจากตาราง 4.6 จะได้ว่าค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมสูงสุดคือ 0.8388 เมื่อค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้เท่า 60,000 บาท เมื่อพิจารณาความน่าจะเป็นฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมตารางที่ 4.7 จะได้ว่าค่าสัดส่วนประกันภัยต่อสำหรับภายใต้สัญญาประกันภัยต่อต่อตามส่วนคือ 50% ด้วยความน่าจะเป็นมากสุดเท่ากับ 0.7331

เมื่อเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมที่ประมาณด้วยวิธีขอบเขตล่างฟังก์ชันกับวิธีแกมมาแปลงสองตัวแปรให้ค่าที่แตกต่างกัน จากการศึกษาของจิลี้ (Zhi Li ,2008) ได้ศึกษาการวิเคราะห์หาส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมด้วยวิธีขอบเขตล่างฟังก์ชันกับวิธีแกมมาแปลงสองตัวแปร โดยกำหนดให้ขนาดของการจ่ายเงินเอาประกันภัยเฉพาะรายมีการแจกแจงแบบ Exponential และการแจกแจงแบบ Pareto พบว่าวิธีขอบเขตล่างฟังก์ชันนั้นให้ค่าสูงสุดความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมมากกว่าค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นด้วยวิธีแกมมาแปลงสองตัวแปร แต่งานศึกษาในวิจัยนี้ไม่สอดคล้องกัน เนื่องจากการแจกแจงขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัยเฉพาะรายที่ตรวจสอบจากข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัยเป็นแบบผสม (Mix Distribution)

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปราย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณสัญญาประกันภัยต่อและส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมในการประกันภัยต่อสำหรับประกันภัยชีวิตผู้สูงอายุตั้งแต่ 50-70 ปีโดยใช้ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยทดแทนในช่วงปี พ.ศ. 2552-2555 ด้วยการหาค่าความน่าจะเป็นสูงของฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมที่ประมาณด้วยวิธีขอบเขตล่างของฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมและวิธีประมาณด้วยฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปร ซึ่งเงื่อนไขการอยู่รอดร่วมหมายถึง ความเสียหายของทั้งบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกัยต่อนั้นจะไม่เกินเบี้ยประกันภัยที่ทั้งสองบริษัทได้รับ

จากการประมาณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมด้วยวิธีค่ามากสุดของขอบเขตล่างนั้นจะได้ค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนภายใต้สัญญาประกันภัยต่อความเสียหายส่วนเกิน $M = 60000$ จะให้ค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมเท่ากับ 0.54037 ซึ่งมีค่ามากสุดนั้นหมายความว่าภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกิน ค่าขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมคือ 60,000 บาทเนื่องจากทำให้ทั้งสองบริษัทมีความน่าจะเป็นที่จะไม่ขาดทุนสูงที่สุดเช่นเดียวกับภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วน $a = 50\%$ จะให้ค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมเท่ากับ 0.534102 นั้นหมายความว่าภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วน ค่าสัดส่วนประกันภัยต่อที่เหมาะสมคือ 50%

จากการประมาณฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมด้วยวิธีการแปลงแกมมาได้ค่าความน่าจะเป็นภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเก็บไว้ที่มีขอบเขตส่วนเกินเท่ากับ $M = 60000$ จะให้ค่าความน่าเป็นการอยู่รอดร่วมเท่ากับ 0.8388 สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อเท่ากับ $a = 50\%$ จะให้ค่าความน่าเป็นการอยู่รอดร่วมเท่ากับ 0.7331 นั้นหมายความว่าความน่าจะเป็นที่ทั้งสองบริษัทจะไม่ขาดสุดสูงสุดภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินที่มีขีดจำกัดส่วนเก็บไว้ 60,000 บาท และภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนที่มีสัดส่วนประกันภัยต่อ 50% ตามลำดับ

เมื่อเปรียบเทียบสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินและประกันภัยต่อตามส่วนสำหรับประกันชีวิตผู้สูงอายุ ด้วยค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมมากสุดที่ประมาณด้วยวิธีหาขอบเขตล่างฟังก์ชันอยู่รอดร่วมและวิธีประมาณฟังก์ชันการอยู่รวดร่วมด้วยแกมมาแปลงสองตัวแปรได้ค่าดังนี้

ตารางที่ 5.1 ค่าความน่าจะเป็นสูงสุดของฟังก์ชันอยู่รอดร่วมของสัญญาการประกันภัยต่อแต่ละประเภท

สัญญาประกันภัยต่อ / วิธีการประมาณ	ความเสียหายส่วนเกิน	อัตราต่อตามส่วน
ขอบเขตล่างฟังก์ชันอยู่รอดร่วม	0.5403	0.5341
ฟังก์ชันแกมมาแปลงสองตัวแปร	0.8388	0.7331

ทั้งสองวิธีให้ค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมสูงสุดภายใต้สัญญาประกันภัยต่อความเสียหายส่วนเกินมากกว่าสัญญาประกันภัยต่อตามส่วน หมายความว่าสัญญาประกันภัยต่อความเสียหายส่วนเกินมีความเหมาะสมมากกว่าสัญญาประกันภัยต่อตามส่วนสำหรับประกันชีวิตผู้สูงอายุนี้ภายใต้เงื่อนไขที่บริษัทรับประกันภัยต่อและบริษัทเอาประกันภัยต่อจะไม่ขาดทุน

5.2 อภิปรายผลการวิจัย

เมื่อเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นสูงสุดที่ได้ระหว่างวีธีหาขอบเขตล่างฟังก์ชันความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมและวิธีประมาณฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมด้วยแกมมาแปลงสองตัวแปร สำหรับแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุดังกล่าว ภายใต้สัญญาประกันภัยต่อดังตารางที่ 5.1 จะเห็นว่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินที่ประมาณด้วยวิธีแกมมาแปลงสองตัวแปรนั้นให้ค่ามากที่สุด จากการศึกษาของจิลี้ (Zhi Li ,2008) ได้ศึกษาการวิเคราะห์หาส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมด้วยวิธีขอบเขตล่างฟังก์ชันกับวิธีแกมมาแปลงสองตัวแปร โดยกำหนดให้ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัยเฉพาะรายมีการแจกแจงแบบ Exponential และการแจกแจงแบบ Pareto พบว่าวิธีขอบเขตล่างฟังก์ชันนั้นให้ค่าสูงสุดความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมมากกว่าค่าสูงสุดของความน่าจะเป็นด้วยวิธีแกมมาแปลงสองตัวแปร แต่งานศึกษาในวิจัยนี้ไม่สอดคล้องกัน เนื่องจากการแจกแจงขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัยเฉพาะรายที่ตรวจสอบจากข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัยเป็นแบบผสม (Mix Distribution) ดั้งนั้นหากต้องการเปรียบเทียบวิธีการหาส่วนเก็บไว้ความเหมาะสมของวิธีดังกล่าวควรศึกษาวิธีการหาฟังก์ชันการอยู่รอดร่วมโดยตรงในการวิจัยครั้งต่อไปด้วย

ผลการวิจัยการประมาณค่าส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมภายใต้เงื่อนไขการอยู่รอดร่วมภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนของบริษัทรับประกันภัยต่อและบริษัทเอาประกันภัยต่อแสดงให้เห็นว่าทั้งสองวิธีนั้นให้ค่าส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมสอดคล้องกัน แม้ว่าค่าความน่าจะเป็นที่คำนวณได้จะแตกต่างกัน จะเห็นว่าความแม่นยำในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมนั้นขึ้นอยู่การแจกแจงที่ตรวจสอบได้เป็นหลัก ดังนั้นการประยุกต์ใช้เพื่อหาความเหมาะสมส่วนเก็บไว้ของประกันภัยต่อ

สำหรับประกันภัยแผนอื่นต้องศึกษาโมเดลของความเสี่ยงให้เหมาะสมสำหรับแผนประกันภัยดังกล่าวก่อนจึงจะสามารถคำนวณความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมได้แม่นยำยิ่งขึ้น

เมื่อพิจารณาแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุที่นำมาศึกษาจะเห็นว่ามีจำนวนเงินเอาประกันภัยสูงสุดเท่ากับ 200,000 บาท ซึ่งในบริษัทประกันชีวิตนั้นอาจจะไม่พิจารณาทำสัญญาประกันภัยต่อ การพิจารณาทำสัญญาประกันภัยต่อกับมักจะใช้กับแผนประกันภัยที่มีจำนวนเงินเอาประกันภัยที่สูงมากเช่น การประกันชีวิตแบบกลุ่ม การประกันอัคคีภัย หรือ การประกันอุบัติเหตุต่างๆ อย่างไรก็ตาม งานวิจัยนี้ต้องการนำเสนอวิธีการพิจารณาส่วนเก็บไว้ที่เหมาะสมสำหรับประกันภัยต่อและสามารถนำไปประยุกต์ได้อีกวิธีหนึ่ง

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. ในงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอการหาส่วนเก็บไว้ความเหมาะสมของการประกันภัยต่อโดยพิจารณาระหว่างสัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินและประกันภัยต่อตามส่วนเท่านั้น ซึ่งอาจมีสัญญาประกันภัยต่อแบบอื่นๆ ที่เหมาะสมเช่น แบบผสมผสาน ดังนั้นการศึกษาครั้งต่อไปควรจะพิจารณาสัญญาประกันภัยต่อแบบอื่นเพิ่มด้วย

2. วิธีการหาขอบเขตล่างฟังก์ชันอยู่รอดร่วมที่ใช้ในการศึกษานี้ ได้กำหนดการแจกแจงของจำนวนครั้งการจ่ายเงินเอาประกันภัยเป็นแบบทวินามเพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎีของแพนเจอร์ (Panjer H.,1989) ในการหาการแจกแจงของผลรวมความเสียหาย ในการศึกษาครั้งต่อไปสามารถพิจารณาปรับเปลี่ยนโมเดลความเสี่ยงอื่นเพื่อความเหมาะสมข้อมูลเช่น Fast Furior Tranforms เป็นต้น

3. ในการวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาสัญญาประกันภัยต่อที่ทำระหว่างบริษัทเอาประกันภัยกับบริษัทรับประกันภัยต่อเพียงบริษัทเดียวเท่านั้น ดังนั้นการศึกษาครั้งต่อไปควรพิจารณาสัญญาประกันภัยต่อที่ทำระหว่างบริษัทเอาประกันภัยต่อกับบริษัทรับประกันภัยต่อมากกว่าหนึ่งบริษัท

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

ธโนดม โลกาพัฒนา ดวงดาว วิจักขณ์จารุ และ พลเทพ สิทธิ. (2552). การประกันภัยต่อไม่ยากอย่างที่คิด: สมาคิมวินาศภัย.

ภาษาอังกฤษ

Bowers Newton L., Gerber Hans U., Hickman James C., Jones Donald A., & Nesbitt Cecil J. (1997). Acturial Mathematics. *Society of Actuaries*.

Buhlmann Hans. (1996). Mathematical Methods in Risk Theory. *Springer-Verlag*.

Cai Jun, & Tan Ken Seng. (2007). Optimal Retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *Austin Bulletin, 37*, 93-112.

Cai Jun, Tan Ken Seng, Weng Chengguo, & Zhang Yi. (2008). Optimal Reinsurance under VaR and CTE risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*.

Centeno Maria de Lourdes. (2002). Excess of loss reinsurance and Gerber's Inequality in the Sparre Anderson model. *Insurance: Mathematic and economics, 30*, 37-40.

Daykin Chris D., Pentikeainen Teivo, & Pesonen Martti. (1994). Practical Risk Theory of Actuaries. *Chapman and Hall*.

Gerber Hans U. (1979). Martingales in Risk Theory. *Mitteilungen der Schweizer Verinigung der Versicheringsmathematiker*, 205-216.

Ignatov Zvetan G., Kaishev Vladimir K., & Krachunov Rossen S. (2004). Optimal Retention levels, given the joint survival of cedent and Reinsurer. *Scandinavian Actuarial Journal, 6*, 401-403.

Kaishev Vladimir K., & Dimitrova Dimitrina S. (2006). Excess of loss reinsurance under join survival optimality. *Insurance: Mathematics and Economics, 28*, 61-67.

Kaluszka Marek. (2001). Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics, 28*, 61-67.

Kaluszka Marek. (2005). Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation. *Insurance: Mathematics and Economics, 36*, 375-398.

Marc J. Goovaerts, Angela E. Van Heerwaarden , & Rob Kaas. (1989). Optimal reinsurance in relation to ordering of risk. *Insurance: Mathematic and economics, 8*, 11-17.

Maria Lourdes Centeno. (1985). On combining quota-share and excess of loss. *Austin Bulletin, 15*, 46-63.

Mathai Arak, & Moschopoulos Panagis G. (1991). On a Multivareiate Gamma. *Journal of Multivarite Analysis, 39*, 135-153.

Nadarajah Saralees, & Gupta Arjun K. (2006). Some Bivariate Gamma Distributions. *Applied Mathematices letters, 19*, 767-774.

Panjer Harry H., K. S. A., & Willmot Gordon E. (1998). Loss Models from Data to Decisions. *John Wiley and Sons*.

Schmitter Hans. (2001). Setting optimal reinsurance retentions.

Verlaak Robert, & Beirlant Jan. (2003). Optimal Reinsurance Programs An Optimal Combination of Several Reinsurance Protections on a Heterogeneous Insurance Portfolio. *Insurance: Mathematic and economics, 33*, 381-403.

Water Howard R. (1983). Some Mathematical Aspects of Reinsurance. *Insurance: Mathematic and economics, 2*, 17-26.

Zhi Li. (2008). *Optimal Reinsurance Retention under Ruin-Related Optimization Criteria*. Actuarial Science. University of Waterloo.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
1-500	42
501-1000	168
1001-1500	290
1501-2000	364
2001-2500	332
2501-3000	359
3001-3500	367
3501-4000	387
4001-4500	364
4501-5000	287
5001-5500	281
5501-6000	289
6001-6500	258
6501-7000	236
7001-7500	271
7501-8000	241
8001-8500	236
8501-9000	220
9001-9500	205
9501-10000	175
10001-10500	161
10501-11000	145
11001-11500	155
11501-12000	125
12001-12500	141
12501-13000	133
13001-13500	104
13501-14000	116
14001-14500	117
14501-15000	99
15001-15500	76
15501-16000	95
16001-16500	81
16501-17000	77
17001-17500	54
17501-18000	51
18001-18500	51
18501-19000	44
19001-19500	32
19501-20000	37
20001-20500	36
20501-21000	22
21001-21500	28
21501-22000	20
22001-22500	31
22501-23000	17
23001-23500	10
23501-24000	16
24001-24500	7
24501-25000	15

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง (ต่อ)

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
25001-25500	7
25501-26000	4
26001-26500	8
26501-27000	4
27001-27500	5
27501-28000	6
28001-28500	1
28501-29000	4
29001-29500	6
29501-30000	3
30001-30500	8
30501-31000	2
31001-31500	1
31501-32000	2
32001-32500	2
32501-33000	1
33001-33500	1
33501-34000	3
35501-36000	2
38501-39000	1
40001-40500	9
40501-41000	2
41001-41500	2
41501-42000	2
42001-42500	4
42501-43000	4
43001-43500	5
43501-44000	3
44001-44500	8
44501-45000	4
45001-45500	1
45501-46000	6
46001-46500	4
46501-47000	1
47001-47500	1
47501-48000	7
48001-48500	9
48501-49000	4
49001-49500	2
49501-50000	1
50001-50500	2
50501-51000	3
51001-51500	1
51501-52000	3
52001-52500	6
52501-53000	4
53001-53500	3
53501-54000	1
54001-54500	4
54501-55000	2
55001-55500	4
55501-56000	5

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง (ต่อ)

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
56001-56500	2
56501-57000	5
57001-57500	5
57501-58000	4
58001-58500	6
58501-59000	3
59001-59500	4
59501-60000	5
60001-60500	4
60501-61000	3
61001-61500	4
61501-62000	2
62001-62500	8
62501-63000	6
63001-63500	5
63501-64000	5
64001-64500	5
64501-65000	2
65001-65500	8
65501-66000	5
66001-66500	1
66501-67000	4
67001-67500	2
67501-68000	8
68001-68500	3
68501-69000	2
69001-69500	3
69501-70000	2
70001-70500	2
70501-71000	7
71001-71500	3
71501-72000	3
72001-72500	4
72501-73000	4
73001-73500	4
73501-74000	6
74001-74500	3
74501-75000	7
75001-75500	6
75501-76000	7
76001-76500	3
76501-77000	3
77001-77500	3
77501-78000	3
78001-78500	3
78501-79000	5
79001-79500	7
79501-80000	8
80001-80500	6
80501-81000	3
81001-81500	2
81501-82000	6

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง (ต่อ)

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
82001-82500	2
82501-83000	5
83001-83500	7
83501-84000	12
84001-84500	4
84501-85000	5
85001-85500	5
85501-86000	4
86001-86500	3
86501-87000	3
87001-87500	6
87501-88000	2
88001-88500	5
88501-89000	4
89001-89500	8
89501-90000	7
90001-90500	1
90501-91000	6
91001-91500	3
91501-92000	4
92001-92500	3
92501-93000	2
93001-93500	3
93501-94000	1
94001-94500	5
94501-95000	3
95001-95500	3
95501-96000	9
96001-96500	5
96501-97000	7
97001-97500	4
97501-98000	3
98001-98500	4
98501-99000	6
99001-99500	1
99501-100000	34
100001-100500	3
100501-101000	3
101001-101500	4
101501-102000	3
102001-102500	6
102501-103000	8
103001-103500	5
103501-104000	3
104001-104500	2
104501-105000	5
105001-105500	2
105501-106000	4
106001-106500	7
106501-107000	5
107001-107500	6
107501-108000	4

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง (ต่อ)

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
108001-108500	4
108501-109000	7
109001-109500	6
109501-110000	3
110001-110500	5
110501-111000	3
111001-111500	5
111501-112000	4
112001-112500	5
112501-113000	5
113001-113500	3
113501-114000	6
114001-114500	7
114501-115000	5
115001-115500	2
115501-116000	7
116001-116500	6
116501-117000	6
117001-117500	1
117501-118000	4
118001-118500	7
118501-119000	5
119001-119500	4
119501-120000	3
120001-120500	1
120501-121000	1
121001-121500	3
121501-122000	5
122001-122500	5
122501-123000	6
123001-123500	8
123501-124000	4
124001-124500	5
124501-125000	6
125001-125500	7
125501-126000	3
126001-126500	5
126501-127000	4
127001-127500	4
127501-128000	3
128001-128500	4
128501-129000	2
129001-129500	1
129501-130000	6
130001-130500	6
130501-131000	9
131001-131500	6
131501-132000	7
132001-132500	8
132501-133000	6
133001-133500	3
133501-134000	8

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง (ต่อ)

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
134001-134500	5
134501-135000	6
135001-135500	4
135501-136000	5
136001-136500	3
136501-137000	3
137001-137500	9
137501-138000	5
138001-138500	3
138501-139000	12
139001-139500	2
139501-140000	6
140001-140500	7
140501-141000	4
141001-141500	4
141501-142000	6
142001-142500	6
142501-143000	6
143501-144000	3
144001-144500	7
144501-145000	3
145001-145500	4
145501-146000	5
146001-146500	6
146501-147000	3
147001-147500	3
147501-148000	5
148001-148500	6
148501-149000	5
149001-149500	7
149501-150000	3
150001-150500	3
150501-151000	5
151001-151500	2
151501-152000	2
152001-152500	3
152501-153000	4
153001-153500	4
153501-154000	1
154001-154500	4
154501-155000	8
155001-155500	5
155501-156000	3
156001-156500	3
156501-157000	2
157001-157500	3
157501-158000	7
158001-158500	2
158501-159000	5
159001-159500	4
159501-160000	1
160001-160500	7

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง (ต่อ)

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
160501-161000	4
161001-161500	2
161501-162000	8
162001-162500	5
162501-163000	2
163001-163500	6
163501-164000	6
164001-164500	7
164501-165000	3
165001-165500	4
165501-166000	4
166001-166500	2
167001-167500	4
167501-168000	1
168001-168500	5
168501-169000	1
169001-169500	3
169501-170000	5
170001-170500	4
170501-171000	5
171001-171500	9
171501-172000	5
172001-172500	3
172501-173000	2
173001-173500	3
173501-174000	6
174001-174500	5
174501-175000	5
175001-175500	3
175501-176000	5
176001-176500	2
176501-177000	4
177001-177500	6
177501-178000	4
178001-178500	3
178501-179000	4
179001-179500	1
179501-180000	4
180001-180500	4
181001-181500	3
181501-182000	5
182001-182500	1
182501-183000	10
183001-183500	4
184001-184500	6
184501-185000	4
185001-185500	8
185501-186000	2
186001-186500	2
186501-187000	6
187001-187500	3
187501-188000	2

ตารางที่ ก1 ความถี่ข้อมูลการจ่ายเงินเอาประกันภัยภัยของแผนประกันชีวิตผู้สูงอายุของบริษัทแห่งหนึ่ง (ต่อ)

ขนาดการจ่ายเงินเอาประกันภัย	จำนวน
188001-188500	5
188501-189000	3
189001-189500	6
189501-190000	2
190001-190500	3
190501-191000	11
191001-191500	3
191501-192000	2
192001-192500	1
192501-193000	2
193001-193500	2
193501-194000	1
194001-194500	5
194501-195000	10
195001-195500	1
195501-196000	2
196001-196500	7
196501-197000	5
197001-197500	1
197501-198000	5
198001-198500	2
198501-199000	8
199001-199500	1
199501-200000	32

ตารางที่ ก2 เบี้ยประกันภัยรับของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อภายใต้สัญญาความเสียหายส่วนเกินโดย M แทนขีดจำกัดส่วนเก็บไว้

ขีดจำกัดส่วนเก็บไว้	บริษัทรับประกันภัยต่อ	บริษัทเอาประกันภัยต่อ
30000	642263	241509
40000	572176	311596
50000	504258	379513
60000	440469	443302
70000	380809	502963
80000	325276	558495
90000	273873	609899
100000	226597	657175
110000	184814	698958
120000	147280	736492
130000	113996	769776
140000	84962	798810
150000	60178	823594
160000	39643	844129
170000	23358	860414
180000	11322	872450
190000	3536	880236

ตารางที่ ก3 เบี้ยประกันภัยรับของบริษัทเอาประกันภัยต่อและบริษัทรับประกันภัยต่อภายใต้ประกันภัยต่อตามส่วนโดย a แทนสัดส่วนประกันภัยต่อ

สัดส่วนประกันภัยต่อ	เบี้ยบริษัทรับประกันภัยต่อ	เบี้ยบริษัทเอาประกันภัยต่อ
10%	795395	88377
20%	707018	176754
30%	618640	265132
40%	530263	353509
50%	441886	441886
60%	353509	530263
70%	265132	618640
80%	176754	707018
90%	88377	795395

ตารางที่ ก4 ค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันแกมมาสองตัวแปรสำหรับประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกิน

M	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	ω_1	ω_2	X_1/β_1	X_2/β_2
30000	0.57	32523.59	5879.04	8.07	58.78	-112241.37	-154568.32	34431.78	6917.36
40000	0.50	21998.04	5476.68	12.35	55.67	-100327.88	-135033.11	23755.34	6459.63
50000	0.45	17544.78	5069.94	16.77	52.57	-102297.36	-117149.09	19210.06	5992.52
60000	0.41	15209.08	4662.64	21.13	49.48	-110034.32	-100704.17	16797.12	5529.18
70000	0.38	13759.64	4258.30	25.38	46.36	-119789.84	-85614.05	15288.24	5069.76
80000	0.34	12730.61	3859.86	29.56	43.23	-129841.89	-72007.78	14206.85	4618.32
90000	0.31	11937.36	3470.73	33.60	40.06	-139176.39	-59720.44	13373.81	4173.37
100000	0.28	11276.03	3094.18	37.56	36.85	-147384.22	-48936.13	12675.55	3741.23
110000	0.25	10713.59	2732.39	41.32	33.57	-153966.44	-39210.43	12079.12	3327.65
120000	0.22	10207.77	2381.77	44.95	30.25	-158933.69	-30695.74	11542.84	2923.77
130000	0.19	9745.67	2048.16	48.45	26.87	-162378.74	-23532.51	11050.67	2538.78
140000	0.17	9332.99	1742.84	51.69	23.36	-164315.57	-17541.38	10615.37	2176.03
150000	0.14	8964.62	1455.51	54.63	19.75	-164826.90	-12387.15	10231.17	1820.64
160000	0.12	8628.58	1174.68	57.33	16.08	-164169.69	-8146.63	9878.05	1470.99
170000	0.09	8333.21	903.65	59.71	12.34	-162652.13	-4818.09	9565.88	1130.00
180000	0.07	8087.55	644.44	61.68	8.48	-160636.27	-2371.37	9304.89	799.34
190000	0.04	7901.27	396.77	63.14	4.47	-158561.13	-795.36	9105.06	484.17

ตารางที่ ก5 ค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันแกมมาสองตัวแปรสำหรับประกันภัยต่อตามส่วน

a	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	ω_1	ω_2	X_1/β_1	X_2/β_2
0.1	0.50	7777.92	7777.92	6.40	57.59	-15647.85	-140830.61	2876.84	9649.43
0.2	0.50	7777.92	7777.92	12.80	51.19	-31295.69	-125182.77	6250.40	9652.62
0.3	0.50	7777.92	7777.92	19.20	44.80	-46943.54	-109534.92	7283.66	9695.82
0.4	0.50	7777.92	7777.92	25.60	38.40	-62591.38	-93887.07	7881.75	9699.13
0.5	0.50	7777.92	7777.92	32.00	32.00	-78239.23	-78239.23	8292.88	9651.46
0.6	0.50	7777.92	7777.92	38.40	25.60	-93887.07	-62591.38	8427.17	9789.68
0.7	0.50	7777.92	7777.92	44.80	19.20	-109534.92	-46943.54	8562.33	9928.47
0.8	0.50	7777.92	7777.92	51.19	12.80	-125182.77	-31295.69	8698.65	10066.27
0.9	0.50	7777.92	7777.92	57.59	6.40	-140830.61	-15647.85	8767.81	10811.43

ภาคผนวก ข

ชุดคำสั่งต่างในโปรแกรม Mathematica ที่ใช้ในการวิเคราะห์ส่วนเก็บไว้สำหรับการประกันภัย

1.ชุดคำสั่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดของบริษัทเอาประกันภัยต่อภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินด้วย Panjer Recursive Formula

```
f=Import["C:\insurerfunction.txt","Table"];
a=-0.895491043;b=25220.60973;
ins=Import["C:\exessofloss_prem_ins2.txt","Table"];
gin=Import["C:\g_in.txt","List"];Export["C:\g_in.txt",gin,"Table"];
For[m=1,m<=199,m+=1,
        For[k=1;gin=Import["C:\g_in.txt","List"],k<=ins[[m,1]],k++,
                For[j=1;g=0,j<=Min[m,k],j++,r=(a+b*(j/k))*f[[j+1,m]]*gin[[k-
                j+1]];g=g+r];ginr=ArrayPad[gin,,g];gin=ginr];Export["C:\g_ins_eol"<>To
                String[m]<>".txt",gin,"Table"];];
For[i=10;Ares={"result"},i<=200,i+=1,temp=Import["C:\g_ins_eol"<>ToString[i]<>".txt","Li
st"];res=Sum[temp[[i]],{a,1,Length[temp]}];Ares=ArrayPad[Ares,{0,1},res]];
Export["C:\g_ins_allresult.txt",Ares,"Table"];
```

2.ชุดคำสั่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดของบริษัทรับประกันภัยต่อภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินด้วย Panjer Recursive Formula


```
f=Import["C:\REINSURERFUNCTION.txt","Table"];
a=-0.895491043;b=25220.60973;
ins=Import["C:\excessofloss_prem_rein.txt","Table"];
gin=Import["C:\g_in.txt","List"];g0=Import["C:\g0reineol.txt","List"];Export["C:\g_in.txt",gin,"
Table"];
For[m=1;Ares={999999},m<=199,m+=1,
        For[k=1;gin={g0[[m]]},k<=ins[[m,1]],k++,
                For[j=1;g=0,j<=Min[200-m,k],j++,r=(1/(1-
                a*f[[1,m]]))*(a+b*(j/k))*f[[j+1,m]]*gin[[k-
                j+1]];g=g+r];ginr=ArrayPad[gin,{0,1},g];gin=ginr];Export["C:\g_rein_eol"
```

```
<>ToString[m]<>".txt",gin,"Table"];Ares=ArrayPad[Ares,{0,1},Sum[gin[
[u]],{u,Length[gin]}]]];
Export["C:\g_in_eol_sum.txt",Ares,"Table"]
```

3.ชุดคำสั่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดของบริษัทเอาประกันภัยต่อภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนด้วย Panjer Recursive Formula

```
f=Import["C:\insurerfunction.txt","Table"];
a=-0.895491043;b=25220.60973;
ins=Import["C:\exessofloss_prem_ins2.txt","Table"];
gin=Import["C:\g_in.txt","List"];Export["C:\g_in.txt",gin,"Table"];
For[m=1,m<=99,m+=1,
    For[k=1;gin=Import["C:\g_in.txt","List"],k<=ins[[m,1]],k++,
      For[j=1;g=0,j<=Min[m,k],j++,r=(a+b*(j/k))*f[[j+1,m]]*gin[[k-
      j+1]];g=g+r];ginr=ArrayPad[gin,{0,1},g];gin=ginr];Export["C:\g_ins_eol"<>ToString
      [m]<>".txt",gin,"Table"];];For[i=10;Ares={"result"},i<=200,i+=10,temp=Import["C
      :\g_ins_eol"<>ToString[i]<>".txt","List"];res=Sum[temp[[i]],{a,1,Length[temp]}];
      Ares=ArrayPad[Ares,{0,1},res]];
Export["C:\g_ins_allresult.txt",Ares,"Table"];
```

4. ชุดคำสั่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดของบริษัทรับประกันภัยต่อภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนด้วย Panjer Recursive Formula

```
f=Import["C:\quotash_function_rein.txt","Table"];
a=-0.895491043;b=25220.60973;
ins=Import["C:\quotash_prem_rein.txt","Table"];
gin=Import["C:\g_in.txt","List"];Export["C:\g_in.txt",gin,"Table"];
For[m=1;Ares={999999},m<=99,m+=1,
    For[k=1;gin=Import["C:\g_in_2.txt","List"],k<=ins[[m,1]],k++,For[j=1;g=0,j<=Min[2
    00-2*m,k],j++,r=(a+b*(j/k))*f[[j+1,m]]*gin[[k-
    j+1]];g=g+r];ginr=ArrayPad[gin,{0,1},g];gin=ginr];Export["C:\g_rein_qs"<>ToString[
    m]<>".txt",gin,"Table"];Ares=ArrayPad[Ares,{0,1},Sum[gin[[u]],{u,Length[gin]}]]];
Export["C:\g_in_qs_sum.txt",Ares,"Table"]
```

5. ชุดคำสั่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมภายใต้สัญญาประกันภัยต่อแบบความเสียหายส่วนเกินด้วย Bivarate Translated Gamma

```
For[k=10;n=25;(*NumberofRecursion*)Resulta={"result_Excessofloss_M=1 to M=199
n="<>ToString[n]};,k<=199,k+=10,x1=rx1[[k]];x2=rx2[[k]];a0=ra0[[k]];a1=ra1[[k]];
a2=ra2[[k]];
inc=Min[x2/n,x1/n];
        If[x2>x1,
                For[s1=0;i=x1,i<=x2,i+=inc,
                        For[j=inc,j<=x1,j+=inc,xi1=j-inc/2;xi2=i-inc/2;l1=Exp[-
                        xi1]*Exp[-xi2]*xi1^(a1-1)*xi2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-
                        1)*Exp[v]),{v,0,xi1}];s1+=l1]];Result1=s1*inc*inc;For[s2=0;i=
                        inc,i<=x1,i+=inc,For[j=inc,j<=i,j+=inc,xj1=j-inc/2;xj2=i-
                        inc/2;l2=Exp[-xj1]*Exp[-xj2]*xj1^(a1-1)*xj2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-
                        1)*Exp[v]),{v,0,xj1}];s2+=l2]];Result2=s2*inc*inc+Result1;Fo
                        r[s3=0;i=inc,i<=x1,i+=inc,For[j=i,j<=x1,j+=inc,xk1=j-
                        inc/2;xk2=i-inc/2;l3=Exp[-xk1]*Exp[-xk2]*xk1^(a1-
                        1)*xk2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-1)*Exp[v]),{v,0,xk2}];s3+=l3]];
        Result3=s3*inc*inc+Result2;,
                For[s1=0;i=inc,i<=x2,i+=inc,
                        For[j=i,j<=x1,j+=inc,xi1=j-inc/2;xi2=i-inc/2;l1=Exp[-
                        xi1]*Exp[-xi2]*xi1^(a1-1)*xi2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-
                        1)*Exp[v]),{v,0,xi2}];s1+=l1]];Result1=s1*inc*inc;For[s2=0;i=
```

```
                        inc,i<=x2,i+=inc,For[j=inc,j<=i,j+=inc,xj1=j-inc/2;xj2=i-
                        inc/2;l2=Exp[-xj1]*Exp[-xj2]*xj1^(a1-1)*xj2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-1)*Exp[v]),{v,0,xj1}];s2+=l2]];
            Result3=s2*inc*inc+Result1;];txtRes="M="<>ToString[k]<>"
            ,"<>ToString[NumberForm[Result3,NumberFormat->(Row&)]]<>",time
            "<>DateString[];Resulta=ArrayPad[Resulta,{0,1},txtRes];
Export["C:\eol_biv_result.txt",Resulta,"Table"]];
```

6. ชุดคำสั่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นการอยู่รอดร่วมภายใต้สัญญาประกันภัยต่อตามส่วนด้วย Bivarate Translated Gamma

```
For[k=10;n=90;(*NumberofRecursion*)Resulta={"result_quotash_a=1 to a=99
n="<>ToString[n]};,k<=90,k+=10,x1=rx1[[k]];x2=rx2[[k]];
inc=Min[x2/n,x1/n];
        If[x2>x1,
                For[s1=0;i=x1,i<=x2,i+=inc,
                        For[j=inc,j<=x1,j+=inc,xi1=j-inc/2;xi2=i-inc/2;l1=Exp[-
                        xi1]*Exp[-xi2]*xi1^(a1-1)*xi2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-
                        1)*Exp[v]),{v,0,xi1}];s1+=l1]];Result1=s1*inc*inc;For[s2=0;i=
                        inc,i<=x1,i+=inc,For[j=inc,j<=i,j+=inc,xj1=j-inc/2;xj2=i-
                        inc/2;l2=Exp[-xj1]*Exp[-xj2]*xj1^(a1-1)*xj2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-
                        1)*Exp[v]),{v,0,xj1}];s2+=l2]];Result2=s2*inc*inc+Result1;
                For[s3=0;i=inc,i<=x1,i+=inc,
                        For[j=i,j<=x1,j+=inc,xk1=j-inc/2;xk2=i-inc/2;l3=Exp[-
                        xk1]*Exp[-xk2]*xk1^(a1-1)*xk2^(a2-
                        1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
                        0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-
```

```
1)*Exp[v]),{v,0,xk2}];s3+=l3]];Result3=s3*inc*inc+Result2;,F
or[s1=0;i=inc,i<=x2,i+=inc,For[j=i,j<=x1,j+=inc,xi1=j-
inc/2;xi2=i-inc/2;l1=Exp[-xi1]*Exp[-xi2]*xi1^(a1-1)*xi2^(a2-
1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-
1)*Exp[v]),{v,0,xi2}];s1+=l1]];Result1=s1*inc*inc;For[s2=0;i=
inc,i<=x2,i+=inc,For[j=inc,j<=i,j+=inc,xj1=j-inc/2;xj2=i-
inc/2;l2=Exp[-xj1]*Exp[-xj2]*xj1^(a1-1)*xj2^(a2-
1)/(Gamma[a0]*Gamma[a1]*Gamma[a2])*NIntegrate[(v^(a
0-1)*(1-v/j)^(a1-1)*(1-v/i)^(a2-1)*Exp[v]),{v,0,xj1}];s2+=l2]];
Result3=s2*inc*inc+Result1;];txtRes="a="<>ToString[k]<>"%
,"<>ToString[NumberForm[Result3,NumberFormat-
>(Row&)]]<>",time
"<>DateString[];Resulta=ArrayPad[Resulta,{0,1},txtRes];
Export["C:\qos_result.txt",Resulta,"Table"]]
```

ภาคผนวก ค

วิธีการคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ผู้ถือกรมธรรม์จะเสียชีวิต 0.8548 ด้วยตารางมรณะไทย พศ. 2551 สามารถคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นการรอดชีวิตของผู้ถือกรมธรรม์อายุ 50-70 ปี จนถึงอายุ 91 ปี ได้ดังนี้

q_y แทนความน่าจะเป็นคนที่มีอายุ y ปีจะเสียชีวิตภายในปีนั้น (ดูได้จากภาคผนวก ง)

p_y แทนความน่าจะเป็นคนที่มีอายุ y ปีจะมีอายุรอดอีก 1 ปี คำนวณได้จาก $p_y = 1 - q_y$

${}_x p_y$ แทนความน่าจะเป็นคนที่มีอายุ y ปีจะรอดถึงอายุ $y + x + 1$ ปีคำนวณได้จาก

$${}_x p_y = \prod_{t=y}^{y+x} p_t$$

ตัวอย่าง

วิธีการหาความน่าจะเป็นคนที่อายุ 52 ปีจะรอดถึงอายุ 91 ปี

$${}_{38} p_{52} = p_{52} p_{51} \ldots p_{89} = (1 - q_{52})(1 - q_{53}) \ldots (1 - q_{90})$$

เพศชาย ${}_{38} p_{52} = (1 - 0.0079)(1 - 0.0086) \ldots (1 - 0.2045) = 0.0800$

เพศหญิง ${}_{38} p_{52} = (1 - 0.0037)(1 - 0.0041) \ldots (1 - 0.1930) = 0.1455$

ตารางที่ ค1 ค่าความน่าจะเป็นการรอดชีวิตของผู้ถือกรมธรรม์ที่มีอายุกรมธรรม์มากกว่า 2 ปี

เพศชาย			เพศหญิง		
อายุผู้ถือกรมธรรม์(y)	${}_{90-y}p_y$	จำนวนผู้ถือกรมธรรม์ (ข้อมูล)	อายุผู้ถือกรมธรรม์(y)	${}_{90-y}p_y$	จำนวนผู้ถือกรมธรรม์ (ข้อมูล)
52	0.0800	36	52	0.1455	96
53	0.0807	70	53	0.1460	143
54	0.0814	102	54	0.1466	227
55	0.0822	142	55	0.1473	304
56	0.0830	136	56	0.1481	322
57	0.0840	119	57	0.1490	309
58	0.0850	135	58	0.1500	329
59	0.0862	134	59	0.1512	335
60	0.0875	137	60	0.1525	308
61	0.0890	140	61	0.1540	329
62	0.0907	145	62	0.1557	350
63	0.0925	155	63	0.1577	349
64	0.0947	135	64	0.1599	308
65	0.0971	147	65	0.1624	352
66	0.0999	167	66	0.1652	326
67	0.1030	137	67	0.1685	315
68	0.1065	144	68	0.1723	315
69	0.1105	133	69	0.1766	351
70	0.1151	130	70	0.1816	327
71	0.1203	147	71	0.1873	316
72	0.1262	125	72	0.1939	298
73	0.1330	110	73	0.2014	254
74	0.1408	61	74	0.2100	172
75	0.1500	41	75	0.2198	71

จากตารางที่ 6 สามารถคำนวณค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของความน่าจะเป็นรอดชีวิตของผู้ถือกรมธรรม์อายุระหว่าง 50-70 ปีได้เท่ากับ

$$\frac{(0.0800)(36)+(0.0807)(70)+\ldots+(0.2198)(71)}{36+70+\ldots+71}=0.1452$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ผู้ถือกรมธรรม์จะเสียชีวิตและได้รับผลประโยชน์ตามเงื่อนไขคือ

$$1-0.1452=0.8548$$

ภาคผนวก ง

ตารางที่ ง1 ตารางมรณะไทยสามัญปี 2551

อายุ (y)	q_y	
	ชาย	หญิง
0	0.0010	0.0010
1	0.0009	0.0009
2	0.0008	0.0008
3	0.0007	0.0007
4	0.0007	0.0006
5	0.0006	0.0006
6	0.0006	0.0005
7	0.0005	0.0005
8	0.0005	0.0005
9	0.0005	0.0005
10	0.0006	0.0005
11	0.0007	0.0005
12	0.0008	0.0005
13	0.0009	0.0005
14	0.0011	0.0006
15	0.0013	0.0006
16	0.0015	0.0006
17	0.0017	0.0007
18	0.0018	0.0007
19	0.0020	0.0007
20	0.0023	0.0008
21	0.0024	0.0008
22	0.0025	0.0008
23	0.0025	0.0008

ตารางที่ ง1 ตารางมรณะไทยสามัญปี 2551(ต่อ)

อายุ (y)	q_y	
	ชาย	**หญิง**
24	0.0025	0.0008
25	0.0025	0.0008
26	0.0025	0.0009
27	0.0026	0.0009
28	0.0026	0.0009
29	0.0026	0.0009
30	0.0026	0.0009
31	0.0026	0.0010
32	0.0027	0.0010
33	0.0027	0.0011
34	0.0028	0.0011
35	0.0029	0.0012
36	0.0030	0.0013
37	0.0032	0.0013
38	0.0033	0.0014
39	0.0035	0.0014
40	0.0037	0.0015
41	0.0039	0.0015
42	0.0041	0.0016
43	0.0044	0.0017
44	0.0047	0.0018
45	0.0050	0.0020
46	0.0051	0.0021
47	0.0055	0.0023
48	0.0059	0.0025
49	0.0063	0.0027

ตารางที่ ง1 ตารางมรณะไทยสามัญปี 2551 (ต่อ)

อายุ (y)	q_y	
	ชาย	**หญิง**
50	0.0068	0.0030
51	0.0074	0.0033
52	0.0080	0.0037
53	0.0087	0.0042
54	0.0094	0.0047
55	0.0103	0.0053
56	0.0113	0.0060
57	0.0124	0.0068
58	0.0136	0.0077
59	0.0150	0.0087
60	0.0166	0.0098
61	0.0184	0.0110
62	0.0204	0.0123
63	0.0226	0.0138
64	0.0250	0.0155
65	0.0276	0.0174
66	0.0303	0.0195
67	0.0333	0.0219
68	0.0364	0.0245
69	0.0396	0.0274
70	0.0431	0.0306
71	0.0469	0.0339
72	0.0511	0.0374
73	0.0557	0.0409
74	0.0608	0.0446
75	0.0666	0.0482

ตารางที่ ง1 ตารางมรณะไทยสามัญปี 2551(ต่อ)

อายุ (y)	q_y	
	ชาย	หญิง
76	0.0729	0.0520
77	0.0797	0.0559
78	0.0870	0.0602
79	0.0944	0.0649
80	0.1018	0.0703
81	0.1089	0.0766
82	0.1157	0.0841
83	0.1222	0.0929
84	0.1290	0.1031
85	0.1364	0.1148
86	0.1453	0.1280
87	0.1563	0.1427
88	0.1697	0.1586
89	0.1859	0.1756
90	0.2046	0.1930
91	0.2252	0.2104
92	0.2472	0.2275
93	0.2698	0.2444
94	0.2924	0.2618
95	0.3146	0.2808
96	0.3362	0.3021
97	0.3572	0.3268
98	0.3780	0.3547
99	1.0000	1.0000

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายเจนณรงค์ สถาพรพิบูลย์ เกิดเมื่อวันที่ 18 เมษายน พ.ศ.2532 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิตหลักสูตรวิชาเอกคณิตศาสตร์ วิชาโทคอมพิวเตอร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2553 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการประกันภัย ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ. 2554